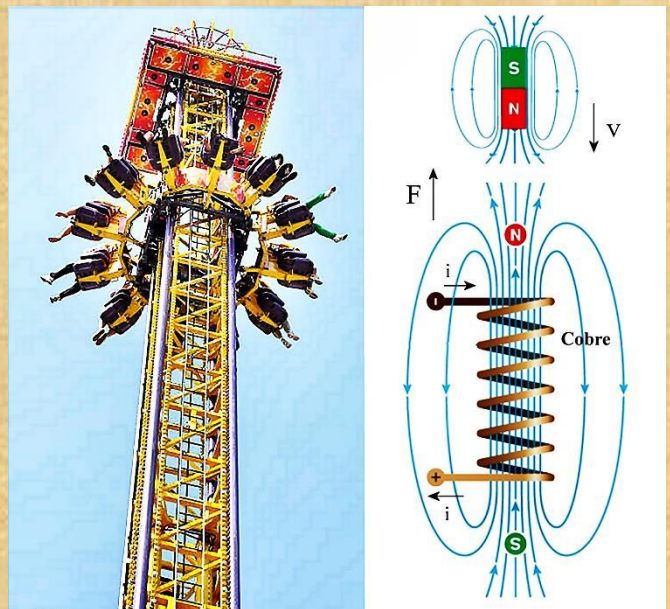
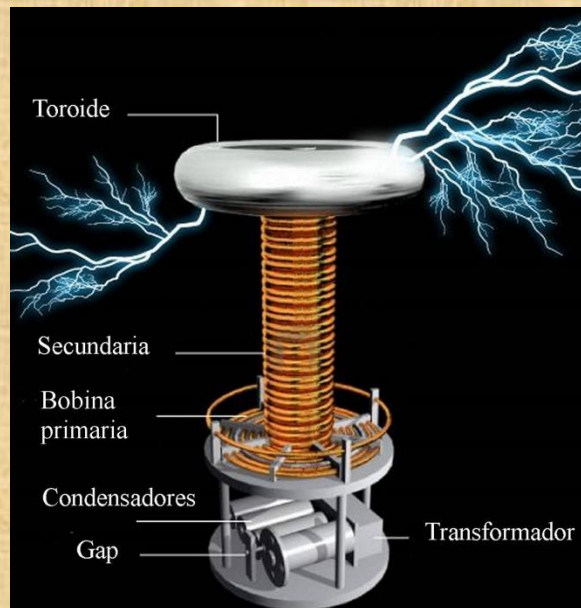


Introducción al

ELECTROMAGNETISMO

Para estudiantes de la educación superior



Arnaldo González Arias
La Habana, versión pdf revisada 2023

Prólogo

Estas notas resumen las experiencias del autor en la impartición de conferencias, clases prácticas y laboratorios durante varios años en diversas facultades de la Universidad de La Habana. Dada la usual escasez de tiempo disponible para impartir las disciplinas de Física Básica, sobre en todo en especialidades no relacionadas directamente a la Física, se ha tratado de extraer lo esencial de las leyes básicas, dejando de lado muchos aspectos interesantes, pero que se consideran no indispensables para que el estudiante pueda alcanzar una visión adecuada de los aspectos esenciales del electromagnetismo. Acerca del significado de las leyes en la ciencia, y en la física en particular, se recomienda consultar el artículo ‘La cultura científica y la desactualización de la enseñanza de la física’, publicado en la Rev. Cub. Fis. 29, 62 (2012), accesible en la WEB.

El contenido está separado en tres partes que describen las leyes que rigen los fenómenos electrostáticos, los magnetostáticos, y aquellos electromagnéticos donde interviene la interacción de ambos campos, agrupados en 6 capítulos, mas uno de problemas.

Capítulo 1. *Carga y campo eléctricos*. Carga eléctrica y electrización por contacto e influencia. Cuantización y conservación de la carga. Conductores y no conductores. Flujo de E. Cargas en exceso en los conductores. Teorema de Gauss y aplicaciones.

Capítulo 2. *Potencial y Capacidad*. Energía potencial y potencial. Potencial en cargas puntuales y esferas. Condensadores y capacidad. Energía del campo eléctrico. Dieléctricos polares y no polares.

Capítulo 3. *Corriente eléctrica*. Intensidad de

la corriente. Ley de Ohm. Resistencias en serie y paralelo. Potencia entregada a un circuito. FEM y tipos de FEM. Circuitos simples de corriente continua. Diferencias de potencial. Reglas de Kirchhoff. Amperímetros y voltímetros.

Capítulo 4. *Magnetostática*. Magnetismo en la naturaleza. Inducción magnética. Relación de Lorentz. Fuerza sobre una espira. Ley de Ampere y aplicaciones. Origen del magnetismo en la sustancia. Interacción con los campos externos. Parámetros magnéticos. Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo. Histéresis y magnetización técnica. Resonancia magnética nuclear.

Capítulo 5. *Capos variables en el tiempo*. Ley de Faraday-Lenz. Generación de una FEM alterna. Coeficientes de inducción mutua y autoinducción. Corrientes de Foucault y campos eléctricos en el vacío. Energía y densidad de energía del campo magnético. Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas. Energía de la radiación y espectro electromagnético. Efectos biológicos de la radiación.

Capítulo 6. *Corriente alterna*. Oscilaciones libres en circuitos LC y RLC en serie. Tiempo de relajación. FEM alterna aplicada a un resistor, a un capacitor y a un inductor. Potencia disipada en los circuitos. Diagramas vectoriales. Circuito RLC en serie. Resonancia, ejemplos y aplicaciones. Transformador. Bobina de Tesla.

Capítulo 7. *Problemas propuestos*.

Lo esencial de esta revisión consiste en la actualización o mejora de muchas figuras y la adición de la Bobina de Tesla en el capítulo 7.

El autor

CAPÍTULO 1

Carga eléctrica y campo eléctrico

1.1 Carga eléctrica

Algunos antecedentes históricos

Estado actual de conocimientos

Electrización por contacto

Electrización por influencia

Generador de Van der Graaf

1.2 Cuantización y conservación de la carga

Cuantización de la carga

Conservación de la carga

1.3 Conductores, aisladores y semiconductores

1.4 Ley de Coulomb

1.5 Campo eléctrico e intensidad de campo

1.6 Intensidad de campo asociada a una carga puntual

1.7 Intensidad de campo asociado a un grupo de cargas puntuales y a una distribución continua de cargas

1.8 Interacción carga-campo

1.9 Dipolo eléctrico

Dipolo en un campo uniforme y constante

1.10 Flujo de $\vec{E}$

1.11 Teorema de Gauss

Ángulo sólido

Demostración del teorema

1.12. Ley de Gauss en forma diferencial

Teorema de la divergencia

1.13 Carga en exceso en un conductor

1.14 Intensidad de campo asociado a un plano infinito cargado

Campo eléctrico actuando sobre un plano conductor

1.15 Campo asociado a dos planos infinitos con densidades (σ^+) y (σ^-)

CAPÍTULO 1

Carga eléctrica y campo eléctrico

1.1 Carga eléctrica

Algunos antecedentes históricos

- **Año 600 a.n.e.** El filósofo griego Tales de Mileto¹ (625- 546 a.n.e.) observó que las piedras de ámbar frotadas con lana de oveja eran capaces de atraer objetos ligeros como hilos u hojas secas. El ámbar es una resina fósil, denominada *electrón* en griego (figura 1.1). De ahí el nombre moderno de *electricidad* para designar a éste y demás fenómenos relacionados.
- **1600:** el médico y físico inglés William Gilbert descubrió que otras muchas sustancias tenían la capacidad de atraer objetos ligeros cuando se frotaban, y aplicó el término *electrización* al fenómeno. Fue el primero en utilizar términos como 'energía eléctrica' 'fuerza eléctrica' y 'atracción eléctrica'.
- **1733:** Charles Francois de Cisternay Du Fay (Francia) identificó dos tipos de 'carga' eléctrica en los cuerpos, a las que llamó 'vítrea' y 'resinosa'. Hoy día positiva y negativa.
- **Año 1897:** Sir Joseph John Thomson descubre el electrón, partícula elemental de carga (-), y en 1919 Lord Ernest Rutherford of Nelson (1871-1937) descubre el protón, partícula elemental de carga (+). Ambos recibieron el premio Nobel por sus investigaciones; el primero en 1906, el segundo en 1908.

¹ Fundador de la filosofía griega, es considerado como uno de los Siete Sabios de Grecia.

Estado actual de conocimientos

El estado actual de conocimientos se puede resumir de la forma siguiente. Una varilla de vidrio frotada con seda repele a otra tratada antes de la misma manera: aparecen fuerzas de repulsión (figura 1.2). Sin embargo, si se sustituye una de las varillas por otra de caucho duro (ebonita), que ha sido frotada con piel de conejo, se encuentra que las varillas se atraen. Por otra parte, dos varillas de ebonita frotadas con piel se repelen.



Figura 1.1. Ámbar. Resina fósil común en el Báltico.

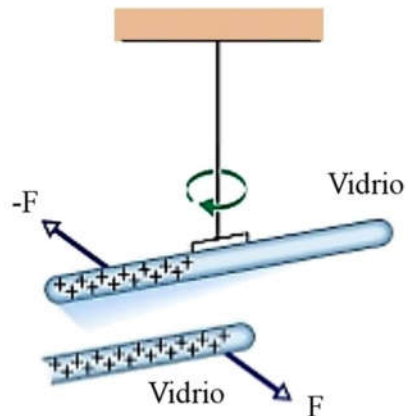


Figura 1.2. Cargas iguales se repelen.

Se llega así con rapidez a la conclusión de que hay dos tipos de cargas, designadas de forma arbitraria como positivas (+) y negativas (-). Las cargas de igual signo se repelen; las de signo contrario se atraen.

Electrización por contacto

¿De qué forma ocurre la electrización? Según el modelo clásico del átomo representado en la figura 1.3, los electrones de carga negativa rotan alrededor de un núcleo positivo. Al frotar la varilla ocurre la interacción entre los átomos que están en la superficie de los cuerpos frotados. Los electrones de las capas atómicas más externas, con débil ligazón al núcleo, pasan de un cuerpo a otro; en un caso, del vidrio a la seda; en el otro, de la piel de conejo a la ebonita (figura 1.4). De esta manera el vidrio queda cargado positivamente, y la ebonita con carga negativa. La partícula de carga elemental negativa es el *electrón*, y la carga del electrón se designa por lo general por e^- . La de carga positiva es el *protón* (carga e^+), de masa 1836 veces mayor que la del electrón.

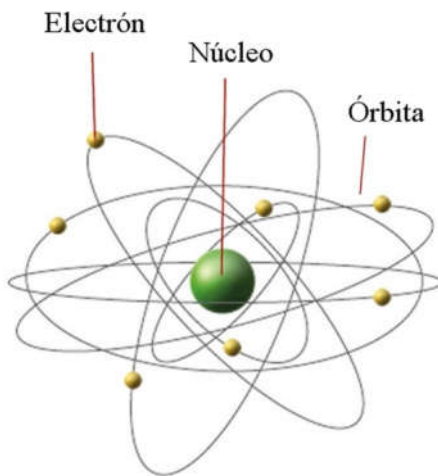


Figura 1.3. Modelo clásico del átomo,

Los protones se encuentran en el núcleo atómico, y no poseen movilidad. Son los electrones quienes tienen posibilidad de moverse de un cuerpo a otro durante la frotación. Cuando hay un exceso de electrones en el cuerpo, la carga es negativa. Cuando faltan electrones (por haber pasado a otro cuerpo), la carga es positiva. La *triboelec-*

tricidad o electrización por frotamiento se encuentra presente, en mayor o menor grado, en todos los cuerpos.

Los modelos atómicos actuales no representan al electrón en el átomo de forma física, sino como una nube de probabilidad sin trayectoria definida. En la figura 1.5 los distintos tonos de sombra indican la mayor o menor probabilidad de encontrar un electrón en ese lugar en un instante determinado (y NO que el electrón se encuentre en realidad distribuido en forma de nube en el interior del átomo).

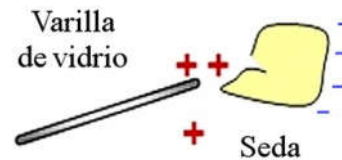


Figura 1.4. Triboelectricidad

En el átomo de Helio representado en la figura 1.5, el tamaño del núcleo es del orden de 1 fentómetro; 1 angström ($\text{\AA}$) = 10^{-10} m; 1 fentómetro (fm) = 10^{-15} m.

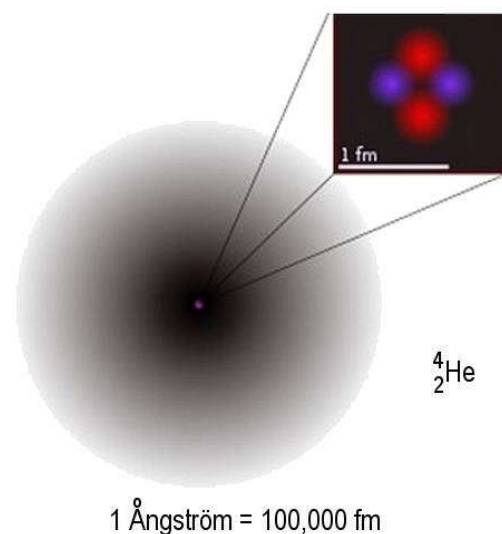


Figura 1.5. Átomo de He. Modelo contemporáneo.

Electrización por influencia

Un experimento muy fácil de llevar a cabo consiste en peinarse con un peine de plástico (no de metal) y acercar el peine a objetos muy pequeños (hilos, pedacitos de papel). De inmediato se observa que los objetos son atraídos por el peine (figura 1.6). En este caso la electrización sobre los pequeños objetos se lleva a cabo a distancia, y se conoce como *electrización por influencia*.

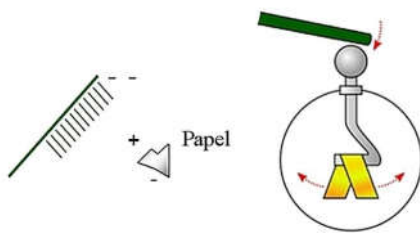


Figura 1.6. Electrización por influencia (izq.) y por contacto (electroscopio).

Este tipo de electrización se explica porque las cargas negativas en el peine atraen a las positivas del papel, y en cambio repelen las negativas. Como la fuerza de interacción disminuye con la distancia, la fuerza de atracción sobre las cargas + (y sobre el cuerpo que las contiene) es algo mayor que la de repulsión, y el objeto es atraído hacia

el peine. Note que los pequeños objetos no adquieren carga neta durante el proceso.

Ahora bien, si el objeto llega a tocar el peine, se separará del mismo de forma brusca. En este caso ocurre electrización *por contacto*. Parte de las cargas negativas del peine pasan al papel, que queda también cargado negativamente y por tanto es repelido. En esta última propiedad se basaba el *electroscopio*, hoy día en desuso, para detectar o medir cargas eléctricas. Las láminas de oro o de aluminio que se encuentran en la parte inferior del recipiente de vidrio se separan cuando la barra central conductora se pone en contacto con un cuerpo cargado. Si el instrumento posee una escala graduada, se denomina *electrómetro*.

No es posible cargar un peine o una varilla metálica por frotación sujetándola con las manos, porque las cargas en exceso irán a tierra a través del cuerpo. La tierra se comporta como una fuente-sumidero infinito de cargas. Si se añade un mango aislante a la varilla metálica, que impida el paso de los electrones, entonces sí se puede cargar por frotación.

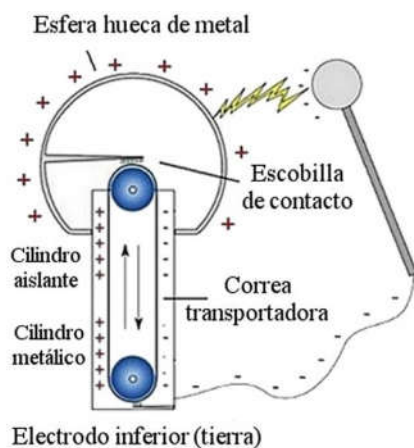


Figura 1.7. Generador de Van der Graaf

Generador de Van der Graaf

El generador funciona mediante una cinta transportadora de material aislante movida por un motor. La separación de las cargas se produce por frotamiento continuo con la escobilla de contacto (triboelectricidad). Las cargas se almacenan en una esfera metálica aislada de tierra. La repulsión entre cargas de igual signo en la modelo (aislada de tierra), con preferencia por las superficies externas, hace que su pelo se separe (figura 1.7).

1.2 Cuantización y conservación de la carga

Cuantización de la carga

Es un hecho experimental muy bien comprobado que la carga eléctrica está *cuantizada*. Significa que hay una pequeña cantidad de carga elemental que no admite división: el cuanto (o quantum) de carga. Esa carga es la carga del electrón, que en el Sistema Internacional de Unidades toma el valor (negativo)

$$q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

El símbolo C representa el Coulomb, unidad de carga en este sistema.

El valor anterior es muy pequeño cuando se compara con las cargas que por lo general adquieren los cuerpos macroscópicos y la sensibilidad de los instrumentos usuales de medición. De aquí que en los fenómenos eléctricos asociados a cuerpos macroscópicos es posible considerar, con muy buena aproximación, que la carga del cuerpo varía en forma continua.

Conservación de la carga

Otra propiedad de las cargas, derivada de la

estricta evidencia experimental, es que *en un sistema aislado, la suma algébrica de las cargas (+) y las (-) se mantiene constante*. Esto quiere decir que las cargas se crean y se destruyen por parejas.

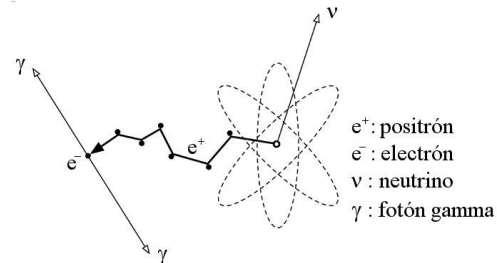


Figura 1.8. Aniquilación electrón-positrón.

Si aparece una carga (-) en algún lugar, entonces debe aparecer una carga (+) en otro. Un ejemplo típico de la conservación de la carga tiene lugar cuando un positrón emitido por un núcleo radiactivo se aniquila al interaccionar con un electrón, generando radiación electromagnética γ (figura 1.8).

La reacción $(e+) + (e-) = 2\gamma$ se conoce como *aniquilación electrón-positrón*. En la actualidad la aniquilación se utiliza para generar imágenes tridimensionales en equipos de diagnóstico médico (figura 1.9).

Para este fin se administra al paciente un isótopo radiactivo de corta vida media, que accede a sitios preferenciales en el organismo. El tomógrafo detecta la radiación γ y crea la imagen computarizada.

1.3 Conductores, aisladores y semiconductores

De acuerdo a la movilidad de sus electrones, las sustancias pertenecen a una de las tres categorías siguientes:

Conductores

Se caracterizan porque sus electrones o

iones poseen gran movilidad y conducen las cargas con facilidad de un lugar a otro. Son conductores casi todos los metales (Au, Ag, Cu, Al, etc.), las sales fundidas, las disoluciones de electrolitos fuertes y polímeros

como el poliacetileno (1970).

En particular, el cuerpo humano, compuesto de diferentes disoluciones en su mayor parte, es también un buen conductor.

