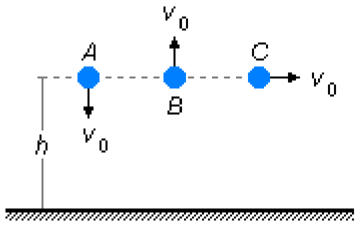
Três esferas idênticas são lançadas de uma mesma altura h com velocidades de mesmo módulo. A esfera A é lançada verticalmente para baixo, B é lançada verticalmente para cima e C é lançada horizontalmente. Qual delas chega ao solo como maior velocidade em módulo (despreze a resistência do ar).



Dados do problema

- velocidade de lançamento: v_0;
- altura do ponto de lançamento: h.

Solução

- Esfera *A*

Adotando-se um sistema de referência orientado para cima com origem no solo a aceleração da gravidade e a velocidade da esfera A são negativas (estão orientadas contra o sentido do referencial), figura 1. O movimento da esfera é um lançamento vertical para baixo, como está sofrendo a aceleração da gravidade está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (*M.R.U.V.*), pela *Equação de Torricelli* sua velocidade final no solo será

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,\Delta S$$
$$v^2 = \left(-v_0\right)^2 + 2\left(-g\right)\Delta S$$
$$v^2 = v_0^2 - 2\,g\left(0 - h\right)$$
$$v^2 = v_0^2 - 2\,g.0 + 2\,g\,h$$
$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,h$$
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} \qquad \text{(I)}$$

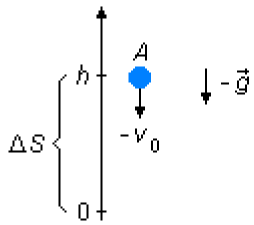


figura 1

- Esfera *B*

O movimento da esfera se divide em duas partes, a primeira é um lançamento vertical para cima, a esfera sobe até uma altura H, onde sua velocidade se anula, então começa a segunda parte do movimento que é uma queda livre a partir do repouso.

Na primeira parte a velocidade inicial de lançamento é positiva (está orientada no mesmo sentido do referencial) e a velocidade final é nula ($v_H = 0$), é o momento em que a esfera para e inverte o movimento para começar a cair, figura 2-A.

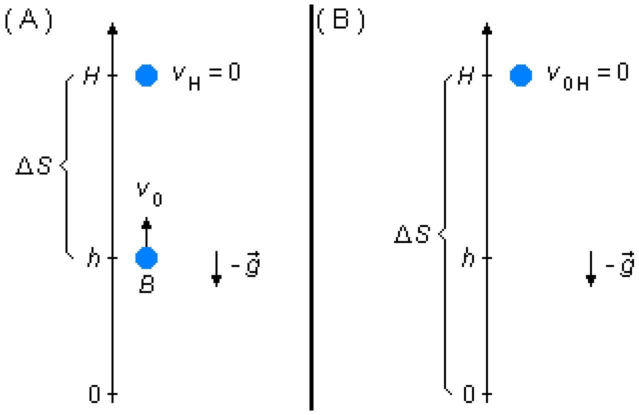


figura 2

Escrevendo a *Equação de Torricelli* para a primeira parte podemos encontrar a altura atingida pela esfera

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,\Delta S$$

$$v_H^2 = v_0^2 + 2\left(-g\right)\Delta S$$

$$0 = v_0^2 - 2\,g\left(H - h\right)$$

$$0 = v_0^2 - 2\,g\,H + 2\,g\,h$$

$$2\,g\,H = v_0^2 + 2\,g\,h$$

$$H = \frac{v_0^2 + 2\,g\,h}{2\,g} \qquad \text{(II)}$$

Na segunda parte, queda livre, a velocidade inicial será a velocidade final da primeira parte, ela será nula ($v_{0H} = v_H = 0$) e a altura inicial será dada pela expressão (II) encontrada anteriormente, pela *Equação de Torricelli* temos que a velocidade com que a esfera chega ao solo será de

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,\Delta S$$

$$v^2 = v_{0H}^2 + 2\left(-g\right)\Delta S$$

$$v^2 = 0 - 2\,g\left(0 - H\right)$$

$$v^2 = -2\,g.0 + 2\,g\,H$$

$$v^2 = 2\,g\left(\frac{v_0^2 + 2\,g\,h}{2\,g}\right)$$

$$v^2 = 2\,g\,\frac{v_0^2 + 2\,g\,h}{2\,g}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,h$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} \qquad \text{(III)}$$

- Esfera *C*

O movimento deve ser decomposto nas direções x e y, como se vê na figura 3-A.

