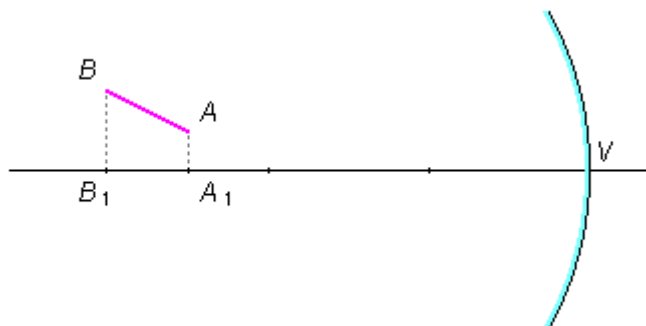


Diante de um espelho esférico côncavo cujo raio de curvatura mede 80 cm coloca-se um segmento retilíneo luminoso AB . Determinar a posição e a dimensão da imagem de AB . São dados $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 4$ cm, $A_1V = 100$ cm e $B_1V = 120$ cm.



Construção da imagem

Adota-se um *Referencial de Gauss*, sendo positiva a direção horizontal de onde vem o raio de luz (a esquerda, onde está o objeto) e para cima na direção vertical, figura 1.

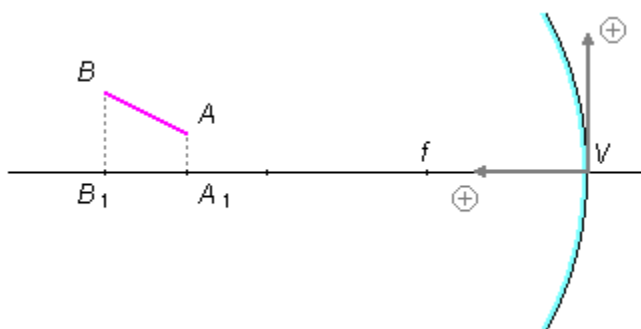


figura 1

Usando a propriedade dos espelhos esféricos que diz que *todo raio de luz que incide paralelamente ao eixo principal é refletido passando pelo foco principal do espelho* obtemos a situação mostrada na figura 2.

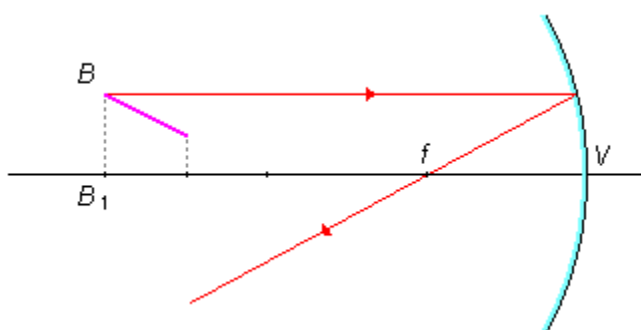


figura 2

Tomando-se um segundo raio com a propriedade de que *todo raio de luz que incide no vértice do espelho reflete-se de forma simétrica ao eixo principal*, temos a situação mostrada na figura 3. No cruzamento dos raios refletidos determina-se o ponto B' de abscissa B'_1 .

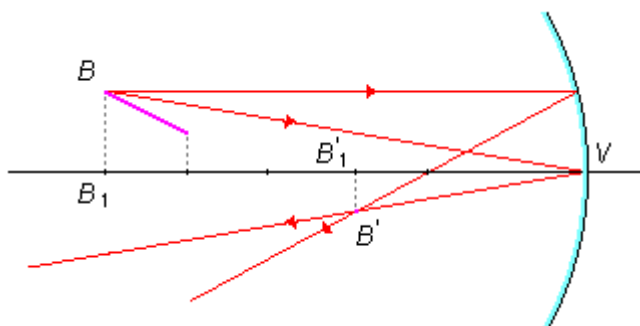


figura 3

De forma análoga um raio de luz que parte do ponto A é refletido pelo foco, figura 4.

