Um trem parte de uma estação *A*, onde está em repouso, com aceleração constante *a*, em certo momento o maquinista imprime ao trem uma desaceleração igual a *b*, o trem para ao chegar a uma estação *B*. Sendo *L* a distância entre as estações, determine o tempo percorrido na viagem.

Esquema do problema

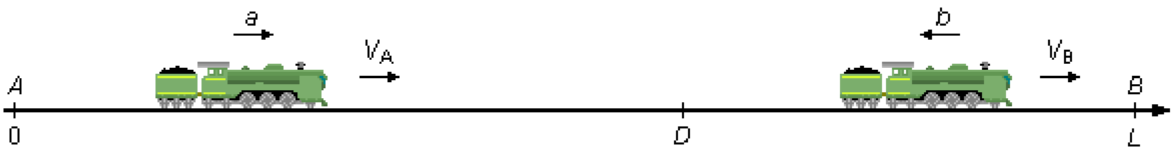

figura 1

Adota-se um sistema de referência orientado para a direita com origem na estação *A*, sendo *D* o ponto da trajetória em que o maquinista começa a frear o trem e *L* o espaço onde se encontra a estação *B* (figura 1). As grandezas com índice *A* referem-se a primeira parte do trajeto e com índice *B* a segunda parte

Dados do problema

- aceleração do trem: $\alpha_{A}=a$;
- desaceleração do trem: $\alpha_{B}=b$;
- distância entre as estações: L..

Solução

O trem apresenta aceleração ($\alpha>0$ na primeira parte do movimento e $\alpha<0$ na segunda parte), ele está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (*M.R.U.V.*), a equação que rege este tipo de movimento é do tipo

$$S=S_{0}+v_{0.}\,t+\frac{\alpha}{2}.t^{2} \qquad \text{(I)}$$

e para a velocidade temos

$$v=v_{0}+\alpha.t \qquad \text{(II)}$$

Sendo $S_{0A}=0$ o espaço de onde o trem parte e começa a acelerar, $S_{A}=D$ o espaço final onde o trem para de acelerar e começa a desacelerar, $V_{0A}=0$ a velocidade inicial do trem (parte do repouso), $\alpha_{A}=a$ a aceleração do trem e t_{A} o tempo que o trem permanece em movimento acelerado, substituindo esses dados na equação (I) acima obtemos

$$S_{A}=S_{0A}+V_{0A}.t_{A}+\frac{\alpha_{A}}{2}.t_{A}^{2}$$

$$D=0+0.t_{A}+\frac{a}{2}.t_{A}^{2}$$

$$D=\frac{a}{2}.t_{A}^{2} \qquad \text{(III)}$$

para a velocidade temos que

$$V_{A}=V_{0A}+\alpha_{A}.t_{A}$$

onde V_A é a velocidade final do trem após ter acelerado por um tempo t_A, então

$$V_A = 0 + \alpha_A . t_A$$
$$V_A = a.t_A \qquad \text{(IV)}$$

Para a segunda parte da viagem temos $S_{0B} = D$ o espaço onde o trem começa a desacelerar, $S_B = L$ o espaço final onde o trem para, $V_{0B} = V_A$ a velocidade inicial em que o trem se encontra ao começar a frear, sendo esta igual a velocidade final da primeira parte do movimento, $\alpha_B = b$ a desaceleração do trem e t_B o tempo que o trem desacelera até parar, levando estes valores à equação (I) temos

$$S_B = S_{0B} + V_{0B} . t_B + \frac{\alpha_B}{2} . t_B^2$$
$$L = D + a.t_A . t_B - \frac{b}{2} . t_B^2 \qquad \text{(V)}$$

a velocidade será dada por

$$V_B = V_{0B} + \alpha_B . t_B$$

como o trem para ao chegar a estação *B* a velocidade final será $V_B = 0$, a velocidade inicial $V_{0B} = V_A$ será dada pela expressão (IV) acima e t_B é o tempo que o trem desacelera até parar, podemos escrever

$$0 = a.t_A - b.t_B$$
$$a.t_A = b.t_B \qquad \text{(VI)}$$

A partir da expressão (VI) podemos isolar o tempo em que o trem permanece desacelerando, assim

