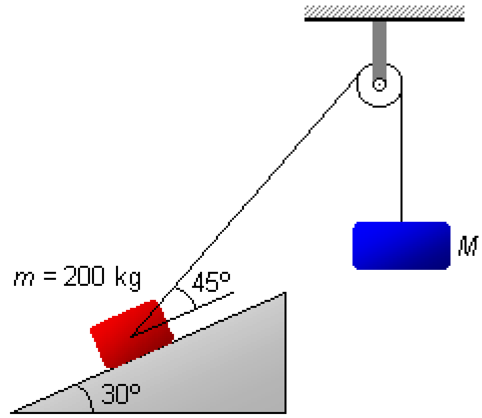
Um corpo de massa 200 kg é mantido em equilíbrio sobre um plano inclinado de 30º em relação à horizontal mediante um fio que passa por uma polia fixa e que sustenta na outra extremidade um corpo de massa *M*. O fio forma com a reta de maior declive do plano um ângulo de 45º. Pede-se Determinar:

a) A massa *M*;

b) A força exercida pelo corpo contra o plano.



Dados do problema

- massa do corpo no plano inclinado: $m = 200\ \text{kg}$;
- ângulo do plano inclinado com a horizontal: 30º;
- ângulo da corda com o plano inclinado: 45º.

Esquema do problema

Em primeiro lugar vamos isolar os corpos e pesquisar as forças que agem sobre cada um e como o sistema está em equilíbrio devemos ter que a somatória de todas as forças seja igual a zero

$$\sum_{\mathrm{i}} \vec{F}_{\mathrm{i}} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Corpo de massa *M*

- $\vec{T}$: tensão na corda;
- $\vec{P}_{\mathrm{M}}$: peso do corpo suspenso.

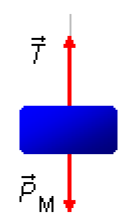


figura 1

Como só existem forças atuando no corpo na direção vertical (figura 1) pela condição de equilíbrio (**I**) temos, em módulo

$$T - P_{\mathrm{M}} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Corpo de massa 200 kg

- $\vec{T}$: tensão na corda, tem o mesmo valor em módulo que a tensão que age sobre o bloco anterior;
- $\vec{P}_{\mathrm{i}}$: peso do corpo no plano inclinado;
- $\vec{N}$: reação normal do plano sobre o bloco.

Vamos analisar as forças em duas direções, na direção paralela ao plano inclinado (chamada de *x*) e na direção perpendicular a este (chamada de *y*).

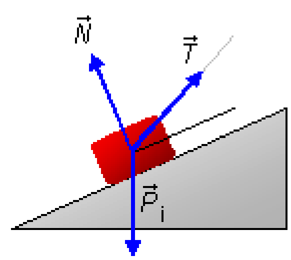


figura 2

Devemos achar o ângulo que a força peso forma com as direções perpendicular (y) e paralela (x) ao plano inclinado (figura 3).

O ângulo $Q\hat{A}M$ é dado no problema como sendo 30º, o segmento $\overline{QM}$ (direção onde está a força peso) é perpendicular ao segmento $\overline{AC}$, como a soma dos ângulos internos de um triângulo deve valer 180º então o ângulo $A\hat{Q}M$ deve ser

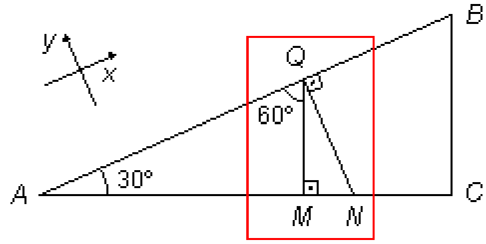


figura 3

$$A\hat{Q}M+30°+90°=180°$$

$$A\hat{Q}M=180°-30°-90°$$

$$A\hat{Q}M=60°$$

Para determinarmos o valor do ângulo α, figura 4, vamos ampliar a região em vermelho da figura 3. Já sabemos que o ângulo $A\hat{Q}M$ vale 60º e o segmento $\overline{QN}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ (forma um ângulo de 90º). então a soma destes ângulos com o ângulo α procurado deve ser 180º, assim

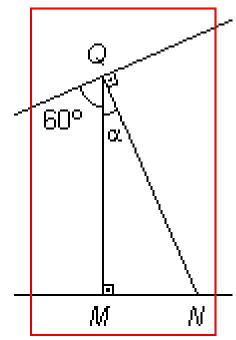


figura 4

$$\begin{gathered}60°+90°+\alpha=180°\\ \alpha=180°-60°-90°\\ \alpha=30°\end{gathered}$$

Desenhando as forças num sistema de eixos coordenados como mostra a figura 5 podemos obter suas componentes, em módulo, ao longo das direções x e y.

componentes ao longo do eixo x

- $N_x=0$
- $T_x=T.\cos 45°$
- $P_{ix}=-P_i.\cos 60°$

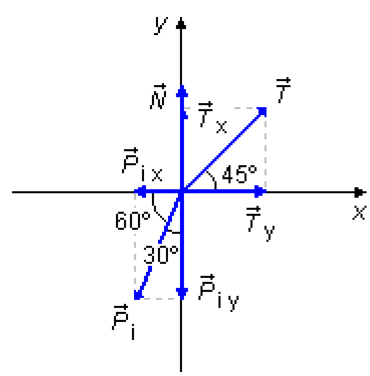


figura 5

Aplicando a condição de equilíbrio dada em (I) a estas equações temos

$$N_x+T.\cos 45°-P_i.\cos 60°=0$$

$$T.\cos 45°-P_i.\cos 60°=0 \qquad \text{(III)}$$

componentes ao longo do eixo y

- $N_y=N$
- $T_y=T.\text{sen}\,45°$
- $P_{iy}=-P_i.\text{sen}\,60°$

Da condição (I) escrevemos

$$N+T.\text{sen}45°-P_{\text{i}}.\text{sen}60°=0 \qquad \text{(IV)}$$

Solução

a) Sendo a força peso dada por

$$P=m.g$$

e lembrando da *Trigonometria* que $\cos 45°=\text{sen}45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60°=\dfrac{1}{2}$ e $\text{sen}60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ as equações (II), (III) e (IV) formam um sistema de três equações a três incógnitas (*N*, *T* e *M*)

$$\left|\begin{array}{ll} T-M.g=0 & \text{(V)} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}T-\dfrac{1}{2}m.g=0 & \text{(VI)} \\ N+\dfrac{\sqrt{2}}{2}T-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m.g=0 & \text{(VII)} \end{array}\right.$$

isolando o valor da tensão na equação (V), temos

$$T=M.g \qquad \text{(VIII)}$$

e substituindo em (VI)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}M.g-\frac{1}{2}m.g=0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}M.g=\frac{1}{2}m.g$$

simplificando o valor de *g* e o 2 no denominador

$$\sqrt{2}\,M=m$$
$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}$$

substituindo o valor de *m* dado no problema e sendo $\sqrt{2}\cong 1{,}4142$, obtemos

$$M=\frac{200}{1{,}4142}$$

$$\boxed{M=141{,}4\ \text{kg}}$$

b) A força exercida sobre o plano (F_{p}) será dada pela componente *y* do bloco sobre o plano inclinado

$$F_p = P_{iy} = -P_i . \operatorname{sen} 60°$$
$$F_p = -P_i . \operatorname{sen} 60°$$

adotando-se o valor de 10 m/s^2 para a aceleração da gravidade na Terra (já que o problema não dá este valor), temos

$$F_p = -200.10.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{F_p = -1732 \text{ N}}$$