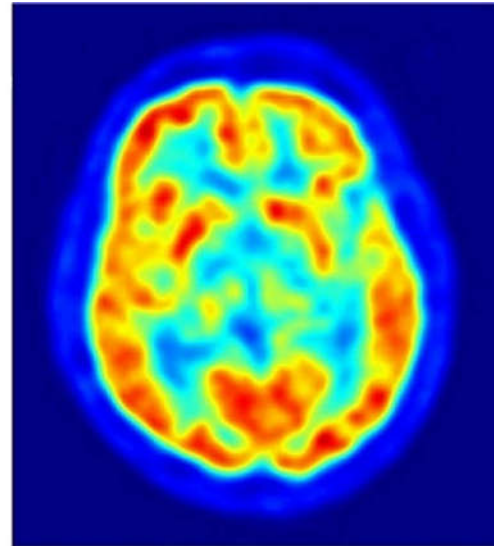
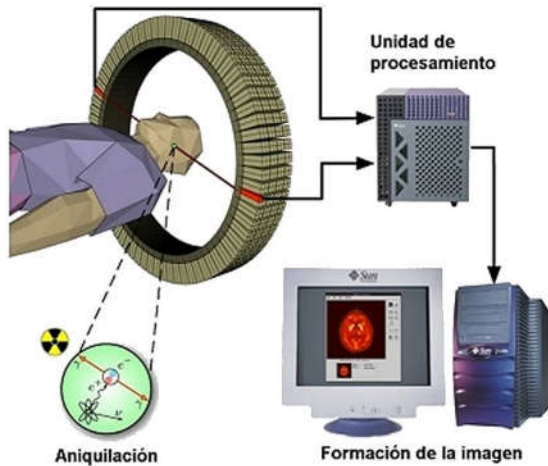


Figura 1.9. Tomografía axial computarizada e imagen típica que se obtiene.

Aisladores (aislantes o dieléctricos)

Sus electrones están ligados a los átomos con mucha fuerza, y poseen muy poca movilidad. Son aislantes las cerámicas, hormigón, gomas y plásticos en general, aceites y otros líquidos moleculares orgánicos con enlace covalente (no hay iones en disolución).

Semiconductores

Materiales que se comportan como conductores o aislantes en dependencia de diversos factores como la presencia de campos eléctricos o magnéticos, la presión, la radiación incidente y la temperatura.

En la tabla 1.1 aparecen los elementos semiconductores. También lo son muchas compuestos que incluyen estos elementos como el AsGa, PIn, AsGaAl, TeCd, SeCd,

SCd y polímeros como el antraceno, poliotieno y polifluoreno. Se usan para construir diodos emisores de luz, celdas solares, transistores y diodos, entre otros dispositivos.

Tabla 1.1

Elemento	Electrones en la última capa
Cd	2
Al, Ga, B, In	3
Si, C, Ge	4
P, As, Sb	5
Se, Te, S	6

Los semiconductores se catalogan como intrínsecos y extrínsecos.

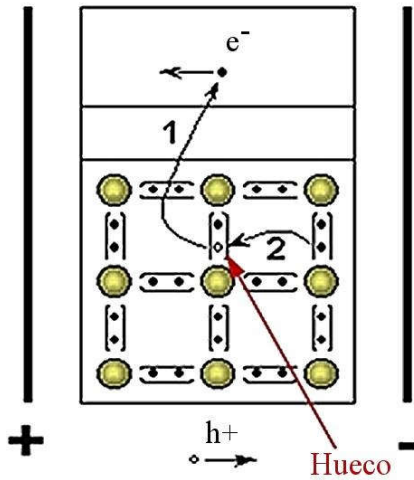


Figura 1.10. Semiconductor intrínseco.

Intrínsecos. Los e^- se excitan de manera espontánea a estados de mayor energía (banda de conducción), dejando atrás espacios vacíos o huecos (banda de valencia) que se comportan como cargas (+) en movimiento (figura 1.10).

Extrínsecos. Se añaden impurezas de sustancias con diferente número de electrones en la última capa, que causan un exceso de electrones en la banda de valencia o de 'huecos' en la banda de valencia, y modifican las propiedades del material de forma notable.

Según predomine uno u otro tipo de conducción, el conductor será de tipo 'N' si es electrónica, o de tipo 'P' si es por huecos.

Los semiconductores orgánicos son materiales basados en la química del carbono con propiedades similares a los semiconductores inorgánicos. Los hay de tipo N y de tipo P (tetraceno, antraceno, politiofeno, fullereno, polifluoreno y otros).

1.4 Ley de Coulomb

En 1785, Carlos Agustín Coulomb demos-

tró por vía experimental lo siguiente:

Considerando como *carga puntual* a cualquier cuerpo cargado con dimensiones mucho menores que la distancia de separación a otros cuerpos cargados, encontró que si q_1 y q_2 son los valores de dos cargas puntuales y r_{12} la distancia que las separa:

- El *módulo* de la fuerza de interacción entre ambas cargas cumple la relación

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (1.1)$$

- La dirección de aplicación de las fuerzas es a lo largo de la recta que une las cargas.
- El *sentido* de las fuerzas es tal que cuando q_1 y q_2 tienen igual signo, la fuerza es de repulsión. Si tienen diferente signo, la fuerza es de atracción.
- Note que las fuerzas F_{12} y F_{21} en la figura 1.11 son pareja de acción y reacción.
- Note también que la expresión (1.1) se refiere al *valor modular* de la fuerza, y siempre tomará un valor positivo, con independencia de los signos de las cargas.

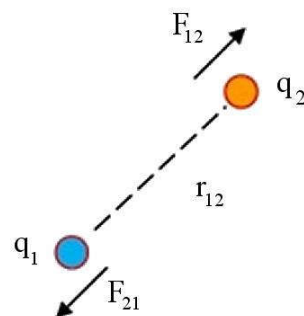


Figura 1.11. Ley de Coulomb.

- El valor de k depende del sistema de unidades utilizado. En el Sistema Interna-

cional de Unidades:

$[r] = \text{metro (m)}$;

$[q] = \text{coulomb (C)}$;

$[F] = \text{newton (N)}$ y

$k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

En estas condiciones, el coulomb queda definido como la carga que origina una fuerza de 1 N cuando se encuentra a una distancia de 1 m de otra de igual carga. Notar la analogía con la ley de gravitación universal $F = Gm_1m_2/r^2$, donde la carga hace el papel de la masa.

Balanza de torsión de Coulomb

Coulomb empleó una balanza de torsión para estudiar las fuerzas electrostáticas. Para ello cargó una esfera fija con una carga q_1 y otra esfera, situada en el extremo de una varilla colgada, con una carga q_2 . La fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 tuerce la varilla y la fibra de la que cuelga (figura 1.12).

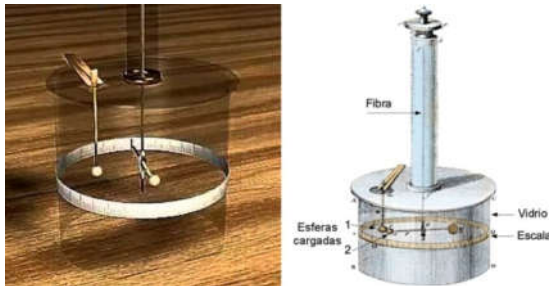


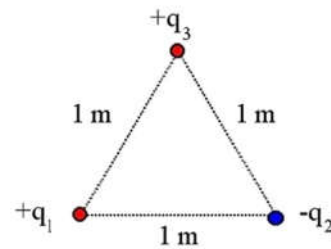
Figura 1.12. Balanza de torsión

Girando el cabezal de suspensión en sentido contrario se mantienen las esferas a la distancia original. La fuerza se mide por el ángulo que hay que girar el cabezal. Se encontró que la fuerza ejercida por una carga sobre otra es proporcional al producto de ambas cargas q_1q_2 . También observó que la fuerza es inversamente proporcional al cua-

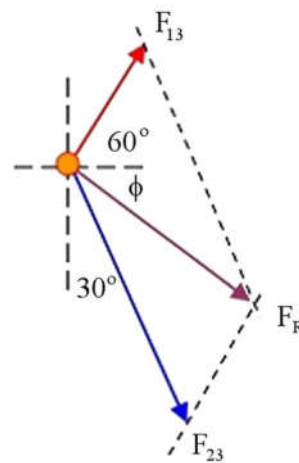
drado de la distancia r_{12} entre las esferas cargadas. Esta relación es la actual ley de Coulomb.

Con el fin de simplificar la notación, facilitar la escritura y evitar redundancias, siempre que la dirección y sentido de los vectores esté indicada con claridad en los gráficos que se muestran, en lo que sigue y restantes capítulos designaremos el módulo de los vectores omitiendo flechas y barras verticales, usando sólo la letra o símbolo correspondiente: i.e., $F_R \equiv |\vec{F}_R|$.

Ejemplo 1. Calcular la fuerza actuando sobre q_3 si: $q_1 = 10^5 \text{ C}$; $q_2 = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$; $q_3 = 4 \times 10^{-5} \text{ C}$.



Resolución: llevando las fuerzas a un origen común, se obtiene el siguiente gráfico.



$$F_{13} = kq_1q_3/r_{13}^2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-5} / 1^2 =$$

$$36 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

$$F_{23} = kq_2q_3/r_{23}^2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-5}/1^2 = 72 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

El resto se reduce a una conocida suma de vectores:

$$F_{Rx} = F_{13}\cos 60^\circ + F_{23}\sin 30^\circ.$$

$$F_{Ry} = F_{13}\sin 60^\circ - F_{23}\cos 30^\circ$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\tan \phi = F_{Ry}/F_{Rx}$$

y de ahí se sustituye

$$F_{13} = 3.6 \text{ N},$$

$$F_{23} = 7.2 \text{ N}.$$

1.5 Campo eléctrico e intensidad de campo

En la figura 1.13, la partícula de carga positiva Q es capaz de ejercer una fuerza sobre la de carga de prueba q_0 (+) sin que exista contacto directo entre ambas partículas. ¿Cómo explicar la aparente acción a distancia de una carga sobre la otra sin que exista el contacto directo? Hoy día se acepta que la interacción tiene lugar a través del campo eléctrico (más correcto, del campo *electrostático*).

Hoy muchos consideran que existen dos clases o tipos de materia; la *sustancia* y el *campo*; su diferencia esencial consiste en que la primera tiene masa en reposo, mientras que el segundo no.

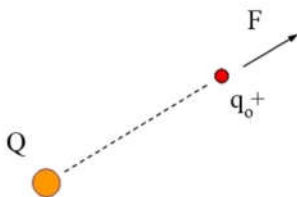


Figura 1.13. Definición del vector intensidad de campo

Así, es posible considerar el campo electrostático como una *modificación del espacio que rodea a las cargas eléctricas en reposo*. No se puede ver o pesar, pero sí es posible detectar sus efectos con la ayuda de instrumentos. Las fuerzas de atracción y repulsión entre cargas se explican entonces como originadas por la interacción carga – campo, sin necesidad de suponer la acción a distancia sin la existencia de algún medio material intermedio, aunque algunos autores no reconocen la existencia real del campo electrostático y sólo lo consideran como un método de trabajo o una forma adecuada de razonar y analizar los fenómenos eléctricos.

El vector *intensidad de campo* eléctrico se define por la relación

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0^+}.$$

La carga puntual q_0 siempre se toma positiva. De esta forma el vector intensidad de campo E tendrá la misma dirección y sentido que la fuerza F actuando sobre la partícula. En la figura 1.14, si la carga Q fuera negativa tanto la fuerza como la intensidad de campo estarían dirigidas en sentido contrario.

Aunque no se conozca el signo ni la distribución de las cargas que dan origen a un determinado campo eléctrico en una región del espacio, es posible determinar la intensidad de campo colocando una carga de prueba + en puntos diferentes y midiendo la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga en cada punto.

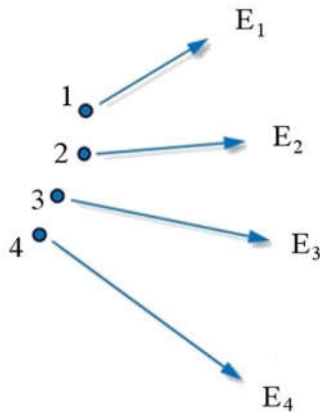


Figura 1.14. Determinación de la intensidad de campo.

La intensidad de campo eléctrico es una magnitud vectorial, y como tal, cumple las reglas de la suma, resta y multiplicación de vectores.

1.6 Intensidad de campo asociada a una carga puntual

Al colocar la carga de prueba q_0 a una distancia r de la carga puntual Q , la ley de Coulomb indica que la fuerza actuando sobre la carga de prueba q_0 tiene la dirección de la recta que une las cargas, y el sentido es alejándose de Q . Su valor modular viene dado por

$$F = k \frac{Qq_0^+}{r^2}.$$

Aplicando la definición de intensidad de campo se llega a $E = k \frac{Q}{r^2}$, con sentido saliente o alejándose de la carga según su signo (figura 1.15). Si la carga Q es negativa, el sentido de E será entrando en la carga.

Si se toman puntos diferentes alrededor de Q para ubicar la carga de prueba q_0 , es posible determinar la configuración de la in-

tensidad de campo en el espacio, tal como se muestra en las figuras anteriores. El tamaño de los vectores representa el módulo o intensidad de campo en el punto donde se ubicó q_0 .

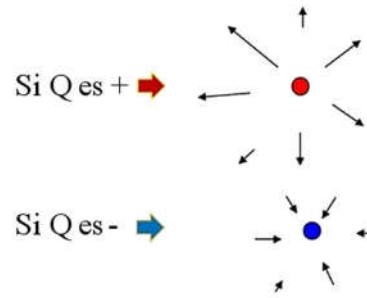


Figura 1.15. Intensidad de campo asociado a una carga puntual Q .

Sin embargo, no es usual representar la intensidad de campo de esta manera, pues se acostumbra hacerlo mediante *líneas de fuerza* (que deberían llamarse líneas de campo, pero se mantiene el nombre por razones históricas). Las líneas de fuerza se construyen tomando en cuenta lo siguiente:

- Son tangentes a la dirección de $\vec{E}$ en cada punto.
- Se alejan de las cargas positivas y se dirigen hacia las negativas.

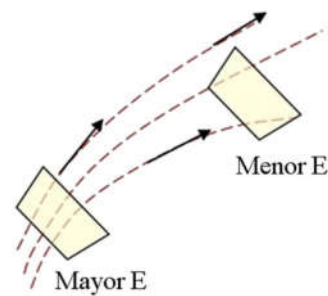


Figura 1.16. Líneas de fuerza.

- No se cortan jamás, de manera similar a lo que ocurre con las líneas de corriente en hidrodinámica. (Si lo hicieran, habría dos valores diferentes de E en un mismo

punto).

- El número de líneas de fuerza por unidad de área perpendicular es proporcional al valor de E en ese punto (figura 1.16).

Para cargas puntuales positivas y negativas, la representación del campo basada en líneas de fuerza queda como aparece en la figura 1.17.

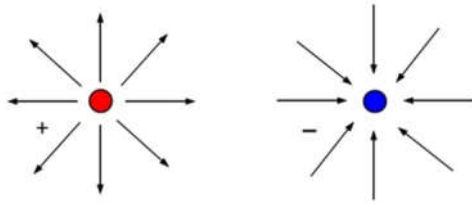


Figura 1.17. Representación del campo de una carga puntual mediante líneas de fuerza

1.7 Intensidad de campo asociado a un grupo de cargas puntuales y a una distribución continua de cargas

Como se vio antes, la intensidad de campo es un vector, y como tal, posee propiedades vectoriales. Significa que cuando hay varias cargas puntuales presentes, la intensidad de campo resultante en un punto determinado a causa de la presencia de esas cargas viene dada por la suma vectorial de la intensidad asociada a cada carga.

En la figura 1.18, los campos asociados a q_1 , q_2 y q_3 se suman vectorialmente a dar un campo resultante E_R en el punto P .

Cuando tenemos una carga Q distribuida en un volumen V , de manera uniforme o no, la forma de atacar el problema es dividir mentalmente el volumen en celdillas de volumen elemental ΔV_i y considerar la carga en cada ΔV_i como puntual (figura 1.19)

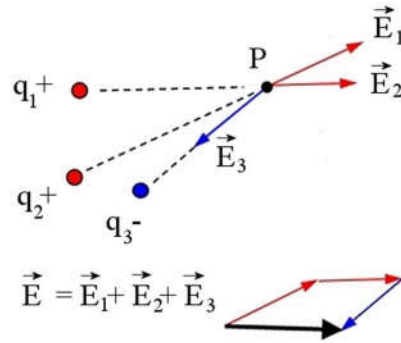


Figura 1.18. Campo en P asociado a un grupo de cargas puntuales.

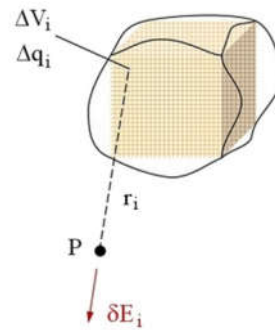


Figura 1.19. Campo en P asociado a una distribución continua de cargas.

Si cada elemento contribuye con un $\delta \vec{E}_i$ en el punto P , el campo resultante en ese punto será, con buena aproximación, igual a

$$\vec{E}_R \cong \sum_i \delta \vec{E}_i .$$

La aproximación será mejor mientras menores sean los volúmenes elementales ΔV_i . En el límite cuando $\Delta V_i \rightarrow 0$, el campo resultante en p será

$$\vec{E}_R = \iiint_V d\vec{E} .$$

Esta integral es difícil de resolver (en todo caso, sólo por métodos numéricos aproximados) y no se usa en la práctica. Existen métodos más simples aplicables a sistemas de interés que posean alta simetría. Se verán más adelante.

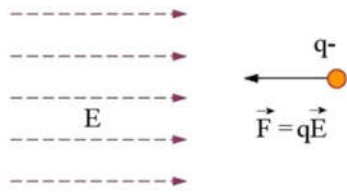


Figura 1.20. Fuerza electrostática actuando sobre una carga puntual.

1.8 Interacción carga-campo

Suponga que una determinada región del espacio está presente un campo electrostático de origen desconocido e intensidad E . Si colocamos una carga q en un punto determinado de esa región, la definición de intensidad de campo nos dice que:

- Sobre esa carga actuará una fuerza $F = qE$.
- La dirección de la fuerza será paralela a la intensidad de campo en el punto.
- El sentido de la fuerza será tal que, si la carga es positiva tendrá el mismo sentido que las líneas de fuerza, y sentido contrario en el caso de cargas negativas (figura 1.20).

1.9 Dipolo eléctrico

El conjunto formado por dos cargas de igual magnitud q y distinto signo, colocadas a una distancia L una de la otra, recibe el nombre de *dipolo eléctrico*. El *momento del dipolo* o *momento dipolar* $\mathbf{p}$ se define por el producto

$$\mathbf{p} = q\mathbf{L}.$$

La representación del campo de un dipolo mediante líneas de fuerza queda según la figura 1.21 (en 3 dimensiones).

