

Um projétil é disparado com velocidade inicial igual a  $v_0$  e formando um ângulo  $\theta_0$  com a horizontal, sabendo-se que os pontos de disparo e o alvo estão sobre o mesmo plano horizontal e desprezando-se a resistência do ar, determine:

- A altura máxima que o projétil atinge;
- O tempo necessário para atingir a altura máxima;
- O tempo de duração do movimento total;
- O alcance máximo horizontal do projétil;
- A equação da trajetória do movimento oblíquo;
- O ângulo de tiro que proporciona o máximo alcance;
- Mostre que tiros com ângulos complementares têm os mesmo alcance;
- A velocidade num ponto qualquer da trajetória;
- A aceleração num ponto qualquer da trajetória.

### Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com o eixo  $Ox$  apontando para a direita e  $Oy$  para cima, a aceleração da gravidade está apontada para baixo e o ponto de disparo está na origem do referencial  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , conforme a figura 1.

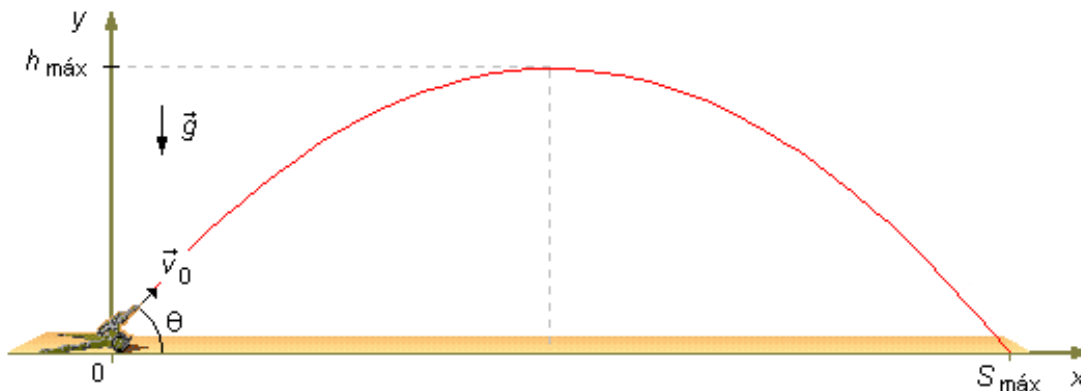


figura 1

O movimento pode ser decomposto ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , a velocidade inicial  $v_0$  será decomposta ao longo destas direções como mostra a figura 2. Sendo as componentes da velocidade dadas, em módulo, por

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta_0 \quad (I)$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta_0 \quad (II)$$

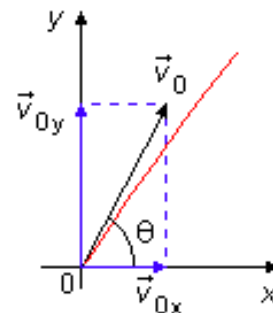


figura 2

Da decomposição do movimento vemos que na direção  $x$  não há nenhuma aceleração agindo sobre o projétil, então ele está em *Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.)* e seu movimento é regido pela equação

$$S_x = S_{0x} + v_x \cdot t \quad (\text{III})$$

como no movimento uniforme  $v_x = v_{0x}$  é constante podemos substituir  $v_x$  pelo valor de (I)

$$S_x = S_{0x} + (v_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot t \quad (\text{IV})$$

Na direção  $y$  o projétil está sob a ação da aceleração da gravidade, portanto está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)* regido pelas equações

$$S_y = S_{0y} + v_{0y} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (\text{V})$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \quad (\text{VI})$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g \cdot \Delta S_y \quad (\text{VII})$$

substituindo  $v_{0y}$  pelo valor dado em (II)

$$S_y = S_{0y} + (v_0 \cdot \text{sen} \theta_0) \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (\text{VIII})$$

$$v_y = (v_0 \cdot \text{sen} \theta_0) - g \cdot t \quad (\text{IX})$$

$$v_y^2 = (v_0 \cdot \text{sen} \theta_0)^2 - 2g \cdot \Delta S_y \quad (\text{X})$$

com  $-g$  constante (o sinal de negativo indica que a aceleração da gravidade esta contra a orientação do referencial).

