Duas partículas estão em movimento uniforme descrevendo circunferências concêntricas de raio diferentes e períodos de 80 s e 240 s. No instante inicial as partículas estão alinhadas com o centro das circunferências. Determinar o instante em que ocorre o primeiro cruzamento das partículas, supondo que os movimentos são
a) No mesmo sentido;
b) Em sentidos opostos.

Esquema do problema

Para cada uma das situações de movimento das partículas podemos analisar dois casos de como as partículas estão dispostas no início do movimento. Pela figura 1 vemos que se as partículas se movimentam no mesmo sentido, ambas podem estar do mesmo lado em relação ao centro das circunferências (1.º caso) ou uma partícula está de um lado em relação ao centro e a outra está do lado oposto (2.º caso).

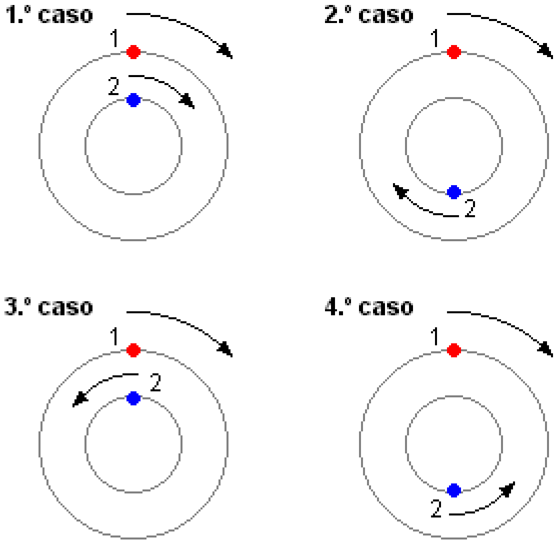

figura 1

Analogamente se elas se movimentam em sentidos opostos, podem começar o movimento do mesmo lado em relação ao centro (3.º caso) ou em lados opostos (4.º caso). Se adotarmos a partícula 1 começando a girar no sentido anti-horário estes mesmos casos se repetem invertendo a posição da partícula 2.

Dados do problema

- período de rotação da partícula 1: $T_1 = 240\ \text{s}$;
- período de rotação da partícula 2: $T_2 = 80\ \text{s}$.

Solução

a) Adota-se o sentido de rotação horário como sendo positivo com origem na posição da partícula 1. Temos no 1.º caso que as duas partículas começam o movimento do mesmo lado em relação ao cento O, as posições iniciais das partículas serão $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ e suas velocidades positivas ($\omega_1 > 0$ e $\omega_2 > 0$), como se vê na figura 2.

Escrevendo as equações horárias na forma angular para as partículas 1 e 2, temos

$$\varphi_1 = \varphi_{01} + \omega_1 t \quad , \quad \varphi_2 = \varphi_{02} + \omega_2 t$$
$$\varphi_1 = 0 + \omega_1 t \quad , \quad \varphi_2 = 0 + \omega_2 t$$

$$\varphi_1 = \omega_1\, t \qquad , \qquad \varphi_2 = \omega_2\, t \qquad \text{(I)}$$

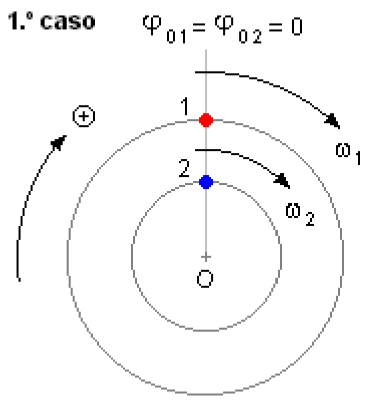

figura 2

As velocidades angulares em função dos períodos de rotação, para as partículas 1 e 2, são dada por

$$\omega_1 = \frac{2\,\pi}{T_1} \qquad \text{e} \qquad \omega_2 = \frac{2\,\pi}{T_2} \qquad \text{(II)}$$

substituindo as expressões de (II) em (I), obtemos

$$\varphi_1 = \frac{2\,\pi}{T_1}\, t \qquad , \qquad \varphi_2 = \frac{2\,\pi}{T_2}\, t \qquad \text{(III)}$$