El concepto de dipolo eléctrico es importante en el análisis de las propiedades de las moléculas, ya que muchas de ellas muestran una distribución asimétrica de sus átomos y nubes electrónicas, con la correspondiente asimetría de las propiedades eléctricas. Sin embargo, aunque por lo general esta asimetría es bastante compleja, el comportamiento de la molécula en presencia de un campo eléctrico es similar al de un dipolo ideal como el representado en la figura 1.21a, y de ahí la importancia del estudio de las propiedades del dipolo.

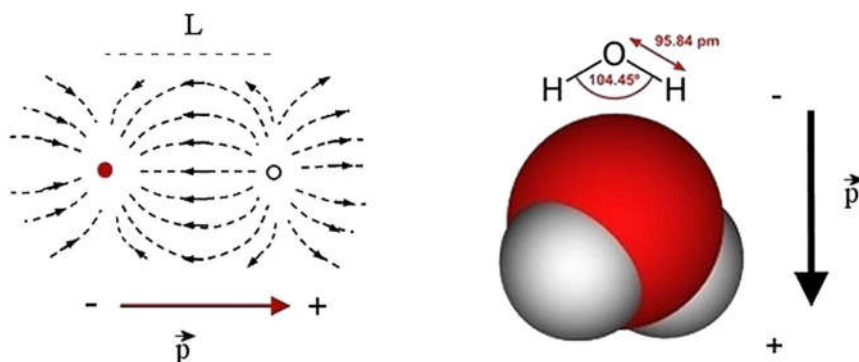


Figura 1.21a. Dipolo eléctrico y molécula de agua.

Es posible calcular el campo y el potencial asociados a un dipolo, pero las expresiones

que se obtienen son complejas y no serán discutidas en este texto. Se presentan sólo

con el propósito de completar conocimientos.

Tomando el origen en el centro del dipolo, la intensidad de campo en el punto indicado por el vector de posición $\vec{r}$ en coordenadas cartesianas, tras varias aproximaciones, queda como

$$\vec{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \right),$$

donde r es la distancia al centro del dipolo (figura 1.21b). El potencial del dipolo queda como

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right).$$

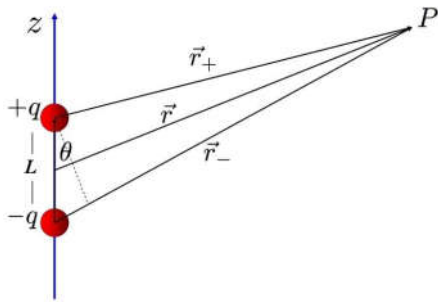


Figura 1.21b. Sistema de referencia utilizado.

Dipolo en un campo uniforme y constante

Para simplificar los razonamientos, supondremos dos partículas de igual masa $m = m'$, de forma que el centro de masa del sistema coincide con el punto medio de la recta que une las cargas y $r = r'$. El momento del dipolo tendrá el valor

$$p = qL,$$

donde $L = r + r'$.

Como el campo es uniforme; es decir, tiene el mismo valor en todos los puntos, se cumple que $F = F'$. Por tanto, según la 2da

ley de Newton aplicada a un sistema de partículas:

$$\sum_{\text{ext}} \vec{F}_k = \vec{F} + \vec{F}' = m\vec{a}_{\text{CM}} = 0.$$

Y si la aceleración del centro de masa es cero, $\vec{v}_{\text{cm}} = \text{constante}$. Por tanto, si el dipolo estaba en reposo al inicio ($v_{\text{cm}} = 0$), la aplicación del campo externo constante y uniforme no alterará el estado de reposo y el CM no se traslada. Sin embargo, como las fuerzas actúan en sentido contrario, existe la posibilidad de que el dipolo pueda rotar alrededor del CM, sin que éste cambie su posición (figura 1.22).

$$\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin\phi \quad \otimes$$

$$\tau' = |\vec{r}' \times \vec{F}'| = r'F' \sin\phi \quad \otimes$$

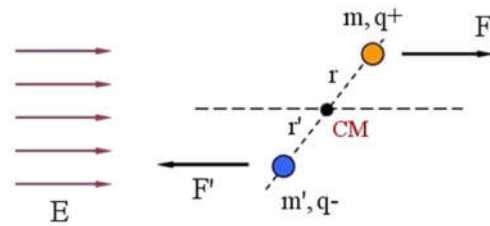


Figura 1.22. Dipolo en un campo uniforme y constante.

Analizando los torques con respecto a un eje de rotación que pase por el CM, donde el símbolo $\otimes$ representa un vector $\perp$ y entrando en la pantalla:

Es fácil comprobar que ambos torques son colineales, con dirección perpendicular al plano del papel según la figura 1.23.

Cuando los vectores son colineales, el torque resultante será la simple suma de los módulos:

$$\tau_R = \tau + \tau'$$

$$\tau_R = 2rF\sin\phi.$$

Sustituyendo $F = qE$ y $L = 2r$ al final se llega a:

$$\tau_R = pE\sin\phi \quad \vec{\tau}_R \otimes.$$

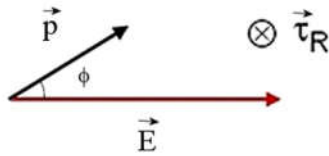


Figura 1.23. Interacción dipolo-campo

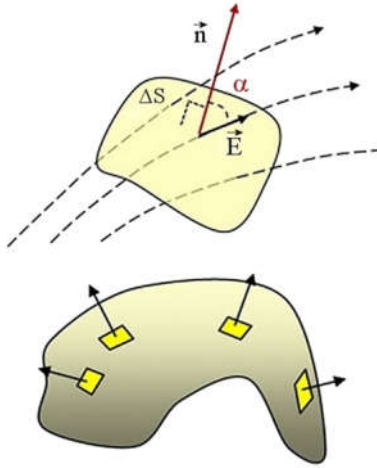


Figura 1.24. Flujo de $\vec{E}$ en un ΔS y en una superficie finita.

Si ahora se define el vector momento dipolo como el vector que va desde la carga negativa a la positiva y tiene por módulo $p = qL$, se comprueba con facilidad que es posible expresar la relación anterior en forma vectorial como

$$\vec{\tau}_R = \vec{p} \times \vec{E}.$$

En resumen: al aplicar un campo externo constante y uniforme a un dipolo, el dipolo no se traslada, ya que no hay fuerza neta de traslación. Sin embargo, aparece un torque resultante que tiende a hacer rotar el dipolo. Si el dipolo tiene libertad de rotar, el mo-

mento dipolo $\vec{p}$ girará hasta que sea paralelo al vector intensidad de campo. Note que cuando $\phi = 0$, entonces $\vec{\tau}_R = 0$. Significa que una vez orientado paralelo al campo, el dipolo permanecerá en esa posición.

En un sólido, donde las moléculas están ubicadas en posiciones definidas formando una red cristalina, la libertad del dipolo para rotar es muy pequeña. Sin embargo, en los líquidos y gases los dipolos moleculares pueden en realidad rotar y orientarse paralelos al campo en mayor o menor grado.

1.10 Flujo de $\vec{E}$

Considere una porción muy pequeña de superficie imaginaria de área ΔS , y el vector unitario $\vec{n}$ perpendicular a la superficie. Si se conocen las componentes de $\vec{n}$, la orientación de la superficie en el espacio quedará definida por completo (figura 1.24).

Suponga ahora que se encuentra presente un campo electrostático, de manera que las líneas de fuerza del campo atraviesan la superficie formando un ángulo α con el vector unitario, tal como muestra el dibujo. El flujo de $\vec{E}$ a través de la superficie elemental de área ΔS se define por el producto escalar

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \vec{n}\Delta S$$

$$\Delta\phi = E\Delta S\cos\alpha$$

Si nos encontramos en presencia de una superficie mayor, donde $\vec{n}$ varía de dirección punto a punto, siempre será posible tomar pequeños segmentos de área ΔS , y considerar el flujo total como la suma de los flujos asociados a todos los pequeños segmentos:

$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i .$$

Cada segmento de superficie no es en realidad plano, sino que posee una pequeña curvatura. Mientras más pequeños sean los elementos de superficie ΔS_i más cercano a la realidad será el valor de ϕ calculado. La definición se hace exacta en el límite, cuando $\Delta S \rightarrow 0$. En ese caso la sumatoria pasa a ser una integral, y al final se obtiene:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds .$$

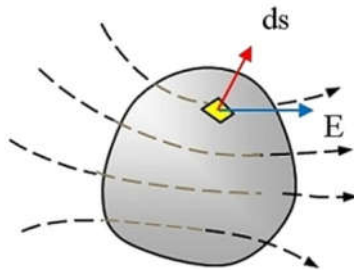


Figura 1.25. Superficie Gaussiana

Este es, por definición, el flujo del vector E a través de la superficie S . Como $\vec{n}$ es un vector unitario, considerando la notación $\vec{n} ds = d\vec{s}$ (vector con la misma dirección y sentido que $\vec{n}$, pero con módulo ds), la definición anterior también puede ser escrita como

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

1.11 Teorema de Gauss

Aunque es usual llamar a ese resultado “ley de Gauss”, no es en realidad una nueva ley independiente del electromagnetismo, pues se puede derivar por vía analítica a partir de la ley de Coulomb.

El teorema se enuncia de la forma siguien-

te:

El flujo que atraviesa cualquier superficie cerrada en el espacio, real o imaginaria, es proporcional a la carga neta q_N encerrada dentro de la superficie.

En símbolos matemáticos toma la forma

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_N}{\epsilon_0} .$$

Una representación de la superficie gaussiana se muestra en la figura 1.25.

- Por convenio, $d\vec{s}$ siempre sale de la superficie.
- Se integra sobre toda la superficie.
- q_N : suma algebraica de cargas (+) y (-)

La constante de proporcionalidad ϵ_0 se denomina *permitividad dieléctrica del vacío* y también se conoce por *constante dieléctrica*. En el SI de unidades toma el valor

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 ,$$

donde k es la constante de la ley de Coulomb. El símbolo $\oint$ se usa para indicar que la integración tiene que ser por toda la superficie. Por *carga neta* se entiende la suma algebraica de las cargas positivas y negativas. Si hay tantas cargas (+) como (-) dentro de la superficie, entonces $q_N = 0$.

Ángulo sólido

Para demostrar el teorema de Gauss es necesario rememorar primero el concepto de ángulo sólido. Si S es el área proyectada por un objeto sobre una esfera de radio R (figura 1.26), al ángulo sólido subtendido en el espacio se define tomando el origen en el centro de la esfera como

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

En el Sistema Internacional de unidades la unidad es el estereorradian (adimensional). El ángulo sólido correspondiente a la superficie total de una esfera es

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

El diferencial de ángulo sólido para una superficie ds inclinada un ángulo θ respecto al radio de la esfera considerada viene dado por (figura 1.27):

$$d\Omega = \frac{ds \cdot \cos\theta}{r^2}.$$

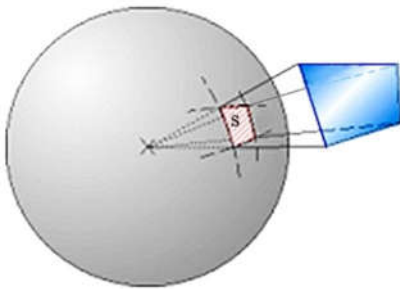


Figura 1.26. Ángulo sólido

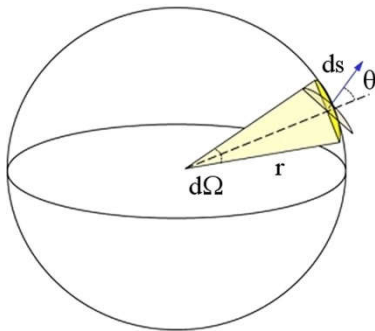


Figura 1.27. Diferencial de ángulo sólido.

Demostración del teorema

a) Hay una carga neta dentro de la superficie gaussiana.

La intensidad de campo asociada a una carga puntual tiene la forma

$$E = k \frac{q}{r^2}.$$

En todo momento $\theta < \pi/2$ y $\cos\theta > 0$ (figura 1.28).

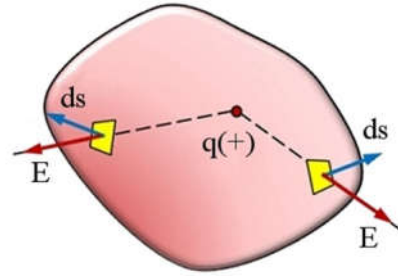


Figura 1.28. (Ver texto).

Luego

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = kq \oint_S \frac{d\cos\theta}{r^2} = kq \oint_S d\Omega = 4\pi kq.$$

Sustituyendo $4\pi k = 1/\epsilon_0$ se llega al resultado deseado:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

b) No hay carga neta dentro de la superficie gaussiana.

Al calcular la integral

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = kq \oint_S \frac{d\cos\theta}{r^2},$$

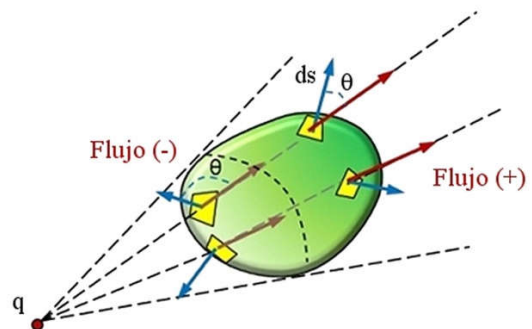


Figura 1.29. (Ver texto)

como el origen del ángulo sólido está den-

tro de la superficie cerrada, por cada contribución ds/r^2 con $\cos\theta > 0$, hay otra con $\cos\theta < 0$, y al sumar en toda la superficie,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0,$$

lo que completa la demostración del teorema (figura 1.29).

La demostración se generaliza con facilidad para cualquier superficie cerrada y cualquier grupo de cargas.

En esta último caso, una de las propiedades del campo eléctrico es que cumple el principio de superposición. Significa que cualquier campo eléctrico se puede representar como la suma vectorial, punto a punto, de las intensidades asociadas al grupo de cargas puntuales consideradas (sección 1.7). Por tanto, el teorema también es válido para cualquier grupo de cargas, y la carga q considerada antes pasa a ser la carga neta q_N .

1.12. Ley de Gauss en forma diferencial

Teorema de la divergencia

Desde el punto de vista matemático estricto, es posible demostrar que si el diferencial ds apunta hacia el exterior del volumen V , entonces

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV.$$

La aplicación directa al teorema de Gauss de la sección anterior conduce a

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

donde $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ es el operador divergencia (operador gradiente cuando trabaja sobre una función escalar) y $\rho = q_N/V$ la densidad neta de carga en el punto

considerado. Se conoce como ley de Gauss en forma diferencial.

El significado físico de esta expresión se obtiene analizando el teorema de Gauss. Tomando un volumen de integración tan pequeño como se quiera, el teorema nos dice que la integral de superficie será cero cuando no haya carga neta en el interior. Llevando al límite $V \rightarrow 0$, el teorema de la divergencia, significa que sólo en los puntos existan cargas puede haber fuentes o sumideros de campo eléctrico. La divergencia de E es un índice de la existencia de esas fuentes o sumideros.

1.13 Carga en exceso en un conductor

Suponga cualquier cuerpo formado de una sustancia conductora y que el mismo se encuentra aislado, de manera que las cargas eléctricas no pueden fluir hacia él o fuera de (figura 1.30).

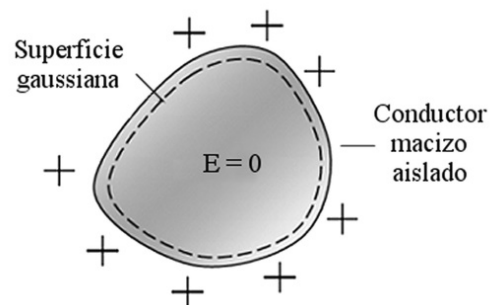


Figura 1.30. En un conductor, las cargas en exceso van a la superficie.

Si de alguna forma se añaden cargas en exceso al conductor (que supondremos positivas), éstas tendrán a repelerse y se moverán alejándose unas de las otras. Al llegar al equilibrio, la fuerza resultante actuando sobre cada carga debe ser nula: $\vec{F}_R = 0$. Las cargas no pueden escapar al exterior porque la fuerza de repulsión se equilibra con la

fuerza de atracción de los núcleos atómicos más cercanos a la superficie.

En el interior del conductor la única fuerza adicional actuando es la fuerza eléctrica, por tanto $F_R = qE = 0$, y por tanto: $E = 0$ en todos los puntos del interior del conductor. Dicho de otra forma, si E no fuera cero dentro del conductor, habría una fuerza eléctrica actuando sobre las cargas, y éstas tenderían a moverse aceleradas, en contra de lo que hemos supuesto (que se ha alcanzado el estado de equilibrio).

Si ahora se considera una superficie gaussiana, tan cerca como se quiera del interior de la superficie del conductor, como $E = 0$ en el interior, integrando para toda la superficie

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Aplicando el teorema de Gauss, $q_N = 0$ dentro del conductor. Según el teorema, no puede haber cargas en exceso dentro del conductor.

Si las cargas en exceso no están dentro del conductor, y no han escapado a causa de la atracción de los átomos en la superficie, ¿dónde pueden estar? Pues se encuentran fuera del conductor, *sobre su superficie*.

La superficie de un conductor representa un salto de discontinuidad de un medio a otro. Es una frontera entre dos medios diferentes. A nivel atómico-molecular, esa discontinuidad de origen a fuerzas de atracción que, en condiciones normales, impiden que las cargas en exceso escapen fuera de la superficie del conductor. Si la carga en exceso aumenta en forma continua, llega un momento en que las fuerzas de repulsión entre

las cargas son mayores que las causadas por la discontinuidad en la superficie, y la chispa salta.

Uno de los experimentos más concluyentes en este sentido fue el llevado a cabo por Michael Faraday (1791-1867, figura 1.31), quien construyó una gran caja metálica, la colocó sobre soportes aislantes y la cargó con un poderoso generador. Describió así los resultados: “Me metí dentro del cubo, ... y usando velas encendidas, electrómetros y otras pruebas de estados de electrización, no pude encontrar la mínima influencia sobre ellos ... a pesar de que todo el tiempo el exterior del cubo estaba poderosamente cargado, y salían chispas y descargas dispersas de todos los puntos de su superficie exterior”.



Figura 1.31 Michael Faraday

Ejemplo. Calcular la intensidad de campo cerca de la superficie de un conductor cargado con densidad superficial de carga variable σ .

Resolución.

La intensidad de campo es perpendicular a la superficie en todos los puntos (figura 1.32). De no ser así, existirían componentes de fuerza sobre la superficie, induciendo el movimiento de las cargas, y el sistema no estaría en equilibrio.

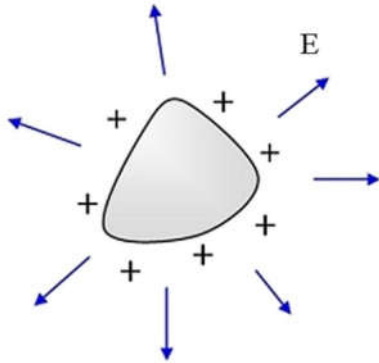


Figura 1.32. Campo en la superficie de un conductor.

Construyamos una superficie gaussiana cilíndrica de forma tal que la mitad del cilindro quede fuera, y la otra mitad dentro del cuerpo. De esta forma habrá que considerar tres superficies de integración: las dos tapas y el lado del cilindro, designadas por s_1 , s_3 y s_2 (figura 1.33).

