Um raio de luz incide sobre uma lâmina de faces paralelas sob um ângulo *i*, o índice de refração da lâmina em relação ao meio envolvente é *n* e sua espessura *e*. Determinar o deslocamento lateral do raio luminoso.

Construção do caminho do raio de luz

Traçamos a normal à primeira face da lâmina e o raio incidente formando o ângulo $i=\hat{i}_1$ com a normal, figura 1

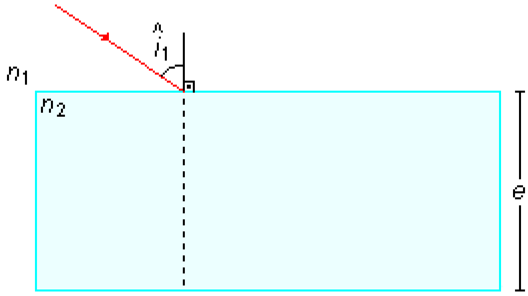

figura 1

Sendo o meio interno da lâmina mais refringente que o meio externo onde ela está ($n_2>n_1$) então quando o raio de luz passa do meio externo para o meio interno ele se aproxima da normal e o ângulo $\hat{i}_2$ do raio refratado será menor que $\hat{i}_1$, figura 2.

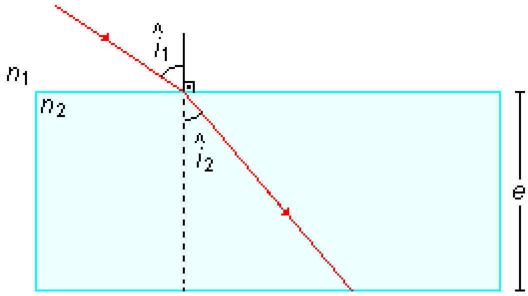

figura 2

O raio de luz refratado dentro da lâmina vai incidir na segunda face sob um certo ângulo *i'*, traçando-se a normal à face no ponto de incidência do raio de luz os ângulo *i'* e $\hat{i}_2$ são alternos internos, então $i'=\hat{i}_2$, o raio sai para o meio externo, passando de um meio mais refringente para um meio menos refringente e ele se afasta da normal (a direção final será a mesma do raio incidente inicialmente e $\hat{i}_3=\hat{i}_1$), figura 3.

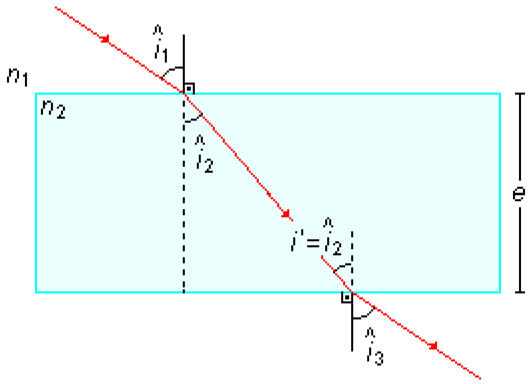

figura 3

Dados do problema

- ângulo de incidência do raio de luz: $i=\hat{i}_1$;
- índice de refração da lâmina em relação ao meio envolvente: $n=\dfrac{n_2}{n_1}$;
- espessura da lâmina: *e*.

Esquema do problema

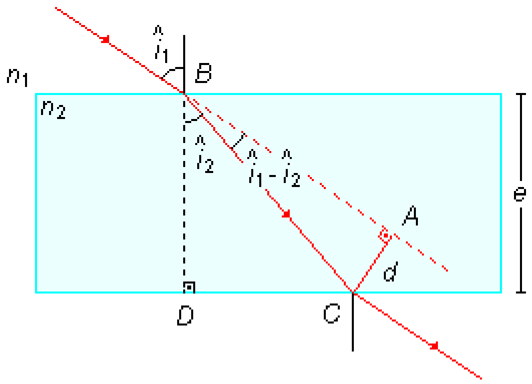

figura 4

O desvio *d* será a distância entre os pontos *A* e *C*, a distância entre a direção que o raio de luz seguiria se passasse direto sem desvio e a direção real que o raio de luz segue após sair da lâmina.

Solução

O desvio *d* é um dos catetos do triângulo ΔCAB, reto em *A*, o ângulo $(\hat{i}_1 - \hat{i}_2)$ é o ângulo entre o caminho que o raio de luz seguiria se não sofresse desvio (segmento $\overline{BA}$) e o raio de luz que atravessa a lâmina (segmento $\overline{BC}$), podemos obter *d* através do seno do ângulo $\hat{i}_1 - \hat{i}_2$

$$\operatorname{sen}\left(\hat{i}_1 - \hat{i}_2\right) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{d}{\overline{BC}} \qquad \text{(I)}$$

O triângulo ΔBDC é reto em *D*, então o co-seno do ângulo $\hat{i}_2$ será

$$\cos \hat{i}_2 = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{e}{\overline{BC}} \qquad \text{(II)}$$

onde o cateto $\overline{BD}$ do triângulo é igual a espessura *e* da lâmina.

