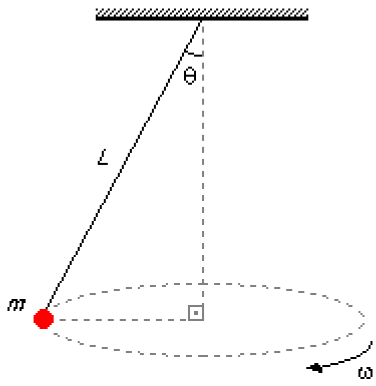
Um corpo de massa *m* está preso a um fio inextensível, de peso desprezível e gira num plano horizontal constituindo um pêndulo cônico. Sendo *L* o comprimento do fio, θ o ângulo que o fio forma com a vertical e *g* a aceleração local da gravidade, determine:

a) A tensão *T* no fio;

b) A velocidade angular ω de rotação;

c) O período τ das oscilações.




Esquema do problema

A massa *m* está sob a ação da força peso ($\vec{P}$) e da tração ($\vec{T}$) no fio. Como o corpo realiza um movimento circular ele está sob a ação da aceleração centrípeta ($\vec{a}_{CP}$), apontada radialmente para centro da trajetória. O ângulo entre a tração no fio e a vertical passando pelo corpo será θ, mesmo ângulo que temos entre o fio *L* e a vertical, pois estes ângulos são alternos internos.

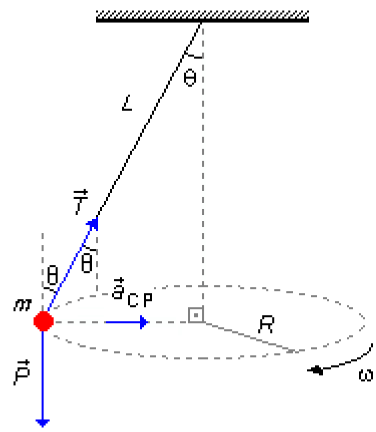



figura 1

Dados do problema

- massa do corpo: *m*;
- comprimento do fio: *L*;
- ângulo entre o fio e a vertical: θ;
- aceleração local da gravidade: *g*.

Solução

a) Desenhando as forças que agem no corpo num sistema de eixos coordenados, como se vê na figura 2 ao lado, temos que a componente *y* da tração ($\vec{T}_y$) é equilibrada pela força peso ($\vec{P}$), já que não existe movimento ao longo deste eixo a aceleração nessa direção é nula, portanto aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

em módulo temos

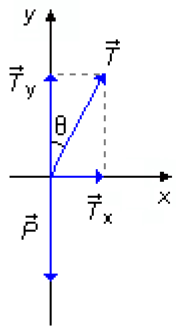



figura 2

$$T_y - P = m\,a$$
$$T_y - P = m.0$$
$$T_y - P = 0$$
$$T_y = P \qquad \text{(I)}$$

Sendo o ângulo θ medido entre o vetor $\vec{T}$ e o eixo *y* (ao contrário do que se faz usualmente, em que se mede um ângulo a partir do eixo *x*), temos que o módulo da componente da tração na direção de *y* será

$$T_{\mathrm{y}}=T\cos\theta \qquad \text{(II)}$$

e o módulo da força peso será igual a

$$P=m\,g \qquad \text{(III)}$$

substituindo (II) e (III) em (I) obtemos

$$T\cos\theta=m\,g$$

$$\boxed{T=\frac{m\,g}{\cos\theta}}$$

b) Pela figura 2 escrevemos a *2.ª Lei de Newton* para um corpo em movimento circular (onde atua a aceleração centrípeta)

$$\vec{F}_{\mathrm{CP}}=m\,\vec{a}_{\mathrm{CP}}$$

temos que a componente do vetor $\vec{T}$ ao longo do eixo x $(\vec{T}_{\mathrm{x}})$, é a única força responsável pela força centrípeta $\vec{F}_{\mathrm{CP}}$, ou seja em módulo

$$T_{\mathrm{x}}=m\,a_{\mathrm{CP}} \qquad \text{(IV)}$$

o módulo de $\vec{T}_{\mathrm{x}}$ será dado por

$$T_{\mathrm{x}}=T\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{(V)}$$

substituindo *T* pelo valor encontrado no item anterior temos

$$T_{\mathrm{x}}=\frac{m\,g}{\cos\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{(VI)}$$

A aceleração centrípeta será dada por

$$a_{\mathrm{CP}}=\frac{v^{2}}{R} \qquad \text{(VII)}$$

substituindo (VI) e (VII) em (IV)

$$\frac{m\,g}{\cos\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta=m\,\frac{v^{2}}{R}$$

simplificando a massa de ambos os lados da igualdade

$$\frac{g}{\cos\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta=\frac{v^{2}}{R} \qquad \text{(VIII)}$$

A velocidade será dada pro

$$v = \omega R \qquad \text{(IX)}$$

substituindo (IX) em (VIII)

$$\frac{g}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = \frac{(\omega R)^2}{R}$$

$$\frac{g}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$

$$\frac{g}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = \omega^2 R \qquad \text{(X)}$$

O valor do raio ($R$) da trajetória não é fornecido pelo problema, é preciso encontrar esse valor em função dos dados do problema, pela figura 3 vemos que

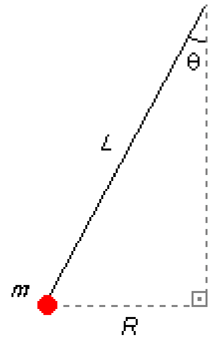


figura 3

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{R}{L}$$

$$R = L\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(IX)}$$

substituindo (XI) em (X)

$$\frac{g}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = \omega^2 L\operatorname{sen}\theta$$

simplificando o seno de ambos os lados da igualdade

$$\frac{g}{\cos\theta} = \omega^2 L$$

$$\omega^2 L = \frac{g}{\cos\theta}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L\cos\theta}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}}$$

c) O período $\tau$ pode ser calculado lembrando que

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

usando o valor da velocidade angular $\omega$ obtido no item anterior, escrevemos

$$\sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}} = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}}$$