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_N}{\epsilon_0}.$$

La integral sobre S_2 es nula, por ser E perpendicular a $d\vec{s}$ en todos los puntos de S_2 . La integral sobre S_3 también se anula, por ser $E = 0$ en todos los puntos dentro del conductor. Queda entonces sólo la integral por S_1 . El ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ es cero, por tanto, $\cos(\theta) = 1$. Además, si q_n es la carga contenida en la superficie A , $\sigma = q_n/A$.

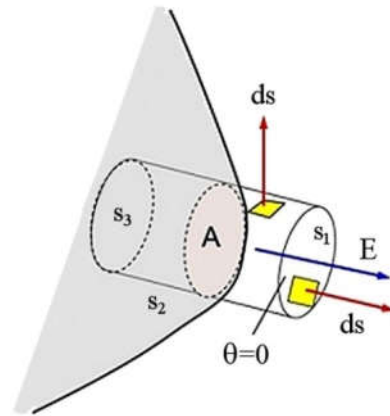


Figura 1.33. Ver texto.

La superficie S_1 se puede tomar tan pequeña como uno quiera, de forma que E sea constante sobre esa superficie, por lo que se puede sacar fuera de la integral. Entonces, sustituyendo q_n :

$$\int_{S_1} E \cos\theta_1 ds = E \int_{S_1} ds = ES_1 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

Como el área A es idéntica a S_1 , simplificando se llega a

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

1.14 Intensidad de campo asociado a un plano infinito cargado

Considere el plano cuadrado de lado L de la figura 1.34, con carga positiva distribuida de manera uniforme sobre su superficie de área A . Si q es la carga en exceso, la densidad superficial de carga vendrá dada por $\sigma = q/A$. Interesa calcular el valor de la intensidad de campo en el punto P .

Si el segmento OP en la figura 1.34 cumple la condición $OP \ll L$, es posible despreciar el efecto de los bordes (al menos en una primera aproximación) y el problema se simplifica bastante. Esta aproximación se

conoce como “aproximación del plano infinito”.

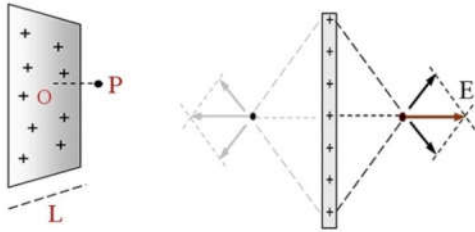


Figura 1.34. Campo asociado a un plano infinito cargado

Entonces, por consideraciones de simetría, se llega con facilidad a la conclusión de que el vector E debe ser perpendicular al plano.

Como el plano es infinito, por cada carga considerada hay otra colocada simétrica respecto a la perpendicular que va desde el plano al punto, y las componentes de E paralelas al plano se anulan. En resumen: la dirección del vector es perpendicular el plano. Su sentido, saliendo del plano (las cargas son positivas).

El módulo se calcula a partir del teorema de Gauss, construyendo una superficie gaussiana cilíndrica que atravesase el plano en forma simétrica (figura 1.35).

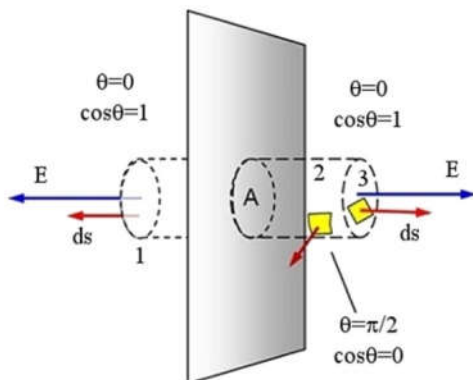


Figura 1.35. Ver texto

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_N}{\epsilon_0}.$$

La integral sobre la superficie cilíndrica 2 es cero, por ser E y $d\vec{s}$ perpendiculares en toda la superficie, y $\cos 90^\circ = 0$. De manera similar al ejemplo 2 anterior, el cilindro se puede tomar tan estrecho como se quiera, y por esa razón considerar E constante sobre las tapas 1 y 3. Se ve con facilidad que la integral por S_3 conduce a un resultado similar que por S_1 . Además $S_1 = S_3$ por construcción. Por tanto,

$$2E = q_N / \epsilon_0$$

y sustituyendo $\sigma = q_N / A = \sigma$ se obtiene

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Campo eléctrico actuando sobre un plano conductor

Si se intenta “apantallar” un campo eléctrico con una lámina metálica conductora descargada, las fuerzas eléctricas causan la distribución de las cargas “libres” en el seno de la lámina, que pueden ser electrones o iones con movilidad suficiente para desplazarse por el seno del conductor.

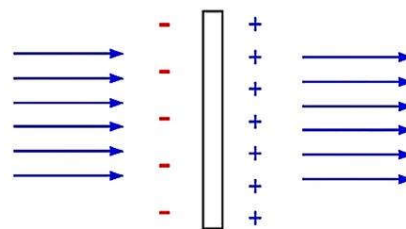


Figura 1.36. Comportamiento del campo eléctrico actuando sobre una lámina conductora, sin tomar en cuenta el efecto de los bordes. Dentro de la lámina $E = 0$

Las cargas se distribuyen de forma tal que dentro del conductor el campo se hace cero;

sin embargo, las cargas que aparecen en el lado contrario de la superficie originan un campo que se extiende al resto del espacio (ver figura 1.36).

Así, el campo electrostático se extiende a todo el espacio que lo rodea, con excepción del interior de los conductores. El resultado no depende de si la lámina conductora posee o no una carga neta en exceso. Tampoco de si la lámina es conductora o aislante.

Si la lámina es aislante las cargas no se mueven, el campo no se anula en el interior pero el resultado anterior sigue siendo válido. Más detalles en capítulos posteriores.

1.15 Campo asociado a dos planos infinitos con densidades (σ^+) y (σ^-)

Considere dos planos conductores cargados con igual densidad de carga y signo contrario (figura 1.37). El valor modular de la intensidad asociada a cada plano el mismo valor, calculado en la sección anterior:

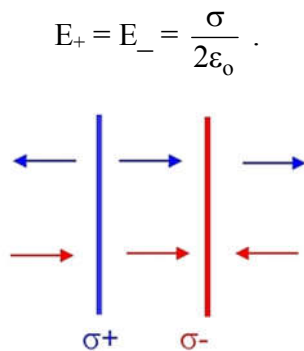


Figura 1.37. Dos planos infinitos cargados.

La intensidad en cada punto vendrá dada por la suma vectorial de ambas intensidades, que en una dimensión equivale a la suma algébrica. En la región entre los dos planos el campo tiene el mismo sentido, y los módulos se suman, mientras que en las regiones a izquierda y derecha de los planos

tienen sentido contrario, y se restan.

Entre los planos, $E = \sigma/\epsilon_0$.

Fuera de los planos, $E = 0$.

Este resultado será utilizado más adelante para calcular la capacidad de un condensador plano.

Problemas resueltos

1. En el esquema adjunto, hallar la fuerza actuando sobre q_1 , si: $q_1 = -1 \times 10^{-6}$, $q_2 = +3 \times 10^{-6}$, $q_3 = -2 \times 10^{-6}$, $r_{12} = 15$ cm, $r_{13} = 10$ cm, $\theta = 30^\circ$.

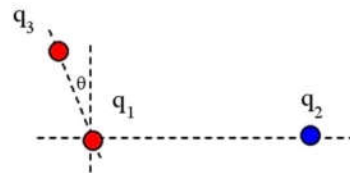


Figura problema 1

- 2.- Una carga Q se divide en dos partes, q y $Q-q$. ¿Cuál es la relación q/Q para que las dos partes, colocadas a una cierta distancia, tengan repulsión máxima?
3. Dos partículas conductoras idénticas, separadas 5m, se atraen con una fuerza de 0.108N. Cuando las partículas se ponen en contacto y se separan de nuevo a la misma distancia, se encuentra que se repelen con una fuerza de 0.036 N. ¿Cuáles eran las cargas iniciales de las partículas?

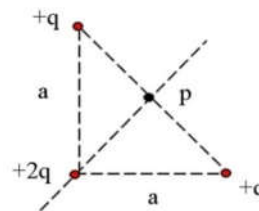


Figura problema 4

4. Calcular la intensidad del campo eléctrico en el punto P de la figura, si se suponen conocidos a , q y ϵ_0 (permitividad del vacío).

5. Localizar en la figura los puntos del espacio que rodea a las cargas donde la intensidad del campo eléctrico es nula.

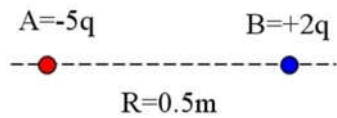


Figura problema 5

6. La figura muestra una carga puntual de $+1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ en el centro de una cavidad esférica de 3 cm de radio en una pieza metálica. Utilizar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico: a) en un punto A que se encuentra a la mitad de la distancia entre la carga y la superficie interna; b) en el punto B, en la parte maciza del cubo.

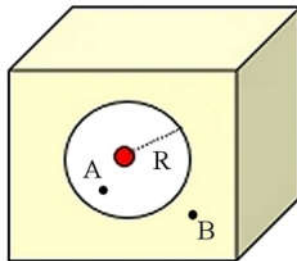


Figura problema 6

7. Un dipolo eléctrico consta de dos cargas opuestas de la misma magnitud $q = 10^{-6} \text{ C}$ separadas una distancia $d = 2.0 \text{ cm}$.

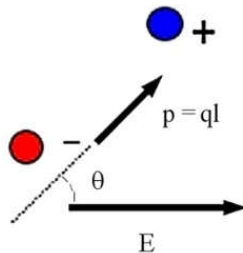


Figura problema 7

El dipolo está colocado en un campo externo de 10^5 N/C . a) Calcular el torque máximo que ejerce el campo sobre el dipolo. b) ¿Qué trabajo hay que realizar para invertir el dipolo a partir de una posición inicial alineado con el campo?

8. Una pequeña esfera de masa $m = 5 \text{ mg}$, cargada eléctricamente con una carga $q = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$, está suspendida de un hilo de seda que forma un ángulo de 30° con respecto de una superficie conductora plana y cargada. Determinar la densidad superficial de carga σ de la lámina.

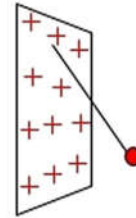


Figura problema 8

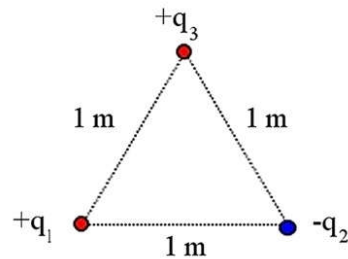


Figura problema 9

9. Calcular la fuerza actuando sobre la partícula de carga q_3 , sabiendo que $q_1 = 1.0 \times 10^{-5} \text{ C}$; $q_2 = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$; $q_3 = 4 \times 10^{-5} \text{ C}$.

10. Calcular el valor de la intensidad del campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor con carga positiva y densidad superficial de carga (variable) σ .

11. Calcular la intensidad del campo eléctrico asociado a un plano infinito cargado con carga (+).

12. Calcular la intensidad del campo eléctrico asociado a dos láminas infinitas con densidad superficial de carga $+\sigma$ y $+\sigma$.

Soluciones

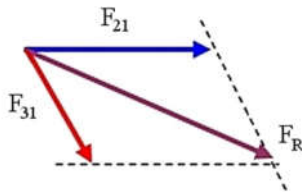
1.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

$$F_{Rx} = F_{21} + F_{31}\sin\theta$$

$$F_{Ry} = F_{31}\cos\theta$$

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j}$$



Solución 1

$$F_{21} = kq_1q_2/r_{12}^2$$

$$= 9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times 10^{-6} / (0.15)^2$$

$$= 1.2 \text{ N}$$

$$F_{31} = 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 10^{-6} / (0.1)^2$$

$$= 1.8 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = 1.2 + 1.8 \times 1/2 = 2.1 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = 1.8 \times \sqrt{3}/2 = 1.6 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$F_R = (2.1^2 + 1.6^2)^{1/2} = 2.64 \text{ N.}$$

Como la fuerza tiene magnitud y sentido, también es indispensable especificar la dirección de F_R :

$$\vec{F}_R = 2.1\vec{i} - 1.6\vec{j}$$

$$\phi = \arctan F_{Ry}/F_{Rx}$$

$$= \arctan(-1.6/2.1) = \arctan(-0.76)$$

$$\text{Respuesta: } \phi \approx -37^\circ$$

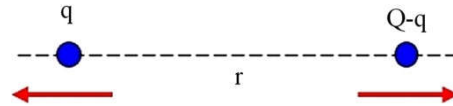
2.

$$F_q = F_{Q-q} = kq(Q-q)/r^2$$

(pareja de acción y reacción)

$$F_q = kqQ/r^2 - kq^2/r^2$$

($F_q = F_q(q)$, por Q y r constantes).



Solución 2

Calculando el extremo relativo de $F_q(q)$:

$$dF_q/dq = kQ/r^2 - 2kq/r^2 = 0$$

$$Q - 2q = 0$$

Respuesta: $q/Q = 1/2$ (hay que dividir la carga inicial a la mitad).

3.

$F_1 = F_2$ (pareja de acción y reacción)

Al inicio:

$$F_1 = kq_1q_2/r_{12}$$

$$q_1q_2 = r_{12}^2 F_1/k$$

$$= (0.5)^2 \times 0.108/9 \times 10^9$$

$$= 3 \times 10^{-12}$$

Al ponerse en contacto las partículas conductoras, la mayor neutraliza a la menor y queda un exceso de carga $\delta q = q_1 - q_2$, que se reparte por igual entre ambas partículas (son conductoras e idénticas).

Después de unir las y separarlas:

$$q_1' = q_2' = (q_1 - q_2)/2$$

(asumiendo que $q_1 > q_2$ en valor absoluto,)

$$F_1' = kq_1'q_2'/r_{12}$$

$$\{(q_1 - q_2)/2\}^2 = r_{12}^2 F_1' / k$$

$$q_1 - q_2 = 2r_{12}(F/k)^{1/2}$$

$$= 2 \times 0.5(0.036/9 \times 10^9)$$

$$= (4 \times 10^{-12}) = 2 \times 10^{-6}.$$

(En la ecuación anterior solo se ha tomado la raíz positiva, para ser consistentes con la suposición de que $q_1 > q_2$).

Se llega así a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$q_1 q_2 = 3 \times 10^{-12} \quad (1)$$

$$q_1 - q_2 = 2 \times 10^{-6} \quad (2)$$

Sustituyendo la (1) en la (2):

$$q_1^2 - 2q_1 \times 10^{-6} - 3 \times 10^{-12} = 0$$

$$q_1 = 1 \times 10^{-6} \pm \{(4 + 12) \times 10^{-12}\}$$

$$= (1 \pm 2) \times 10^{-6}$$

El valor (-) no tiene sentido físico, puesto que se asumió de entrada que las cargas eran (+) y, además, $q_1 > q_2$. Por tanto:

$$q_1 = 3 \times 10^{-6} \text{ C.}$$

Entonces,

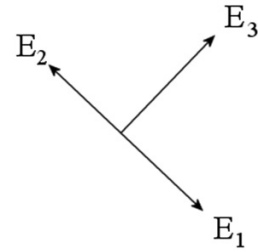
$$q_2 = q_1 - 2 \times 10^{-6} = 1 \times 10^{-6} \text{ C.}$$

Note que el signo de las cargas no se puede determinar a partir de los datos del problema ni de las ecuaciones.

4.

$$2d = (a^2 + a^2)^{1/2} = a\sqrt{2}$$

$$d = a\sqrt{2}/2$$



Solución 4

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$E_1 = E_2 = kq/r^2, \text{ por tanto}$$

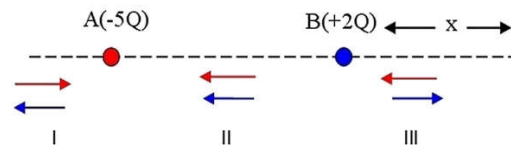
$$E_R = E_3 = 4kq/a^2,$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$$

$E_R = q/(\pi\epsilon_0 a^2)$, dirigida a lo largo de la bisectriz, saliendo de la carga $2q$.

5.

Fuera de la recta que une que las cargas el campo no se puede anular, pues siempre habrá una componente perpendicular a la recta. Tampoco se puede anular a lo largo de la recta que une las cargas (región II). En las regiones I y III es posible en principio.



Solución 5

Analizando la región III, imponiendo la condición de que $E_R = 0$ a una distancia x desconocida a la derecha de la carga B:

$$E_R = E_A - E_B = 0$$

$$E_A = E_B$$

$$\frac{k5q}{(0.5 + x)^2} = \frac{k2q}{x^2}$$

$$5x^2 = 0.5 + 2x + 2x^2$$

$$3x^2 - 2x - 0.5 = 0$$

$$x = (2 \pm \sqrt{10})/6 = (2 \pm 3.16)/6$$

$$x_1 = 0.86$$

$$x_2 = -0.19$$

La solución negativa no tiene sentido físico de acuerdo al planteamiento del problema, por tanto:

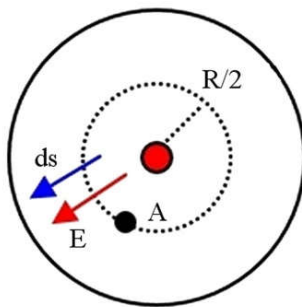
Respuesta: 0.86 m a la derecha de B.

Ejercicio adicional. Encontrar si existe algún punto a la izquierda de A donde se cumpla la condición $E_R = 0$.

6.

a) Sentido del vector E: saliendo de la carga.

Dirección del vector E: perpendicular a la superficie (si no lo fuera, habría fuerzas tangenciales actuando sobre las cargas en la superficie esférica y el sistema no estaría en equilibrio).



Solución 6

Para calcular el módulo del vector, se construye una superficie gaussiana esférica que pase por el punto A. En la superficie:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \cos \theta = E ds$$

Por simetría, el módulo de E es constante sobre la superficie gaussiana y se puede sacar fuera de la integral. El área de una esfera es $4\pi r^2$, donde r es su radio ($r = R/2$).

$$E \int ds = E 4\pi r^2 = q_n / \epsilon_0$$

$$E = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

$$E = kq / r^2 \text{ (campo de la carga puntual)}$$

$$E = 9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-7} / 0.015^2$$

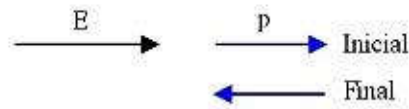
$$= 4 \times 10^6 \text{ N/C}$$

b) En el punto B dentro del conductor $E = 0$ en el equilibrio, pues de no ser así sobre cualquier carga q_i en el interior del conductor obraría una fuerza eléctrica no compensada $F_i = q_i E$, y el sistema no estaría en equilibrio. (La carga puntual induce cargas (-) en la superficie de la esfera tal que $q + q_{\text{inducida}} = 0$. Esas cargas negativas, a su vez, repelen las correspondientes cargas positivas en el seno del metal, que van a la superficie externa del cubo).

