Apunte básico de Matemática para Física 2 DI

Sergio Paron

Para poder entender los ejercicios y los conceptos que se presentan en esta materia es necesario manejar algunas herramientas matemáticas en forma adecuada. Este apunte está destinado a repasar conceptos matemáticos, algunos de ellos quizás te parezcan muy básicos, pero probablemente más de una vez podrán ser de ayuda. *Tener en cuenta que ningún apunte puede reemplazar la consulta directa con el docente, cualquier duda, por más básica que te parezca, consultala con nosotros.*

- **Cosas muy básicas:**

1. Cuentas con fracciones:

Para hacer por ej. $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}$ uno busca el mínimo común múltiplo entre el 3 y el 4. En este caso es el 12 (la multiplicación entre ellos). Entonces la cuenta queda $\frac{9+20}{12}=\frac{29}{12}$.

Cuando tenés letras (incógnitas) en vez de números, las cosas funcionan exactamente de la misma manera. Por ejemplo si tenemos $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}$, buscamos el mínimo común múltiplo entre entre la x y la y. Por supuesto será su multiplicación. Entonces queda $\frac{3y+5x}{xy}$, recordá que lo que ponemos arriba (en el numerador) es xy dividido x por 3 + xy dividido y por 5.

Manejar esto es fundamental para todos los ejercicios de lentes, espejos y dioptras, entre otras cuentas necesarias que aparecerán a lo largo de la práctica. Por ejemplo algo típico será escribir $\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{4}$ de alguna otra manera para poder despejar cosas, donde S y S', las incógnitas en este caso, representarán la posición de un objeto y una imagen, respectivamente. Haciendo como antes, se busca el mínimo común múltiplo y se obtendrá: $\frac{S'+S}{SS'}=\frac{1}{4}$. OJO con querer simplificar alguna letra S o S', mirá que abajo están multiplicando y arriba sumando, así que no se puede. Esto lo vemos a continuación.

2. Simplificaciones y factorización:

Cada vez que se simplifica algo hay que estar bien atento, un error muy común es simplificar en por ejemplo $\frac{S'+S}{SS'}$ la S de abajo con la de arriba o la S' de abajo con la de arriba. Estaría MUY MAL hacerlo, ya que arriba hay una suma, o dicho en otra palabras “el todo” de arriba (como un bloque) está dividiéndose por lo de abajo.

Si por alguna razón pretendemos escribir $\frac{S'+S}{SS'}$, o alguna expresión similar, de otra manera, lo que estaría bien hacer es distribuir la división en la suma, luego sería correcto hacer las simplificaciones, o sea: $\frac{S'}{SS'}+\frac{S}{SS'}$ (distribuyo la división) y así en el primer término se simplificarían las S' y en el segundo las S, quedando $\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}$.

A continuación se muestran casos de simplificaciones mostrando lo que está bien y lo que está mal, al verlos, dedicá unos segundos para entender por qué son correctos o incorrecos:

$\frac{3x}{x+y}$ simplificar las x estaría MUY MAL, es similar al caso anterior.

$\frac{3x}{4x}$ simplificar las x estaría BIEN, quedando $\frac{3}{4}$.

$\frac{x(y+7)}{4x}$ simplificar las x estaría BIEN (notar que ambas están multiplicando), quedando $\frac{y+7}{4}$.

$\frac{x+2}{x^2}$ simplificar el cuadrado de abajo con la x de arriba estaría MUY MAL, volvemos al error de los casos anteriores.

Decir $\frac{x+y}{4} = \frac{x}{4} + \frac{y}{4}$ está BIEN (tanto la división como la multiplicación la podemos distribuir en la suma o en la resta).

Decir $\frac{4}{x+y} = \frac{4}{x} + \frac{4}{y}$ está MUY MAL, no podemos “partir” el 4 ni la suma de abajo.

Ahora pasemos a algunos ejemplos de factorización: sacar factor común (o sea sacar cosas repetidas o cosas que se comparten) o saber escribir las expresiones de otra forma, muchas veces puede ser muy útil. A continuación veamos algunos ejemplos. Nuevamente dedicale un tiempito a cada ejemplo para entender (recordar) el macanismo:

$4x + 8x^2$ esto será igual a $x(4 + 8x)$, pues vemos que lo que comparten ambos términos es la x.

$8x + 4y$ esto es lo mismo que $4(2x + y)$, en este caso lo que vemos que comparten es el 4.

$\frac{1}{S} - \frac{1}{4S}$ lo podemos escribir como $\frac{1}{S}(1 - \frac{1}{4})$ y luego podemos hacer la cuenta numérica, quedando $\frac{1}{S}\frac{3}{4}$. En este caso se sacó factor común $\frac{1}{S}$ pues ambos términos compartían la S de abajo (del denominador).

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, esto se llama diferencia de cuadrados, fijate que si distribuís la multiplicación de los paréntesis, te va a quedar lo primero.

