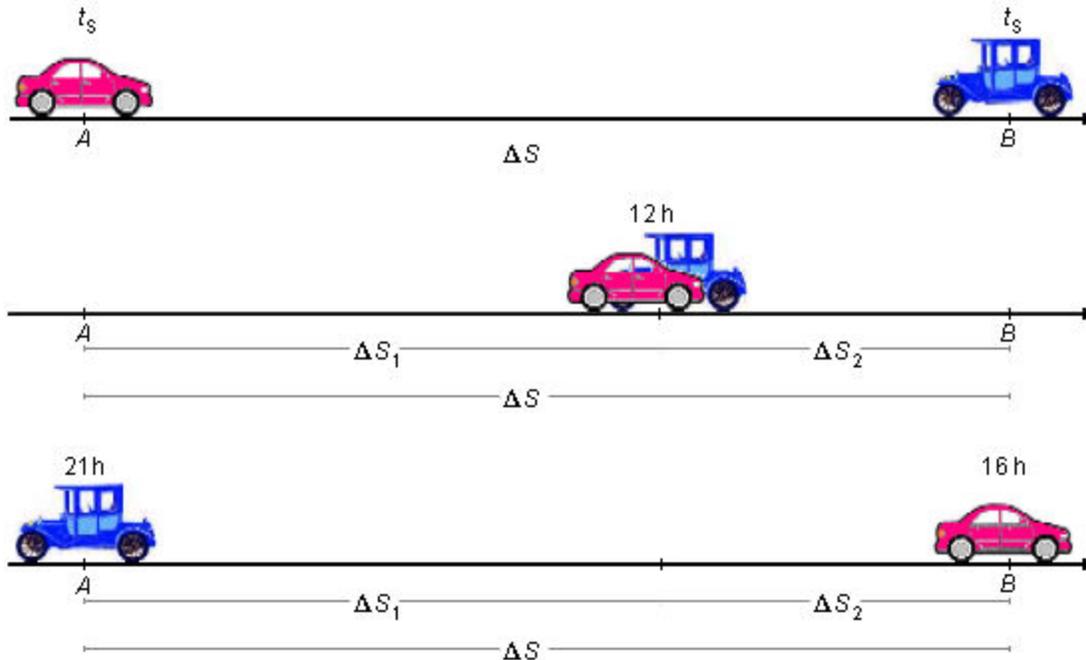


De duas cidades  $A$  e  $B$ , separadas por uma distância  $\Delta S$ , partem, ao nascer do Sol, um carro de cada cidade com destino a outra com velocidades constantes. Ao meio-dia eles se cruzam, o carro que partiu da cidade  $A$  chega a cidade  $B$  às 16 horas e o carro que partiu da cidade  $B$  chega a cidade  $A$  às 21 horas. Determinar a que horas nasceu o Sol.

Esquema do problema



Dados do problema

- distância entre as cidades:  $\Delta S$ ;
- instante do cruzamento entre os carros:  $t_s = 12 \text{ h}$ ;
- instante da chegada do carro de  $A$  em  $B$ :  $t_{AB} = 16 \text{ h}$ ;
- instante da chegada do carro de  $B$  em  $A$ :  $t_{BA} = 21 \text{ h}$ ;
- velocidade do carro que partiu da cidade  $A$ :  $v_A$ ;
- velocidade do carro que partiu da cidade  $B$ :  $v_B$ .

Solução

A distância total percorrida pelos carros é  $\Delta S$ , dividindo este intervalo em duas partes,  $\Delta S_1$  - distância percorrida pelo carro que saiu de  $A$  até o instante do encontro com o outro carro, e,  $\Delta S_2$  - distância percorrida pelo carro que saiu de  $B$  até o encontro, portanto temos  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ . Os dois intervalos são diferentes, pois os carros se encontram no meio do dia (12 h), mas não no meio do caminho, eles saem de suas cidades a mesma hora (nascer do Sol), mas chegam com horários diferentes, logo suas velocidades são diferentes.

