Um planeta de massa m descreve uma órbita circular em torno de uma estrela S a uma distância R, com uma velocidade tal que a duração de cada volta é T. O movimento se realiza sob a ação de uma força F de módulo constante, dirigida para S. Representa-se por a_{CP}, E_{C}, V, respectivamente a aceleração, a energia cinética e a velocidade do ponto material. Pede-se:

a) Estabelecer a expressão de E_{C} em função de F e R, ou seja $E_{\text{C}}=f\left(F,R\right)$;

b) Estabelecer em função de R, T e m as expressões de V, a_{CP} e E_{C}, ou seja $V=f\left(R,T,m\right)$, $a_{\text{CP}}=f\left(R,T,m\right)$ e $E_{\text{C}}=f\left(R,T,m\right)$;

c) Mostrar que F é dado pela expressão $F=A\dfrac{m}{R^{2}}$ em que A é uma constante;

d) Aplicar as expressões encontradas calculando a_{CP}, F e E_{C} no caso da Terra em torno do Sol. São dados: velocidade da Terra em sua órbita 30 km/s, raio da órbita terrestre 15.10^{7} km e massa da Terra 6.10^{21} t.

Esquema do problema

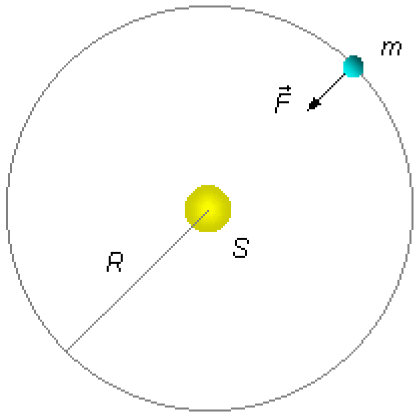

figura 1

Dados do problema

- massa do planeta: m;
- distância do planeta à estrela: R;
- período da órbita do planeta: T;
- força entre o planeta e a estrela: F;

dados para a Terra

- velocidade da Terra em sua órbita: $v_{\text{T}}=30\ \text{km/s}$;
- raio da órbita terrestre: $R_{\text{T}}=15.10^{7}\ \text{km}$;
- massa da Terra: $m_{\text{T}}=6.10^{21}\ \text{t}$.

Em primeiro lugar devemos transformar todas as unidades para o *Sistema Internacional* (*S.I.*).

A velocidade da Terra está dada em km/s, transformando para m/s, temos

$$v_{\text{T}}=30\,\frac{\text{km}}{\text{s}}=30\,\frac{1000\ \text{m}}{\text{s}}=30000\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=3.10^{4}\ \text{m/s}$$

O raio da órbita da Terra está dado em km, transformando para m, fica

$$R_T = 15.10^7 \text{ km} = 15.10^7.1000 \text{ m} = 15.10^7.10^3 \text{ m} = 15.10^{10} \text{ m}$$

a massa da Terra está dada em toneladas, passando para quilogramas, obtemos

$$m_T = 6.10^{21} \text{ t} = 6.10^{21}.1000 \text{ kg} = 6.10^{21}.10^3 \text{ kg} = 6.10^{24} \text{ kg}$$

a) A expressão para a energia cinética é

$$E_C = \frac{m.V^2}{2} \tag{I}$$

Como o planeta está girando em torno da estrela ele está sujeito a uma aceleração centrípeta dada por

$$a_{CP} = \frac{V^2}{R} \tag{II}$$

daqui temos que a velocidade vale

$$V^2 = a_{CP}.R \tag{III}$$

substituindo (III) em (I), temos

$$E_C = \frac{m.a_{CP}.R}{2} \tag{IV}$$

como a força centrípeta que mantém o planeta na órbita é dada por

$$F = m.a_{CP} \tag{V}$$

substituindo (V) em (IV), temos finalmente

$$\boxed{E_C(F,R) = \frac{F.R}{2}}$$

b) A velocidade de um corpo em *Movimento Circular Uniforme* (*M.C.U.*) é dada por

$$V = \omega.R \tag{VI}$$

onde ω é a velocidade angular do corpo, esta pode ser calculada como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{VII}$$

substituindo (VII) em (VI), a velocidade será

$$\boxed{V(R,T,m) = 2\pi.\frac{R}{T}}$$

a velocidade será dependente do raio R e do período T e independe da massa m.

Para o cálculo da energia cinética substituímos o valor da velocidade encontrada acima na expressão (I) do item (a), que fornece

$$E_C=\frac{m}{2}.\left(2\pi.\frac{R}{T}\right)^2$$
$$E_C=\frac{m}{2}.4\pi^2.\frac{R^2}{T^2}$$

$$\boxed{E_C(R,T,m)=2\pi^2.\frac{m.R^2}{T^2}}$$

Para o cálculo da aceleração centrípeta primeiro substituímos (VI) em (II), o que nos dá

$$a_{CP}=\frac{(\omega.R)^2}{R}$$
$$a_{CP}=\frac{\omega^2.R^2}{R}$$

agora simplificamos o valor de R e substituímos o valor de ω pelo valor dado por (VII)

$$a_{CP}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.R$$

$$\boxed{a_{CP}(R,T,m)=\frac{4\pi^2.R}{T^2}}$$

o valor da aceleração, assim como a velocidade, é independente da massa *m*.

c) Substituindo o resultado obtido acima para a aceleração centrípeta na expressão (V) da força, temos

$$F=m.\frac{4\pi^2.R}{T^2}$$

multiplicando o numerador e o denominador do lado direito desta expressão por R^2 ficamos com

$$F=m.\frac{4\pi^2.R}{T^2}.\frac{R^2}{R^2}$$
$$F=m.\frac{4\pi^2.R^3}{T^2.R^2}$$
$$F=4\pi^2.\frac{R^3}{T^2}.\frac{m}{R^2}$$

Nesta expressão o fator $4\pi^2$ é, obviamente, constante, o fator R^3/T^2 também é constante, lembrando da *3.ª Lei de Kepler*: *"A razão entre o cubo da distância de um planeta ao Sol e o quadrado do período mantém-se constante para qualquer planeta"*. Então estes dois fatores formam uma constante que pode ser definida com uma nova constante a seguir

$$A\equiv 4\pi^2.\frac{R^3}{T^2}$$

assim finalmente

$$\boxed{F = A.\frac{m}{R^2}}$$

d) Para o cálculo da aceleração usamos a expressão (II) com os dados fornecidos

$$a_{CP} = \frac{V_T^2}{R_T} = \frac{\left(3.10^4\right)^2}{15.10^{10}} = \frac{9.10^8}{15.10^{10}} = \frac{9.10^8.10^{-10}}{15} = \frac{9.10^{-2}}{15} = 0{,}006$$

$$\boxed{a_{CP} = 6.10^{-3}\ \text{m/s}}$$

A força é obtida usando a expressão (V) e a aceleração calculada acima

$$F = m_T.a_{CP} = 6.10^{24}.6.10^{-3} = 36.10^{21}$$

$$\boxed{F = 3{,}6.10^{22}\ \text{N}}$$

A energia cinética pode ser calculada usando o resultado do item (a) e a força calculada anteriormente

$$E_C = \frac{F.R}{2} = \frac{3{,}6.10^{22}.15.10^{10}}{2} = \frac{54.10^{32}}{2} = 27.10^{32}$$

$$\boxed{E_C = 2{,}7.10^{23}\ \text{J}}$$