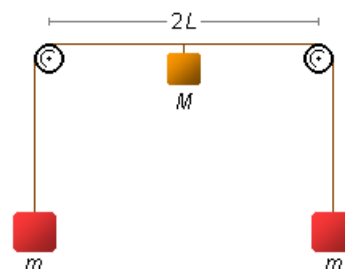


Um corpo de massa M está ligado a dois outros, cada um, de massa m por meio de fios que passam por pequenas polias situadas no mesmo nível à distância $2L$ uma da outra. Inicialmente a massa M ocupa uma posição equidistante das duas polias e está em repouso. Calcular a posição extrema que a massa M atingirá após ser abandonada até a posição de repouso.



Dados do problema

- massa dos blocos suspensos pelas polias: m ;
- massa do bloco suspenso entre as polias: M ;
- distância entre as polias: $2L$.

Esquema do problema

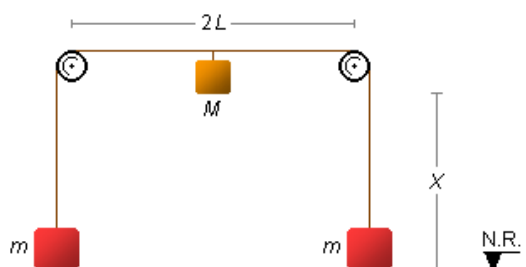


figura 1

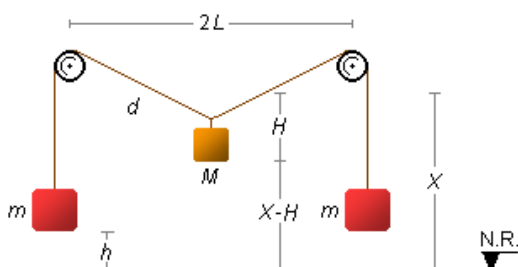


figura 2

Adota-se um *Nível de Referência (N.R.)* a partir de onde é medida a energia potencial dos blocos, os blocos de massa m estão apoiados no nível de referência ($h = 0$) e o bloco de massa M está a uma altura X qualquer ($h = X$), conforme a figura 1. Quando o bloco de massa M é abandonado ele desce uma altura H até atingir uma nova posição de repouso e os blocos de massa m sobem uma altura h , figura 2.

Solução

Da *Conservação da Energia Mecânica* temos

$$E_M^i = E_M^f$$

a energia mecânica inicial (E_M^i) é igual a energia mecânica final (E_M^f). Nas situações inicial e final o sistema está em repouso ($v = 0$), portanto não há energia cinética, toda a energia do sistema está na forma de energia potencial dada pela fórmula

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad (I)$$

Aplicando (I) para as duas situações obtemos

$$\begin{aligned} M \cdot g \cdot X + m \cdot g \cdot 0 + m \cdot g \cdot 0 &= M \cdot g \cdot (X - H) + m \cdot g \cdot h + m \cdot g \cdot h \\ M \cdot X &= M \cdot (X - H) + 2 \cdot m \cdot h \\ M \cdot X &= M \cdot X - M \cdot H + 2 \cdot m \cdot h \\ M \cdot H &= M \cdot X - M \cdot X + 2 \cdot m \cdot h \\ M \cdot H &= 2 \cdot m \cdot h \end{aligned} \quad (II)$$

Quando a massa M desce o fio aumenta para um comprimento d que é o comprimento L que havia quando estava na posição horizontal somado ao comprimento h que veio da subida do bloco de massa m (idem para o lado direito)

$$d = L + h$$

daí podemos tirar o valor de h para a expressão (II) acima

$$h = d - L \quad (\text{III})$$

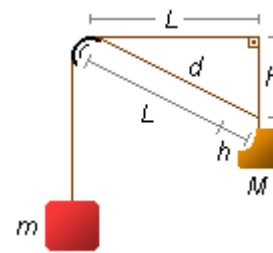


figura 3

Na figura 3 temos um triângulo retângulo que podemos usar para calcular o valor d do comprimento do fio quando o sistema atinge a nova posição de repouso, aplicando o *Teorema de Pitágoras*

$$\begin{aligned} d^2 &= L^2 + H^2 \\ d &= \sqrt{L^2 + H^2} \quad (\text{IV}) \end{aligned}$$

substituindo (IV) em (III) e levando o resultado em (II) podemos escrever

$$\begin{aligned} M \cdot H &= 2 \cdot m \cdot \left(\sqrt{L^2 + H^2} - L \right) \\ \frac{M \cdot H}{2 \cdot m} + L &= \sqrt{L^2 + H^2} \end{aligned}$$

elevando ambos os membros ao quadrado para eliminar a raiz, temos

$$\left(\frac{M \cdot H}{2 \cdot m} + L \right)^2 = \left(\sqrt{L^2 + H^2} \right)^2$$

o termo do lado esquerdo é um *Produto Notável* da forma $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$, reescrevendo

$$\begin{aligned} \frac{M^2 \cdot H^2}{4 \cdot m^2} + 2 \cdot \frac{M \cdot H}{2 \cdot m} \cdot L + L^2 &= L^2 + H^2 \\ \frac{M^2 \cdot H^2}{4 \cdot m^2} + \frac{M \cdot H \cdot L}{m} - H^2 &= L^2 - L^2 \\ \frac{M^2 \cdot H^2}{4 \cdot m^2} + \frac{M \cdot H \cdot L}{m} - H^2 &= 0 \end{aligned}$$

colocando H em evidência

$$H \cdot \left(\frac{M^2 \cdot H}{4 \cdot m^2} + \frac{M \cdot L}{m} - H \right) = 0$$

daqui temos duas possibilidades ou $H = 0$ ou $\frac{M^2 \cdot H}{4 \cdot m^2} + \frac{M \cdot L}{m} - H = 0$, a primeira possibilidade representa a própria situação inicial do problema, da segunda obtemos

$$\frac{M^2 \cdot H}{4 \cdot m^2} + \frac{M \cdot L}{m} - H = 0$$

$$H - \frac{M^2 \cdot H}{4 \cdot m^2} = \frac{M \cdot L}{m}$$

colocando H em evidência

$$H \cdot \left(1 - \frac{M^2}{4 \cdot m^2} \right) = \frac{M \cdot L}{m}$$

no termo entre parênteses o *Mínimo Múltiplo Comum* (M.M.C.) é $4 \cdot m^2$, que pode ser reescrito como

$$H \cdot \left(\frac{4 \cdot m^2 - M^2}{4 \cdot m^2} \right) = \frac{M \cdot L}{m}$$

$$H = \frac{M \cdot L}{m} \cdot \frac{4 \cdot m^2}{(4 \cdot m^2 - M^2)}$$

$$H = \frac{4 \cdot M \cdot m \cdot L}{4 \cdot m^2 - M^2}$$

observação: esta posição de repouso é diferente da posição de equilíbrio, quando a massa M atinge esta posição ela começa a subir novamente, a posição de equilíbrio é mais acima.