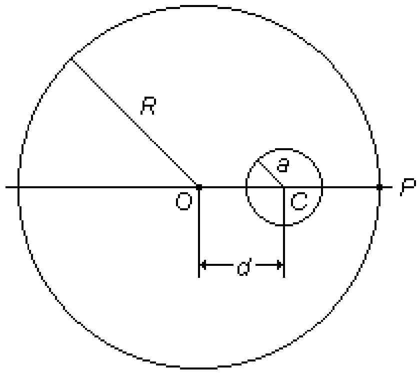
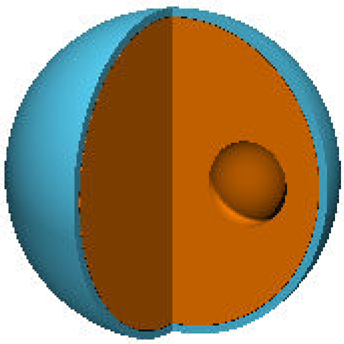
Variações no campo gravitacional na superfície da Terra podem advir de irregularidades na distribuição de sua massa. Considere a Terra como uma esfera de raio R e densidade ρ, uniforme, com uma cavidade esférica de raio a, inteiramente contida no seu interior. A distância entre os centros O, da Terra, e C, da cavidade, é d, que pode variar de 0 (zero) até $R-a$, causando, assim, uma variação no campo gravitacional em um ponto P, sobre a superfície da Terra, alinhado com O e C (veja figura). Seja G_1 a intensidade do campo gravitacional em P sem a existência da cavidade na Terra, e G_2, a intensidade do campo no mesmo ponto, considerando a existência da cavidade. Qual será o valor máximo da variação relativa: $\left(G_1-G_2\right)/G_1$, que se obtém ao deslocar a posição da cavidade.



Esquema do problema



Esquema mostrando a Terra em corte com uma cavidade esférica no seu interior.

Dados do problema

- raio da Terra: R;
- densidade da Terra: ρ;
- raio da cavidade interna contida na Terra: a;
- distância entre o centro O da Terra e o centro C da cavidade: d.

Solução

- Campo gravitacional da Terra sem cavidade

A intensidade do campo gravitacional G_1 da Terra sem a cavidade num ponto P situado a uma distância R (figura 1) do centro é dada por

$$G_1=\frac{G.M}{R^2} \qquad \text{(I)}$$

onde G é a constante da gravitação universal, M a massa da Terra e V o volume da Terra é expressa por

$$M=\rho.V \qquad \text{(II)}$$

o problema considera a Terra como um a esfera, então da geometria temos que o volume de uma esfera é

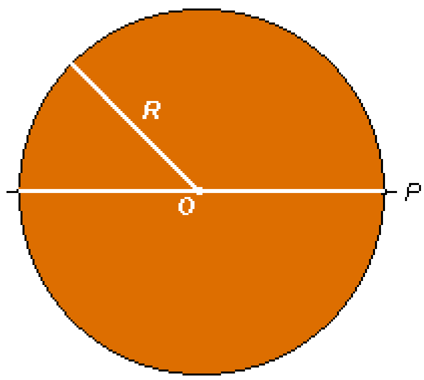


figura 1

$$V=\frac{4}{3}\pi.R^3 \qquad \text{(III)}$$

substituindo (III) em (II) a massa é dada por

$$M=\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3 \qquad \text{(IV)}$$

substituindo (IV) em (I) a intensidade do campo gravitacional da Terra fica

$$G_1=\frac{G.\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3}{R^2}$$

simplificando os valores de R^3 no numerador e R^2 no denominador

$$G_1=G.\rho.\frac{4}{3}\pi.R \qquad \text{(V)}$$

- Campo gravitacional gerado pela esfera que forma a cavidade

O campo gravitacional G_E gerado por uma esfera de raio a, massa m, volume v e mesma densidade ρ que a Terra num ponto P a uma distância $\left(R-d\right)$ é (figura2)