7. a)

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\tau = p E \sin \theta$$



Solución 7

el torque máximo se alcanza cuando $|\sin \theta| = 1$ (valor máximo) correspondiente a $\theta = \pi/2$.

$$\tau = q l E = 10^{-6} \times 2 \times 10^{-2} \times 10^5$$

$$\tau = 2 \times 10^{-3} \text{ Nm}$$

b) $W_c = -\Delta E_p$, ya que la fuerza electrostática es conservativa. La energía del dipolo tiene la forma: $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$.

$$W_c = -(E_{p2} - E_{p1}) = -(pE \cos \theta_2 - pE \cos \theta_1)$$

$$\theta_2 = 180^\circ; \theta_1 = 0^\circ$$

$$W_c = -qLE(\cos 180 - \cos 0)$$

$$= -10^{-6} \times 2 \times 10^{-2} \times 10^5 (-1 - 1)$$

$$W_c = 4 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

8.

eje x:

$$F_e - T \sin \theta = m a_x = 0$$

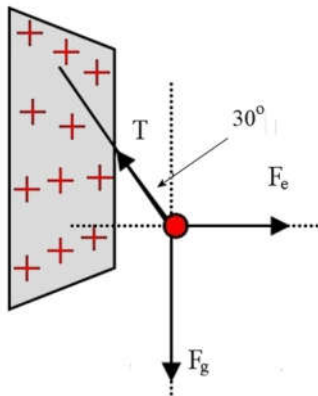
eje y:

$$T \cos \theta - F_g = m a_y = 0,$$

pero $F_g = mg$; $F_e = qE$, donde E es el campo de la lámina infinita cargada, $E = \sigma/2\epsilon_0$.

$$T \sin \theta = qE$$

$$T \cos \theta = mg.$$



Solución 8

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$\tan \theta = qE/mg = q\sigma/2\epsilon_0 mg$$

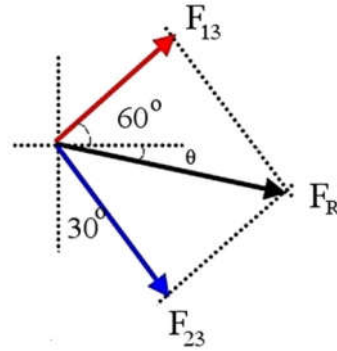
$$\sigma = 2\epsilon_0 mg \tan \theta / q$$

$$\begin{aligned} \sigma &= (2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0.58) / 2 \cdot 10^{-6} \\ &= 257.6 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2. \end{aligned}$$

9.

F_{13} : fuerza ejercida por la carga 1 sobre la 3

F_{23} : fuerza ejercida por la carga 2 sobre la 3



Solución 9

$$F_{Rx} = F_{13} \cos 60 + F_{23} \sin 30$$

$$F_{Ry} = F_{13} \sin 60 - F_{23} \cos 30$$

$$F_R = (F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2)^{1/2}$$

$$F_{13} = kq_1q_3/r_{13}^2$$

$$= 9 \times 10^9 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^{-5} / 1^2$$

$$= 3.6 \text{ N}$$

$$F_{23} = kq_1q_3/r_{23}^2$$

$$= 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^{-5} / 1^2$$

$$= 7.2 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = 3.6 \times 0.5 + 7.2 \times 0.5 = 5.4 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = 3.6 \times \sqrt{3}/2 - 7.2 \times \sqrt{3}/2 = 3.1 \text{ N}$$

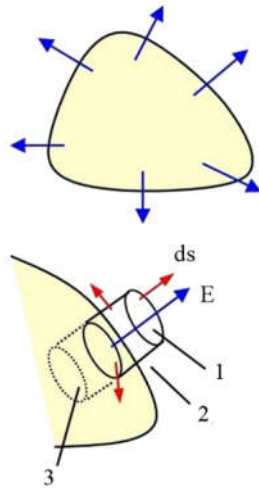
$$F_R = (5.4^2 + 3.1^2)^{1/2} \sim 6.2 \text{ N}$$

$$\tan \theta = F_{Ry}/F_{Rx} = 3.1/5.4 = 0.574$$

$$\theta = \arctan(0.574) \sim 30^\circ$$

10.

- Sentido: saliendo de la superficie (carga +)
- Dirección: perpendicular a la superficie (de no ser así, habría componentes del campo sobre la superficie y una fuerza neta eléctrica $F = qE$ actuando sobre las cargas libres en el conductor. El sistema no estaría en equilibrio).
- Para calcular el módulo, se construye una superficie gaussiana cilíndrica, paralela al vector intensidad de campo en el punto, con la mitad fuera y la mitad dentro del conductor.



d) Solución 10

- superficie de la tapa superior (área A)
- superficie lateral del cilindro
- superficie de la tapa inferior (área A)

Aplicando el teorema de Gauss sobre la superficie cilíndrica:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_n / \epsilon_0 .$$

La integral sobre S_3 es nula, por ser $E = 0$ en el interior de un conductor. La integral

sobre S_2 es nula por ser E perpendicular a ds en todos los puntos. Para la integral por S_1 , considerando el cilindro tan estrecho como se desee, es posible considerar $E =$ constante sobre esa superficie y sacar E fuera de la integral:

$$E \int ds = q_n / \epsilon_0 .$$

$\int ds = A$, y la carga encerrada dentro de la superficie q_n es posible expresarla como $q_n = \sigma A$.

Por tanto,

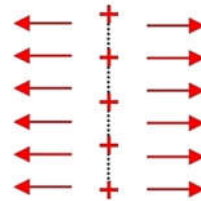
$$EA = \sigma A / \epsilon_0$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 .$$

11.

Sentido: saliendo del plano (cargas +)

- Dirección: perpendicular al plano (de no ser así, existirían componentes de E sobre el plano, $F = qE$ y las cargas se moverían, no habría equilibrio eléctrico, etc.)



Solución 11a

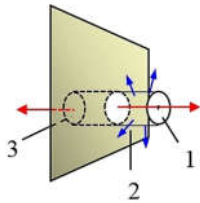
Para calcular el módulo, se construye una superficie cilíndrica en forma similar al problema anterior, donde las tapas del cilindro están a la misma distancia de la superficie por ambas caras. La única diferencia con la resolución del problema 10 es que ahora el campo E no es nulo sobre la superficie 3, aunque sigue siéndolo en la superficie 2, por ser E y ds perpendiculares.

Tanto en S_1 como S_3 $\cos\theta = 1$ por ser E y ds paralelos. Como las tapas del cilindro están a la misma distancia, por simetría se cumplirá que $E_1 = E_3 = E$. Al aplicar el teorema de Gauss se obtiene:

$$E \int ds_1 + E \int ds_3 = q_n / \epsilon_0,$$

y por un razonamiento análogo al problema anterior se llega de inmediato a que

$$E = \sigma / 2\epsilon_0.$$



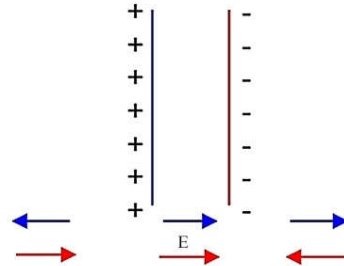
Solución 11b

12.

En el problema 11 se analizó que para una lámina cargada positivamente $E = \sigma / 2\epsilon_0$, y la dirección de E es perpendicular a la lámina y saliendo de ella. Si la lámina está

cargada negativamente el valor absoluto no varía, pero en este caso la dirección de E es *entrando* en la lámina. En valor modular:

$$E_+ = E_- = \sigma / 2.$$



Solución 12

El campo resultante en cualquier punto será la suma vectorial de ambas contribuciones. A la izquierda y a la derecha de los dos planos los campos se cancelan, y $E_R = 0$. Entre los dos planos los campos se refuerzan:

$$E_R = E_+ + E_- = \sigma / 2\epsilon_0 + \sigma / 2\epsilon_0$$

Respuesta: $E = \sigma / \epsilon_0$ entre los dos planos y $E = 0$ fuera de esa región.

CAPÍTULO 2

Potencial y capacidad

Demostración $\epsilon_r = 1 + \chi_D$

Rigidez dieléctrica

2.1 Energía potencial electrostática

2.2 Potencial electrostático

Unidades del potencial

2.3. Potencial e intensidad de campo

2.4 Potencial asociado a un grupo de cargas puntuales

2.5 Relación inversa entre potencial e intensidad de campo

2.6 Superficies equipotenciales

2.7 Potencial asociado a una esfera conductora cargada

Cálculo de la intensidad de campo

Cálculo del potencial

2.8 Capacidad

Condensador

2.9 Capacidad de un condensador plano

2.10 Condensadores en serie y paralelo

Condensadores en serie

Condensadores en paralelo

2.11 Energía del campo eléctrico

Energía de un condensador cargado

Densidad de energía del campo eléctrico

El rayo y las cargas eléctricas

2.12 Conductores en campos eléctricos

2.13 Dieléctricos en campos eléctricos

Dieléctricos polares

Dieléctricos no polares

2.14 Condensador con dieléctrico

CAPÍTULO 2

Potencial y capacidad

2.1 Energía potencial electrostática

Al igual que las fuerzas gravitatorias y elásticas, las fuerzas electrostáticas son *conservativas*. El trabajo realizado por ellas es independiente de la trayectoria; por tanto, se les puede asociar una energía potencial, tal como sucede con la energía potencial gravitatoria o la elástica. De los cursos de mecánica es conocido que la *variación* de energía potencial se puede definir a partir de la siguiente expresión:

$$E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r} ,$$

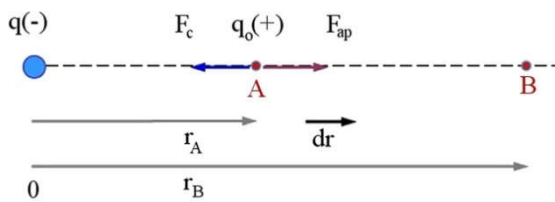


Figura 2.1. Cálculo de la energía potencial electrostática.

donde la fuerza aplicada $\vec{F}_{ap}$ se define de forma tal que en todo momento es igual y opuesta a la correspondiente fuerza conservativa; $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_c$. Por convenio, la integral se calcula trabajando *en contra* de la fuerza conservativa.

Para calcular la energía potencial asociada a una carga puntual en el campo de fuerzas originado por la presencia de otra, consideremos la figura 2.1. La carga en el origen es negativa, mientras que la carga de prueba es positiva, y la fuerza de atracción viene dada por la ley de Coulomb:

$$F = k \frac{qq_o}{r^2} .$$

Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} E_p(B) - E_p(A) &= \int_A^B F_{ap} \cos\theta dr \\ &= kqq_o \int_A^B \frac{dr}{r^2} = kqq_o \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B \end{aligned}$$

$$E_p(B) - E_p(A) = -k \frac{qq_o}{r_B} - \left(-k \frac{qq_o}{r_A} \right) .$$

Comparando los términos miembro a miembro en esta expresión se llega de inmediato a la conclusión de que la función energía potencial tiene la forma

$$E_p(r) = -k \frac{qq_o}{r} . \quad (2.1)$$

• Note la analogía con la energía potencial gravitatoria,

$$E_p = -G \frac{Mm}{r} .$$

Si la carga ubicada en el origen fuera positiva en vez de negativa, se obtendría una expresión casi idéntica, con la única diferencia de que ahora la energía potencial sería positiva en vez de negativa. Analizando las 4 posibles combinaciones de signos de las cargas q y q_o : $++$, $+-$, $-+$ y $--$, se llega con rapidez a la conclusión de que para obtener el valor correcto, basta con sustituir el valor numérico de las cargas *con su signo* en la expresión general.

Note que, a diferencia de la intensidad de campo, cuyo módulo siempre es positivo, la energía potencial es un escalar y puede ser positiva o negativa.

• La demostración se dedujo en una dimensión para simplificar los cálculos, pero

se puede demostrar con toda rigurosidad que el resultado es válido cualquiera sea la trayectoria tridimensional que recorra la carga desde el punto A hasta el B (figura 2.2).

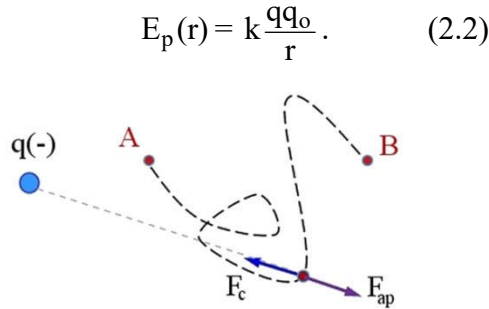


Figura 2.2. La diferencia de energía potencial no depende de la trayectoria.

- La energía potencial no está asociada a una carga particular. Se puede hablar tanto de la energía de q_0 en el campo de fuerzas de q , como de la energía de q en el campo de fuerzas de q_0 , como de la energía del sistema de cargas.
- Cualquier distribución de cargas se puede reducir a una suma de cargas puntuales. Como la suma de fuerzas conservativas es también una fuerza conservativa, se llega rápido a la conclusión de que cualquier fuerza de origen electrostático siempre puede ser asociada a una energía potencial. (Aunque la expresión analítica correspondiente puede llegar a ser mucho más compleja que la obtenida para dos cargas puntuales).

2.2 Potencial electrostático

Se define la *diferencia de potencial* entre dos puntos A y B cualesquiera en el espacio por la expresión

$$V_B - V_A = \frac{\Delta E_p}{q_0^+} \quad (2.3)$$

donde q_0^+ es nuestra conocida carga de prueba positiva. Como el trabajo de la fuerza conservativa es igual a la variación negativa de la energía potencial y el trabajo de la fuerza aplicada W_{ap} es igual al de la fuerza conservativa con signo cambiado, una definición alternativa de potencial donde los signos (-) se cancelan es la siguiente:

$$V_B - V_A = \frac{W_{ap}}{q_0^+}. \quad (2.4)$$

Tal como ocurre con la energía potencial, el potencial puede ser positivo o negativo en dependencia del signo de la carga que se encuentra en el origen.

Ejemplo: Potencial asociado a una carga puntual

Combinando (2.1) y (2.2) se ve de inmediato que es posible escribir

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q_0}$$

$$V(r) = k \frac{q}{r}.$$

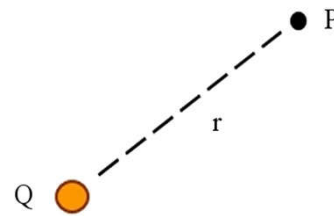


Figura ejemplo

Este es el potencial asociado a la carga q a una distancia r . Se justificará más adelante que representa el *trabajo por unidad de carga necesario para traer la carga de prueba desde el infinito hasta el punto en cuestión*. El potencial en el punto P (donde no hay carga alguna) será positivo o negati-

vo en dependencia del signo de la carga q .

Unidades del potencial

$[V] = [E_p]/[q] = J/C = V$ (volt). 1 volt es la energía que hay que gastar por cada coulomb que se trae desde el infinito hasta una distancia de un metro de una carga de 1 coulomb.

Alessandro Volta (1745-1827). Físico italiano, figura 2.3. Se le conoce por crear la primera pila eléctrica, la llamada *pila de Volta o pila voltaica*. La pila voltaica aprovecha la electricidad de una reacción química espontánea para generar una diferencia de potencial entre dos electrodos sumergidos en disoluciones diferentes. Volta era profesor universitario de física y realizó numerosas contribuciones a la ciencia. Por sus trabajos en el campo de la electricidad Napoleón le nombró conde en 1801. La unidad de potencial eléctrico, el volt, se llama así en su honor.

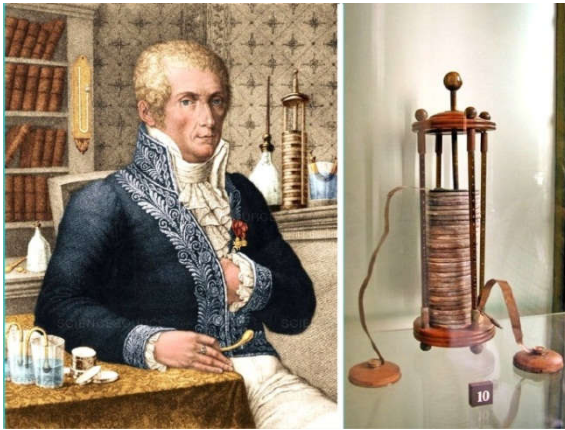


Figura 2.3. El conde Alessandro Volta y la primera pila eléctrica.

2.3 Potencial e intensidad de campo

Considere la ecuación (2.3). Si se sustituye W_{ap} por la integral correspondiente se ob-

tiene:

$$V_B - V_A = \frac{W_{ap}}{q_o} = \frac{1}{q_o} \int_A^B \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r} . \quad (2.5)$$

Expresando la fuerza aplicada en función de la intensidad de campo y simplificando;

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_c = -q_o \vec{E}$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.6)$$

Esta expresión permite calcular la diferencia de potencial si se conoce la distribución de E en el espacio, aunque se desconozca la distribución de las cargas que lo originan.

Potencial en un punto. Definición formal.

En forma similar a como ocurre con la energía potencial, por lo general interesa conocer la *diferencia de potencial*, y no el valor absoluto del potencial en un punto. No obstante, este último valor se puede calcular si se toma en cuenta que para la carga puntual el potencial tiende a cero a medida que r tiende a infinito. Generalizando y tomando el potencial electrostático igual a cero en el infinito, haciendo $V_A = 0$ cuando $A \rightarrow \infty$ en la expresión anterior y sustituyendo el punto B por otro P cualquiera, para indicar mayor generalidad, se obtiene

$$V_p = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} .$$

Comparando con (2.3) se comprueba con facilidad que también puede ser escrita como

$$V_p = \frac{W_{ap}(\infty \rightarrow P)}{q_o} .$$

Esta última expresión indica que el poten-

cial en un punto P se interpreta como el trabajo por unidad de carga que es necesario hacer, trabajando en contra de la fuerza conservativa, para traer la carga de prueba desde el infinito hasta el punto.

2.4 Potencial asociado a un grupo de cargas puntuales

Se desea calcular el potencial en el punto P asociado al grupo de cargas puntuales $q_1 \dots q_N$. Si se coloca una carga de prueba $q_0(+)$ en el punto P, q_1 ejercerá una fuerza F_1 , q_2 otra F_2 , y así sucesivamente. En este caso,

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i .$$

De los cursos de mecánica es conocido que el trabajo de la resultante es igual a la suma de los trabajos realizados por las fuerzas individuales:

$$W_R = \sum_i W_i .$$

Por tanto,

$$W_{ap} = W_{ap}(1) + W_{ap}(2) + \dots W_{ap}(N).$$

Dividiendo por la carga de prueba q_0 y aplicando la definición de potencial

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) + V_3(P) + \dots + V_N(P)$$

$$V(P) = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2} + k \frac{q_3}{r_3} + \dots + k \frac{q_N}{r_N} .$$

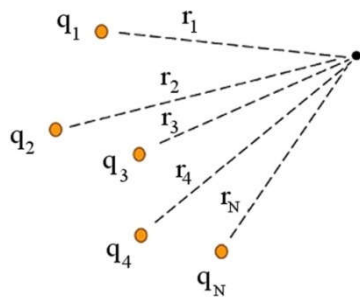


Figura 2.4. Potencial asociado a un grupo de cargas puntuales.

Como potencial es un escalar, en estas expresiones hay que considerar el signo de las cargas (+) o (-). En resumen,

$$V(P) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} .$$

El potencial en el punto P es la suma algebraica de los potenciales asociados a cada carga (figura 2.4).