Assim pela figura 3 vemos que no movimento ao longo da direção  $x$  temos que para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços iguais ( $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5 = \Delta x_6$ ) Na direção  $y$  temos que durante a subida para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços menores, pois a partícula está sendo freada pela ação da gravidade ( $\Delta y_1 > \Delta y_2 > \Delta y_3$ ) até que a velocidade  $v_y$  zero e então a gravidade começa a puxar a partícula de volta ao solo com velocidade acelerada, assim para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços cada vez maiores ( $\Delta y_4 < \Delta y_5 < \Delta y_6$ )

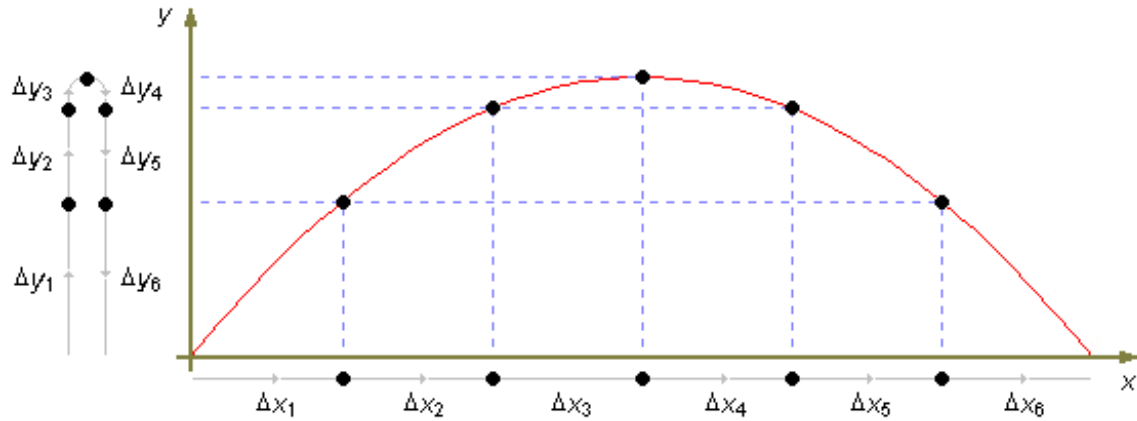


figura 3

### Dados do problema

- velocidade inicial:  $v_0$ ;
  - ângulo de tiro com a horizontal:  $\theta$ .
- Na direção x:
- espaço inicial:  $S_{0x} = 0$ ;
  - velocidade inicial (dado por (I)):  $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta_0$ ;
- Na direção y:
- espaço inicial:  $S_{0y} = 0$ ;
  - velocidade inicial (dada por(II)):  $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen} \theta_0$

### Solução

a) Para encontrarmos a altura máxima ( $h_{\text{máx}}$ ) atingida pelo projétil basta analisarmos o movimento ao longo da direção y. Quando o projétil atinge a altura máxima sua velocidade  $v_y$  se anula ( $v_y = 0$ ), assim usando a equação (X) temos

$$0 = (v_0 \cdot \text{sen} \theta_0)^2 - 2g \cdot h_{\text{máx}}$$

$$0 = v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \theta_0 - 2g \cdot h_{\text{máx}}$$

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \theta_0}{2g}$$

b) O tempo de subida ( $t_s$ ) para atingir a altura máxima será obtido de (IX) com a condição de que a velocidade se anula na máxima altura atingida pelo projétil ( $v_y = 0$ ), então temos que

$$0 = v_0 \cdot \text{sen} \theta_0 - g \cdot t_s$$

$$g \cdot t_s = v_0 \cdot \text{sen} \theta_0$$

$$t_s = \frac{v_0 \cdot \text{sen} \theta_0}{g}$$

c) O tempo total ( $t_T$ ) do movimento será a soma dos tempos de subida ( $t_s$ ) e de descida ( $t_D$ ), sendo que no movimento de lançamento vertical e queda livre os tempos de subida e de descida são iguais temos a condição

$$t_T = t_s + t_D$$

com  $t_s = t_D$

$$t_T = 2 \cdot t_s$$

usando o resultado para o tempo de subida obtido no item anterior, temos

$$t_T = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \text{sen} \theta_0}{g}$$

d) O tempo calculado acima para o projétil subir e descer é também o tempo que ele levará para ir da origem até o ponto  $h_{\text{máx}}$  ao longo do eixo  $x$ , então substituindo a resposta do item anterior na expressão (IV), obtemos

$$S_{\text{máx}} = 0 + (v_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \text{sen} \theta_0}{g}$$

$$S_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \text{sen} \theta_0 \cdot \cos \theta_0$$

mas, da trigonometria, temos que  $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$  e substituindo esta relação na expressão acima, ficaremos com o alcance máximo na seguinte forma

$$S_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta_0)$$

e) Para obter a forma da trajetória indicada na figura 1 temos que ter  $y$  com função de  $x$ , ou  $y = f(x)$ , usando as equações (III) e (V) para os movimentos em  $x$  e  $y$  e lembrando que  $S_{0x} = S_{0y} = 0$ , temos o sistema

$$\begin{cases} S_x = v_{0x} \cdot t \\ S_y = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{cases}$$

isolando o tempo na primeira equação temos

$$t = \frac{S_x}{v_{0x}}$$

substituindo este valor na segunda equação obtemos

$$S_y = v_{0y} \cdot \left( \frac{S_x}{v_{0x}} \right) - \frac{g}{2} \cdot \left( \frac{S_x}{v_{0x}} \right)^2$$

$$S_y = -\frac{g}{2v_{0x}^2} \cdot S_x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot S_x$$

