Duas pequenas esferas idênticas *A* e *B* são colocadas sobre uma lâmina de vidro plana e horizontal a uma distância *d* uma da outra. A esfera *A* encontra-se inicialmente neutra e *B* eletrizada. Uma terceira esfera *C* idêntica as duas primeiras, inicialmente neutra, é posta em contato com *B* e em seguida com *A*. Pergunta-se a que distância *x* de *A* sobre a reta *AB*, é necessário colocar *C* para que permaneça em equilíbrio.

Dados do problema

- carga da esfera *A*: $Q_A = 0$;
- carga da esfera *B*: $Q_B = Q$;
- carga da esfera *C*: $Q_C = 0$;
- distância entre as esferas *A* e *B*: *d*.

Solução

A situação inicial descrita no problema está mostrada na figura 1, ao lado. Adotando-se *Q* para a carga inicial da esfera *B*, e um sistema de referência com origem em *A* e apontado para a direita com *B* a uma distância *d* de *A*. Vamos em primeiro lugar calcular a carga que as outras esferas vão adquirir por contato.

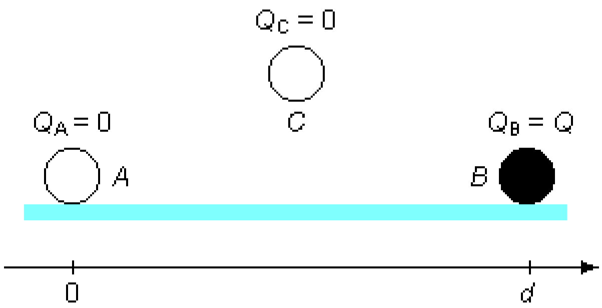

figura 1

Colocando-se as esferas *B* e *C* em contato a carga delas se distribuirá igualmente pelas duas esferas

$$Q_B = Q_C = \frac{Q_B + Q_C}{2} = \frac{Q+0}{2} = \frac{Q}{2}$$

como mostrado na figura 2.

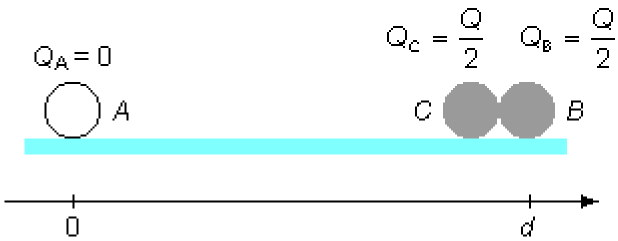

figura 2

Agora a esfera *C* com sua carga valendo $Q/2$ é colocada em contato com a esfera *A* de carga nula e a carga de *C* se distribuirá pelas duas esferas (figura 3)

$$Q_A = Q_C = \frac{Q_A + Q_C}{2} = \frac{0 + \frac{Q}{2}}{2} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Q}{4}$$

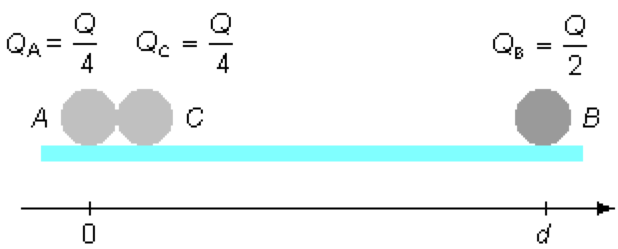

figura 3

Na situação final teremos as esferas *A* e *C* com cargas $Q_A = Q_C = \dfrac{Q}{4}$ e a esfera *B* com carga $Q_B = \dfrac{Q}{2}$. E a esfera *C* deverá ser colocada num ponto *x* entre *A* e *B* de modo a permanecer em equilíbrio, situação mostrada na figura 4.

