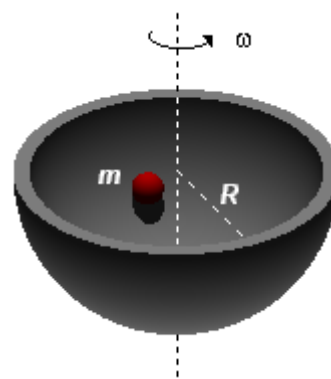


Uma pequena esfera de massa m é introduzida num recipiente cuja superfície interna é um hemisfério de raio R . Imprime-se ao recipiente em questão uma rotação em torno do eixo vertical com velocidade angular ω . Determinar:

- A intensidade da força que a esfera faz contra a parede;
- O raio da circunferência descrita pela esfera quando em equilíbrio em relação ao recipiente.



Dados do problema

- massa da esfera: m ;
- raio do hemisfério: R ;
- velocidade angular do hemisfério: ω .

Esquema do problema

O recipiente está girando e a esfera no seu interior fica equilibrada a uma certa altura na superfície interna, este sistema é equivalente a um recipiente em repouso com uma esfera girando no seu interior com velocidade ω .

Na figura 1-A temos as forças que atuam na esfera, a força peso ($\vec{P}$) verticalmente para baixo, a força normal ($\vec{F}_N$) perpendicular à parede do hemisfério no ponto onde está a esfera apontada para o centro do hemisfério e a força centrípeta ($\vec{F}_{CP}$) resultante que aponta para o centro em torno do qual a esfera gira descrevendo uma circunferência de raio r .

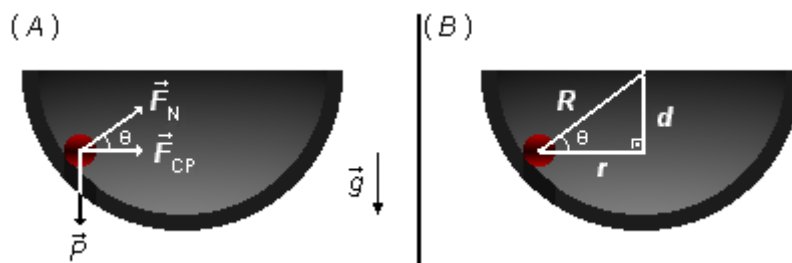


figura 1

Na figura 1-B temos os elementos geométricos do sistema, o raio R do hemisfério, a distância d entre o centro do hemisfério e o centro da circunferência de raio r descrita pela esfera.

Desenhando as forças num sistema de eixos coordenados podemos aplicar a 2.ª Lei de Newton

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Decompondo as forças na direção x temos

$$\begin{aligned} F_{Nx} &= F_{CP} \\ F_N \cdot \cos \theta &= m \cdot a_{CP} \end{aligned} \quad (I)$$

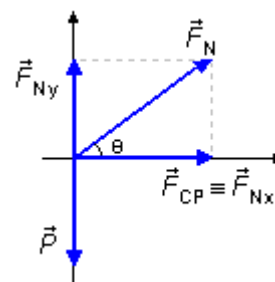


figura 2

Decompondo as forças na direção y temos

$$\begin{aligned}
 F_{Ny} - P &= m \cdot a \\
 F_N \cdot \sin \theta - m \cdot g &= m \cdot 0 \\
 F_N \cdot \sin \theta &= m \cdot g \quad (II)
 \end{aligned}$$

Com as equações (I) e (II) temos um sistema de duas equações a duas incógnitas (F_N e a_{CP})

$$\begin{cases}
 F_N \cdot \cos \theta = m \cdot a_{CP} \\
 F_N \cdot \sin \theta = m \cdot g
 \end{cases}$$

a) Na primeira equação temos que a aceleração centrípeta é dada por $a_{CP} = \frac{v^2}{r}$, o problema nos dá a velocidade angular ω e temos que $v = \omega \cdot r$ e da figura 1-B vemos que $\cos \theta = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R \cdot \cos \theta$, substituindo estes valores a aceleração centrípeta fica

$$a_{CP} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

substituindo na primeira este valor da aceleração centrípeta e do co-seno, obtemos

$$F_N \cdot \frac{r}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$F_N = R \cdot m \cdot \omega^2$$

b) Da figura 1-B temos que $\sin \theta = \frac{d}{R}$ e usando o valor da força encontrada no item anterior substituímos estes valores na segunda equação do sistema

$$\begin{aligned}
 R \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{R} &= m \cdot g \\
 d &= \frac{g}{\omega^2} \quad (III)
 \end{aligned}$$

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* ao triângulo da figura 1-B, temos

$$R^2 = d^2 + r^2$$

substituindo o valor de d encontrado em (III)

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \left(\frac{g}{\omega^2} \right)^2 + r^2 \\
 R^2 &= \frac{g^2}{\omega^4} + r^2 \\
 r^2 &= R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}
 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$$