Buscar las soluciones de una cuadrática es sencillo, si la cuadrática es: $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son cualquier numerito, usando la fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se obtienen los dos resultados (al usar el $+$ y el $-$ de la fórmula, respectivamente).

- **Trigonometría y geometría:**

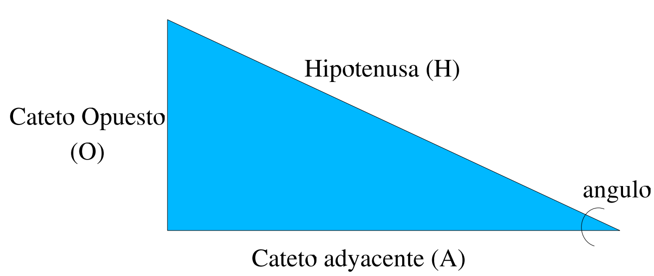

Fig. 1. Triangulo rectángulo.

Muy frecuentemente vamos a trabajar con ángulos y funciones trigonométricas como el seno $sen(x)$, el coseno $cos(x)$ y la tangente $tg(x)$. Estas funciones las vamos a utilizar para averiguar ángulos y también muchas veces nos van a ayudar a calcular distancias que necesitemos conocer.

Por lo general siempre trataremos de utilizar triangulos rectángulos (triángulo que tiene un ángulo recto) que se formarán con planos de superficies, proyecciones y prolongacion de rayos, etc. En la Figura 1 se observa un triangulo rectángulo en el cual se destaca un ángulo con el cual se trabajará (por simplicidad llamemoslo con la letra griega α) y se incluyen los nombres de los distintos lados. Lo importante para tener presente son las siguientes relaciones:

$$sen(\alpha) = \frac{O}{H},$$
$$cos(\alpha) = \frac{A}{H},$$
$$tg(\alpha) = \frac{O}{A}.$$

Para esto existe la regla memotécnica: SOHCAHTOA, donde la S, la C y la T son el seno, el coseno y la tangente, respectivamente, y obviamente la O, la H y la A son el cateto Opuesto, la Hipotenusa y el cateto Adyacente.

Otra relación importante es:

$$H^2 = A^2 + O^2,$$

que seguramente te la acordas con el versito: *la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de los catetos.*

También es importante acordarse que para CUALQUIER triángulo la suma de sus ángulos siempre da 180^o.

Con todas estas relaciones y teniendo los datos adecuados se puede calcular cualquier cosa que se desee, como ángulos y medidas de cualquier lado del triángulo.

Algunas relaciones trigonométricas que pueden llegar a servir:

$$cos(\alpha) = sen(\alpha + 90^o),$$

el seno y el coseno son dos funciones similares salvo que una está desplazada de la otra en 90^o.

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)},$$

relación entre la tangente, el seno y el coseno.

¿Cómo despejar algo de adentro de una función trigonométrica?

Fácil: por ejemplo tenemos $sen(\alpha) = 0.5$, el seno "pasa para el otro lado" como su función inversa ($arcsen$), entonces $\alpha = arcsen(0.5)$. Esto obviamente se hace con la calculadora, se usa SHIFT (inversa), SIN (seno) y el número en cuestión.

Antes de terminar con esta sección de trigonometría, veamos la siguiente figura (Figura 2). En ella vemos marcados 4 ángulos. Más allá de los nombres que tienen estos ángulos es importante darse cuenta que el ángulo b es igual al c ($b = c$) y que el ángulo a es igual al d ($a = d$). Fijate que estos ángulos están formados por dos rectas paralelas y luego una recta cualquiera que las corta. Dedicá unos segundos a mirar la figura, te tiene que resultar obvio estas igualdades... tenelas presente ya que las vamos a necesitar.

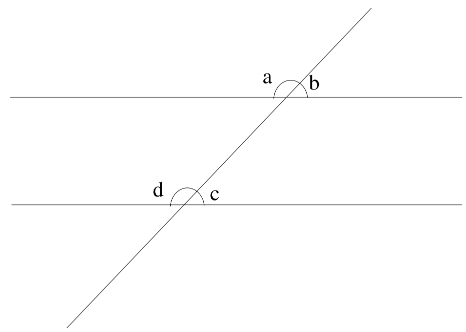

Fig. 2. Angulos. Casi una obviedad: a = d y b = c.

Fijate que en la figura también hay ángulos no marcados que entre ellos y con los ya marcados se pueden hacer igualdades similares. Tratá de encontrarlos.

- **Notación científica:**

Los números muy grandes o muy chiquitos por comodidad es necesario saber escribirlos de otra manera, esa manera es la denominada notación científica. Sobre todo para la segunda parte de la materia es MUY necesario entender bien esta notación.

