

É dado um plano áspero inclinado de 45° em relação ao horizonte, do qual AB é uma reta de maior declive. Um corpo é atirado no sentido ascendente, entra em repouso em B retornando ao ponto A . Admitindo-se que o coeficiente de atrito entre o móvel e o plano seja $2 - \sqrt{3}$ determinar a relação entre o intervalo de tempo empregado pelo corpo para ir de A até B e no retorno de B até A .

Dados do problema

- coeficiente de atrito entre o móvel e o plano: $\mu = 2 - \sqrt{3}$;
- inclinação do plano: $\theta = 45^\circ$.

Esquema do problema

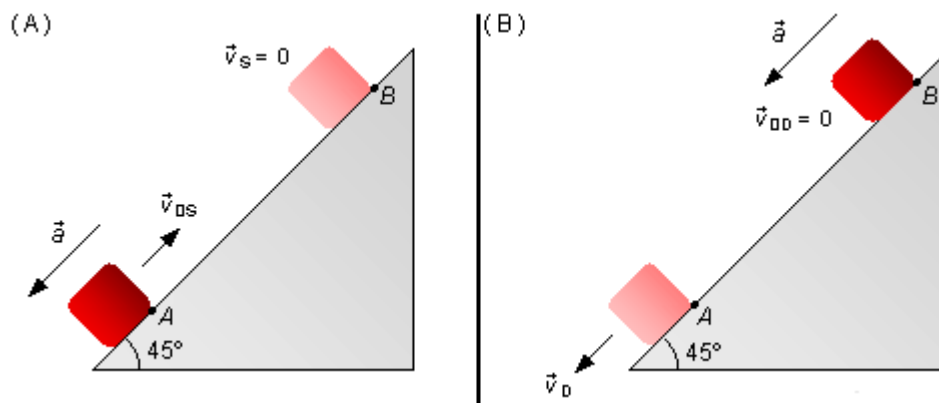


figura 1

O corpo é lançado com uma velocidade inicial de subida $\vec{v}_{0s}$ e começa a sofrer uma desaceleração $\vec{a}$ devido a componente da aceleração da gravidade na direção do plano, sua velocidade diminui até ficar nula $\vec{v}_s = 0$ no ponto B (figura 1-A). A partir desse instante ele começa um movimento de retorno, partindo do repouso ($\vec{v}_{00} = 0$) e sob a ação da aceleração causada pela componente da gravidade na direção do plano e passa pelo ponto A com uma velocidade final $\vec{v}_D$ (figura 1-B).

Solução

Isolando o corpo e analisando as forças que atuam nele em cada uma das situações podemos aplicar a 2.ª Lei de Newton

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- Corpo subindo

Adotamos um sistema de referência xy com o eixo- x paralelo ao plano inclinado e sentido para cima. No bloco agem a força peso ($\vec{P}$), a força de resistência devido ao atrito ($\vec{F}_R$) e a reação normal da superfície ($\vec{N}$), conforme a figura 2-A.

A força peso pode ser decomposta em duas, uma componente paralela ($\vec{P}_p$) ao eixo- x e a outra normal ou perpendicular ($\vec{P}_N$). Da figura 2-B vemos que a força peso é perpendicular ao plano horizontal, forma um ângulo de 90° , o ângulo entre o plano inclinado, que contém a componente paralela, e o plano horizontal é dado como 45° , como os ângulos internos de um triângulo devem somar 180° o ângulo entre a força peso e a componente paralela deve ser 45° .

No triângulo à direita temos que a componente normal faz com o plano inclinado um ângulo de 90° então o ângulo entre a força peso e a componente normal deve medir 45° , é um ângulo complementar.

