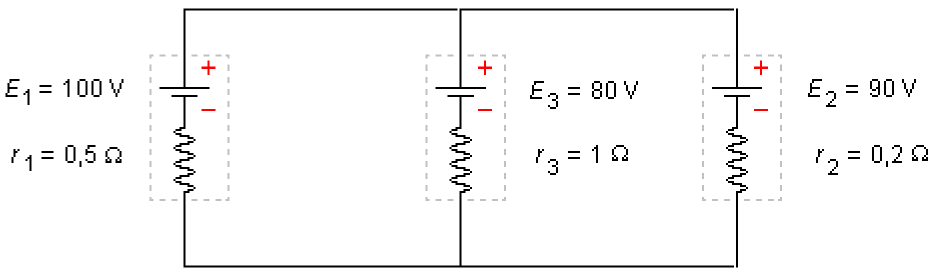
Três pilhas cujas f.e.m. e resistências internas são respectivamente $E_1=100\ \text{V}$, $E_2=90\ \text{V}$ e $E_3=80\ \text{V}$ e $r_1=0{,}5\ \Omega$, $r_2=0{,}2\ \Omega$ e $r_3=1\ \Omega$ são ligadas por fios de resistência desprezível segundo o esquema indicado na figura. Pede-se determinar as intensidades das correntes nos diferentes trechos do circuito:

a) No caso do esquema indicado;

b) Na hipótese de se substituir a pilha E_3 por um fio condutor de resistência $R=1\ \Omega$.



Dados do problema

Resistências internas das pilhas

- $r_1=0{,}5\ \Omega$;
- $r_2=0{,}2\ \Omega$;
- $r_3=1\ \Omega$.

f.e.m. das pilhas

- $E_1=100\ \text{V}$;
- $E_2=90\ \text{V}$;
- $E_3=80\ \text{V}$.

Resistência do fio

- $R=1\ \Omega$.

Solução

a) Em primeiro lugar a cada ramo do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. No ramo *EFAB* temos a corrente i_1 no sentido horário, no ramo *BE* a corrente i_3 indo de *B* para *E* e no ramo *EDCB* a corrente i_2 no sentido anti-horário. Em segundo lugar para cada malha do circuito atribuímos um sentido, também aleatório, para se percorrer a malha. Malha α (*ABEFA*) sentido horário e malha β (*BCDEB*) também sentido horário. Vemos todos estes elementos na figura 1 abaixo

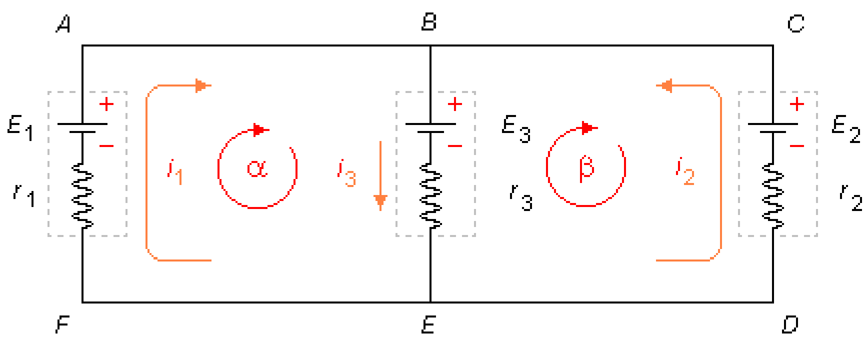


figura 1

As correntes i_1 e i_2 chegam no nó *B* e a corrente i_3 sai dele, aplicando-se a *lei dos nós* ao nó *B*

$$i_3 = i_1 + i_2 \qquad \text{(I)}$$

Aplicando a *lei das malhas* à malha α a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo a malha β conforme a figura 2, escrevemos

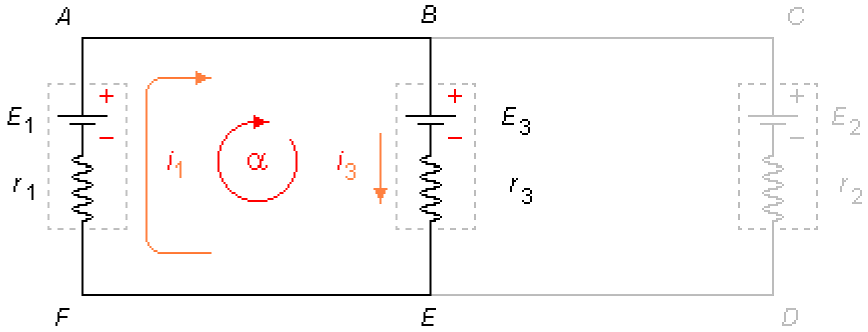


figura 2

$$E_3 + r_3\, i_3 + r_1\, i_1 - E_1 = 0 \qquad \text{(II)}$$

substituindo os valores do problema fica

$$80 + 1.\, i_3 + 0{,}5.\, i_1 - 100 = 0$$
$$i_3 + 0{,}5.\, i_1 - 20 = 0$$
$$i_3 + 0{,}5.\, i_1 = 20 \qquad \text{(III)}$$

