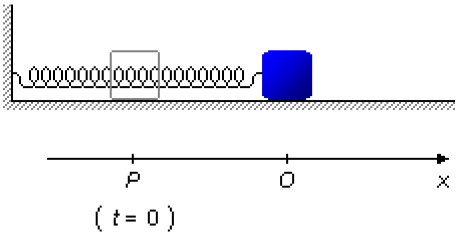
Um ponto material de massa $m = 0{,}04\ \text{kg}$ oscila em torno da posição *O* de equilíbrio, com M.H.S. A energia total mecânica do sistema é $32.10^{-4}\ \text{J}$. Sendo a constante elástica da mola $k = 0{,}16\ \text{N/m}$ e desprezando-se ações dissipativas, determine:



a) O período de oscilação;
b) A pulsação;
c) A amplitude da oscilação;
d) A função horária da posição, velocidade e aceleração, adotando-se o eixo *Ox* orientado para a direita e instante inicial $t = 0$ quando o móvel está na posição extrema *P* indicada na figura.
e) O gráfico da posição *x* em função do tempo *t*, a partir de $t = 0$ até $t = 2T$,onde *T* é o período.

Dados do problema

- massa do corpo: $m = 0{,}04\ \text{kg}$;
- energia mecânica total do sistema: $E_T = 32.10^{-4}\ \text{J}$;
- constante elástica da mola: $k = 0{,}16\ \text{N/m}$.

Solução

a) O período de oscilação é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}04}{0{,}16}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$T = 2\pi\frac{1}{2}$$
$$T = \pi \tag{I}$$

$$\boxed{T = 3{,}14\ \text{s}}$$

b) A pulsação é obtida de

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

usando o período *T* na forma de (I) do item anterior, temos

$$\omega = \frac{2\pi}{\pi}$$

$$\boxed{\omega = 2\ \text{rad/s}}$$

c) A amplitude depende da energia mecânica total (energia cinética mais energia potencial)

$$E_M = E_C + E_P$$

$$E_{\mathrm{M}}=\frac{m\,v^{2}}{2}+\frac{k\,x^{2}}{2}$$

Nos pontos de máxima amplitude ($+A$ e $-A$) a partícula para e inverte o sentido da velocidade, neste momento a sua velocidade é nula ($v=0$), então nestes pontos de máxima amplitude a energia cinética é zero e a energia mecânica é igual a energia potencial

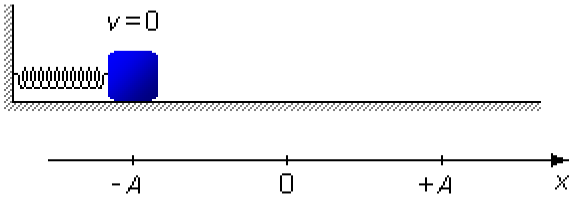


figura 1

$$E_{\mathrm{M}}=E_{\mathrm{P}}=\frac{k\,A^{2}}{2}$$

$$32.10^{-4}=\frac{0{,}16.A^{2}}{2}$$

$$A^{2}=\frac{2.32.10^{-4}}{16.10^{-2}}$$

$$A^{2}=2.2.10^{-4}.10^{2}$$

$$A^{2}=4.10^{-2}$$

$$A=\sqrt{4.10^{-2}}$$

$$A=2.10^{-1}$$

$$\boxed{A=0{,}2\ \mathrm{m}}$$

d) As funções horárias da posição (x), velocidade (v) e aceleração (a) serão dadas por

$$x=A\cos\left(\omega\,t+\varphi_{0}\right) \qquad \text{(II)}$$

$$v=-\omega\,A\,\mathrm{sen}\left(\omega\,t+\varphi_{0}\right) \qquad \text{(III)}$$

$$a=-\omega^{2}\,A\cos\left(\omega\,t+\varphi_{0}\right) \qquad \text{(IV)}$$

A pulsação (ω) e a amplitude (A) foram obtidas nos itens (c) e (d) acima respectivamente, para a obtenção de φ_{0} escrevemos a expressão (II) com os valores obtidos

$$x=0{,}2\cos\left(2\,t+\varphi_{0}\right)$$

Observando a figura 2, temos que em $t=0$ a partícula está em $x=-A=-0{,}2\ \mathrm{m}$, substituindo estes valores na expressão acima para a posição, temos

