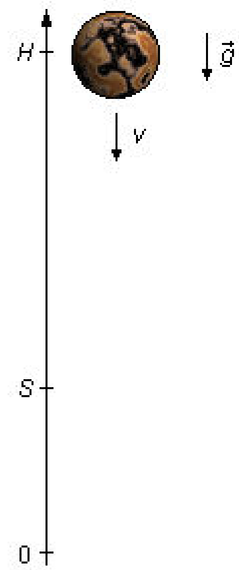
Um corpo é abandonado no vácuo de uma altura *H*. Calcular *H* sabendo que o corpo percorre os últimos *S* metros em *T* segundos. É dado *g*.

Esquema do problema



Adotando-se um sistema de referência orientado para cima, o espaço inicial será a altura *H* de onde objeto é solto, o espaço final será a origem (zero), *S* é a altura em que o corpo está ao se contar o tempo final da queda e a aceleração da gravidade e a velocidade terão sinal negativo, pois estão contra a orientação da trajetória.

Dados do problema

- altura da queda: *H*;
- espaço inicial da parte final da trajetória: $S_0 = S$;
- espaço final: $S = 0$;
- intervalo de tempo para percorrer o final da trajetória: *T*;
- aceleração da gravidade: $a = -g$.

Solução

O corpo cai com a aceleração da gravidade, ele está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*, escrevendo a equação horária deste movimento para a parte final da queda

$$S = S_0 + v_0 . t + \frac{a}{2} . t^2$$

$$0 = S + v_{0S} . T - \frac{g}{2} . T^2 \qquad \text{(I)}$$

onde v_{0S} indica a velocidade inicial não a partir do repouso, mas a partir do ponto em que o corpo passa pelo ponto de altura *S*.

Para o cálculo de v_{0S} vemos pela figura 1 que esta é a velocidade que o corpo possui ao cair de *H* até *S* ($\Delta S = S - H$) a partir do repouso ($v_0 = 0$), como não se conhece o intervalo de tempo desta queda podemos utilizar a *Equação de Torricelli* para obter v_{0S}

$$v^2 = v_0^2 - 2\, g . \Delta S$$

$$v_{0S}^2 = -2\, g . (S - H)$$

$$v_{0S} = \sqrt{-2\, g . (S - H)} \qquad \text{(II)}$$

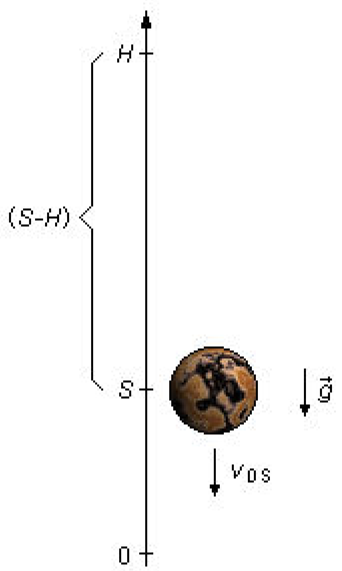


figura 1

Substituindo a equação (II) em (I)

$$0 = S - \sqrt{-2 . g . (S - H)} . T - \frac{g}{2} . T^2$$

isolando o termo com a raiz quadrada do lado esquerdo da igualdade, temos

$$\sqrt{-2.g.(S-H)}.T=S-\frac{g}{2}.T^2$$

elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, escrevemos

$$\left(\sqrt{-2.g.(S-H)}.T\right)^2=\left(S-\frac{g}{2}.T^2\right)^2$$

o termo do lado direito da igualdade é um produto notável da forma $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, assim

$$-2.g.(S-H).T^2=S^2-2.\frac{g}{2}.T^2+\frac{g^2}{4}.T^4$$

multiplicando a equação por 4 vem que

$$-4.2.g.(S-H).T^2=4.S^2-4.2.\frac{g}{2}.T^2+4.\frac{g^2}{4}.T^4$$
$$-8.g.(S-H).T^2=4.S^2-4.g.T^2+g^2.T^4$$

aplicando a propriedade distributiva ao lado esquerdo da equação obtemos

$$-8.g.S.T^2+8.g.H.T^2=4.S^2-4.g.S.T^2+g^2.T^4$$
$$8.g.H.T^2=4.S^2-4.g.S.T^2+g^2.T^4+8.g.S.T^2$$
$$H=\frac{4.S^2+4.g.S.T^2+g^2.T^4}{8.g.T^2}$$

o termo do numerador é da forma $a^2+2ab+b^2$ com

$$a^2=4\ S^2$$
$$2ab=4.g.S.T^2$$
$$b^2=g^2.T^4$$

e pode ser escrito como o produto notável $(a+b)^2$, a solução do problema é

$$\boxed{H=\frac{\left(2S+g.T^2\right)^2}{8.g.T^2}}$$