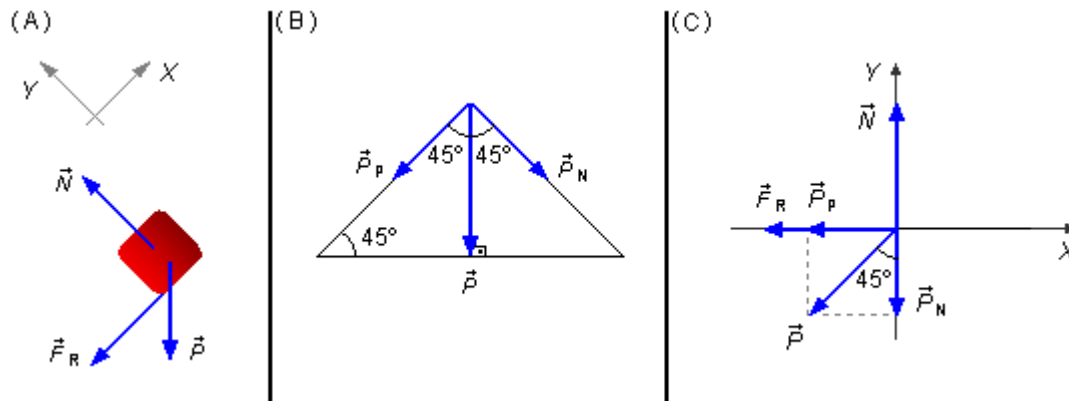


figura 2

Desenhemos as forças num sistema de eixos coordenados, figura 2-C.

Na direção y não há movimento, a reação normal e a componente normal do peso se equilibram, em módulo temos

$$\begin{aligned} N &= P_N \\ N &= P \cdot \cos 45^\circ \\ N &= M \cdot g \cdot \cos 45^\circ \end{aligned} \quad (I)$$

Na direção x escrevemos a 2.ª Lei de Newton em módulo para encontrar a aceleração do bloco subindo (a_S)

$$\begin{aligned} -F_R - P_P \cdot \cos 45^\circ &= M \cdot a_S \\ -F_R - M \cdot g \cdot \cos 45^\circ &= M \cdot a_S \end{aligned} \quad (II)$$

A força de resistência devido ao atrito é dada por

$$F_R = \mu \cdot N \quad (III)$$

substituindo o valor da reação normal (I) em (III) e colocando o resultado em (II), temos a expressão para a aceleração do corpo durante a subida

$$\begin{aligned} -\mu \cdot N - P_P \cdot \sin 45^\circ &= M \cdot a_S \\ -\mu \cdot M \cdot g \cdot \cos 45^\circ - M \cdot g \cdot \sin 45^\circ &= M \cdot a_S \\ a_S &= -\mu \cdot g \cdot \cos 45^\circ - g \cdot \sin 45^\circ \end{aligned} \quad (IV)$$

- Corpo descendo

Analogamente temos o mesmo sistema de referência da situação anterior. No blocoagem as mesmas forças, apenas a força de resistência ($\vec{F}_R$) está no sentido contrário, figura 3-A.

Do mesmo modo a força peso pode ser decomposta em duas sendo válido o esquema da figura 2-B

Desenhemos as forças num sistema de eixos coordenados, figura 3-B.

Na direção y é válida a mesma expressão (I) encontrada anteriormente.

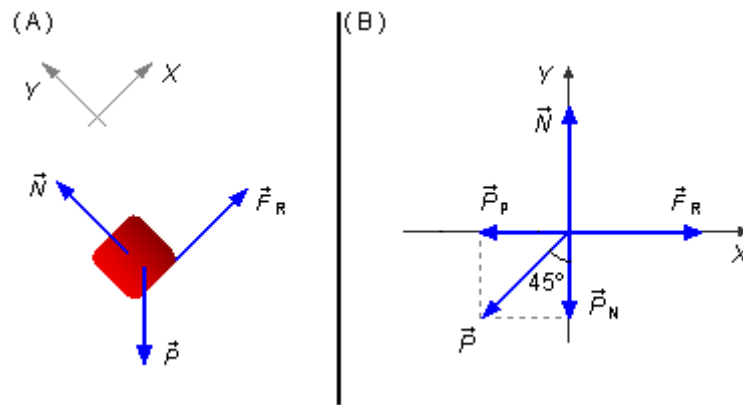


figura 3

Na direção x aplicamos a 2.^a Lei de Newton em módulo para encontrar a aceleração do bloco descendo (a_D)

$$\begin{aligned} F_R - P_P \cdot \sin 45^\circ &= M \cdot a_D \\ F_R - M \cdot g \cdot \sin 45^\circ &= M \cdot a_D \end{aligned} \quad (V)$$