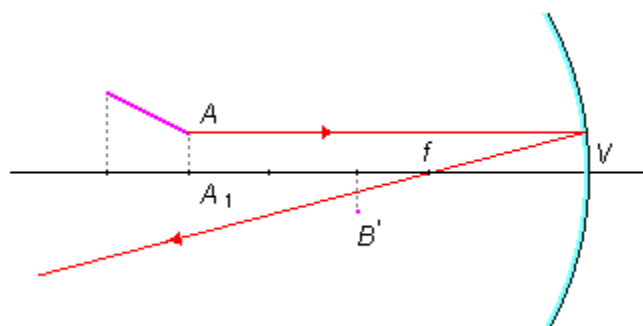


figura 4

E um raio que incide no vértice é refletido simetricamente, figura 5, e no ponto de cruzamento fica determinado o ponto A' de abscissa A'_1 .

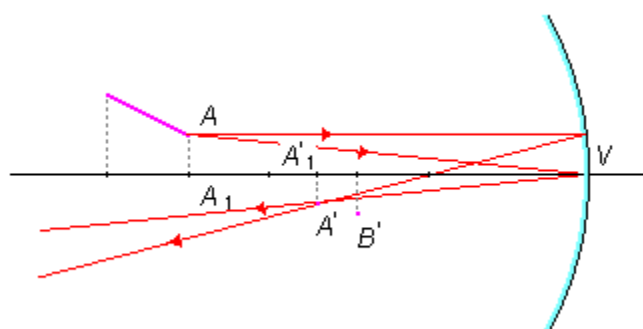


figura 5

Os pontos $A'B'$ vão determinar a imagem do objeto AB .

Esquema do problema

Observando a figura 6 temos os seguintes elementos no problema

objeto	imagem
$AA_1 = y_A$	$A'A'_1 = y'_A$
$BB_1 = y_B$	$B'B'_1 = y'_B$
$A_1V = p_A$	$A'_1V = p'_A$
$B_1V = p_B$	$B'_1V = p'_B$

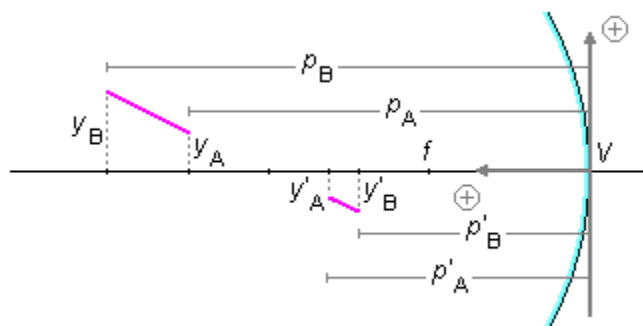


figura 6

Dados do problema

- raio de curvatura do espelho: $R = 80 \text{ cm}$;
- altura do ponto A : $AA_1 = y_A = 2 \text{ cm}$;
- altura do ponto B : $BB_1 = y_B = 4 \text{ cm}$;
- distância do ponto A_1 ao vértice do espelho: $A_1V = p_A = 100 \text{ cm}$;
- distância do ponto B_1 ao vértice do espelho: $B_1V = p_B = 120 \text{ cm}$.

Solução

A distância do foco ao vértice será a metade do raio de curvatura fornecido no problema, assim

$$f = \frac{R}{2}$$

$$f = \frac{80}{2}$$

$$f = 40 \text{ cm}$$

Para o cálculo da distância da imagem ao espelho vamos utilizar a *Equação dos Pontos Conjugados*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \quad (\text{I})$$

