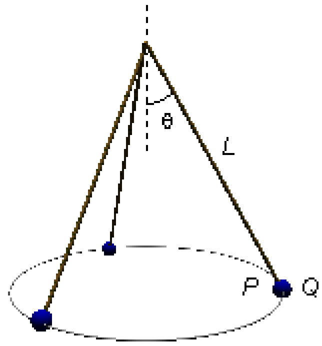
Três esferas, cada uma delas de peso *P* e eletrizada com carga *Q*, estão suspensas por fios isolantes de comprimento *L* presos a um mesmo ponto. Na posição de equilíbrio os fios formam um ângulo θ com a vertical. Calcular a carga *Q*, sendo *k* a constante eletrostática do meio.



Dados do problema

- peso de cada esfera: *P*;
- comprimento do fio: *L*;
- ângulo entre o fio e a vertical: θ;
- constante eletrostática do meio: *k*.

Solução

Olhando este arranjo de cargas “de cima” em direção a um plano horizontal que contém as cargas (figura 1-A), vemos que, como as cargas têm todas o mesmo valor elas se repelem ficando equidistantes umas das outras (figura 1-B). As cargas estão nos vértices de um triângulo equilátero, sendo a distância entre duas cargas igual a *d*, o ângulo entre dois lados do triângulo é de 60º.

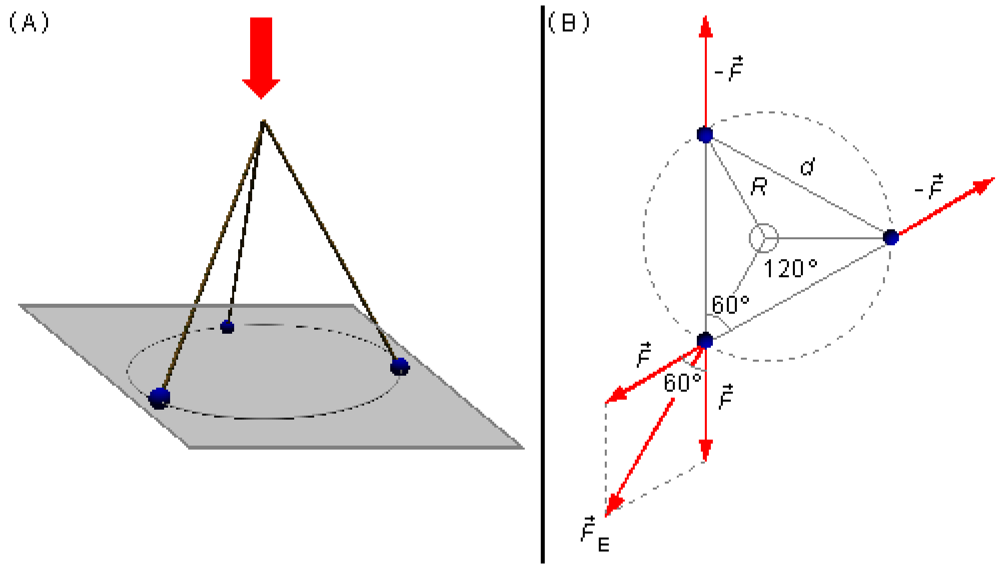


figura 1

A distância de uma carga ao centro da distribuição é *R* e a distância *d* entre duas cargas (lado do triângulo) pode ser encontrada aplicando-se a *Lei dos Co-senos*

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2\,R\,R\cos 120°$$

$$d^2 = 2\,R^3 - 2\,R^2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 = 2\,R^2 + R^2$$

$$d^2 = 3\,R^2$$

$$d = \sqrt{3\,R^2}$$
$$d = R\,\sqrt{3}$$

Sobre uma das cargas atuam as forças elétricas ($\vec{F}$) devido as outras duas cargas, esta força é dada pela *Lei de Coulomb*

$$F = k\,\frac{Q\,Q}{d^2}$$
$$F = k\,\frac{Q^2}{\left(R\,\sqrt{3}\right)^2}$$
$$F = k\,\frac{Q^2}{3\,R^2} \qquad \text{(I)}$$