Usando a expressão para a força de resistência dada em (III) e a reação normal de (I) a expressão para a aceleração do corpo durante a descida fica

$$\begin{aligned} \mu \cdot N - P_P \cdot \sin 45^\circ &= M \cdot a_D \\ \mu \cdot M \cdot g \cdot \cos 45^\circ - M \cdot g \cdot \sin 45^\circ &= M \cdot a_D \\ a_D &= \mu \cdot g \cdot \cos 45^\circ - g \cdot \sin 45^\circ \end{aligned} \quad (VI)$$

Da Cinemática Escalar temos que as equações de movimento do bloco durante a subida e descida são

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_{0S} \cdot t_S + \frac{a_S}{2} t_S^2 \\ S - S_0 &= v_{0S} \cdot t_S + \frac{a_S}{2} t_S^2 \\ &\text{e} \\ S &= S_0 - v_{0D} \cdot t_D - \frac{a_D}{2} t_D^2 \\ S - S_0 &= -v_{0D} \cdot t_D - \frac{a_D}{2} t_D^2 \end{aligned}$$

Os intervalos percorridos na subida e descida do bloco são iguais $|S - S_0| = \overline{AB} = \overline{BA} = \Delta S$, então temos

$$\Delta S = v_{0S} \cdot t_S + \frac{a_S}{2} t_S^2 \quad (VII)$$

$$\Delta S = -\frac{a_D}{2} t_D^2 \quad (VIII)$$

igualando as equações (VII) e (VIII)

$$v_{0S} \cdot t_S + \frac{a_S}{2} t_S^2 = -\frac{a_D}{2} t_D^2 \quad (\text{IX})$$

Escrevendo a função da velocidade para o bloco subindo, temos

$$\begin{aligned} v_S &= v_{0S} + a_S \cdot t_S \\ 0 &= v_{0S} + a_S \cdot t_S \\ v_{0S} &= -a_S \cdot t_S \quad (\text{X}) \end{aligned}$$

substituindo (X) em (IX), obtemos

$$\begin{aligned} -a_S \cdot t_S \cdot t_S + \frac{a_S}{2} t_S^2 &= -\frac{a_D}{2} t_D^2 \\ -a_S \cdot t_S^2 + \frac{a_S}{2} t_S^2 &= -\frac{a_D}{2} t_D^2 \\ \frac{-2a_S \cdot t_S^2 + a_S \cdot t_S^2}{2} &= -\frac{a_D}{2} t_D^2 \\ -\frac{a_S}{2} t_S^2 &= -\frac{a_D}{2} t_D^2 \end{aligned}$$

simplificando o fator 2 e o sinal negativo, reescrevemos

$$\begin{aligned} a_S \cdot t_S^2 &= a_D \cdot t_D^2 \\ \frac{t_S^2}{t_D^2} &= \frac{a_D}{a_S} \\ \left(\frac{t_S}{t_D} \right)^2 &= \frac{a_D}{a_S} \end{aligned}$$

Substituindo as acelerações na subida e na descida pelas expressões encontradas em (IV) e (VI) respectivamente, temos

$$\left(\frac{t_S}{t_D} \right)^2 = \frac{\mu \cdot g \cdot \cos 45^\circ - g \cdot \sin 45^\circ}{-\mu \cdot g \cdot \cos 45^\circ - g \cdot \sin 45^\circ}$$

colocando a aceleração da gravidade g em evidência e substituindo $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{t_S}{t_D} \right)^2 &= \frac{g \cdot \left(\mu \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{g \cdot \left(-\mu \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \\ \left(\frac{t_S}{t_D} \right)^2 &= \frac{\mu \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\mu \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\mu - 1)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\mu - 1)}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{\mu - 1}{-\mu - 1}$$

substituindo o coeficiente de atrito μ pelo valor dado fica

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3} - 1}{-(2 - \sqrt{3}) - 1}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{-2 + \sqrt{3} - 1}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{-3 + \sqrt{3}}$$

para racionalizar a expressão acima multiplicamos o numerador e o denominador por $-3 - \sqrt{3}$, então

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{-3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{(-3 - \sqrt{3})}{(-3 - \sqrt{3})}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{-3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{9 - 3}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\left(\frac{t_S}{t_D}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e finalmente

$$\frac{t_S}{t_D} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$