2.5 Relación inversa entre potencial e intensidad de campo

Considere primero el movimiento en una dimensión a lo largo del eje x. La expresión (2.5) queda entonces como

$$V_B - V_A = - \int_A^B E dx .$$

De acuerdo a la definición de integral, lo que está dentro de la integral es el diferencial de la función potencial (V). Por tanto, es posible escribir $dV = - E dx$, y también

$$E = - \frac{dV}{dx} .$$

La derivada respecto a la posición (d/dx) se denomina *gradiente*, y la expresión anterior indica que la intensidad de campo es igual a menos el gradiente del potencial.

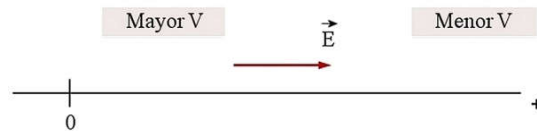


Figura 2.5. Intensidad de campo como gradiente negativo del potencial, $E = -dV/dx$.

Note que la expresión anterior indica que el vector $\vec{E}$ siempre va dirigido de la región de mayor potencial a la de menor potencial. Considerando los convenios usuales de signos en una dimensión si V decrece (dV/dx

< 0 , negativa) entonces $E > 0$ (dirigido hacia la derecha, figura 2.5). Si V aumenta con x , E estaría en sentido contrario.

Cuando la situación se analiza en tres dimensiones, se obtiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

El símbolo $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ representa al *operador gradiente*, pues actúa sobre una función escalar. (Cuando actúa sobre un vector, es la *divergencia*). Es posible demostrar que en el espacio $\vec{E}$ está orientado en la dirección de la *máxima variación* del potencial.

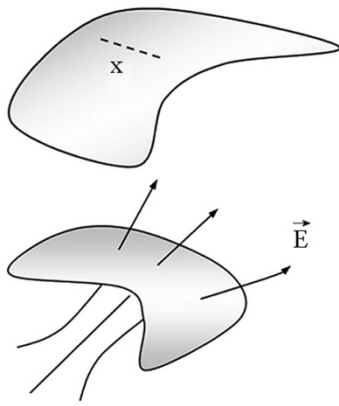


Figura 2.6. Superficie equipotencial (ver texto).

2.6 Superficies equipotenciales

Una superficie equipotencial es una superficie, real o imaginaria, que pasa por todos los puntos del espacio que tienen un mismo valor del potencial. Significa que sobre la superficie no puede haber componentes de la intensidad de campo, por lo que las líneas de fuerza serán siempre perpendiculares a la superficie.

Por otra parte, en la sección 1.13 se demostró que en un conductor cargado las líneas de fuerza son siempre perpendiculares a la superficie. A partir de ahí se llega a la conclusión de que en la superficie de cualquier conductor $dV/dx = 0$ para todo x , y por tanto $V = \text{constante}$ sobre la superficie. Todos los puntos de la superficie están al mismo potencial.

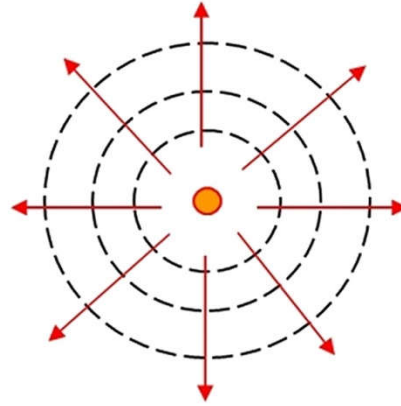


Figura 2.7. Superficies de igual potencial de una carga puntual.

Considere una superficie equipotencial cualquiera, y un segmento de recta de longitud x sobre esa superficie (figura 2.6). Como V es constante sobre la superficie,

$$E_{\parallel} = -dV/dx = 0.$$

Como ejemplo se pueden analizar las superficies equipotenciales asociadas a una carga puntual (figura 2.7). El potencial de una carga puntual tiene la forma $V = kq/r$. Para todos los puntos que estén a la misma distancia r de la carga, $V = \text{constante}$.

El lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia r es una esfera; por tanto, las superficies equipotenciales serán *esferas concéntricas*, con centro en la carga q .

2.7 Potencial asociado a una esfera conductora cargada

Para calcular el potencial asociado a una esfera conductora cargada de radio R , ante todo es necesario conocer la distribución de la intensidad de campo E , dentro y fuera de la esfera, y después utilizar esa distribución para calcular el potencial según la definición (2.5).

Cálculo de la intensidad de campo

Dentro de cualquier conductor metálico $E = 0$ (sección 1.13). Por tanto, dentro de la esfera ($r < R$) la intensidad de campo es nula.

Fuera de la esfera, como la superficie es equipotencial, $\vec{E}$ será perpendicular a la superficie. Suponiendo que la carga en exceso es positiva, el sentido de E es saliendo de la esfera (figura 2.8). El valor modular se puede obtener aplicando el teorema de Gauss.

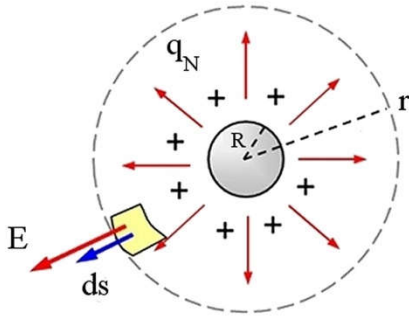


Figura 2.8. Cálculo de E para una esfera conductora cargada.

Con ese fin se considera una superficie gaussiana esférica, de radio $r > R$ y se integra sobre esa superficie.

$$\oint_S E \cos \theta ds = \frac{q_N}{\epsilon_0}.$$

Los vectores E y ds forman ángulo de 90° en todos los puntos de la superficie gaussiana, por tanto $\cos(\theta) = 1$.

Considerando la simetría del problema, se llega a la conclusión de que E debe ser constante sobre la superficie de integración, ya que un observador situado sobre la superficie gaussiana no notará diferencia alguna en los alrededores cuando el sistema rote alrededor del centro de la esfera metálica. Sacando E fuera de la integral, como la carga neta es q ,

$$E \oint_S ds = ES = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

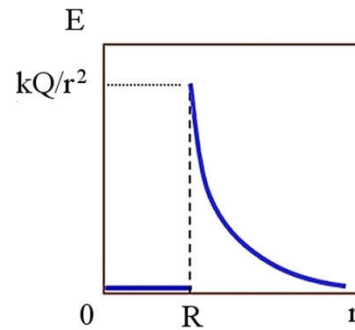


Figura 2.9. Intensidad de campo en función de la distancia para una esfera conductora cargada.

El área superficial de una esfera es $S = 4\pi r^2$. Recordando que $k = 1/4\pi\epsilon_0$ y sustituyendo, se obtiene al final

$$E = k \frac{q}{r^2} \quad (r > R).$$

Esta expresión es idéntica a la del campo asociado a una carga puntual de carga q colocada en el centro de la esfera. Significa que cuando $r > R$ la esfera cargada se comporta como una carga puntual.

El gráfico de la intensidad de campo en función de la distancia al centro de la esfera es similar a la figura 2.9. La función $E(r)$ presenta una discontinuidad cuando $r = R$, debido a que el potencial cae desde su valor máximo en la superficie hasta cero, en el

interior de la esfera, en una distancia muy pequeña. Esta distancia es del orden atómico, imposible de ser representada a escala en un gráfico, pues el tamaño de los portadores de carga es del orden atómico-molecular.

Cálculo del potencial

Si la esfera se comporta como una carga puntual para $r > R$, el potencial asociado será necesariamente idéntico al de la carga puntual. De aquí que, fuera de la esfera,

$$V(r) = k \frac{q}{r}.$$

Dentro de la esfera $E = 0$, y como $E = -dV/dx$, si $E = 0$ entonces $V = \text{constante}$, aunque la constante no tiene por qué ser cero; puede tomar cualquier valor.

Para calcular el valor de V dentro de la esfera, considere lo siguiente. Según la definición de potencial,

$$V(r) = \frac{W_{ap}(\infty \rightarrow r)}{q_o^+}.$$

Para calcular el potencial dentro de la esfera debemos tomar una carga de prueba y traerla desde el infinito hasta dentro de la esfera, trabajando en contra de la fuerza eléctrica (figura 2.10). El valor de esta integral es justo kq/r , y su valor aumenta a medida que r nos acercamos a la superficie y r disminuye. En la superficie la integral toma el mayor valor posible, kq/R .

Como el grosor de la superficie es infinitesimal, el trabajo adicional por unidad de carga para lograr que la carga de prueba atraviese la superficie es despreciable. Así, el valor del potencial dentro de la esfera, junto a la superficie, será el mismo valor

kq/R . Pero como V es constante dentro de la esfera, el potencial en cualquier lugar también será igual a kq/R . En resumen, dentro de la esfera ($r < R$),

$$V = k \frac{q}{R} \text{ (constante)}. \quad (2.6)$$

El gráfico del potencial $V(r)$ queda entonces como muestra la parte inferior de la figura 2.10. En resumen: para el campo y el potencial asociados a la esfera de radio R y carga q :

Si $r < R$: $E = 0$ y $V(r) = kq/R$

Si $r > R$: $E = kq/r^2$ y $V = kq/r$.

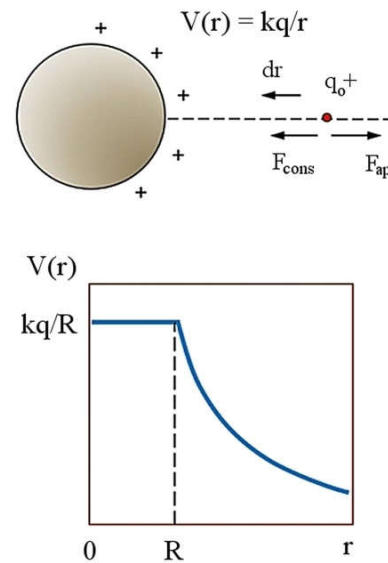


Figura 2.10. Potencial de una esfera cargada.

2.8 Capacidad

La expresión para el potencial en la superficie y en el interior de una esfera metálica de radio R viene dada por la ecuación (2.6);

$$V = k \frac{q}{R},$$

que puede ser escrita como

$$\frac{q}{V} = \frac{R}{k}.$$

El parámetro k es una constante y, para una esfera determinada, R también es una constante. Por tanto, para una esfera cargada, con independencia del valor de la carga que se añade,

$$\frac{q}{V} = \text{constante}.$$

En la Física son importantes las magnitudes que se mantienen constantes durante un determinado proceso, ya que permiten obtener información y predecir resultados, con independencia de lo que ocurra durante el proceso. La expresión anterior nos dice que, si q aumenta o disminuye, V lo hace en la misma proporción, sin importar la forma en que lo hace. Se define entonces la *capacidad* de la esfera por la relación

$$C = \frac{q}{V}.$$

Supongamos ahora que la esfera conductora se deforma a un cuadrado o alguna otra forma geométrica, sin que la carga almacenada se altere.

El potencial V no tiene por qué mantenerse invariable (ahora no hay ningún radio R). No obstante, cualquiera que sea el nuevo valor, será el mismo en todos los puntos de la superficie y dentro del cuerpo, pues la superficie conductora es equipotencial y dentro del conductor el potencial es constante, cualquiera sea su forma.

Se puede comprobar que la relación q/V también se mantendrá constante para esta nueva geometría, aunque el valor de la constante no será el mismo que en la esfera.

Condensador

Considere un sistema formado por dos conductores cualesquiera, con igual carga pero de signo contrario como se muestra en la figura 2.11. Entonces,

$$\frac{q^+}{V_A} = \alpha = \text{constante}, \quad \frac{q^-}{V_B} = \alpha' = \text{constante}.$$

La diferencia de potencial entre ambos conductores vendrá dada por

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_b - V_a = \frac{q^-}{\alpha'} - \frac{q^+}{\alpha} = q \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= q \times (\text{término constante}), \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, introduciendo una nueva constante: $\frac{q}{V_{ab}} = \text{constante}'$.

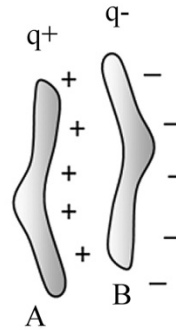
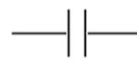


Figura 2.11. Condensador.

Un sistema como el del dibujo, formado por dos conductores con igual carga y de signo contrario, se denomina *condensador* o *capacitor*.



Valor fijo



Capacidad variable

Figura 2.12. Representación de los condensadores o capacitores.

- Los conductores reciben el nombre de *armaduras* o *placas* del condensador.

- La *capacidad* del condensador se define entonces por la relación

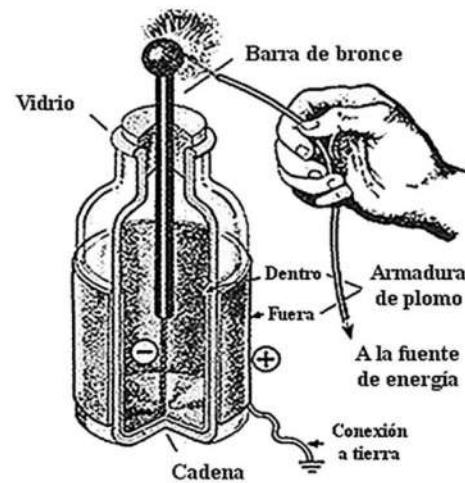
$$C = \frac{q}{V_{ab}}.$$

- Los parámetros q y V_{ab} representan el valor modular de la carga de *una* de las armaduras y la diferencia de potencial entre ambas. Significa que la capacidad así definida siempre toma valor positivo.
- El valor de C depende de la geometría de las armaduras y sólo se calcula en forma explícita en algunos casos de gran simetría.



- En el SI de unidades, $[C] = [q]/[V] = C/V = \text{Farad (F)}$. También son muy utilizados el microfarad ($\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) y el picofarad ($\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$).

En los circuitos eléctricos los condensadores se simbolizan como aparece en la figura 2.12. Note que entre las placas del condensador cargado aparecen fuerzas de atracción que puede dar origen a tensiones mecánicas, ya que las placas tienen cargas de signo contrario.



Figuras 2.13 y 2.13a. Botella de Leyden, el primer condensador. A la derecha, distribución de las cargas.

En las figuras 2.13 y 2.13a se muestra la *botella de Leyden*, uno de los condensadores más simples, construida alrededor de 1745 en la universidad de ese nombre. En sus orígenes fue una botella de cristal llena de agua y cerrada, con un conductor que traspasaba el tapón hasta el líquido. Se cargaba poniendo el conductor externo en contacto con una fuente de voltaje. Cuando se interrumpía el contacto y se tocaba el conductor con la mano se producía un ‘corrientazo’.

Las botellas actuales se recubren con una capa de estaño, por el interior y el exterior. El conductor es una barra de latón que atraviesa el tapón y está en contacto con el estaño mediante una cadena. Aún se usa para demostraciones y experimentos de laboratorio. En la figura 2.14 aparecen algunos condensadores contemporáneos.

2.9 Capacidad de un condensador plano

Un condensador plano es aquel formado por dos conductores paralelos e iguales de área A , separados a una distancia d , tal co-

mo muestra la figura 2.15. Ambos conductores planos están cargados con igual densidad superficial de carga de signo contrario σ^+ y σ^- .

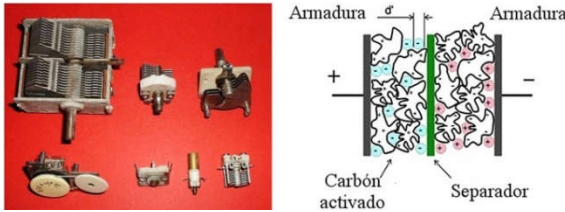


Figura 2.14. Condensadores contemporáneos, con valores de la capacidad millones de veces superiores al de la botella de Leyden.

Si la distancia d es mucho menor que las dimensiones lineales de las armaduras, se puede despreciar el efecto de los bordes y tomar la aproximación del plano infinito para calcular la intensidad de campo E . En ese caso, la intensidad de campo vendrá dada por la expresión analizada en la sección 1.15.

Dentro de las placas $E = \sigma/\epsilon_0$ (constante).

Fuera de las placas $E = 0$.

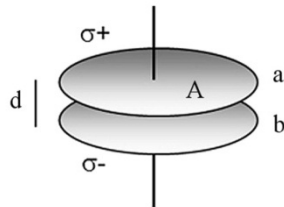


Figura 2.15. Condensador plano

La diferencia de potencial entre las placas se calcula a partir de (2.5) tomando el valor modular:

$$V_{ab} = |\Delta V| = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_a^b dr = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}. \quad (2.7)$$

La capacidad del condensador se obtiene sustituyendo en la definición:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{\sigma A}{\sigma d / \epsilon_0}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

- Note que el resultado no depende de ningún parámetro eléctrico, sino sólo de la geometría del sistema; i.e., de la distancia d entre las placas y del área A de una de ellas.

- La expresión anterior se refiere solo al *condensador plano*. Otras geometrías pueden tener valores muy diferentes de la capacidad.

- De (2.7) es inmediato que la diferencia de potencial V_{ab} entre las armaduras de este condensador puede ser escrita como

$$V_{ab} = Ed. \quad (2.8)$$

Esta expresión será utilizada más adelante.

2.10 Condensadores en serie y paralelo

Condensadores en serie

Interesa conocer la *capacidad equivalente* del sistema de condensadores que aparece en la figura 2.16. Cuando los condensadores están conectados de esta forma, se dice que están conectados *en serie*. Por capacidad equivalente se entiende la capacidad debe tener un solo condensador para que almacene la misma carga, bajo la misma diferencia potencial, cuando sustituye a los dos en la figura 2.16.

Al aplicar una diferencia de potencial en los extremos, aparece un campo eléctrico de intensidad E en el seno de los conductores. Este campo induce una redistribución de las cargas libres en los condensadores como se muestra en el esquema, donde por fuerza $q_1 = q_2 = q$. A causa del principio de conservación de la carga. Si en b no había cargas en

exceso al inicio, tampoco puede haberlas después que aparezca un potencial en los extremos.

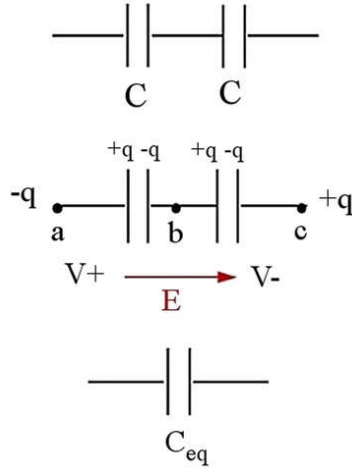


Figura 2.16. Condensadores en serie.

Además, de acuerdo a la definición de potencial, el trabajo por unidad de carga para llevar una carga desde a hasta c será la suma de los trabajos para llevarla desde a hasta b y desde b hasta c. Es decir, $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$.

Para hallar la capacidad equivalente es necesario hallar un condensador que tenga una capacidad tal que

$$C_{eq} = \frac{q}{V_{ac}},$$

donde $q = q_1 = q_2$ y $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$.

Tomando el inverso de la capacidad equivalente,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V_{ac}}{q} = \frac{V_{ab} + V_{bc}}{q}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Este resultado se generaliza con facilidad cuando hay más de dos condensadores en serie, obteniéndose

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Es decir, cuando los condensadores están en serie, el inverso de la capacidad equivalente es igual a la suma de los inversos de las capacidades.

