

Dispara-se, segundo um ângulo de 60° com o horizonte, um projétil que explode ao atingir o solo e ouve-se o ruído da explosão, no ponto de partida do projétil, 18 segundos após o disparo. Determinar a velocidade inicial do projétil e o alcance do tiro, sabendo que os pontos de partida e de chegada estão no mesmo plano horizontal e que a temperatura do ar é de 25°C ; supor a velocidade do som no ar a 0°C igual a 332 m/s e $g = 9,8\text{ m/s}^2$.

Esquema do problema

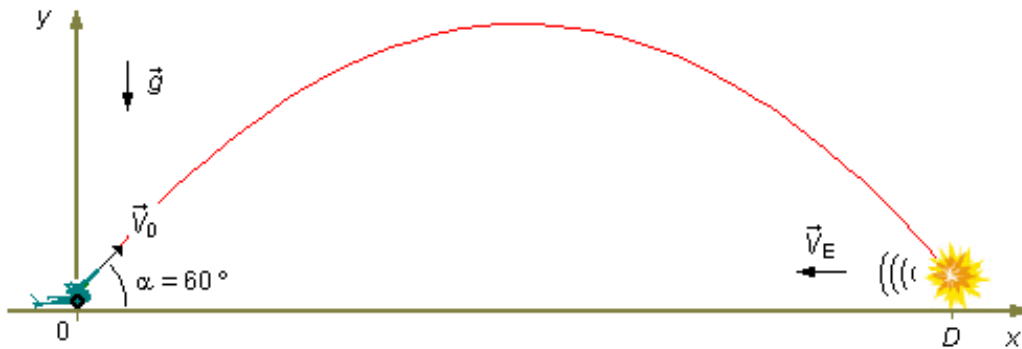


figura 1

Dados do problema

- ângulo de disparo: $\alpha = 60^\circ$;
- tempo decorrido entre o disparo e a explosão: $t = 18\text{ s}$;
- temperatura do ar: $\theta = 25^\circ\text{C}$,
- velocidade do som a 0°C : $V_S = 332\text{ m/s}$;
- aceleração da gravidade: $g = 9,8\text{ m/s}^2$.

Solução

Vamos encontrar, em primeiro lugar, a velocidade do som da explosão (V_E) no ar que será dada pela fórmula

$$V_E = V_S \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta}{273}}$$

$$V_E = 332 \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{273}}$$

$$V_E = 346,8\text{ m/s}$$

como a velocidade do som da explosão está no sentido contrário à orientação da trajetória ela terá sinal negativo, assim

$$V_E = -346,6\text{ m/s} \quad (I)$$

O tempo decorrido entre o disparo e a explosão será o tempo que o projétil leva para percorrer a trajetória (t_p) somado ao tempo que o som da explosão leva para voltar (t_E), isto é dado como sendo 18 s, podemos então escrever

$$t = t_P + t_E$$

$$t_P + t_E = 18 \quad (II)$$

Para encontrarmos a velocidade inicial e o alcance do projétil começamos escrevendo as equações do movimento, este pode ser decomposto em dois movimentos separados, como mostra a figura 2.

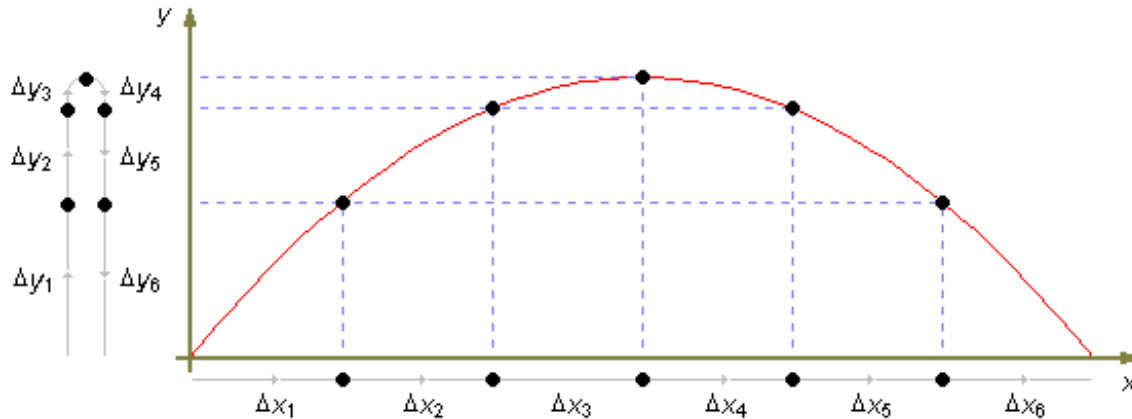


figura 2

Ao longo do eixo x temos um *Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.)*, não há aceleração atuando nesta direção. Se tomarmos intervalos de tempos iguais, então, os intervalos $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5, \Delta x_6)$ de espaço percorrido serão todos iguais. O som da explosão também se deslocará ao longo do eixo x com velocidade constante desde D até a origem O .

Ao longo do eixo y temos um *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*; a aceleração da gravidade está atuando nesta direção. Se tomarmos intervalos de tempos iguais, teremos, primeiramente que, durante a subida do projétil os intervalos percorridos serão cada vez menores $(\Delta y_1 > \Delta y_2 > \Delta y_3)$, a aceleração da gravidade atua no sentido para baixo diminuindo a velocidade do móvel a medida que este sobe, em segundo lugar quando o projétil está descendo a aceleração da gravidade aumenta a velocidade do móvel, então os espaços percorridos serão cada vez maiores $(\Delta y_4 < \Delta y_5 < \Delta y_6)$.

