Calcular a perda de energia que ocorre no choque central inelástico entre duas esferas de massas m_1 e m_2 que se movem no mesmo sentido com velocidades v_1 e v_2.

Esquema do problema

figura 1

Dados do problema

- massa da esfera 1: m_1;
- massa da esfera 2: m_2;
- velocidade da esfera 1: v_1;
- velocidade da esfera 2: v_2.

Solução

Para que haja o choque devemos supor $v_1 > v_2$, como o choque é inelástico as duas esferas permanecem juntas após o choque, a quantidade de movimento se conserva e a energia cinética do sistema depois do choque é menor que a energia cinética antes do choque. Assim começamos por escrever as equações da quantidade de movimento e da energia cinética para as esferas 1 e 2 nas situações antes e depois do choque

Antes do choque	**Depois do choque**
$Q_1 = m_1\,v_1 \qquad \text{(I)}$ $Q_2 = m_2\,v_2 \qquad \text{(II)}$ $E_{C1}^{i} = \dfrac{m_1\,v_1^2}{2} \qquad \text{(III)}$ $E_{C2}^{i} = \dfrac{m_2\,v_2^2}{2} \qquad \text{(IV)}$	$Q = m_1\,v + m_2\,v \qquad \text{(V)}$ $E_{C}^{f} = \dfrac{m_2\,v^2}{2} + \dfrac{m_2\,v^2}{2} \qquad \text{(VI)}$

onde E_{C1}^{i} e E_{C2}^{i} são as energias cinéticas iniciais das esferas 1 e 2 respectivamente, E_{C}^{f} é a energia cinética final do conjunto, Q e v são a quantidade de movimento e a velocidade do conjunto após o choque respectivamente.

A energia dissipada (ΔE) será a diferença entre a energia final e a energia inicial das esferas

$$\Delta E = E_{C}^{f} - \left(E_{C1}^{i} + E_{C2}^{i}\right)$$

substituindo as equações (VI), (III) e (IV) nesta expressão, temos

$$\Delta E = \frac{m_1\,v^2}{2} + \frac{m_2\,v^2}{2} - \left(\frac{m_1\,v_1^2}{2} + \frac{m_2\,v_2^2}{2}\right)$$

$$\Delta E=\frac{v^2}{2}.\left(m_1+m_2\right)-\frac{m_1\,v_1^2}{2}-\frac{m_2\,v_2^2}{2} \qquad \text{(VII)}$$

Para a obtenção de v usamos o *Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento* utilizando as equações (I) e (II) antes do choque e a equação (VI) depois do choque

$$\begin{gathered}
Q^{\text{i}}=Q^{\text{f}}\\
m_1\,v_1+m_2\,v_2=m_1\,v+m_2\,v\\
v.\left(m_1+m_2\right)=m_1\,v_1+m_2\,v_2\\
v=\frac{m_1\,v_1+m_2\,v_2}{m_1+m_2} \qquad \text{(VIII)}
\end{gathered}$$

substituindo (VIII) em (VII)

$$\Delta E=\frac{1}{2}.\left(\frac{m_1\,v_1+m_2\,v_2}{m_1+m_2}\right)^2.\left(m_1+m_2\right)-\frac{m_1\,v_1^2}{2}-\frac{m_2\,v_2^2}{2}$$

simplificando o termo $\left(m_1+m_2\right)$ no numerador e no denominador, temos

$$\Delta E=\frac{\left(m_1\,v_1+m_2\,v_2\right)^2}{2.\left(m_1+m_2\right)}-\frac{m_1\,v_1^2}{2}-\frac{m_2\,v_2^2}{2}$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) entre os três termos da direita é $2.\left(m_1+m_2\right)$, assim

$$\Delta E=\frac{m_1^2\,v_1^2+2\,m_1\,v_1\,m_2\,v_2+m_2^2\,v_2^2-m_1\,v_1^2.\left(m_1+m_2\right)-m_2\,v_2^2.\left(m_1+m_2\right)}{2.\left(m_1+m_2\right)}$$

$$\Delta E=\frac{m_1^2\,v_1^2+2\,m_1\,v_1\,m_2\,v_2+m_2^2\,v_2^2-m_1^2\,v_1^2-m_1\,m_2\,v_1^2-m_2\,m_1\,v_2^2-m_2^2\,v_2^2}{2.\left(m_1+m_2\right)}$$

$$\Delta E=\frac{2\,m_1\,v_1\,m_2\,v_2-m_1\,m_2\,v_1^2-m_2\,m_1\,v_2^2}{2.\left(m_1+m_2\right)}$$

colocando $-m_1\,m_2$ em evidência e arranjando os termos ficamos com

$$\Delta E=\frac{-m_1\,m_2.\left(v_1^2-2\,v_1\,v_2+v_2^2\right)}{2.\left(m_1+m_2\right)}$$

o termo entre parênteses no numerador é um *Produto Notável* da forma $\left(a-b\right)^2=a^2-2\,a\,b+b^2$, então a solução fica

$$\boxed{\Delta E=\frac{-m_1\,m_2.\left(v_1-v_2\right)^2}{2.\left(m_1+m_2\right)}}$$