Esquecendo-se a malha α e aplicando a *lei da malhas* à malha β, como foi feito acima, temos pela figura 3, a partir do ponto *B*

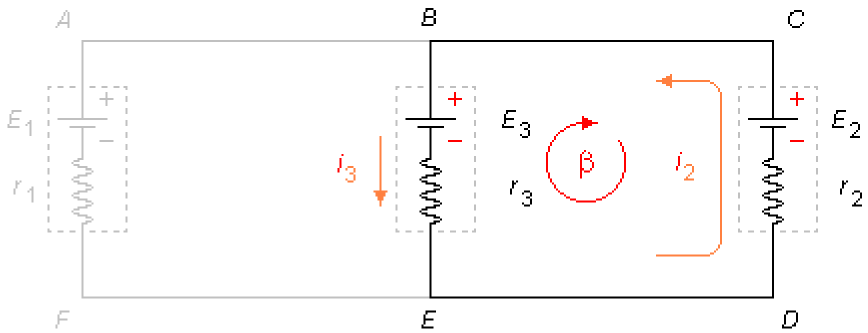


figura 3

$$E_2 - r_2\, i_2 - r_3\, i_3 - E_3 = 0 \qquad \text{(IV)}$$

substituindo os valores

$$90 - 0{,}2\, i_2 - 1\, i_3 - 80 = 0$$
$$10 - 0{,}2\, i_2 - i_3 = 0$$
$$0{,}2\, i_2 + i_3 = 10 \qquad \text{(V)}$$

Com as equações (I), (III) e (V) temos o seguinte sistema de três equações a três incógnitas (i_1, i_2, i_3)

$$
\left|\begin{array}{ll}
i_3=i_1+i_2 & \text{(I)}\\
i_3+0{,}5\,i_1=20 & \text{(III)}\\
0{,}2\,i_2+i_3=10 & \text{(V)}
\end{array}\right.
$$

isolando o valor de i_1 na equação (III) temos

$$i_1=\frac{20-i_3}{0{,}5} \qquad \text{(VI)}$$

isolando o valor de i_2 na equação (V) temos que

$$i_2=\frac{10-i_3}{0{,}2} \qquad \text{(VII)}$$

substituindo as expressões (VI) e (VII) na equação (I) obtemos

$$i_3=\frac{20-i_3}{0{,}5}+\frac{10-i_3}{0{,}2}$$

Escrevendo na expressão acima $0{,}5=\frac{5}{10}$ e $0{,}2=\frac{2}{10}$ fica

$$i_3=\frac{20-i_3}{\frac{5}{10}}+\frac{10-i_3}{\frac{2}{10}}$$

$$i_3=\frac{10\left(20-i_3\right)}{5}+\frac{10\left(10-i_3\right)}{2}$$

calculando o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) temos

$$i_3=\frac{2.10\left(20-i_3\right)+5.10\left(10-i_3\right)}{10}$$

$$i_3=\frac{400-20\,i_3+500-50\,i_3}{10}$$

$$i_3=\frac{900-70\,i_3}{10}$$

$$10\,i_3+70\,i_3=900$$

$$80\,i_3=900$$

$$i_3=\frac{900}{80}$$

$$i_3=11{,}25\text{ A} \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo o valor (VIII) encontrado acima nas expressões (VI) e (VII) encontramos os valores de i_1 e i_2 respectivamente

$$i_1=\frac{20-11{,}25}{0{,}5}$$

$$i_1=\frac{8{,}75}{0{,}5}$$

$$i_1=17{,}5\text{ A}$$

$$i_2 = \frac{10 - 11{,}25}{0{,}2}$$

$$i_2 = -\frac{1{,}25}{0{,}2}$$

$$i_2 = -6{,}25 \text{ A}$$

Como o valor da corrente i_2 é negativo, isto indica que seu verdadeiro sentido é contrário ao escolhido na figura 1. Os valores das correntes são **i_1=17,5 A**, **i_2=6,25 A** e **i_3=11,25 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 4.