Condensadores en paralelo

En este caso la conexión tiene la forma representada en la figura 2.17. Al establecer una diferencia de potencial V_{ab} en los extremos, esta se aplica por igual al capacitor C_1 y al C_2 , pues la diferencia de potencial no depende de la trayectoria, al igual que ocurre con la energía potencial.

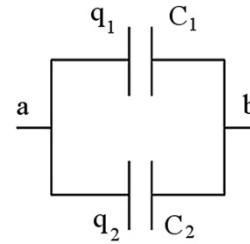


Figura 2.17. Condensadores en paralelo

La carga se distribuye entre ambos condensadores: $q = q_1 + q_2$, donde $q_1 \neq q_2$ en general. Considerando que $q = q_1 + q_2$ y dividiendo por V_{ab} :

$$\frac{q}{V_{ab}} = \frac{q_1}{V_{ab}} + \frac{q_2}{V_{ab}}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Generalizando a N condensadores en paralelo, se obtiene

$$C_{eq} = \sum_i C_i.$$

Cuando los condensadores están en paralelo, la capacidad equivalente es igual a la suma de las capacidades individuales.

2.11 Energía del campo eléctrico

Energía de un condensador cargado

Nota previa: En lo que sigue, el lector no debe confundir la notación usada para la intensidad del campo eléctrico (E , E_o , E_{pol}) con la energía potencial (E_p), o la energía almacenada en el condensador (E_{cond}), o la densidad de energía (ϵ). También debe diferenciar entre el potencial (V) y el volumen V (en negrita).

Durante el proceso de carga de un condensador al ser conectado a una fuente de voltaje, una cierta cantidad δq^+ se añade a una de las placas en cada intervalo de tiempo, mientras que otra carga δq^- se va añadiendo simultáneamente a la otra placa. El efecto resultante es similar al que se obtiene cuando una carga δq^+ se extrae de la placa negativa (dejando en ella una carga adicional δq^- , debido al principio de conservación de la carga) y esa carga δq^+ se adiciona a la placa positiva (figura 2.18).

Se desea calcular la variación de energía durante el proceso de carga del condensador. De acuerdo a la ecuación (2.2), la variación de energía potencial en el condensador puede ser escrita como

$$\Delta E_p = V_{ab} \delta q.$$

Pero en este caso la diferencia de potencial V_{ab} entre las placas no es constante; varía a medida que varía la carga en el condensador. Si tomamos una pequeña carga infinitesimal δq , entonces sí es posible considerar que V_{ab} se mantiene prácticamente constante cuando el δq pasa de la placa negativa a la positiva.

El correspondiente incremento de la energía también será infinitesimal, y la expresión a utilizar es:

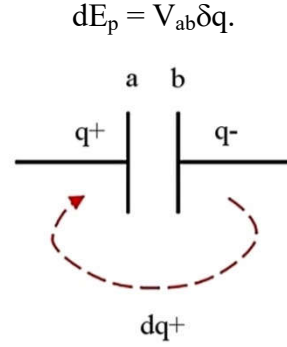


Figura 2.18. Cálculo de la energía de un condensador.

Si se desea calcular la variación de energía para un valor finito de carga, hay que sumar para todos los valores infinitesimales a medida que V_{ab} va aumentando. Cuando $\delta q \rightarrow 0$, es posible identificarlo con el diferencial dq de alguna función, y el proceso de límites conduce a la definición de integral. Por tanto, integrando a ambos lados de la expresión anterior, se obtiene

$$E_p(2) - E_p(1) = \int_{q_1}^{q_2} V_{ab} dq.$$

Para resolver la integral es necesario expresar todos los parámetros en función de la misma variable. Considerando la definición de capacidad, sustituyendo $V_{ab} = q/C$ y tomando $q_1 = 0$ (lo que hace $E_p(1) = 0$, correspondiente al condensador descargado), se obtiene

$$E_p = \frac{1}{C} \int_0^{q_2} q dq.$$

Sustituyendo E_p por E_{cond} para especificar que nos referimos a la energía del condensador cargado, integrando la expresión anterior y evaluando, se llega a

$$E_{cond} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Una expresión análoga se obtiene al hacer

uso de la expresión $q = CV_{ab}$;

$$E_{\text{cond}} = \frac{1}{2} CV_{ab}^2.$$

Las igualdades anteriores reflejan el valor de la energía almacenada en el condensador cargado. Es una energía que se puede recuperar y transformarse después en otros tipos de energía (sistema conservativo).

Densidad de energía del campo eléctrico

Aplicamos el resultado anterior al cálculo de la energía almacenada por unidad de volumen en un condensador plano, donde la capacidad viene dada por $C = \epsilon_0 A/d$. Llamando ϵ a la energía por unidad de volumen, considerando que el volumen entre las placas del condensador puede expresarse como $V = Ad$, y que la diferencia de potencial entre las placas toma el valor $V_{ab} = Ed$ tendremos:

$$\epsilon = \frac{E_{\text{cond}}}{V} = \frac{1}{2V} CV_{ab}^2 = \frac{1}{2Ad} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2.$$

Simplificando la expresión se llega a

$$\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

La expresión no depende de las características físicas del condensador, sino solo del valor de la intensidad de campo E . Representa la energía por unidad de volumen asociada al campo electrostático por el sólo hecho de su existencia.

Este resultado, obtenido para el caso particular de un condensador plano, es completamente general. En cualquier situación es posible comprobar que la energía está asociada al campo eléctrico y no a un dispositivo particular. También representa el hecho de que hay que gastar energía para establecer un campo electrostático, y que para lo-

grar que desaparezca hay que extraer energía del sistema. La misma cantidad de energía que fue necesario gastar para establecer un campo electrostático en una región del espacio, será recuperada cuando se haga desaparecer el campo de dicha región.

El rayo y las cargas eléctricas

No se conoce con exactitud cómo las nubes se cargan de electricidad, pero se sabe que la mayoría tiene carga negativa en la base y positiva en la cima. Al parecer, el hielo es un factor necesario para que ocurra la separación de las cargas, porque los rayos sólo suelen observarse cuando hay hielo en las capas superiores de las nubes.

Algunos experimentos muestran que las gotas de agua grandes, con caída rápida, se vuelven negativas, mientras que las gotas pequeñas, que caen con mayor lentitud se vuelven positivas. Por tanto, un posible mecanismo de polarización de la nube estaría dado por las distintas velocidades de caída de las gotas grandes y pequeñas.



Figura 2.19. Nube de tormenta.

Como quiera que se forme, la carga negativa en la base de la nube induce otra positiva en la tierra situada debajo que actúa como la segunda placa de un condensador gigante (figura 2.19).

Una de las hipótesis más aceptadas sobre el origen de los rayos en las nubes de tormenta considera los puntos siguientes:

- Las corrientes de convección dentro de la nube empujan las gotitas de agua hacia arriba tras la evaporación del suelo.
- Al llegar a las capas superiores más frías se forma una mezcla de agua con cristallitos de hielo (menos denso que el agua)
- La fricción del hielo con el agua arranca electrones del hielo, que adquiere carga (+)
- La mezcla de agua-hielo más pesada, con carga (-) va quedando rezagada.
- Se crea así una distribución vertical de carga, con el correspondiente campo eléctrico y diferencia de potencial asociados, y se almacena energía eléctrica en la nube con una densidad

$$\psi = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Cuando el potencial eléctrico entre la nube y tierra (o entre dos nubes) alcanza un valor suficiente ($\approx 10\,000\text{ V/cm}$), el aire se ioniza a lo largo de una trayectoria estrecha y se produce el destello del relámpago.

2.12 Conductores en campos eléctricos

En la figura 2.20 se observa la representación de un campo electrostático homogéneo en una región del espacio, antes y después de introducir en el mismo un cuerpo construido con una sustancia conductora; por ej., metal.

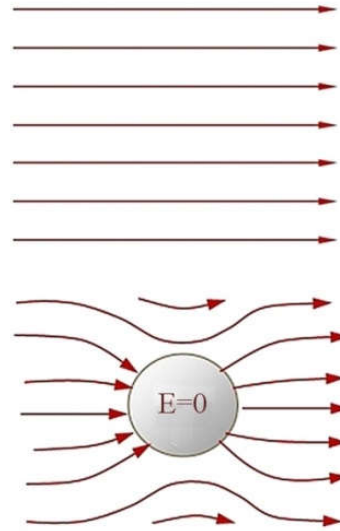


Figura 2.20. Conductor en un campo eléctrico.

Como se analizó antes, la gran movilidad de las cargas hace que éstas se redistribuyan de forma tal que $E = 0$ en el interior del conductor. Además, la componente de E sobre la superficie ($E_{\parallel}$) también debe ser nula en todos los puntos, pues de lo contrario no se habría alcanzado el equilibrio y las cargas libres estarían en movimiento continuo sobre la superficie.

Otra forma de llegar a similar conclusión es recordar que la superficie del conductor es una superficie equipotencial y $V = \text{constante}$ sobre la superficie. En ese caso $E = -dV/dx = 0$ a lo largo de cualquier dirección sobre la superficie, por lo que sólo puede existir la componente normal a la superficie.

Por tanto, en la superficie del conductor ocurre una redistribución de cargas de manera que las líneas de fuerza se distorsionan hasta hacerse perpendiculares a la superficie. El campo es nulo en el interior del conductor.

2.13 Dieléctricos en campos eléctricos

En los dieléctricos no existe la movilidad electrónica característica del enlace metálico, pues en este caso los electrones se encuentran muy ligados unos a otros, formando enlaces covalentes o de otro tipo. En todo caso, sólo existe la posibilidad de reagrupamiento de las nubes electrónicas a distancias del orden atómico-molecular.

Los dieléctricos se clasifican en polares o no polares, en dependencia de si las moléculas que los componen presentan o no un momento dipolar diferente de cero.

Dieléctricos polares

Un dieléctrico polar es cualquier sustancia no conductora, sólida, líquida o gaseosa, cuyas moléculas posean un momento dipolo permanente. Esta propiedad es característica de muchas moléculas no simétricas, donde la distribución de las cargas está acorde a la asimetría de la molécula, como por ejemplo, en el cloruro de hidrógeno (HCl), yoduro de potasio (KI), el agua (H₂O) y el cloruro de metilo (CH₃Cl), figura 2.21.

Como se analizó en la sección 1.9, al aplicar un campo externo de intensidad E los dipolos tienden a orientarse en su mismo sentido y dirección la acción de un torque $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

El vector *polarización* se define por la expresión

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i,$$

donde la suma es para todos los momentos dipolos microscópicos del cuerpo considerado. Es una medida macroscópica del grado de orden de los dipolos microscópicos.

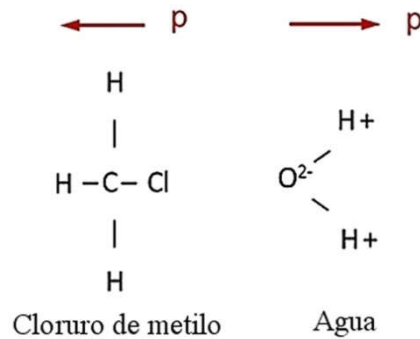


Figura 2.21. Dieléctricos polares

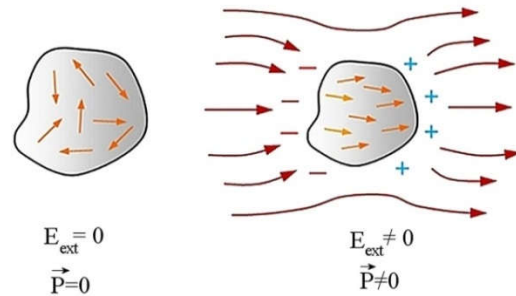


Figura 2.22. Dieléctrico polar en presencia de un campo eléctrico externo.

En la figura 2.22 se muestra un esquema de cómo se comporta el dieléctrico polar en ausencia de campo externo y en presencia del mismo, respectivamente. Las líneas de fuerza del campo externo se desvían de manera similar a como ocurre cuando se introduce un conductor, pero como las cargas ahora que están ligadas a los átomos, las líneas de fuerza no se alinean por completo perpendiculares a la superficie del dieléctrico. La intensidad de campo tampoco se anula dentro del dieléctrico, y $E_{\text{int}} \neq 0$.

Cuando no hay campo externo aplicado, los dipolos están orientados al azar, de forma aleatoria, en todas las posibles direcciones del espacio. Al sumar todos esos vectores microscópicos de igual magnitud se anulan

entre sí, y el resultado final es $\vec{P} = 0$. Por el contrario, cuando se aplica un campo externo aparece una orientación parcial o total de todos los dipolos en la dirección del campo. En este caso la suma de los momentos dipolos microscópicos no se anula y $\vec{P} \neq 0$.

Se dice entonces que la sustancia en cuestión está *polarizada*, y que la polarización es *dipolar*. Como en las superficies aparecen cargas en exceso negativas y positivas, si el campo disminuye con la distancia aparecerá una fuerza neta de atracción hacia el origen de las líneas de fuerza.

Dieléctricos no polares

Los dieléctricos no polares están formados por moléculas que no poseen un momento dipolo permanente. Esta particularidad es característica de sustancias cuyas moléculas son simétricas.

Ejemplos de dieléctricos no polares son el nitrógeno gaseoso (N_2), hidrógeno (H_2), cloro (Cl_2), metano (CH_4) y la mayoría de los hidrocarburos. Sin embargo, al aplicar un campo externo a un dieléctrico no polar, aparecen *dipolos inducidos* a causa de la deformación de las nubes electrónicas (figura 2.23).

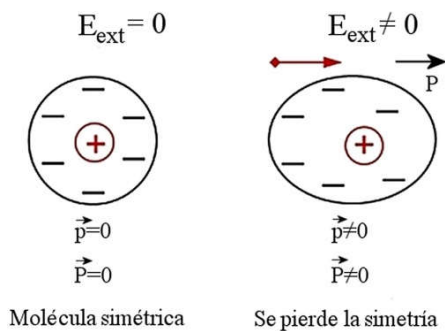


Figura 2.23. Dieléctrico no polar.

El comportamiento de la sustancia en presencia de campo externo será prácticamente el mismo que en el caso de los dieléctricos polares, pero en general con una intensidad mucho menor.

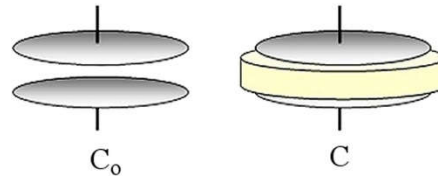


Figura 2.24. Condensador con dieléctrico.

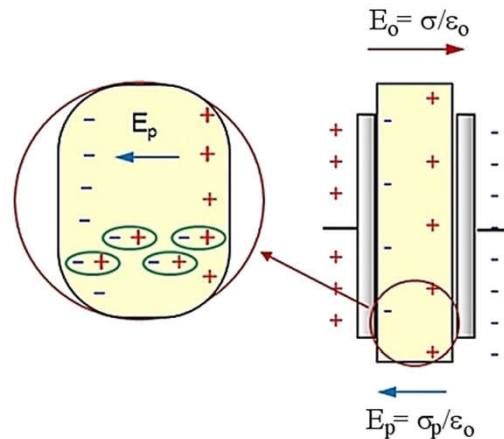


Figura 2.25. Distribución de las cargas en un dieléctrico entre las placas de un condensador.

Se define entonces la *permitividad dieléctrica relativa* ϵ_r del dieléctrico en cuestión por la relación

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}.$$

La permitividad dieléctrica es siempre mayor o igual que la unidad ($\epsilon_r = 1$ para el vacío). En la tabla 2.1 se muestran valores típicos de la permitividad de gases, líquidos y sólidos.

El esquema de la figura 2.25 muestra un dieléctrico colocado entre las placas de un

condensador plano con densidad superficial de carga σ , así como la distribución del campo eléctrico en su seno.

Tabla 2.1

Sustancia	ϵ_r
aire	1.00054
agua	78
vidrio pyrex	4.5
polietileno	2.3
titanato de bario (BaTiO ₃)	1000 (25°C) - 6000 (120°)

El grosor se encuentra muy exagerado para facilitar la representación. Al orientarse los dipolos microscópicos bajo la acción del campo externo, las cargas de los dipolos se anulan en el seno del dieléctrico, tal como aparece en el esquema.

Sin embargo, las cargas que quedan en la superficie forman una *densidad superficial de carga de polarización* $\sigma_p < \sigma$. Esta densidad representa las cargas no compensadas, “ligadas” a la superficie del dieléctrico. Significa que dieléctrico también se comporta como un condensador plano, con distribución de carga contraria a la del condensador externo.

La distribución de cargas σ_p en la superficie del dieléctrico da origen a un campo interno de polarización E_{pol} , de sentido contrario al campo externo E_o (figura 2.26). Este campo atenúa el valor de la intensidad de campo en el seno del dieléctrico, y su valor se puede obtener aplicando la expresión conocida para el campo del condensador plano:

$$E_{pol} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_o}.$$

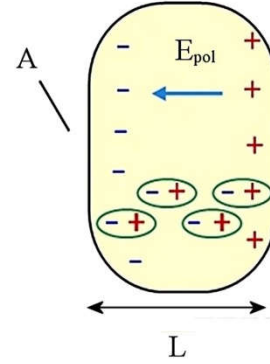


Figura 2.26. Campo interno de polarización.

Por consiguiente, en el seno del dieléctrico la intensidad de campo resultante tiene el valor

$$E = E_o - E_{pol}.$$

Cuando el campo aplicado E_o no es muy intenso, se encuentra en la práctica que el vector polarización es proporcional al campo aplicado:

$$\vec{P} = \epsilon_o \chi_D \vec{E}.$$

En esta expresión χ_D es la *susceptibilidad dieléctrica*. En el SI de unidades la susceptibilidad y la permitividad dieléctrica están relacionados por la expresión

$$\epsilon_r = 1 + \chi_D.$$

Otro parámetro muy utilizado para caracterizar las sustancias dieléctricas es la *permitividad absoluta*, que se define por la expresión

$$\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r.$$

Demostración $\epsilon_r = 1 + \chi_D$

Sea L el grosor del dieléctrico en la figura 2.26 y ℓ la longitud de una molécula. Supondremos que todos los dipolos microscópicos están perfectamente alineados en la dirección del campo aplicado. Para el vector polarización tendremos:

$$P = \frac{\sum p_i}{V} = \frac{\sum q_i \ell_i}{V}.$$

Al sumar para todos los dipolos, como las cargas internas se anulan, se obtiene un resultado equivalente al de un solo dipolo de longitud L y de carga igual a la carga superficial ligada q_p .

Es posible escribir entonces $V = AL$, y

$$P = \frac{q_p L}{AL} = \frac{q_p}{A} = \sigma_p,$$

$$P = \sigma_p.$$

El resultado anterior refleja el hecho de que el módulo del vector polarización es igual a la densidad de cargas “ligadas” en la superficie del dieléctrico. Entonces, considerando condensadores idénticos con igual carga, con y sin dieléctrico, haciendo uso de la definición de capacidad y del valor del potencial entre las placas,

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{q/V'}{q/V} = \frac{V}{V'} = \frac{E_0 d}{E d} = \frac{E_0}{E}.$$

En esta expresión E es el campo en el seno del dieléctrico y E_0 el campo externo en ausencia de dieléctrico. En la sección anterior la ecuación (2.9) expresa que $E = E_0 - E_p$. Por tanto,

$$\epsilon_r = \frac{E + E_p}{E} = 1 + \frac{E_p}{E}.$$

Como $\sigma_p = P$, sustituyendo $E_p = \sigma_p/\epsilon_0 = P/\epsilon_0$ y $E = P/\epsilon_0 \chi_D$ y simplificando, se llega a

$$\epsilon_r = 1 + \chi_D.$$

Rigidez dieléctrica

Si la diferencia de potencial entre las placas de un condensador con dieléctrico aumenta más allá de cierto valor, los átomos que forman el dieléctrico pueden llegar a ioni-

zarse a causa de la fuerza de interacción entre el campo y las cargas ligadas. El dieléctrico se transforma entonces en conductor en una región muy localizada, y salta una chispa muy intensa que es capaz incluso de perforar el dieléctrico y dañar el condensador o el circuito que le proporciona energía.