$$G_E=\frac{G.m}{\left(R-d\right)^2} \qquad \text{(VI)}$$

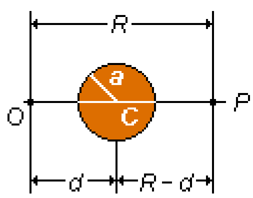


figura 2

a massa da esfera é calculada por

$$m=\rho.v \qquad \text{(VII)}$$

o volume desta esfera é

$$v=\frac{4}{3}\pi.a^3 \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo (VIII) em (VII) a massa fica

$$m=\rho.\frac{4}{3}\pi.a^3 \qquad \text{(IX)}$$

substituindo (IX) em (VI) o campo da esfera fica

$$G_E=\frac{G.\rho.\frac{4}{3}\pi.a^3}{\left(R-d\right)^2} \qquad \text{(X)}$$

- Campo gravitacional da Terra com cavidade

O campo gravitacional G_2 gerado pela Terra num ponto P com a cavidade deixada quando se tira uma esfera do seu interior será dado pelo campo total dado em G_1 (equação V) menos o campo G_E da esfera retirada do seu interior (equação X)

$$G_2=G_1-G_E=G.\rho.\frac{4}{3}\pi.R-\frac{G.\rho.\frac{4}{3}\pi.a^3}{\left(R-d\right)^2}$$

colocando em evidência $G.\rho.\dfrac{4}{3}\pi$ que aparece nos dois termos à direita

$$G_2=G.\rho.\frac{4}{3}\pi.\left[R-\frac{a^3}{(R-d)^2}\right] \qquad \text{(XI)}$$

Esta é expressão do campo gravitacional da Terra com uma cavidade no seu interior num ponto P (figura 3)

Usando (V) e (XI) calcula-se a variação pedida no problema

$$\frac{G_1-G_2}{G_1}=\frac{G.\rho.\frac{4}{3}\pi.R-G.\rho.\frac{4}{3}\pi.\left[R-\frac{a^3}{(R-d)^2}\right]}{G.\rho.\frac{4}{3}\pi.R}$$

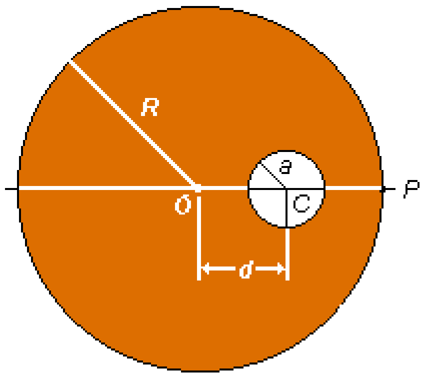


figura 3

simplificando $G.\rho.\dfrac{4}{3}\pi$ que aparece em todos os termos da expressão temos

$$\frac{G_1-G_2}{G_1}=\frac{R-R+\frac{a^3}{(R-d)^2}}{R}$$

$$\frac{G_1-G_2}{G_1}=\frac{a^3}{R.(R-d)^2}$$

a expressão acima fornece a variação relativa do campo gravitacional e terá um valor máximo quando o denominador tiver um valor mínimo. Como R (o raio da Terra é uma constante) então d dever ser máximo para tornar a diferença $(R-d)$ mínima, o enunciado nos diz que d varia de zero (valor mínimo) até $R-a$ (valor máximo), assim $d=R-a$, deste modo

$$\frac{G_1-G_2}{G_1}=\frac{a^3}{R.[R-(R-a)]^2}$$

$$\frac{G_1-G_2}{G_1}=\frac{a^3}{R.[R-R+a]^2}$$

$$\frac{G_1-G_2}{G_1}=\frac{a^3}{R.(a)^2}$$

simplificando a^3 no numerador e a^2 no denominador temos finalmente que a variação máxima do campo é dada por

$$\boxed{\left(\frac{G_1-G_2}{G_1}\right)_{\text{máx}}=\frac{a}{R}}$$