$$-0{,}2=0{,}2\cos\left(2.0+\varphi_{0}\right)$$

$$\cos\varphi_{0}=-\frac{0{,}2}{0{,}2}$$

$$\cos\varphi_{0}=-1$$

$$\varphi_{0}=\mathrm{arc}\cos\left(-1\right)$$

$$\varphi_{0}=\pi$$

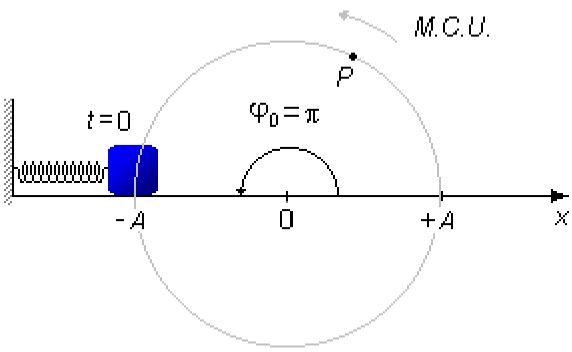


figura 2

Comparando a posição inicial da partícula em $t=0$ com uma outra partícula P em *Movimento Circular Uniforme* (*M.C.U.*) girando em sentido anti-horário e com o espaço angular medido a partir do eixo Ox, vemos que quando a partícula oscilante está na posição inicial $-A$ a partícula P descreve um ângulo de π, este ângulo então será a fase inicial da partícula oscilante (φ_0), portanto

$$\omega=2\ \text{rad/s}\qquad,\qquad A=0{,}2\ \text{m}\qquad,\qquad \varphi_0=\pi\ \text{rad}$$

substituindo estes valores em (II), (III) e (IV), temos

$$\boxed{x=0{,}2.\cos(2t+\pi)}$$

$$v=-2.0{,}2.\text{sen}(2t+\pi)$$

$$\boxed{v=-0{,}4.\text{sen}(2t+\pi)}$$

$$a=-2^2.0{,}2.\cos(2t+\pi)$$
$$a=-4.0{,}2.\cos(2t+\pi)$$

$$\boxed{a=-0{,}8.\cos(2t+\pi)}$$

e) Queremos fazer o gráfico de zero até $2T$, no item (a) encontramos que $T=\pi$, assim vamos achar os valores da posição, dada pela expressão para x no item anterior, entre $t=0$ e $t=2T=2\pi$, fazendo uma tabela, teremos

t	$x=0{,}2.\cos(2t+\pi)$	x
0	$0{,}2.\cos(2.0+\pi)$	-0,2
$\frac{\pi}{4}$	$0{,}2.\cos\left(2.\frac{\pi}{4}+\pi\right)$	0
$\frac{\pi}{2}$	$0{,}2.\cos\left(2.\frac{\pi}{2}+\pi\right)$	0,2
$\frac{3\pi}{4}$	$0{,}2.\cos\left(2.\frac{3\pi}{4}+\pi\right)$	0
π	$0{,}2.\cos(2.\pi+\pi)$	-0,2
$\frac{5\pi}{4}$	$0{,}2.\cos\left(2\frac{5\pi}{4}+\pi\right)$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$0{,}2.\cos\left(2.\frac{3\pi}{2}+\pi\right)$	0,2
$\frac{7\pi}{4}$	$0{,}2.\cos\left(2.\frac{7\pi}{4}+\pi\right)$	0
2π	$0{,}2.\cos(2.2\pi+\pi)$	-0,2

Colocando os pontos encontrados num gráfico de x em função de t, $x=f(t)$, e ligando os pontos, obtemos o gráfico de uma senóide, mostrado na figura 3

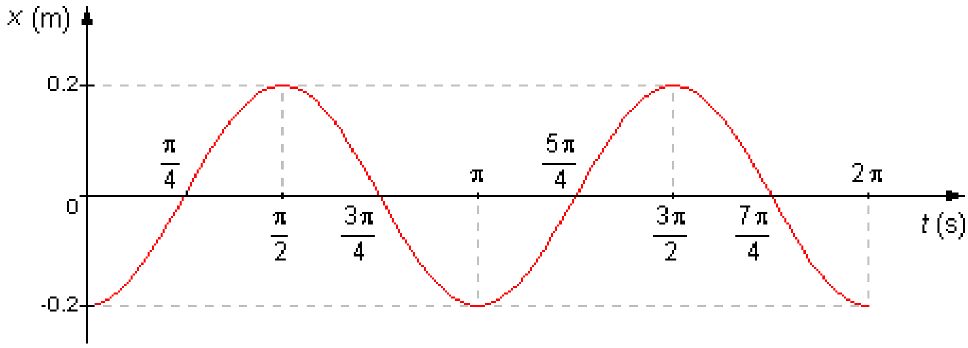


figura 3