O ângulo ente estas forças é oposto pelo vértice ao ângulo do triângulo onde está a carga, assim este ângulo também mede 60º, então a força elétrica resultante sobre uma das cargas ($\vec{F}_{\text{E}}$) é calculada aplicando-se a *Lei dos Co-senos*

$$F_{\text{E}}^2 = F^2 + F^2 + 2\,F\,F\,\cos 60^\circ$$
$$F_{\text{E}}^2 = 2\,F^2 + 2\,F^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$F_{\text{E}}^2 = 2\,F^2 + F^2$$
$$F_{\text{E}}^2 = 3\,F^2$$
$$F_{\text{E}} = \sqrt{3\,F^2}$$
$$F_{\text{E}} = F\,\sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

substituindo o valor da força entre duas cargas encontrado em (I) na expressão (II), temos a resultante sobre uma das cargas

$$F_{\text{E}} = k\,\frac{Q^2}{R^2}\,\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{(III)}$$

O raio da circunferência em torno do qual as esferas se distribuem pode ser escrito em função de L e θ dados, pela figura 2 podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{L}$$
$$R = L\,\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(IV)}$$

substituindo (IV) em (III)

$$F_{\text{E}} = k\,\frac{Q^2}{L^2\,\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{(V)}$$

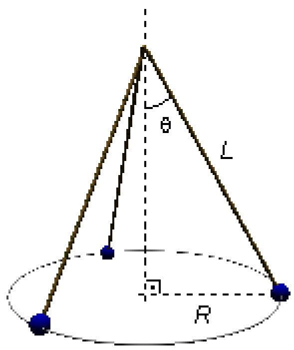
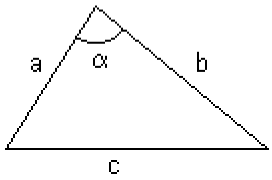


figura 2

observação: *por que na primeira Lei dos Co-senos foi usado o sinal de subtração do co-seno e na segunda uma soma?*

Para um triângulo de lados a, b, c e ângulo α, oposto ao lado c como na figura ao lado, a Lei dos Co-senos é escrita como



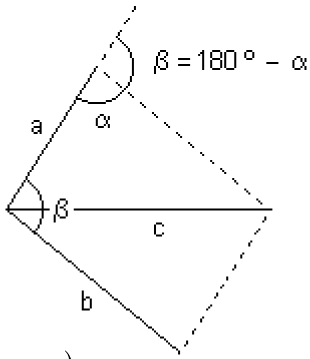
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\alpha$$

como é o primeiro caso do problema

No entanto se o lado b do triângulo for colocado numa posição formando um ângulo β com o lado a, temos que este ângulo é o mesmo que o ângulo formado entre um prolongamento do lado a e a posição original do lado b, figura abaixo, estes dois ângulo são suplementares (sua soma é 180º), assim o valor de β será

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

A aplicação da Lei dos Co-senos a este caso leva a



$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\left(180^\circ - \alpha\right)$$

pela propriedade do co-seno da diferença de arcos, temos

$$\cos\left(x - y\right) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$$

aplicando esta propriedade ficamos com

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\left(\cos 180^\circ\cos\alpha + \operatorname{sen} 180^\circ\operatorname{sen}\alpha\right)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\left(-1.\cos\alpha + 0.\operatorname{sen}\alpha\right)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\alpha$$

o segundo caso do problema. é equivalente ao primeiro.

Assim as duas expressões coincidem, dependendo apenas de qual ângulo é considerado.

Olhando agora em direção a um plano vertical que contenha uma carga e o fio que a sustenta (figura 3-A), vemos que sobre a carga atuam a força peso P, a tensão no fio T e a força elétrica F_E devido as outras cargas (figura 3-B), o ângulo do fio onde a carga esta fixada e a vertical é dado como θ este também é o ângulo entre o fio e a vertical que passa pela carga, são ângulo alternos internos.