E para o cálculo do tamanho da imagem usamos a *Equação do Aumento Linear Transversal*

$$\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} \quad (\text{II})$$

Para o ponto A a aplicação de (I) dará a distância p'_A

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_A} + \frac{1}{p'_A}$$

$$\frac{1}{p'_A} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_A}$$

$$\frac{1}{p'_A} = \frac{1}{40} - \frac{1}{100}$$

o *Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)* entre 40 e 100 é 200, então

$$\frac{1}{p'_A} = \frac{5-2}{200}$$

$$\frac{1}{p'_A} = \frac{3}{200}$$

$$p'_A = \frac{200}{3} \quad (\text{III})$$

$$p'_A = 66,7 \text{ cm}$$

A altura do ponto A (y'_A) será dada pela aplicação de (II)

$$\frac{y'_A}{y_A} = -\frac{p'_A}{p_A}$$

substituindo os dados fornecidos e para o valor de p'_A usamos a forma de (III) para facilitar os cálculos

$$\frac{y'_A}{2} = -\frac{\frac{200}{3}}{100}$$

$$y'_A = -2 \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{100}$$

$$y'_A = -\frac{4}{3} \quad (\text{IV})$$

$$y'_A = -1,33 \text{ cm}$$

Para o ponto B a aplicação de (I) dará a distância p'_B

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_B} + \frac{1}{p'_B}$$

$$\frac{1}{p'_B} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_B}$$

$$\frac{1}{p'_B} = \frac{1}{40} - \frac{1}{120}$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (M.M.C.) entre 40 e 120 é 120, então

$$\frac{1}{p'_A} = \frac{5-2}{200}$$

$$\frac{1}{p'_A} = \frac{3}{200}$$

$$p'_A = \frac{200}{3} \quad (\text{III})$$

$$p'_A = 66,7 \text{ cm}$$

A altura do ponto B (y'_B) será dada pela aplicação de (II)

$$\frac{y'_B}{y_B} = -\frac{p'_B}{p_B}$$

substituindo os dados fornecidos obtemos

$$\frac{y'_B}{4} = -\frac{60}{120}$$

$$y'_B = -4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y'_B = -2 \text{ cm} \quad (\text{VI})$$

Para encontrarmos a dimensão (d) do objeto utilizamos as distâncias e tamanhos da imagem encontrados em (III), (IV), (V) e (VI) representando esses valores no próprio *Referencial de Gauss* do problema como mostrado na figura 7.

Para o cálculo da distância entre os pontos A' e B' aplicamos a *Equação de Distância de Ponto a Ponto*

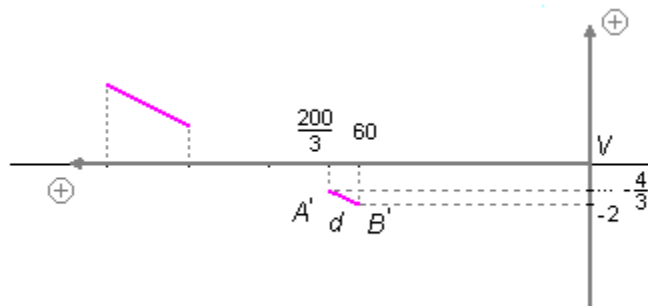


figura 7

$$d(a,b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \quad (\text{VII})$$

aplicando (VII) ao problema, teremos

$$d(A',B') = \sqrt{(p'_A - p'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2}$$

$$d(A', B') = \sqrt{\left(\frac{200}{3} - 60\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2}$$

$$d(A', B') = \sqrt{\left(\frac{200 - 180}{3}\right)^2 + \left(\frac{2 - 6}{3}\right)^2}$$

$$d(A', B') = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$d(A', B') = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{16}{9}}$$

$$d(A', B') = \sqrt{\frac{416}{9}}$$

$$d(A', B') = \sqrt{46,2}$$

$$d(A', B') = 6,8 \text{ cm}$$

A posição e dimensão da imagem serão então

- $A'A'_1 = \mathbf{1,33 \text{ cm}}$;
- $B'B'_1 = \mathbf{2 \text{ cm}}$;
- $A'_1V = \mathbf{66,7 \text{ cm}}$;
- $B'_1V = \mathbf{60 \text{ cm}}$;
- $A'B' = \mathbf{6,8 \text{ cm}}$.