Os carros estão se movimentando com velocidade constante, estão em *Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.)*, neste tipo de movimento a velocidade média no trajeto coincide com a velocidade do móvel em qualquer ponto da trajetória, e é dada pela fórmula

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Escrevendo a expressão da velocidade do carro de *A* nos intervalos  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$

$$v_A = \frac{\Delta S_1}{(12 - t_S)}$$

$$\Delta S_1 = v_A \cdot (12 - t_S) \quad (I)$$

$$v_A = \frac{\Delta S_2}{(16 - 12)} = \frac{\Delta S_2}{4}$$

$$\Delta S_2 = 4 v_A \quad (II)$$

as expressões para o carro que parte *B* serão

$$v_B = \frac{\Delta S_2}{(12 - t_S)}$$

$$\Delta S_2 = v_B \cdot (12 - t_S) \quad (III)$$

$$v_B = \frac{\Delta S_1}{(21 - 12)} = \frac{\Delta S_1}{9}$$

$$\Delta S_1 = 9 v_B \quad (IV)$$

As equações (I), (II), (III) e (IV) formam o seguinte sistema

$$\begin{cases} \Delta S_1 = v_A \cdot (12 - t_S) \\ \Delta S_2 = 4 v_A \\ \Delta S_2 = v_B \cdot (12 - t_S) \\ \Delta S_1 = 9 v_B \end{cases}$$

este sistema possui quatro equações e cinco incógnitas ( $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$ ,  $v_A$ ,  $v_B$  e  $t_S$ ) então é um sistema indeterminado.

Como  $v_A$  aparece nas equações (I) e (II) podemos encontrar uma relação entre elas dividindo uma pela outra.

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{v_A \cdot (12 - t_S)}{4 v_A}$$

simplificando  $v_A$ , reescrevemos

$$4 \Delta S_1 = (12 - t_S) \cdot \Delta S_2 \quad (V)$$

Analogamente  $v_B$  aparece nas equações (III) e (IV) dividindo uma pela outra

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{v_B \cdot (12 - t_S)}{9v_B}$$

simplificando  $v_B$  temos

$$(12 - t_S) \cdot \Delta S_1 = 9 \Delta S_2 \quad (\text{VI})$$

As equações (V) e (VI) formam um sistema de duas equações

$$\begin{cases} 4 \Delta S_1 = (12 - t_S) \cdot \Delta S_2 \\ (12 - t_S) \cdot \Delta S_1 = 9 \Delta S_2 \end{cases}$$

este sistema também é indeterminado pois possui duas equações e três incógnitas ( $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$  e  $t_S$ ), dividindo (V) por (VI) temos a relação

$$\frac{4 \Delta S_1}{(12 - t_S) \cdot \Delta S_1} = \frac{(12 - t_S) \cdot \Delta S_2}{9 \Delta S_2}$$

simplificando  $\Delta S_1$  do lado esquerdo e  $\Delta S_2$  do lado direito e multiplicando em "cruz" temos

$$\begin{aligned} 4 \cdot 9 &= (12 - t_S) \cdot (12 - t_S) \\ 36 &= (12 - t_S)^2 \end{aligned}$$

o termo  $(12 - t_S)^2$  é um produto notável da forma  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , portanto obtemos

$$\begin{aligned} 144 - 24t_S + t_S^2 &= 36 \\ t_S^2 - 24t_S + 144 - 36 &= 0 \\ t_S^2 - 24t_S + 108 &= 0 \end{aligned}$$

Esta é uma *Equação do 2.º Grau* onde a incógnita é o valor desejado  $t_S$ , resolvendo

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 108 = 576 - 432 = 144$$

$$t_S = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{24 \pm 12}{2}$$

as duas raízes da equação serão

$$t_{S1} = 18 \quad \text{e} \quad t_{S2} = 6$$

então o horário do nascer do Sol foi às **6 h**.

**Observação:** a solução da equação além de fornecer a hora que nasce o Sol, pedido no problema, ainda dá "de quebra" a hora do por do Sol, às 18 h.