Desenhando as forças num sistema de eixos coordenados e decompondo as forças ao longo das direções x e y (figura 4) Aplicando a *2.ª Lei de Newton*

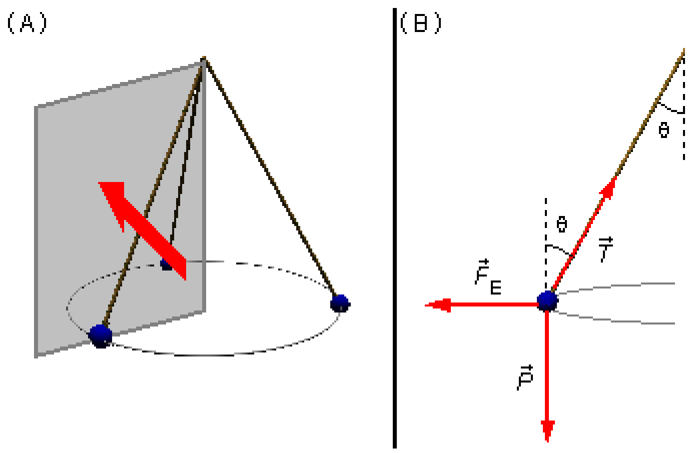


figura 3

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Na direção vertical temos a força peso ($\vec{P}$) e a componente vertical da tensão($\vec{T}_y$); como não há movimento nesta direção a aceleração resultante será zero, o ângulo θ será medido entre a tensão e o eixo-*y*, em módulo temos

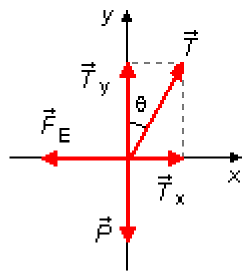


figura 4

$$\begin{aligned} T_y - P &= m\,a \\ T\cos\theta - P &= 0 \\ T\cos\theta &= P \end{aligned} \tag{VI}$$

Na direção horizontal temos a força elétrica ($\vec{F}_E$) e a componente horizontal da tensão($\vec{T}_x$); como não há movimento nesta direção a aceleração resultante será zero, em módulo temos

$$\begin{aligned} T_x - F_E &= m\,a \\ T\,\text{sen}\,\theta - F_E &= 0 \\ T\,\text{sen}\,\theta &= F_E \end{aligned} \tag{VII}$$

Dividindo a expressão (VII) pela (VI), obtemos

$$\frac{T\,\text{sen}\,\theta}{T\cos\theta} = \frac{F_E}{P}$$

simplificando a tensão *T* no numerador e no denominador e substituindo $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{F_E}{P}$$
$$F_E = P\,\text{tg}\,\theta$$

substituindo a força elétrica pelo valor encontrado em (V), temos

$$k\,\frac{Q^2}{L^2\,\text{sen}^2\,\theta}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = P\,\text{tg}\,\theta$$
$$Q^2 = \frac{3}{\sqrt{3}}\,\frac{P\,\text{tg}\,\theta}{k}\,L^2\,\text{sen}^2\,\theta$$

multiplicando o termo do lado direito da igualdade por $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ vem

$$Q^2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,\frac{3}{\sqrt{3}}\,\frac{P\,\text{tg}\,\theta}{k}\,L^2\,\text{sen}^2\,\theta$$
$$Q^2 = \frac{3\sqrt{3}}{3}\,\frac{P\,\text{tg}\,\theta}{k}\,L^2\,\text{sen}^2\,\theta$$
$$Q^2 = \frac{P\,\text{tg}\,\theta\,\sqrt{3}}{k}\,L^2\,\text{sen}^2\,\theta$$
$$Q = \sqrt{\frac{P\,\text{tg}\,\theta\,\sqrt{3}}{k}\,L^2\,\text{sen}^2\,\theta}$$

$$\boxed{Q = L \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{P \operatorname{tg} \theta \sqrt{3}}{k}}}$$