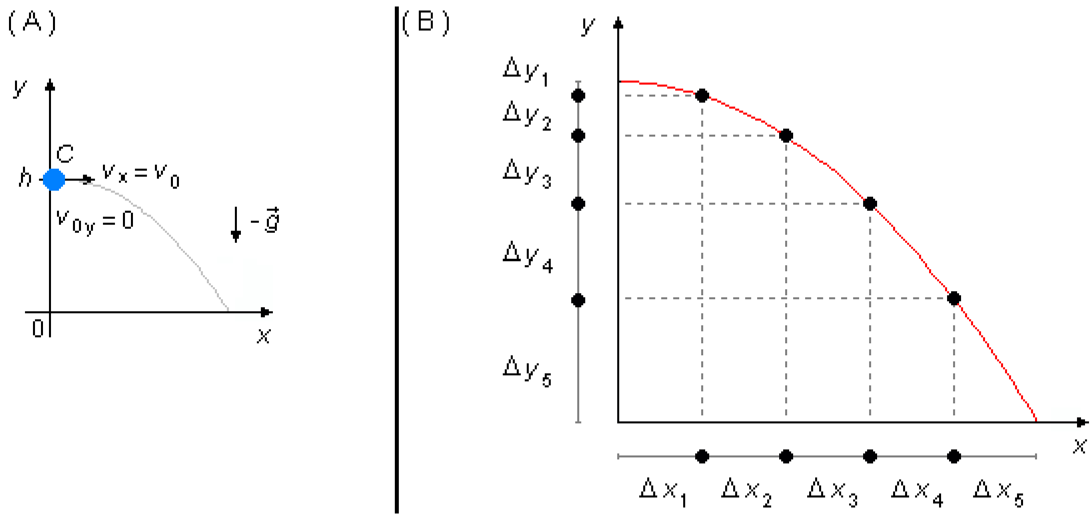


figura 3

Na direção-*x* não há aceleração atuando sobre a esfera, portanto, ela está em *Movimento Uniforme* (*M.U.*), para um mesmo intervalo de tempo os deslocamentos ao longo do eixo-*x* são iguais ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5$), figura 3-B. A componente da velocidade nessa direção será a própria velocidade de lançamento da esfera (v_0) então a velocidade nesta direção será

$$v_x = v_0 \qquad \text{(IV)}$$

Na direção-y temos a aceleração da gravidade atuando sobre a esfera, portanto ela está em Movimento Uniformemente Variado (M.U.V.), para um mesmo intervalo de tempo os deslocamentos são cada vez maiores ($\Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3 < \Delta y_4 < \Delta x_5$). Inicialmente a velocidade é nula ($v_{0y} = 0$), a velocidade nessa direção é encontrada aplicando-se a *Equação de Torricelli*

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2\,g\,\Delta S \\ v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2\left(-g\right)\Delta S_y \\ v_y^2 &= 0 - 2\,g\left(0 - h\right) \\ v_y^2 &= 2\,g\,h \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Para encontrar a velocidade com que a esfera atinge o solo é preciso somar as componentes nas direções *x* e *y*, dadas por (IV) e (V) respectivamente, usando o *Teorema de Pitágoras*, pela figura 4 obtemos

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2\,g\,h \\ v &= \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} \end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

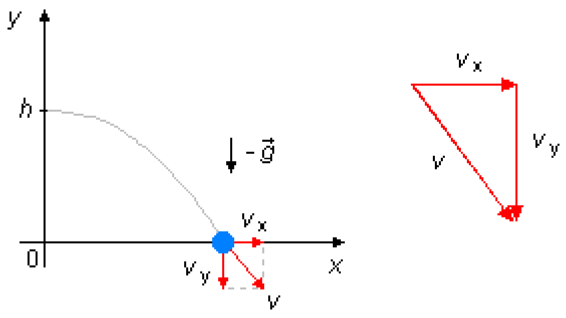


figura 4

Comparando as expressões (I), (III) e (VI) vemos que **todas as esferas chegam ao solo com a mesma velocidade**.