$$t_B = \frac{a}{b} . t_A \qquad \text{(VII)}$$

Substituindo na equação (V) as expressões (III) e (VII), temos

$$L = \frac{a}{2} . t_A^2 + a.t_A . \frac{a}{b} . t_A - \frac{b}{2} . \left(\frac{a}{b} . t_A \right)^2$$
$$L = \frac{a}{2} . t_A^2 + \frac{a^2}{b} . t_A^2 - \frac{b}{2} . \frac{a^2}{b^2} . t_A^2$$
$$L = \frac{a}{2} . t_A^2 + \frac{a^2}{b} . t_A^2 - \frac{a^2}{2b} . t_A^2$$
$$L = \frac{a}{2} . t_A^2 + \frac{a^2}{2b} . t_A^2$$

colocando t_A^2 em evidência

$$L = t_{A.}^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a^2}{2b} \right)$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) do termo entre parênteses é igual a 2*b* assim

$$L=t_{\mathrm{A}}^{2}.\left(\frac{ab+a^{2}}{2b}\right)$$

isolando t_{A} temos o tempo em que o trem percorre a primeira parte do trajeto

$$t_{\mathrm{A}}^{2}=\frac{2Lb}{a.(a+b)}$$

$$t_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{2Lb}{a.(a+b)}}=\left[\frac{2Lb}{a.(a+b)}\right]^{1/2} \qquad \text{(VIII)}$$

Da mesma forma podemos isolar t_{A} na equação (VII)

$$t_{\mathrm{A}}=\frac{b}{a}.t_{\mathrm{B}} \qquad \text{(IX)}$$

Substituindo em (III) o valor dado por (V) novamente, obtemos

$$L=\frac{a}{2}.t_{\mathrm{A}}^{2}+a.t_{\mathrm{A}}.t_{\mathrm{B}}-\frac{b}{2}.t_{\mathrm{B}}^{2}$$

agora utilizando (IX) para o valor de t_{A}, escrevemos

$$L=\frac{a}{2}.\left(\frac{b}{a}.t_{\mathrm{B}}\right)^{2}+a.\frac{b}{a}.t_{\mathrm{B}}.t_{\mathrm{B}}-\frac{b}{2}.t_{\mathrm{B}}^{2}$$

$$L=\frac{a}{2}.\frac{b^{2}}{a^{2}}.t_{\mathrm{B}}^{2}+a.\frac{b}{a}.t_{\mathrm{B}}^{2}-\frac{b}{2}.t_{\mathrm{B}}^{2}$$

$$L=\frac{b^{2}}{2a^{2}}.t_{\mathrm{B}}^{2}+b.t_{\mathrm{B}}^{2}-\frac{b}{2}.t_{\mathrm{B}}^{2}$$

$$L=\frac{b^{2}}{2a^{2}}.t_{\mathrm{B}}^{2}+\frac{b}{2}.t_{\mathrm{B}}^{2}$$

colocando t_{B}^{2} em evidência

$$L=t_{\mathrm{B}}^{2}.\left(\frac{b^{2}}{2a}+\frac{b}{2}\right)$$

no termo entre parênteses o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) é 2*a* e escrevemos

$$L=t_{\mathrm{B}}^{2}.\left(\frac{b^{2}+ab}{2a}\right)$$

o tempo percorrido até o trem parar na estação *B* será

$$t_{\mathrm{B}}^{2}=\frac{2La}{b.(b+a)}$$

$$t_B=\sqrt{\frac{2La}{b.(b+a)}}=\left[\frac{2La}{b.(b+a)}\right]^{1/2} \qquad \text{(X)}$$

O tempo total da viagem (*t*) será dado pela soma das expressões (VIII) e (X)

$$t=t_A+t_B$$

$$t=\left[\frac{2Lb}{a.(a+b)}\right]^{1/2}+\left[\frac{2La}{b.(a+b)}\right]^{1/2}$$

colocando o termo $\left[\frac{2L}{a+b}\right]^{1/2}$ em evidência, temos

$$t=\left[\frac{2L}{a+b}\right]^{1/2}.\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}+\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}\right]$$

$$t=\left[\frac{2L}{a+b}\right]^{1/2}.\left[\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}+\frac{a^{1/2}}{b^{1/2}}\right]$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) do termo no segundo par de colchetes é $a^{1/2}.b^{1/2}$,então obtemos

$$t=\left[\frac{2L}{a+b}\right]^{1/2}.\left[\frac{b+a}{a^{1/2}.b^{1/2}}\right]$$

colocando o segundo termo entre colchetes para "dentro" da raiz, fica

$$t=\left[\frac{2L}{(a+b)}.\frac{(b+a)^2}{a.b}\right]^{1/2}$$

simplificando o termo $(a+b)$ a resposta final é dada por

$$\boxed{t=\left[\frac{2L.(b+a)}{a.b}\right]^{1/2}}$$