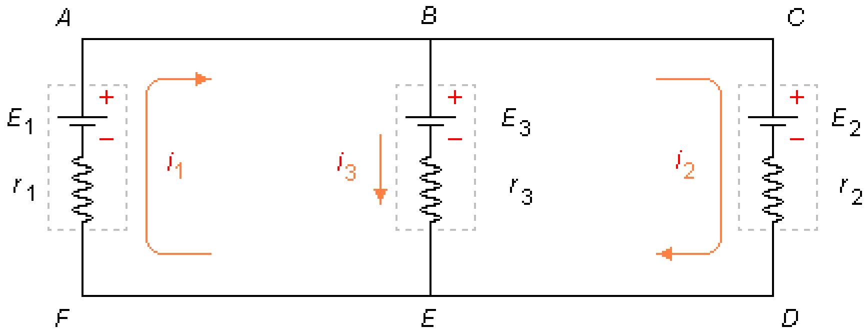


figura 4

b) O circuito original é substituído pelo seguinte

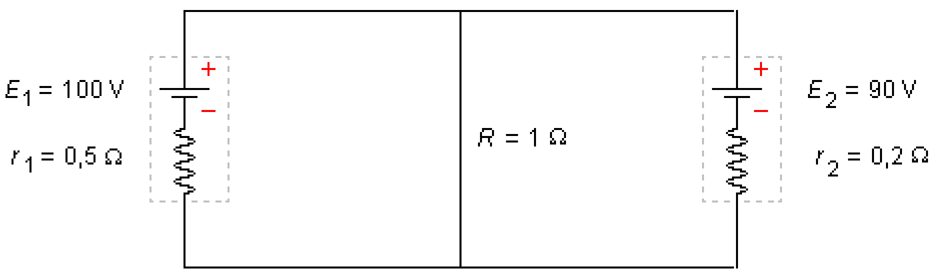


figura 5

As equações (I), (II) e (IV) continuam válidas com as seguintes alterações, como a pilha 3 foi retirada fazemos $E_3 = 0$ e a resistência interna da pilha é trocada pela resistência do fio, $r_3 = R$ (figura 5).

$$R\, i_3 + r_1\, i_1 - E_1 = 0$$

$$1.\, i_3 + 0{,}5.\, i_1 - 100 = 0$$

$$i_3 + 0{,}5.\, i_1 = 100 \qquad \text{(IX)}$$

$$E_2 - r_2\, i_2 - R\, i_3 = 0$$

$$90 - 0{,}2.\, i_2 - 1.\, i_3 = 0$$

$$0{,}2.\, i_2 + i_3 = 90 \qquad \text{(X)}$$

então (I), (IX) e (X) formam o seguinte sistema de três equações a três incógnitas (i_1, i_2, i_3)

$$
\left|\begin{array}{ll}
i_3 = i_1 + i_2 & \text{(I)} \\
i_3 + 0,5\, i_1 = 100 & \text{(IX)} \\
0,2\, i_2 + i_3 = 90 & \text{(X)}
\end{array}\right.
$$

isolando o valor de i_1 na equação (IX) temos

$$
i_1 = \frac{100 - i_3}{0,5} \tag{XI}
$$

isolando o valor de i_2 na equação (X) temos que

$$
i_2 = \frac{90 - i_3}{0,2} \tag{XII}
$$

substituindo as expressões (XI) e (XII) na equação (I) obtemos

$$
i_3 = \frac{100 - i_3}{0,5} + \frac{90 - i_3}{0,2}
$$

Escrevendo na expressão acima $0,5 = \dfrac{5}{10}$ e $0,2 = \dfrac{2}{10}$ fica

$$
i_3 = \frac{100 - i_3}{\frac{5}{10}} + \frac{90 - i_3}{\frac{2}{10}}
$$

$$
i_3 = \frac{10\left(100 - i_3\right)}{5} + \frac{10\left(90 - i_3\right)}{2}
$$

calculando o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) temos

$$
i_3 = \frac{2.10\left(100 - i_3\right) + 5.10\left(90 - i_3\right)}{10}
$$

$$
i_3 = \frac{2000 - 20\, i_3 + 4500 - 50\, i_3}{10}
$$

$$
i_3 = \frac{6500 - 70\, i_3}{10}
$$

$$
10\, i_3 + 70\, i_3 = 6500
$$

$$
80\, i_3 = 6500
$$

$$
i_3 = \frac{6500}{80}
$$

$$
i_3 = 81,25 \text{ A} \tag{XIII}
$$

substituindo o valor (XIII) encontrado acima nas expressões (XI) e (XII) encontramos os valores de i_1 e i_2 respectivamente

$$
i_1 = \frac{100 - 81,25}{0,5}
$$

$$
i_1 = \frac{18,75}{0,5}
$$

$$i_1 = 37{,}5\ \text{A}$$

$$i_2 = \frac{90 - 81{,}25}{0{,}2}$$

$$i_2 = \frac{8{,}75}{0{,}2}$$

$$i_2 = 43{,}75\ \text{A}$$

Todos os valores de corrente são positivos, isto indica que os sentidos escolhidos na figura 1 estão corretos . Os valores das correntes são **i_1=37,5 A**, **i_2=43,75 A** e **i_3=81,25 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 6.

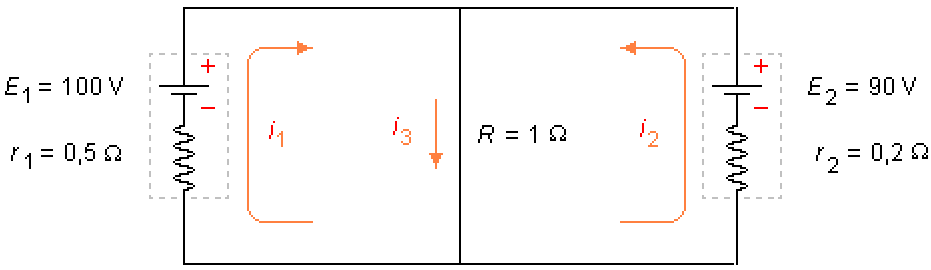


figura 6