

A relação entre as cargas elétricas de duas esferas é $\frac{3}{4}$ e a relação de seus raios $\frac{5}{8}$. Determinar a relação entre as suas densidades de cargas elétricas.

Dados do problema

- relação entre as cargas das esferas: $\frac{q_1}{q_2} = \frac{3}{4}$;
- relação entre os raios das esferas: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{8}$.

Solução

A densidade de cargas elétricas (σ) será dada pela seguinte expressão

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad (I)$$

onde Q é a carga do corpo e S a área de sua superfície, neste problema temos duas esferas assim da geometria espacial sabemos que a área de uma esfera é dada por

$$S = 4\pi \cdot R^2$$

Escrevendo a expressão (I) para a densidade de cargas das esferas 1 e 2 temos

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi \cdot R_1^2} \quad (II)$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi \cdot R_2^2} \quad (III)$$

Para encontrar a relação entre as densidades de cargas elétricas dividimos a expressão (II) pela (III)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{q_1}{4\pi \cdot R_1^2}}{\frac{q_2}{4\pi \cdot R_2^2}}$$

simplificando o valor de 4π e invertendo a fração do denominador temos

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{R_1^2} \cdot \frac{R_2^2}{q_2} \quad (IV)$$

Dos dados do problema podemos escrever a carga e o raio da esfera 1 em função da carga e do raio da esfera 2

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{q_2} &= \frac{3}{4} \\ q_1 &= \frac{3}{4} q_2 \quad (V) \\ \frac{R_1}{R_2} &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$R_1 = \frac{5}{8} R_2 \quad (\text{VI})$$

substituindo as expressões (V) e (VI) na expressão (IV) obtemos

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{3}{4} q_2 \cdot R_2^2}{\left(\frac{5}{8} R_2\right)^2 \cdot q_2}$$
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{3}{4} q_2 \cdot R_2^2}{\frac{25}{64} R_2^2 \cdot q_2}$$

simplificando os valores de q_2 e R_2^2 no numerador e no denominador temos

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{25}{64}}$$

invertendo a fração do denominador temos finalmente

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{25}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{48}{25}$$