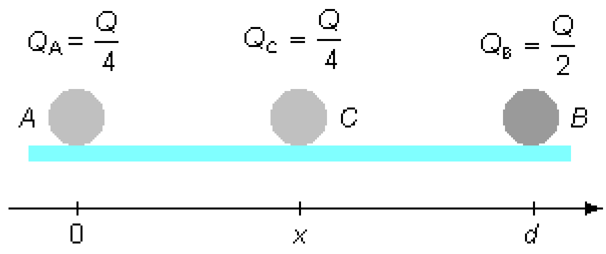

figura 4

Para que ela fique em equilíbrio a força que age entre as esferas *A* e *C* deve ser igual a que age entre *B* e *C* para que a resultante da forças seja igual a zero (figura 5)

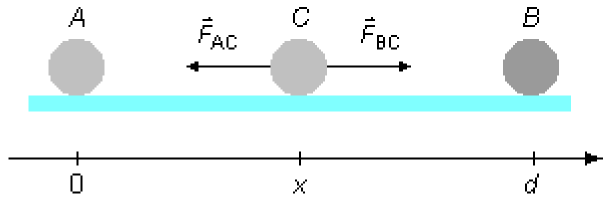

figura 5

$$\vec{F}_{AC} = \vec{F}_{BC} \tag{I}$$

A lei de Coulomb nos diz que a força elétrica é dada por

$$F_{el} = k_0 \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \tag{II}$$

Aplicando a expressão (II) para as esferas *A* e *C*, temos

$$F_{AC} = k_0 \frac{Q_A\,Q_C}{x^2}$$

$$F_{AC} = k_0 . \frac{\frac{Q}{4}\,\frac{Q}{4}}{x^2}$$

$$F_{AC} = k_0 \frac{Q^2}{16} \frac{1}{x^2} \tag{III}$$

Para as esferas *B* e *C* temos que a distância entre elas será $r = (d - x)$, substituindo os dados em (II) para essa situação escrevemos

$$F_{BC} = k_0 \frac{Q_B\,Q_C}{(d-x)^2}$$

$$F_{BC} = k_0 \frac{\frac{Q}{2}\,\frac{Q}{4}}{(d-x)^2}$$

$$F_{BC} = k_0 \frac{Q^2}{8} \frac{1}{(d-x)^2} \tag{IV}$$

Aplicando a condição (I) às expressões (III) e (IV), obtemos

$$k_0\,\frac{Q^2}{16}\,\frac{1}{x^2}=k_0\,\frac{Q}{8}\,\frac{1}{(d-x)^2}$$

simplificando os termos em comum dos dois lados da igualdade ficamos com

$$\begin{gathered}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{(d-x)^2}\\ (d-x)^2=2x^2\\ d^2-2d\,x+x^2=2x^2\\ 2x^2-x^2+2d\,x-d^2=0\\ x^2+2d\,x-d^2=0\end{gathered}$$

Esta é uma equação do *2.º grau* em *x*, resolvendo vem

$$\begin{gathered}\Delta=b^2-4\,a\,c=(2d)^2-4.1.\left(-d^2\right)=4d^2+4d^2=8d^2\\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\,a}=\frac{-2d\pm\sqrt{8d^2}}{2}=\frac{-2d\pm2d\sqrt{2}}{2}\end{gathered}$$

as raízes serão

$$x_1=d\left(\sqrt{2}-1\right)\qquad \text{e}\qquad x_2=-d\left(\sqrt{2}-1\right)$$

A distância *d* é maior que zero, o termo entre parênteses, $\left(\sqrt{2}-1\right)\cong0{,}4142$, é maior que zero. Assim a primeira raiz vale aproximadamente 0,41*d*, portanto está entre as esferas *A* e *B* como pede o enunciado; a segunda raiz possui um sinal negativo, portanto está a esquerda da esfera *A*, do lado negativo do referencial (figura 1) e pode ser desprezada. Assim a resposta será

$$\boxed{x=d\left(\sqrt{2}-1\right)}$$