Fazendo a associação mostrada abaixo com uma equação do 2.º grau do tipo  $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{ccccccc} S_y = & -\frac{g}{2v_{0x}^2} \cdot S_{0x}^2 & + & \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot S_x & + & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y = & a & x^2 & + & b & x & + & c \end{array}$$

vemos que obtivemos uma função do tipo  $S_y = f(S_x)$  com o coeficiente  $a < 0$  o que indica que a nossa trajetória é uma parábola de “boca” para baixo.

f) A resposta obtida no item (d) para o alcance máximo ( $S_{máx}$ ) depende do ângulo inicial de lançamento, da trigonometria sabemos que a função seno varia de  $-1$  a  $1$ , então o valor máximo do alcance ocorre quando

$$\text{sen}(2\theta_0) = 1$$

isto é quando o ângulo é igual a  $90^\circ$ , assim

$$2\theta_0 = 90^\circ$$

$$\theta_0 = 45^\circ$$

g) Da trigonometria temos que ângulos complementares são aqueles que somam  $90^\circ$  ou  $\frac{\pi}{2}$ , sejam, então, dois ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  complementares

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{XI})$$

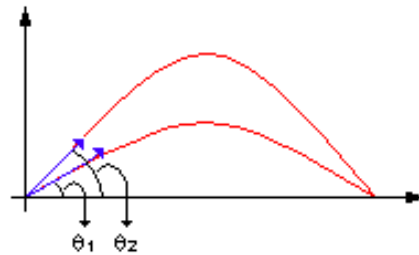


figura 4

Usando o resultado do item (d) que nos dá o alcance máximo escrevemos os alcances  $S_{\text{máx1}}$  e  $S_{\text{máx2}}$  para os ângulos acima

$$S_{\text{máx1}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta_1) \quad (\text{XII})$$

$$S_{\text{máx2}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta_2) \quad (\text{XIII})$$

Escrevendo de (XI)  $\theta_2$  em função de  $\theta_1$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

e substituindo em (XIII), temos

$$S_{\text{máx2}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen} \left[ 2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \right]$$

$$S_{\text{máx2}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}(\pi - 2\theta_1)$$

o seno nesta equação pode ser desenvolvido segundo a relação que nos dá o seno da diferença,  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$$S_{\text{máx2}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot (\text{sen}\pi \cdot \cos 2\theta_1 - \text{sen} 2\theta_1 \cdot \cos\pi)$$

sendo  $\sin \pi = 0$ ,  $\cos \pi = -1$ , temos

$$S_{\text{máx}2} = \frac{v_0^2}{g} \cdot [0 \cdot \cos 2\theta_1 - \sin 2\theta_1 \cdot (-1)]$$

$$S_{\text{máx}2} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\theta_1) \quad (\text{XIV})$$

portanto comparando as expressões (XII) e (XIV)

$$S_{\text{máx}1} = S_{\text{máx}2}$$

Q.E.D.

**observação:** Q.E.D. é a abreviação da expressão em latim “quod erat demonstrandum” que significa “como queríamos demonstrar”.

h) Num ponto qualquer da trajetória o vetor velocidade ( $\vec{V}$ ) pode ser decomposto nas suas componentes ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  ( $\vec{V}_x$  e  $\vec{V}_y$ ), como se vê na figura 5-A, abaixo.