A condição para que ocorra encontro entre as partículas é

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2\, n\, \pi \qquad \text{(IV)}$$

substituindo as expressões em (III) na condição (IV), temos

$$\frac{2\,\pi}{T_2}\, t = \frac{2\,\pi}{T_1}\, t + 2\, n\, \pi$$

substituindo os valores dos períodos dados no problema e para o 1.º encontro temos $n = 0$, ficamos com

$$\frac{2\,\pi}{80}\, t = \frac{2\,\pi}{240}\, t + 2.0.\pi$$
$$\frac{2\,\pi}{80}\, t = \frac{2\,\pi}{240}\, t + 0$$
$$\frac{2\,\pi}{80}\, t = \frac{2\,\pi}{240}\, t$$
$$\frac{1}{80} = \frac{1}{240} \qquad (\,?\,?\,?\,?\,)$$

Este resultado não tem significado, pois as partículas estão juntas no ponto de origem há um tempo indeterminado.

Para o 2.º caso em que as duas partículas começam o movimento de lados opostos em relação ao cento *O*, as posições iniciais das partículas serão $\varphi_{01} = 0$ e $\varphi_{02} = -\pi$, a partícula 2 está numa posição anterior à origem dada pela partícula 1, suas velocidades são positivas ($\omega_1 > 0$ e $\omega_2 > 0$), como se vê na figura 3.

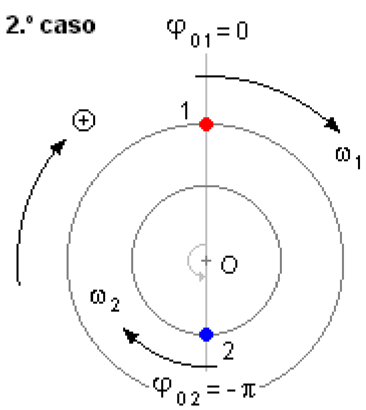

figura 3

Escrevendo as equações horárias na forma angular para as partículas 1 e 2, temos

$$\varphi_1 = \varphi_{01} + \omega_1\, t \qquad , \qquad \varphi_2 = \varphi_{02} + \omega_2\, t$$
$$\varphi_1 = 0 + \omega_1\, t \qquad , \qquad \varphi_2 = -\pi + \omega_2\, t$$
$$\varphi_1 = \omega_1\, t \qquad , \qquad \varphi_2 = -\pi + \omega_2\, t \qquad \text{(V)}$$

substituindo as expressões de (II) em (V), obtemos

$$\varphi_1=\frac{2\,\pi}{T_1}\,t \qquad , \qquad \varphi_2=-\pi+\frac{2\,\pi}{T_2}\,t \qquad \text{(VI)}$$

substituindo as expressões em (VI) na condição (IV), temos

$$-\pi+\frac{2\,\pi}{T_2}\,t=\frac{2\,\pi}{T_1}\,t+2\,n\,\pi$$

substituindo os valores do período dados no problema e para o 1.º encontro temos $n=0$, ficamos com

$$
\begin{gathered}
-\pi+\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t+2.0.\pi\\
-\pi+\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t+0\\
\frac{2\,\pi}{80}\,t-\frac{2\,\pi}{240}\,t=\pi\\
\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{240}\right)2\,\pi\,t=\pi\\
\left(\frac{3-1}{240}\right)2\,t=1\\
\frac{2}{240}.2\,t=1\\
\frac{4\,t}{240}=1\\
t=\frac{240}{4}\\
t=60\text{ s}
\end{gathered}
$$

Quando as partículas se movem no mesmo sentido o primeiro encontro se dá **60 s** após o início do movimento (2.º caso).

b) Para o 3.º caso em que as duas partículas começam o movimento do mesmo lado em relação ao cento *O*, as posições iniciais das partículas serão $\varphi_{01}=\varphi_{02}=0$ e como giram em sentidos opostos a velocidade da partícula 1 é positivas ($\omega_1>0$) e da partícula 2 é negativa ($\omega_2<0$), ela gira no sentido contrário a orientação da trajetória, como se vê na figura 4.

