Durante a apresentação de um projeto de um sistema acústico, um estudante esqueceu-se da expressão da intensidade de uma onda sonora. Porém, usando da intuição, concluiu ele que a intensidade média (*I*) é uma função da amplitude do movimento do ar (*A*), da freqüência (*f*), da densidade do ar (ρ) e da velocidade do som (c), chegando à expressão $I = A^{x}.f^{y}.\rho^{z}.c$. Considerando as grandezas fundamentais; massa, comprimento e tempo, encontre os valores dos expoentes x, y, e z.

Solução

Do enunciado temos que a *Equação Dimensional* será

$$[I] = [A]^{x}.[f]^{y}.[\rho]^{z}.[c] \qquad \text{(I)}$$

O lado esquerdo da igualdade pode ser escrito em termos de grandezas fundamentais do seguinte modo

$$[\text{intensidade}] = \frac{[\text{potência}]}{[\text{área}]} \quad , \quad [\text{potência}] = \frac{[\text{trabalho}]}{[\text{intervalo de tempo}]}$$

$$[\text{intensidade}] = \frac{[\text{trabalho}]}{[\text{intervalo de tempo}].[\text{área}]} \quad , \quad [\text{trabalho}] = [\text{força}].[\text{deslocamento}]$$

$$[\text{intensidade}] = \frac{[\text{força}].[\text{deslocamento}]}{[\text{intervalo de tempo}].[\text{área}]} \quad , \quad [\text{força}] = [\text{massa}].[\text{aceleração}]$$

$$[\text{intensidade}] = \frac{[\text{massa}].[\text{aceleração}].[\text{deslocamento}]}{[\text{intervalo de tempo}].[\text{área}]} \quad ,$$

$$[\text{aceleração}] = \frac{[\text{velocidade}]}{[\text{intervalo de tempo}]} = \frac{[\text{deslocamento}]}{[\text{intervalo de tempo}]^{2}}$$

$$[\text{intensidade}] = \frac{[\text{massa}].[\text{deslocamento}]^{2}}{[\text{intervalo de tempo}]^{3}.\,[\text{área}]}$$

em termos de M, L e T para as dimensões de massa, comprimento e tempo, respectivamente, obtemos

$$[I] = \frac{M.L^{2}}{T^{3}.L^{2}} = \frac{M}{T^{3}} = M.T^{-3} \qquad \text{(II)}$$

O lado direito de (I) terá as seguintes dimensões

amplitude do movimento do ar, dada em dimensão de comprimento: $[A] = L$;

freqüência, dada em dimensão do inverso do tempo: $[f] = \dfrac{1}{T} = T^{-1}$;

densidade do ar dada em dimensão de massa por volume: $[\rho] = \dfrac{M}{L^{3}} = M.L^{-3}$;

velocidade do som, dada em dimensão de deslocamento por tempo: $[c] = \dfrac{L}{T} = L.T^{-1}$.

assim o lado direito de (I) terá as dimensões

$$\left[A\right]^{x}.\left[f\right]^{y}.\left[\rho\right]^{z}.\left[c\right]=L^{x}.\left(T^{-1}\right)^{y}.\left(M.L^{-3}\right)^{z}.L.T^{-1} \qquad \text{(III)}$$

substituindo (II) e (III) em (I) temos

$$M.T^{-3}=L^{x}.\left(T^{-1}\right)^{y}.\left(M.L^{-3}\right)^{z}.L.T^{-1}$$

no lado esquerdo não há uma dimensão de comprimento presente, então escrevemos como L^{0}

$$M.T^{-3}.L^{0}=L^{x}.T^{-y}.M^{z}.L^{-3z}.L.T^{-1}$$

coletando os termos semelhantes do lado direito da expressão obtemos

$$M.T^{-3}.L^{0}=L^{x-3z+1}.T^{-y-1}.M^{z}$$

igualando os expoentes de grandezas iguais do lado direito e esquerdo, temos

$$\left|\begin{array}{ll} z=1 & \text{(IV)} \\ -y-1=-3 & \text{(V)} \\ x-3z+1=0 & \text{(VI)} \end{array}\right.$$

da expressão (IV) temos de imediato que $\boxed{z=1}$

de (V) segue que $-y-1=3 \Rightarrow -y=-3+1 \Rightarrow -y=-2 \Rightarrow \boxed{y=2}$

em (VI) substituindo o valor de $z=1$ encontrado acima em (IV) temos

$$x-3z+1=0 \Rightarrow x-3.1+1=0 \Rightarrow x-3+1=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$