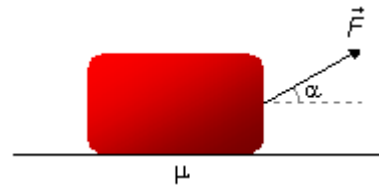


Uma caixa de forma retangular de massa M esta sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético é μ . Aplica-se uma força $\vec{F}$ fazendo um ângulo α com a horizontal.

a) Para qual valor do ângulo α a aceleração da caixa é máxima?

b) Para quais valores de α a caixa permanece parada?



Dados do problema

- força externa aplicada na caixa:
- massa da caixa:
- coeficiente de atrito cinético:
- ângulo entre a força aplicada e a horizontal:

F ;
 M ;
 μ ;
 α .

Esquema do problema

Isolando a caixa estudamos as forças que atuam nela.

- $\vec{F}$ força externa aplicada na caixa;
- $\vec{P}$ força peso;
- $\vec{F}_{at}$ força de atrito;
- $\vec{N}$ força normal, reação do chão ao peso da caixa.

Aplicando a 2.ª Lei de Newton, temos

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

onde $\vec{R}$ é a resultante das forças que agem na caixa, escrevemos

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{at} = M \cdot \vec{a} \quad (I)$$

Desenhando as forças num sistema de eixos coordenados e decompondo as forças ao longo das direções x e y (figura 2)

A equação (I) pode ser decomposta na direção x em

- $F_x = F \cdot \cos \alpha$
- $F_{at} = \mu \cdot N$

da aplicação da 2.ª Lei de Newton nesta direção temos

$$F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot N = M \cdot a_x$$

sendo $a_x = a$ a aceleração na direção x , ficamos com

$$F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot N = M \cdot a \quad (II)$$

Para a direção y a equação (I) nos fornece

- $F_y = F \cdot \sin \alpha$
- N
- $P = M \cdot g$

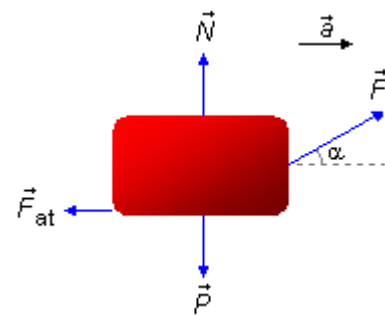


figura 1

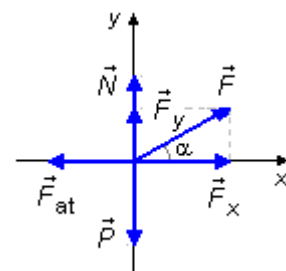


figura 2

da 2.^a Lei de Newton obtemos

$$F.\text{sen}\alpha + N - M.g = M.a_y$$

como não deve existir movimento nesta direção, devemos ter $a_y = 0$ e a equação acima se reduz a

$$F.\text{sen}\alpha + N - M.g = 0 \quad (\text{III})$$

Solução

a) Com as equações (II) e (III) encontradas acima temos o seguinte sistema de duas equações a duas incógnitas (N e α , as demais grandezas são dadas)

$$\begin{cases} F.\cos\alpha - \mu.N = M.a \\ F.\text{sen}\alpha + N - M.g = 0 \end{cases}$$

da segunda equação obtemos o valor de N

$$N = M.g - F.\text{sen}\alpha$$

substituindo este valor na primeira equação ficamos com

$$\begin{aligned} F.\cos\alpha - \mu.(M.g - F.\text{sen}\alpha) &= M.a \\ F.\cos\alpha - \mu.M.g + \mu.F.\text{sen}\alpha &= M.a \end{aligned}$$

a aceleração será então

$$a = \frac{F.\cos\alpha - \mu.M.g + \mu.F.\text{sen}\alpha}{M}$$

separando os termos em seno e co-seno e colocando F em evidência reescrevemos

$$a = -\mu.g + \frac{F}{M} . (\cos\alpha + \mu.\text{sen}\alpha)$$

multiplicando o numerador e o denominador do termo entre parênteses por $\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2}} = 1$

(multiplicar por 1 não altera nada), temos

$$a = -\mu.g + \frac{F}{M} . (\cos\alpha + \mu.\text{sen}\alpha) . \left(\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2}} \right)$$

aplicando a propriedade distributiva ao denominador e deixando o numerador em evidência podemos reescrever

$$a = -\mu.g + \frac{F.\sqrt{1+\mu^2}}{M} . \left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} . \cos\alpha + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} . \text{sen}\alpha \right) \quad (\text{IV})$$

atenção: se considerarmos 1 e μ como lados de um triângulo retângulo a hipotenusa será dada por $h = \sqrt{1 + \mu^2}$ como mostrado na figura 3, ao lado, podemos definir o seno e co-seno do ângulo β como sendo

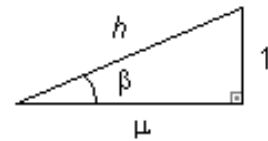


figura 3

$$\text{sen } \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \beta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Substituindo as definições de seno e co-seno feitas acima na expressão (IV), obtemos

$$a = -\mu \cdot g + \frac{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}{M} \cdot (\text{sen } \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \text{sen } \alpha)$$

da trigonometria temos que $\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x$, aplicando esta identidade ao termo entre parênteses acima segue que

$$a = -\mu \cdot g + \frac{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}{M} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) \quad (\text{V})$$

Esta é a expressão para a aceleração da caixa, analisando este resultado vemos que o valor máximo ocorre quando o seno é igual a um, isto acontece quando $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ onde $\alpha_{\text{máx}}$ é o ângulo que produz a máxima aceleração. Pela figura 4 vemos que marcando os ângulos $\alpha_{\text{máx}}$ e β num gráfico e sendo a soma deste ângulos $\frac{\pi}{2}$, temos que o segmento X é o co-seno do ângulo $\alpha_{\text{máx}}$ e também o seno do ângulo β . Assim podemos escrever

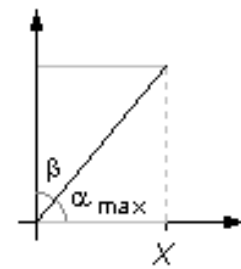


figura 4

$$\cos \alpha_{\text{máx}} = \text{sen } \beta$$

substituindo o valor do seno de β definido acima, temos

$$\cos \alpha_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

a resposta final será

$$\alpha_{\text{máx}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

b) Para que a caixa permaneça parada devemos ter a aceleração igual a zero, assim a partir da expressão (V) temos que o ângulo α_0 para o qual a caixa não se move será

$$0 = -\mu \cdot g + \frac{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}{M} \cdot \text{sen}(\alpha_0 + \beta)$$

$$\frac{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}{M} \cdot \text{sen}(\alpha_0 + \beta) = \mu \cdot g$$

$$\text{sen}(\alpha_0 + \beta) = \mu \cdot g \cdot \frac{M}{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\alpha_0 + \beta = \arcsen\left(\mu \cdot g \cdot \frac{M}{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}\right)$$

$$\alpha_0 = \arcsen\left(\mu \cdot g \cdot \frac{M}{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}\right) - \beta$$

como $\text{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ temos que $\beta = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}\right)$ e substituindo acima o ângulo α_0 será dado por

$$\alpha_0 = \arcsen\left(\mu \cdot g \cdot \frac{M}{F \cdot \sqrt{1 + \mu^2}}\right) - \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}\right)$$