Escrevendo as equações horárias na forma angular para as partículas 1 e 2, temos

$$
\begin{aligned}
\varphi_1&=\varphi_{01}+\omega_1\,t \qquad , \qquad & \varphi_2&=\varphi_{02}-\omega_2\,t\\
\varphi_1&=0+\omega_1\,t \qquad , \qquad & \varphi_2&=0-\omega_2\,t\\
\varphi_1&=+\omega_1\,t \qquad , \qquad & \varphi_2&=-\omega_2\,t \qquad \text{(VII)}
\end{aligned}
$$

substituindo as expressões de (II) em (VII), obtemos

$$\varphi_1=\frac{2\,\pi}{T_1}\,t \qquad , \qquad \varphi_2=-\frac{2\,\pi}{T_2}\,t \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões em (VIII) na condição (IV), temos

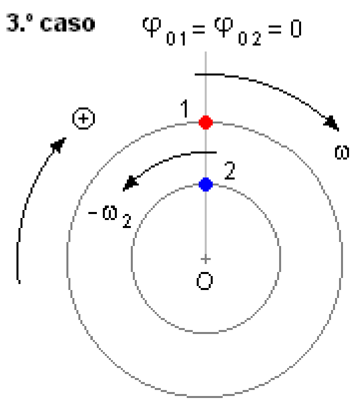

figura 5

$$-\frac{2\,\pi}{T_2}\,t=\frac{2\,\pi}{T_1}\,t+2\,n\,\pi$$

substituindo os valores dos períodos dados no problema e para o 1.º encontro temos $n=0$, ficamos com

$$-\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t+2.0.\pi$$
$$-\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t+0$$
$$-\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t$$
$$-\frac{1}{80}=\frac{1}{240}\qquad \textbf{(????)}$$

Da mesma forma que no item (a) este resultado não tem significado, pois as partículas estão juntas no ponto de origem há um tempo indeterminado.

Para o 2.º caso em que as duas partículas começam o movimento de lados opostos em relação ao cento *O*, as posições iniciais das partículas serão $\varphi_{01}=0$ e $\varphi_{02}=\pi$, a partícula 2 está numa posição posterior à origem dada pela partícula 1, a velocidade de 1 é positivas ($\omega_1>0$) e de 2 negativa ($\omega_2<0$), como se vê na figura 5.

Escrevendo as equações horárias na forma angular para as partículas 1 e 2, temos

$$\varphi_1=\varphi_{01}+\omega_1\,t\qquad,\qquad \varphi_2=\varphi_{02}-\omega_2\,t$$
$$\varphi_1=0+\omega_1\,t\qquad,\qquad \varphi_2=\pi-\omega_2\,t$$
$$\varphi_1=\omega_1\,t\qquad,\qquad \varphi_2=\pi-\omega_2\,t\qquad\text{(IX)}$$

substituindo as expressões de (II) em (IX), obtemos

$$\varphi_1=\frac{2\,\pi}{T_1}\,t\qquad,\qquad \varphi_2=\pi-\frac{2\,\pi}{T_2}\,t\qquad\text{(X)}$$

substituindo as expressões em (X) n condição (IV), temos

$$\pi-\frac{2\,\pi}{T_2}\,t=\frac{2\,\pi}{T_1}\,t+2\,n\,\pi$$

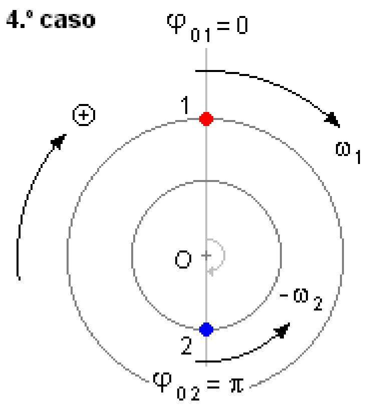

figura 5

substituindo os valores do período dados no problema e para o 1.º encontro temos $n=0$, ficamos com

$$\pi-\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t+2.0.\pi$$
$$\pi-\frac{2\,\pi}{80}\,t=\frac{2\,\pi}{240}\,t+0$$
$$\frac{2\,\pi}{80}\,t+\frac{2\,\pi}{240}\,t=\pi$$
$$\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{240}\right)2\,\pi\,t=\pi$$
$$\left(\frac{3+1}{240}\right)2\,t=1$$

$$\frac{4}{240}.2\,t = 1$$

$$\frac{8\,t}{240} = 1$$

$$t = \frac{240}{8}$$

$$t = 30\ \text{s}$$

Quando as partículas se movem em sentidos opostos o primeiro encontro se dá **30 s** após o início do movimento (4.º caso).