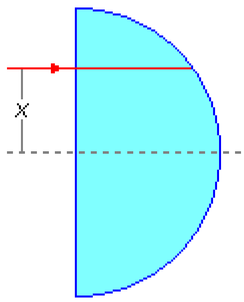
Um hemisfério de raio R é feito de um material transparente de índice de refração igual a $\sqrt{2}$ e sua superfície curva é espelhada. Um raio de luz incide perpendicularmente a face plana a uma distância x do eixo do hemisfério. Determinar:

a) Qual a maior distância x para que o raio sofra apenas uma reflexão na face espelhada;

b) Se $R=5\ \text{cm}$ quanto vale x?



Dados do problema

- raio do hemisfério: R;
- índice de refração do hemisfério: $n=\sqrt{2}$;
- adotando que o sistema esteja imerso no ar, índice de refração do ar: $n_{ar}=1$;

Esquema do problema

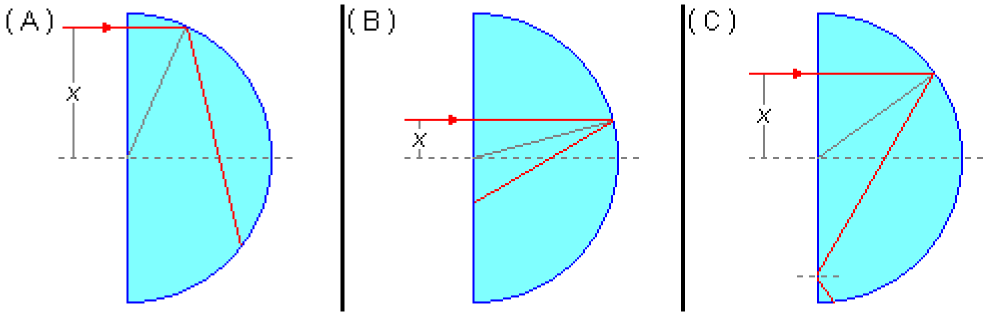


figura 1

Se a distância x do raio ao eixo for muito grande o raio sofrerá mais de uma reflexão no interior (figura 1-A), se x for muito pequeno o raio sofrerá apenas uma reflexão, mas este valor pode não ser o x máximo (figura1-B) e podemos ter um x tal que ocorra uma só reflexão mas o ângulo de saída da face plana seja maior que o ângulo limite, então raio é refletido de volta para o interior (figura 1-C).

O ângulo limite λ e o ângulo de reflexão na face espelhada λ' são iguais, pois são alternos internos (figura 2-A). O raio R do hemisfério é a normal no ponto de incidência do raio, então pela lei reflexão os ângulos de incidência (i) e de reflexão (r) são iguais (figura 2-B).

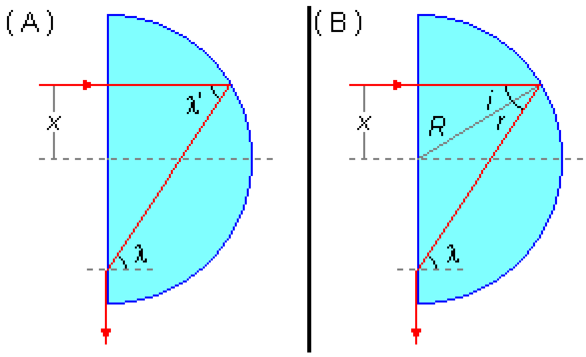


figura 2

Solução

a) O ângulo limite é calculado por

$$\operatorname{sen}\lambda=\frac{n_1}{n_2}$$

onde n_1 é o índice de refração do meio para onde o raio sai, no problema o ar e n_2 é o índice de refração do meio de onde o raio está saindo, no problema o hemisfério.

$$\operatorname{sen}\lambda=\frac{n_{\text{ar}}}{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, temos

$$\operatorname{sen}\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

para encontrar o ângulo limite (λ) temos que achar o ângulo cujo arco seno é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\lambda&=\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lambda&=45^\circ\end{aligned}$$

Da figura 2-B, podemos escrever

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} i&=\frac{x}{R}\\ x&=R\operatorname{sen} i \qquad (\mathrm{I})\end{aligned}$$

Como $\lambda=i+r=45^\circ$, vamos aplicar as propriedades de co-seno da soma dos ângulos e do co-seno da diferença, assim

$$\begin{aligned}\cos(i+r)&=\cos i.\cos r-\operatorname{sen} i.\operatorname{sen} r\\ \cos(i-r)&=\cos i.\cos r+\operatorname{sen} i.\operatorname{sen} r\end{aligned}$$

lembrando que $i=r$, $i+r=\lambda$ e $i-r=0$, temos

$$\begin{aligned}\cos\lambda&=\cos i.\cos i-\operatorname{sen} i.\operatorname{sen} i\\ \cos 0&=\cos i.\cos i+\operatorname{sen} i.\operatorname{sen} i\end{aligned}$$

sendo $\cos\lambda=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 0=1$, as expressões acima ficam

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}&=\cos^2 i-\operatorname{sen}^2 i \qquad (\mathrm{II})\\ 1&=\cos^2 i+\operatorname{sen}^2 i \qquad (\mathrm{III})\end{aligned}$$

subtraindo a expressão (II) da (II)

$$\begin{array}{|rl}1&=\cos^2 i+\operatorname{sen}^2 i\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}&=\cos^2 i-\operatorname{sen}^2 i \quad (-)\\ \hline 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}&=0+2\operatorname{sen}^2 i\end{array}$$

$$2\,\text{sen}^2 i = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\text{sen}^2 i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

colocando o fator $^1\!/_4$ em evidência do lado direito da igualdade, obtemos

$$\text{sen}^2 i = \frac{1}{4}.\left(2 - \sqrt{2}\right)$$
$$\text{sen}\, i = \sqrt{\frac{1}{4}.\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$
$$\text{sen}\, i = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad (\text{IV})$$

substituindo (IV) em (I), temos finalmente

$$\boxed{x = \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

b) Substituindo o valor de R dado, temos

$$x = \frac{5}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$x = 1{,}9\ \text{cm}$$

A maior distância do eixo que um raio pode incidir para que haja uma só reflexão é **1,9 cm**.