Por ejemplo si tenemos 0.0000000001 (tal como usa la calculadora, vamos a usar el "." como la coma) puede ser medio complicado trabajar con él. Para ello recurrimos a esta otra manera de escribirlo, es decir lo podemos escribir como: 10^{-10}, esto se lee 10 elevado a la -10 y significa que tomamos al "1." y el "." lo corremos 10 lugares hacia la izquierda agregando ceros.

Otro ejemplo: 100000000, esto es cien millones, pero podemos escribirlo de una manera más sencilla: 10^8, esto se lee 10 elevado a la 8 y significa que tomamos al "1." y el "." lo corremos 8 lugares hacia la derecha agregando ceros.

De esta manera podemos usar esta notación para escribir cualquier clase de número. Por ejemplo 0.00000148 lo podemos escribir como: 1.48×10^{-6}. Recordá lo que esto significa: tenemos el 1.48 y al verse multiplicado por el 10^{-6} se toma el "." y lo corremos 6 lugares para la izquierda agregando ceros. O por ejemplo 5780000 (cinco millones setecientos ochenta mil) lo podemos escribir como: 5.78×10^6, es decir tenemos el 5.78 y el "." lo corremos 6 lugares para la derecha.

Con la calculadora esto es fácil de hacer. Por ejemplo si queremos escribir 4500000 (cuatro millones quinientos mil) lo podemos hacer de la siguiente manera: 4.5×10^6, que en la calculadora es escribir 4.5, la tecla que diga EXP y luego el 6. La tecla que dice EXP hace las veces del $\times 10$.
Hay que tener en cuenta que según el tipo de calculadora en el visor pueden aparecer distintas cosas. Te comento el error de interpretación típico, hay calculadoras que en el visor por ejemplo te muestran lo siguiente: 4.3^5, esto en nuestra notación es 4.3×10^5 que es igual a 430000. O sea que hay calculadoras que no escriben el $\times 10$. Vos NO escribas 4.3^5 en tu hoja, esto está MAL!!! es OTRO número... En conclusión, acordate que si tu calculadora omite el $\times 10$, interpretalo bien y vos NO LO OMITAS en tu hoja.

- **Logaritmos:**

Una función que será de utilidad saber manejar para la práctica de sonido es el logaritmo. Generalmente saber usar adecuadamente los logaritmos parece más dificil de lo que es. Siguiendo unas reglas simples te tiene que resultar muy sencillo.

Antes que nada recordemos qué es el logaritmo: es la función inversa de la exponencial. Por ejemplo la inversa de la función 10^x es el $log(x)$ (logaritmo en base 10), o la inversa de 3^x es el $log_3(x)$ (logaritmo en base 3).

¿Qué se lee de un logaritmo? Si tenemos $log_3(9)$ esto es logaritmo en base 3 de 9, o lo mismo es hacerse la siguiente pregunta: ¿a qué número tengo que elevar al 3 para que me de 9? obviamente 2, entonces $log_3(9) = 2$. Otro: $log(1000)$ (cuando no se pone numerito abajo se sobreentiende que es base 10, esta es la base que vamos a usar), entonces esto es preguntarse ¿a qué número tengo que elevar al 10 para que me de 1000? obviamente 3, entonces $log(1000) = 3$.

¿Cómo despejar logaritmos? Ejemplo: $log(x) = 5$, queremos despejar la x que está dentro del logaritmo, fácil, el log pasa como su función inversa, o sea la exponencial de base 10. Encontes la solución será: $x = 10^5$.

Propiedades importantes:

$$log(AB) = log(A) + log(B)$$

$$log(A/B) = log(A) - log(B)$$

$$log(A^b) = b\ log(A)$$

Para terminar veamos un par de ejemplos de uso de logaritmo que serán importantes para la práctica de sonido. Por ejemplo tenemos:

$$log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right).$$

Esto, según las propiedades lo podemos escribir como: $log(I) - log(10^{-16})$ (usé la propiedad de la división). Luego usando la última de las tres propiedades podemos escribir: $log(I) - (-16)log(10)$ (o sea bajamos el exponente). Finalmente pensamos: $log(10) = 1$ pues logaritmo en base 10 de 10 es 1 (¿a qué número hay que elevar al 10 para que de 10?, obviamente 1). Teniendo en cuenta que $-$ con $-$ se hace $+$, la cuenta queda $log(I) + 16$ y luego según lo que se necesite se continuará.

Otro ejemplo importante es que podríamos tener lo siguiente:

$$log\left(\frac{4I}{10^{-16}}\right) - log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right).$$

Esto será necesario escribirlo de otra manera (más compacta). Entonces aprovechando la segunda propiedad que dice que si tenés una resta de logaritmos lo podés escribir como un solo logaritmo con las cosas que llevaban adentro dividiéndose, tendremos:

$$log\left(\frac{\frac{4I}{10^{-16}}}{\frac{I}{10^{-16}}}\right),$$

los 10^{-16} se simplifican, la I también, quedando finalmente $log(4)$ que se hace con la calculadora.