

Um corpo de massa m e densidade d_C é abandonado, em repouso, sobre a superfície livre de uma camada de líquido de altura h e densidade d_L . Sendo $d_L < d_C$ e a aceleração da gravidade igual a g , determinar:

- O tempo que o corpo leva para chegar ao fundo;
- A energia cinética do corpo ao atingir o fundo.

Esquema do problema

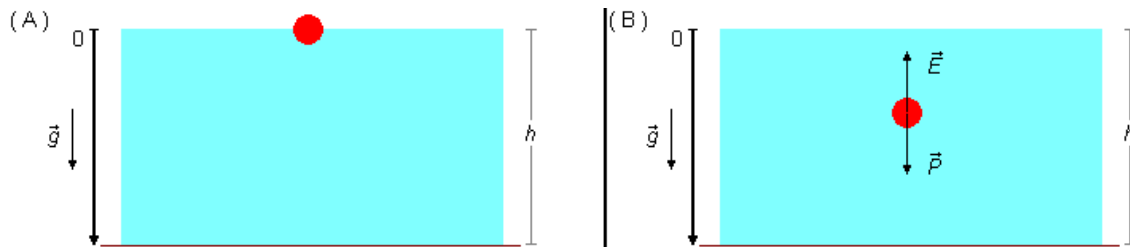


figura 1

Adotamos um sistema de referência com origem na superfície do líquido e orientado para baixo (figura 1-A). Inicialmente o corpo está em repouso ($v_0 = 0$) como a densidade do corpo é maior que a do líquido ($d_C > d_L$) ele começa a afundar sob a ação da força peso ($\vec{P}$) e da força de empuxo ($\vec{E}$) devido ao líquido deslocado (figura 1-B).

Dados do problema

- | | |
|-----------------------------------|-------------|
| • massa do corpo: | m ; |
| • densidade do corpo: | d_C ; |
| • velocidade inicial do corpo: | $v_0 = 0$; |
| • espessura da camada de líquido: | $S = h$; |
| • densidade do líquido: | d_L ; |
| • aceleração da gravidade: | g . |

Solução

a) Aplicando a 2.ª Lei de Newton às forças da figura 1-B, temos

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

em módulo

$$\begin{aligned} P - E &= m \cdot a \\ m \cdot g - m_L \cdot g &= m \cdot a \end{aligned} \quad (I)$$

onde m_L é massa do líquido deslocado. Sendo a densidade dada por $d = \frac{m}{V}$, com o volume (V) do corpo igual ao volume do líquido deslocado, aplicando ao corpo e ao líquido, obtemos

$$d_C = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d_C \cdot V \quad (II)$$

$$d_L = \frac{m_L}{V} \Rightarrow m_L = d_L \cdot V \quad (III)$$

substituindo (II) e (III) em (I), a aceleração é

$$\begin{aligned}
 d_C \cdot V \cdot g - d_L \cdot V \cdot g &= d_C \cdot V \cdot a \\
 a &= \frac{d_C \cdot V \cdot g - d_L \cdot V \cdot g}{d_C \cdot V} \\
 a &= \frac{V \cdot g \cdot (d_C - d_L)}{d_C \cdot V} \\
 a &= \frac{g \cdot (d_C - d_L)}{d_C} \quad (IV)
 \end{aligned}$$

O corpo afunda sob a ação da aceleração dada por (IV), então, está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*, a expressão que rege este tipo de movimento é

$$\begin{aligned}
 S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \\
 h &= 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot (d_C - d_L)}{d_C} \cdot t^2 \\
 t^2 &= \frac{2h \cdot d_C}{g \cdot (d_C - d_L)}
 \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h \cdot d_C}{g \cdot (d_C - d_L)}}$$

b) A energia cinética é calculada por

$$E_C = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (V)$$

Para encontrarmos a velocidade usamos a expressão da velocidade no *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*, substituindo a expressão (IV) e o tempo calculado no item anterior

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 + a \cdot t \\
 v &= 0 + \frac{g \cdot (d_C - d_L)}{d_C} \cdot \sqrt{\frac{2h \cdot d_C}{g \cdot (d_C - d_L)}} \\
 v &= \sqrt{\frac{g^2 \cdot (d_C - d_L)^2}{d_C^2} \cdot \frac{2h \cdot d_C}{g \cdot (d_C - d_L)}} \\
 v &= \sqrt{\frac{2h \cdot g \cdot (d_C - d_L)}{d_C}} \quad (IV)
 \end{aligned}$$

substituindo (VI) em (V), temos

$$\begin{aligned}
 E_C &= \frac{m}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2h \cdot g \cdot (d_C - d_L)}{d_C}} \right)^2 \\
 E_C &= \frac{m}{2} \cdot \frac{2h \cdot g \cdot (d_C - d_L)}{d_C}
 \end{aligned}$$

$$E_C = \frac{m \cdot h \cdot g \cdot (d_C - d_L)}{d_C}$$