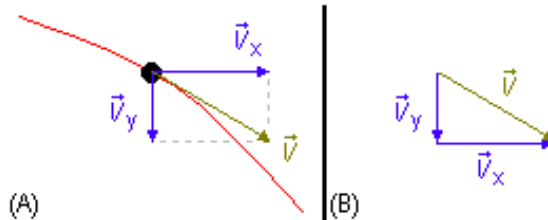


figura 5

O vetor velocidade será então a soma vetorial de suas componentes

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

Pela figura 5-B vemos que os vetores formam um triângulo retângulo e o módulo da velocidade pode ser calculado aplicando-se o *Teorema de Pitágoras*

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_x|^2 + |\vec{V}_y|^2 \quad (\text{XV})$$

Escrevendo  $|\vec{V}| = V$ ,  $|\vec{V}_x| = V_x$  e  $|\vec{V}_y| = V_y$  teremos da equação (I)

$$V_x = v_0 \cdot \cos \theta_0$$

$$V_x^2 = v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0 \quad (\text{XVI})$$

e de (IX),obteremos

$$\begin{aligned}V_y &= (v_0 \cdot \text{sen} \theta_0) - g \cdot t \\V_y^2 &= [v_0 \cdot \text{sen} \theta_0 - g \cdot t]^2 \\V_y^2 &= v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \theta_0 - 2 \cdot v_0 \cdot \text{sen} \theta_0 \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2\end{aligned}\quad (\text{XVII})$$

substituindo (XVI) e (XVII) em (XV)

$$V^2 = v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0 + v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \theta_0 - 2 \cdot v_0 \cdot \text{sen} \theta_0 \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2$$

nos dois primeiros termos do lado direito da igualdade vamos colocar  $v_0^2$  em evidência e no terceiro termo colocaremos em evidência  $-2 \cdot g$

$$V^2 = v_0^2 \cdot (\cos^2 \theta_0 + \text{sen}^2 \theta_0) - 2 \cdot g \cdot \left( v_0 \cdot \text{sen} \theta_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \right)\quad (\text{XVIII})$$

o primeiro termo entre parênteses é, pela trigonometria,  $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta = 1$ , o segundo termo entre parênteses pode ser obtido da equação (VIII) acima

$$S_y - S_{0y} = v_0 \cdot \text{sen} \theta_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$

mas  $\Delta S_y = S_y - S_{0y}$ , finalmente (XVIII) pode ser escrito como

$$V^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta S_y$$

$$V = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta S_y}$$

i) A aceleração da gravidade ( $\vec{g}$ ) a que o projétil está sujeito em qualquer ponto da trajetória pode ser decomposta em duas componentes a aceleração tangencial ( $\vec{g}_t$ ) e a aceleração normal ( $\vec{g}_n$ ), que é perpendicular à trajetória no ponto considerado (figura 6-A). Da figura 6-C temos;

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{g_t}{g} \\g_t &= g \cdot \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{XIX})$$



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{g_n}{g} \\ g_n &= g \cdot \sin \theta \quad (\text{XX}) \end{aligned}$$

onde  $\theta$  é ângulo entre a aceleração da gravidade ( $\vec{g}$ ) e sua componente tangencial ( $\vec{g}_t$ ) num ponto qualquer da trajetória. Mas este ângulo é o mesmo que temos entre a velocidade do projétil ( $\vec{V}$ ) e sua componente ao longo da direção y, ( $\vec{V}_y$ ) como se vê na figura 6-B.

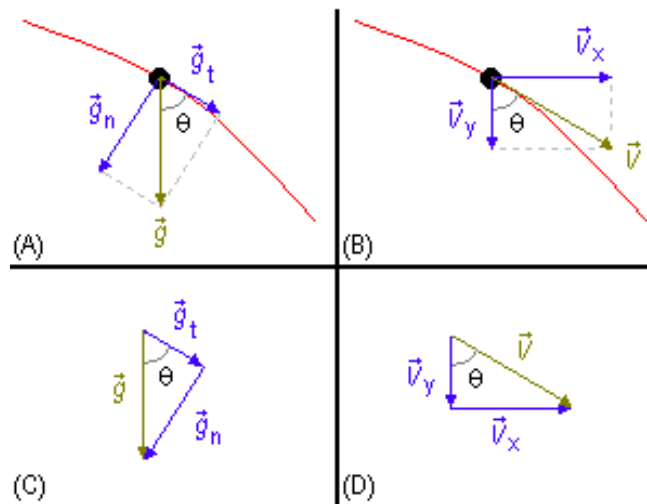


figura 6

Pela figura 6-D vemos que

$$\cos \theta = \frac{V_y}{V}$$

usando o resultado do item anterior para o valor da velocidade, obtemos

$$\cos \theta = \frac{V_y}{\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta S_y}}$$

substituindo este valor do co-seno na expressão (XIX) a aceleração tangencial será

$$g_t = g \cdot \frac{V_y}{\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta S_y}}$$

Da mesma forma a figura 6-D nos dá que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{V_x}{V} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{V_x}{\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta S_y}}\end{aligned}$$

e substituindo em (XX) para a aceleração normal teremos]

$$g_n = g \cdot \frac{V_x}{\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta S_y}}$$