A velocidade do projétil que é dada formando um ângulo de 60° com o eixo x também pode ser decomposta ao longo dos eixos x e y , pela figura 3 temos o vetor $\vec{V}_0$ que representa o vetor

velocidade inicial do projétil que será decomposto no vetor $\vec{V}_{0x}$ que representa a componente da velocidade na direção x e terá o módulo dado por

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha \quad (III)$$

e $\vec{V}_{0y}$ que é a componente na direção y com módulo igual a

$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha \quad (IV)$$

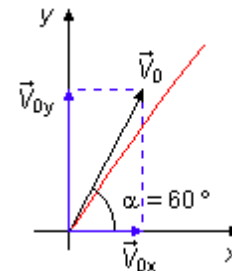


figura 3

a equação do movimento ao longo do eixo x será da forma

$$S_x = S_{0x} + V_{0x} \cdot t$$

como o projétil parte da origem $S_{0x} = 0$, $t = t_P$ é tempo que o projétil leva para percorrer a trajetória até o alvo (de 0 até D) e V_{0x} é dado pela expressão (III)

$$S_{Px} = V_0 \cos \alpha \cdot t_P$$

onde $\alpha = 60^\circ$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ então a equação fica

$$S_{Px} = \frac{1}{2} V_0 \cdot t_P \quad (V)$$

Ao longo do eixo y a equação do movimento terá a seguinte forma

$$S_y = S_{0y} + V_{0y} \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

o projétil parte da origem então $S_{0y} = 0$, $t = t_P$ é o tempo para percorrer a trajetória (subir e descer), V_{0y} dado pela expressão (IV) e a aceleração $a = g$ dado no problema, como a aceleração da gravidade está no sentido contrário da orientação da trajetória ela será negativa $g = -9,8 \text{ m/s}^2$

$$S_{Py} = V_0 \sin \alpha \cdot t_P - \frac{9,8}{2} \cdot t_P^2$$

onde $\alpha = 60^\circ$ e $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ então a equação fica

$$S_{Py} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_0 \cdot t_P - 4,9 \cdot t_P^2 \quad (VI)$$

Para o movimento em y podemos escrever também a equação para a velocidade do projétil na forma

$$\begin{aligned} V_y &= V_{0y} + a \cdot t \\ V_{Py} &= V_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t_P \\ V_{Py} &= \frac{\sqrt{3}}{2} V_0 - 9,8 \cdot t_P \quad (VII) \end{aligned}$$

O tempo que o projétil levará para atingir a altura máxima pode ser calculado usando a equação (VII) quando a componente da velocidade na direção y se anula, nesta direção o projétil para e sua velocidade inverte o sentido (a componente na direção x não sofre alteração, ele continua indo para frente). Sendo t_{SP} o tempo de subida do projétil e fazendo-se $V_{Py} = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} V_0 - 9,8 \cdot t_P \\ 9,8 \cdot t_P &= \frac{\sqrt{3}}{2} V_0 \end{aligned}$$

$$t_P = \frac{\sqrt{3}}{2.9,8} V_0 \quad (\text{VIII})$$

O tempo total para o projétil percorrer a trajetória será o tempo de subida somado ao tempo de descida, como estes são iguais, o tempo total será o dobro do valor encontrado em (VIII)

$$t_P = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2.9,8} V_0$$

$$t_P = \frac{\sqrt{3}}{9,8} V_0 \quad (\text{IX})$$

O alcance do projétil pode ser calculado com a equação (V) onde $S_{Px} = D$ e o tempo para percorrer toda a trajetória será o valor calculado acima em (IX)

$$D = \frac{1}{2} V_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9,8} V_0$$

$$D = \frac{\sqrt{3}}{19,6} V_0^2 \quad (\text{X})$$

A propagação do som também obedece a equação do *Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.)*, para o som o espaço inicial será o ponto da explosão $S_{0E} = D$, e para a velocidade inicial será usado o valor encontrado em (I), então

$$S_E = S_{0E} + V_{0E} \cdot t_E$$

$$S_E = D + 346,8 \cdot t_E \quad (\text{XI})$$

o espaço final será a origem de onde o tiro foi disparado igual a zero ($S_E = 0$), o tempo pode ser obtido da equação (II) isolando-se t_E , $t_E = 18 - t_P$, de forma que

$$0 = D - 346,8 \cdot (18 - t_P)$$

para D usamos o valor de (X) e para t_P substituímos o valor de (IX)

$$\frac{\sqrt{3}}{19,6} V_0^2 - 346,8 \cdot \left(18 - \frac{\sqrt{3}}{9,8} V_0 \right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{19,6} V_0^2 - 346,8 \cdot 18 + 346,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9,8} V_0 = 0$$

$$0,088 V_0^2 + 61,293 V_0 - 6242,4 = 0$$

Esta é uma *Equação do 2.º grau* em V_0 , resolvendo vem

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (61,293)^2 - 4 \cdot 0,088 \cdot (-6242,4) = 3756,832 + 2197,325 = 5954,157$$

$$t_s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-61,293 \pm \sqrt{5954,15}}{2.0,088} = \frac{-61,293 \pm 77,163}{0,176}$$

as raízes serão

$$V_{01} = 90,1 \quad \text{e} \quad V_{02} = -786,7$$

como escolhemos que o canhão dispara na direção positiva do referencial desprezamos a raiz negativa, a solução será

$$V_0 = 90,1 \text{ m/s}$$

Substituindo este valor na expressão (X) para o alcance obteremos

$$D = \frac{\sqrt{3}}{19,6} \cdot (90,1)^2$$

$$D = 717,4 \text{ m}$$