Das expressões (I) e (II) podemos isolar o lado $\overline{BC}$ comum aos dois triângulos

$$\overline{BC} = \frac{d}{\operatorname{sen}\left(\hat{i}_1 - \hat{i}_2\right)} \qquad \text{e} \qquad \overline{BC} = \frac{e}{\cos \hat{i}_2}$$

igualando as duas expressões acima, temos

$$\frac{d}{\operatorname{sen}\left(\hat{i}_1 - \hat{i}_2\right)} = \frac{e}{\cos \hat{i}_2}$$

$$d = e\,.\frac{\operatorname{sen}\left(\hat{i}_1 - \hat{i}_2\right)}{\cos \hat{i}_2}$$

A espessura e e o ângulo de incidência $\hat{i}_1$ são conhecidos o único dado desconhecido nesta expressão é o ângulo do raio refratado $\hat{i}_2$, para nos "livrarmos" dele vamos desenvolver o termo do seno da diferença que é do tipo $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\,.\cos b-\operatorname{sen} b\,.\cos a$

$$d=e\,.\frac{\operatorname{sen}\hat{i}_1\,.\cos\hat{i}_2-\operatorname{sen}\hat{i}_2\,.\cos\hat{i}_1}{\cos\hat{i}_2}$$

$$d=e\,.\left[\frac{\operatorname{sen}\hat{i}_1\,.\cos\hat{i}_2}{\cos\hat{i}_2}-\frac{\operatorname{sen}\hat{i}_2\,.\cos\hat{i}_1}{\cos\hat{i}_2}\right]$$

$$d=e\,.\left[\operatorname{sen}\hat{i}_1-\frac{\operatorname{sen}\hat{i}_2\,.\cos\hat{i}_1}{\cos\hat{i}_2}\right]\qquad\text{(III)}$$

Pela *Lei de Snell-Descartes* (leia-se isnél-decárte) podemos correlacionar os ângulos de incidência $\hat{i}_1$ e refração $\hat{i}_2$ e isolar o $\operatorname{sen}\hat{i}_2$

$$n_1\,.\operatorname{sen}\hat{i}_1=n_2\,.\operatorname{sen}\hat{i}_2$$

$$\operatorname{sen}\hat{i}_2=\frac{n_1}{n_2}\,.\operatorname{sen}\hat{i}_1$$

o termo $\frac{n_1}{n_2}$ é o inverso do índice de refração relativa dado no problema, assim $\frac{1}{n}=\frac{n_1}{n_2}$ e podemos escrever

$$\operatorname{sen}\hat{i}_2\frac{1}{n}\,.\operatorname{sen}\hat{i}_1\qquad\text{(IV)}$$

Para encontrarmos $\cos\hat{i}_2$ lembremos da relação trigonométrica

$$\cos^2\hat{i}_2+\operatorname{sen}^2\hat{i}_2=1$$

$$\cos^2\hat{i}_2=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\hat{i}_2}$$

substituindo $\operatorname{sen}\hat{i}_2$ pelo valor encontrado em (IV), temos

$$\cos\hat{i}_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\,.\operatorname{sen}\hat{i}_2\right)^2}$$

$$\cos\hat{i}_2=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\,.\operatorname{sen}^2\hat{i}_2}$$

colocando o termo $\frac{1}{n^2}$ em evidência, obtemos

$$\cos\hat{i}_2=\sqrt{\frac{1}{n^2}\,.\left[n^2-\text{sen}^2\hat{i}_2\right]}$$

$$\cos\hat{i}_2=\frac{1}{n}\,.\sqrt{n^2-\text{sen}^2\hat{i}_2} \qquad \text{(V)}$$

substituindo (**IV**) e (V) em (**III**) temos

$$d=e\,.\left[\text{sen}\,\hat{i}_1-\frac{\frac{1}{n}\,.\,\text{sen}\,\hat{i}_1\,.\cos\hat{i}_1}{\frac{1}{n}\,.\sqrt{n^2-\text{sen}^2\hat{i}_2}}\right]$$

$$d=e\,.\left[\text{sen}\,\hat{i}_1-\frac{\text{sen}\,\hat{i}_1\,.\cos\hat{i}_1}{\sqrt{n^2-\text{sen}^2\hat{i}_2}}\right]$$

colocando $\text{sen}\,\hat{i}_1$ em evidência obtemos o resultado final

$$\boxed{d=e\,.\,\text{sen}\,\hat{i}_1\,.\left[1-\frac{\cos\hat{i}_1}{\sqrt{n^2-\text{sen}^2\hat{i}_2}}\right]}$$