Tabla 2.2
Rigidez dieléctrica

Material	E_{rig} (MV/cm)
Mica	100 - 300
Goma	30 - 50
Aceite de transformador	15 - 25
Aire en condiciones normales	2 - 5

La capacidad de un dieléctrico de oponerse a la perforación se mide por la *rigidez dieléctrica*. Se define como la intensidad de campo máxima E_{rig} que puede ser alcanzada dentro del dieléctrico antes de que ocurra la perforación. Como $E = -dV/dx$, se acostumbra expresar E_{rig} en unidades de potencial por longitud (megavolt/cm). En la tabla 2.2 aparecen algunos valores típicos.

Problemas resueltos

1. Demostrar que la capacidad de un condensador plano viene dada por $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de una de las placas y d la distancia entre las mismas.

2. Calcular el potencial electrostático en el centro del cuadrado de lado a ($q_1 = 10^{-8}\text{C}$, $q_2 = -2 \times 10^{-8}\text{C}$, $q_3 = 3 \times 10^{-8}\text{C}$, $q_4 = 2 \times 10^{-8}\text{C}$, $a = 1\text{m}$).

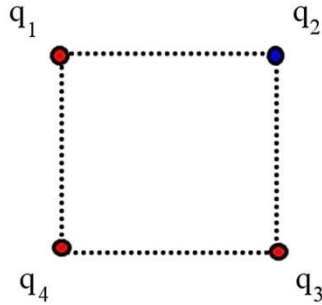


Figura problema 2

3. Demostrar que la capacidad equivalente de dos condensadores en serie viene dada por $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, mientras que si están en paralelo, entonces $C_{eq} = C_1 + C_2$.

4. Un condensador de placas paralelas de área A , separadas a una distancia d , se carga a una diferencia de potencial V_0 . A continuación se desconecta de la batería y las placas se separan a una distancia $2d$. Encontrar: a) la nueva diferencia de potencial; b) el trabajo necesario para separar las placas.

5. Calcular la capacidad del condensador de la figura, conocidos A , d , ϵ_1 y ϵ_2 .

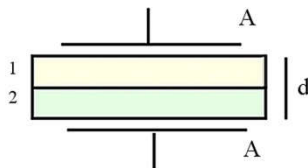


Figura problema 5

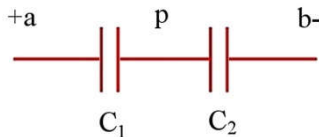


Figura problema 6

6. En la figura, después que los condensadores de capacidad $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 8 \mu\text{F}$

conectados en serie se desconectan de la fuente, $V_{ab} = 300 \text{ V}$.

a) ¿Cuál es la carga y la diferencia de potencial en cada condensador en ese momento?

b) Si después se conectan las placas (+) y las (-) entre sí, ¿cuáles serán las cargas y diferencias de potencial en cada condensador?

c) Si en vez de hacer lo anterior los condensadores se conectan de forma que queden unidas las placas con signos opuestos ¿cuáles serían las cargas y diferencias de potencial en cada condensador?

7. Dos partículas cargadas con carga $q = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$ están separadas a una distancia $d = 2 \text{ cm}$ como en la figura. a) Calcular el potencial en el punto C. b) ¿Cuánto trabajo hay que realizar para traer una carga $q = 2 \times 10^{-6}$ desde el infinito hasta C? c) ¿Cuál es la energía potencial de la configuración de cargas que se obtiene?

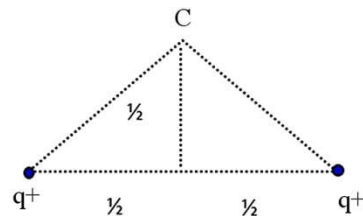


Figura problema 7

Soluciones

1.

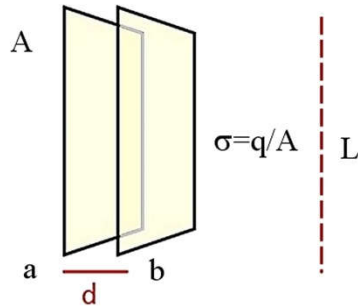
$C = q/V_{ab}$ donde q y V_{ab} representan valor modular ($C > 0$).

$$V_{ab} = |\Delta V| = \left| - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \right|,$$

pero el campo asociado a dos láminas paralelas viene dado por $E = \sigma/\epsilon_0$ siempre que d

$\ll L$. Para una lámina plana infinita $\sigma =$ constante. Por tanto:

$$V_{ab} = (\sigma/\epsilon_0) \int_a^b dl = \sigma d/\epsilon_0.$$



Solución 1

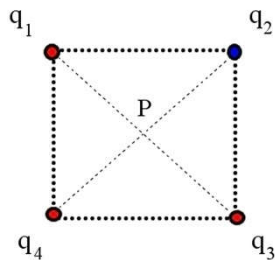
Por otra parte, $q = \sigma A$,

$$C = \sigma A / \sigma d / \epsilon_0$$

$$C = \epsilon_0 A / d.$$

Note que a causa de la aproximación de la lámina infinita, el resultado no depende de la forma (circular, triangular) del condensador, sino sólo de su área y de la distancia entre las placas.

2.



Solución 2

La distancia de cada carga al punto P viene dada por

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2} = (a/2)\sqrt{2}$$

$$V_R = \sum V_i; r_1 = r_2 = r_3 = r_4$$

$$V_R = k \{q_1/r_1 + q_2/r_2 + q_3/r_3 + q_4/r_4\}$$

$$V_R = (9 \times 10^9 / 0.5\sqrt{2})(1 - 2 + 3 + 2) \times 10^{-8}$$

$$= (36 \times 10) / (0.5\sqrt{2})$$

$$V_R \sim 500 \text{ V.}$$

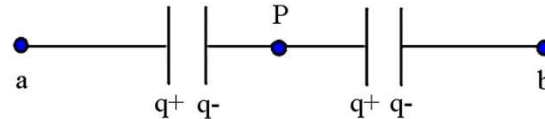
3.

a) Condensadores en serie

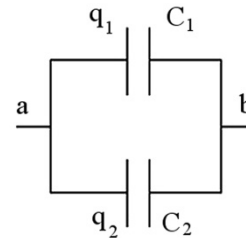
Al cargar el sistema, $q_1 = q_2 = q$

Como el potencial es trabajo por unidad de carga para llevar una carga de prueba desde a hasta b, $V_{ab} = V_{ap} + V_{pq}$.

Dividiendo por la carga q : $V_{ab}/q = V_{ap}/q_1 + V_{pb}/q_2$.



Solución 3a



Solución 3b

Pero $C = q/V$ por definición, y sustituyendo arriba:

$$1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2.$$

La demostración se generaliza de inmediato a más de dos condensadores. En general, para condensadores en serie:

$$1/C_{eq} = \sum (1/C_i).$$

b) Condensadores en paralelo

Al cargar el condensador, $q = q_1 + q_2$. Como el trabajo eléctrico no depende de la

trayectoria:

$$V_{ab} = V_1 = V_2.$$

Por tanto, dividiendo la carga por el potencial:

$$q/V_{ab} = (q_1 + q_2)/V_{ab} = q_1/V_1 + q_2/V_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2.$$

La demostración se generaliza con facilidad a más de dos condensadores. En general, para condensadores en paralelo:

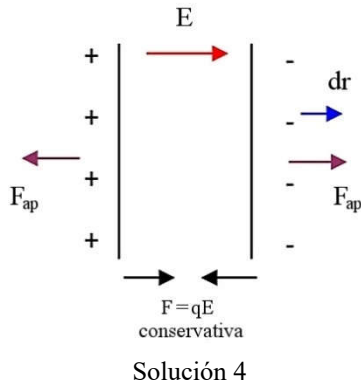
$$C_{eq} = \sum C_i.$$

4.

Datos: A , d , V_o .

a) Antes de separar las placas: $C_o = \epsilon_o A/d$.

Después de separarlas: $C = \epsilon_o A/2d$.



El condensador está aislado. Por tanto, la carga no varía: $q_o = q$, y como $C = q/V$:

$$C_o V_o = CV$$

$$\epsilon_o A V_o / d = \epsilon_o A V / 2d$$

$$V_o = V/2$$

$V = 2V_o$ (la diferencia de potencial se duplica)

$$b) E_o = (1/2) C V_o^2 = (1/2) \epsilon_o A V_o^2 / d$$

$$E = (1/2) C V^2 = (1/2) \epsilon_o A 4 V_o^2 / 2d$$

Como la energía electrostática es una energía potencial;

$$W_{ap} = -W_c = -(-\Delta E_p) = E - E_o$$

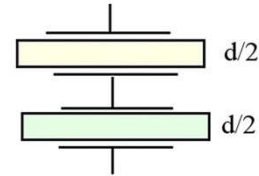
$$= \epsilon_o A V_o^2 / d - (1/2) \epsilon_o A V_o^2 / d$$

$$W_{ap} = (1/2) \epsilon_o A V_o^2 / d.$$

Note que $W_{ap} > 0$, ya que F_{ap} y dr tienen el mismo sentido. El condensador gana energía a costa del trabajo externo realizado. Esa energía se almacena en el campo eléctrico.

5.

Por simetría, todos los puntos en la superficie de separación entre ambos dieléctricos deben estar al mismo potencial. Por tanto, la capacidad no variará si se introduce una lámina metálica (tan delgada como se quiera) entre ambos dieléctricos (superficie equipotencial). Entonces, el sistema equivalente es el de la figura:



Solución 5

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_1 = \epsilon_1 C_{o1}; C_2 = \epsilon_2 C_{o2}$$

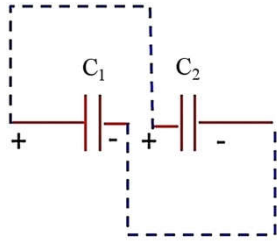
$$C_{o1} = C_{o2} = \epsilon_o A / (d/2).$$

La sustitución de estos valores conduce a:

$$C = \frac{2\epsilon_o A}{d} \left\{ \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right\}.$$

6.

$$a) q_1 = q_2 = q_{eq} = C_{eq} V_{ab}$$



Solución 6

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} + \frac{1}{8 \times 10^{-6}} = \frac{5}{8} \times 10^6$$

$$q = C_{eq} V_{ab} = (8/5) \times 10^{-6} \times 300$$

$$q = 480 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$V_1 = q_1/C_1 = 480 \times 10^{-6} / 2 \times 10^{-6}$$

$$= 240 \text{ V}$$

$$V_2 = q_2/C_2 = 480 \times 10^{-6} / 8 \times 10^{-6} = 60 \text{ V}$$

b) Cuando se unen las placas con carga de igual signo, la carga total almacenada en ambos condensadores será la suma de las cargas que había en cada uno de ellos:

$$q_{total} = q_{eq} = q_1 + q_2 = 960 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_1 + q_2 = 960 \times 10^{-6} \text{ C} \quad (1)$$

Como los condensadores están ahora en paralelo, la diferencia de potencial será la misma en ambos:

$$V_1 = V_2 = V.$$

Para el condensador equivalente

$$V = \frac{q_{total}}{C_{equiv}} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{960 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-6}} = 96 \text{ V}$$

c) Al conectar cada placa con la de signo contrario, como ambas tenían cargas igual en magnitud pero de signo contrario, se neutralizan. En este caso

$$q_1 = q_2 = 0 \text{ y } V_1 = V_2 = V = 0.$$

7.

$$r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = d / \sqrt{2}$$

$$a) \quad V_R = V_1 + V_2 = kq_1/r_1 + kq_2/r_2$$

$$V_R = 2kq/(d/\sqrt{2})$$

$$= 2 \times 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} / (0.02/\sqrt{2})$$

$$V_R = 2.54 \times 10^6 \text{ V}$$

b) Por definición,

$$V_p = (1/q_0) W_{ap}(\infty \rightarrow P)$$

$$W_{ap}(\infty \rightarrow P) = V_p q_0 = 2.54 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6}$$

$$W_{ap}(\infty \rightarrow P) = 5.1 \text{ J}$$

$$c) E_p = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Como en este caso $q_1 = q_2 = q_3$

$$E_p = kq^2 \left\{ \frac{1}{d} + \frac{1}{d/\sqrt{2}} + \frac{1}{d/\sqrt{2}} \right\} = 6.9 \text{ J.}$$

CAPÍTULO 3

Corriente eléctrica

3.1 Intensidad de la corriente

Velocidad de arrastre

Definición de intensidad

Densidad de corriente

Demostración

Unidades

3.2 Ley de Ohm

Símbolos de las resistencias

Unidades

Conductores óhmicos y no óhmicos

3.3 Resistencias en serie y paralelo

Resistencias en serie

Resistencias en paralelo

3.4 Potencia entregada a un circuito

3.5 Ley de Joule – Lenz

3.6 Fuerza electromotriz

3.7 Pilas galvánicas

Pila de combustible

Organismos vivos

3.8 Generadores

Corriente alterna

Unidades

3.9 Piezoelectricidad

3.10 Celdas solares

3.11 Termoelectricidad

3.12 Circuitos simples de corriente continua

CAPÍTULO 3

Corriente eléctrica

3.1 Intensidad de la corriente

El flujo de portadores de carga de una región a otra de un conductor se denomina *corriente eléctrica*.

Considere un alambre conductor metálico macizo como el de la figura 3.1, en el que se ha establecido una diferencia de potencial en sus extremos. Se acostumbra designar como $V+$ la región de mayor potencial, con independencia de que su valor sea positivo o negativo. La de menor potencial se designa por $V-$.

De capítulos anteriores se sabe que $E = -dV/dx$, y la intensidad de campo estará dirigida desde la región de mayor potencial a la de menor potencial. Por tanto, los electrones serán atraídos a la región de mayor potencial con una fuerza $F = q_e E$, donde q_e es la carga del electrón.

Velocidad de arrastre

Si la fuerza eléctrica fuera la única actuando sobre las cargas, los electrones se moverían aceleradas hacia la izquierda. Sin embargo, esto no ocurre así porque además existen otras fuerzas que se oponen al movimiento, originadas por la interacción de los electrones con los núcleos atómicos. Estas fuerzas equilibran la fuerza eléctrica, de manera que la velocidad v de los portadores de carga es constante en lo esencial. La velocidad promedio de los portadores de carga es la *velocidad de arrastre* o velocidad de drift.

Definición de intensidad

Sea S una sección transversal arbitraria en

el conductor (figura 3.1). Llamando Δq al número de cargas que atraviesan la superficie en un intervalo de tiempo Δt , se define la intensidad media de la corriente en el intervalo Δt considerado por la expresión

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Por razones históricas, el *sentido de la corriente* se toma contrario al movimiento de los electrones, tal como se muestra en 3.1.

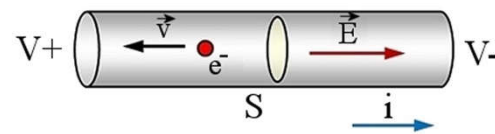


Figura 3.1. Intensidad de la corriente

Si la corriente no se mantiene constante y varía con el tiempo, es necesario definirla para un instante dado. Para eso, tomando límites y haciendo $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene para la definición:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

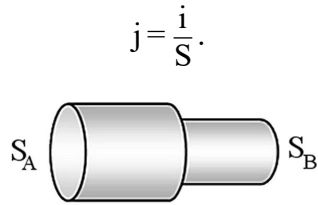
En el caso particular que q se mantenga constante, el valor de q no cambia al transcurrir el tiempo t . Tomando $q = 0$ cuando $t = 0$ se obtiene

$$i = q/t.$$

Densidad de corriente

Note que si la sección transversal del conductor varía, el valor de la corriente no depende de la sección escogida. Para un Δt determinado, Δq será el mismo en S_A y S_B , porque las cargas no pueden aparecer o desaparecer en el tramo intermedio (figura 3.2).

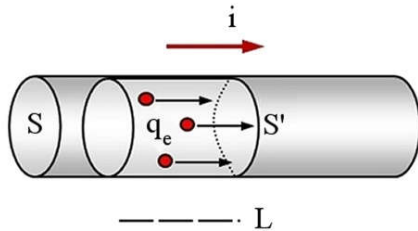
La *densidad de corriente* si variará en general. Ésta se define por la expresión

**Figura 3.2.** Densidad de corriente.

Es posible demostrar que la densidad de corriente se relaciona con la velocidad de arrastre de los portadores de carga por la expresión

$$\vec{j} = nq_e \vec{v}_d,$$

donde n es el número de portadores por unidad de volumen dentro del conductor y nq_e representa, por tanto, la densidad de cargas “libres” dentro del conductor. Conociendo el valor de la densidad de corriente y la densidad de cargas dentro del conductor, es posible calcular el valor de la velocidad de arrastre (figura 3.3).

**Figura 3.3.** Velocidad de arrastre.

No se debe confundir la velocidad de arrastre de los electrones (un valor típico es del orden de 0.01 cm/s) con la velocidad de propagación de la señal del campo eléctrico dentro del alambre, muy cercana a la velocidad de la luz (300 000 km/s). De aquí que en la mayoría de las aplicaciones prácticas la propagación de la señal eléctrica se puede considerar instantánea.

Demostración $\vec{j} = nq_e \vec{v}_d$

Para simplificar el análisis, consideremos cargas positivas moviéndose en el sentido de la corriente con una cierta velocidad v (velocidad de arrastre o “drift”). Si hay N cargas de valor q_0 en el volumen $V = SL$, entonces:

- $n = N/V$ es el número de cargas por unidad de volumen
- $q = Nq_0 = nSLq_0$ es la carga total encerrada en ese volumen
- $t = L/v_d$ es el tiempo que tarda el volumen SL en atravesar la superficie transversal S'

Por tanto, sustituyendo en la definición de corriente, suponiendo que ésta se mantiene constante:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nSLq_e}{L/v_d} = nq_e S v_d.$$

Dividiendo por S y considerando el carácter vectorial de la velocidad, con $q_e = q_0$ en el caso de una corriente de electrones, al final se llega a lo que se quería demostrar:

$$\vec{j} = nq_e \vec{v}_d.$$

Cuando q_e sea negativa (-), como en el caso de los electrones, los vectores $\vec{j}$ y $\vec{v}_d$ tendrán distinto sentido.

André Marie Ampere, (1775-1836), científico francés, conocido por sus importantes aportaciones al estudio de la electrodinámica (figura 3.3b). La unidad de intensidad de corriente toma su nombre de él. Fue el primero en demostrar que dos conductores paralelos por los que circula una corriente en el mismo sentido se atraen, mientras que si los sentidos de la corriente son opuestos,

se repelen.

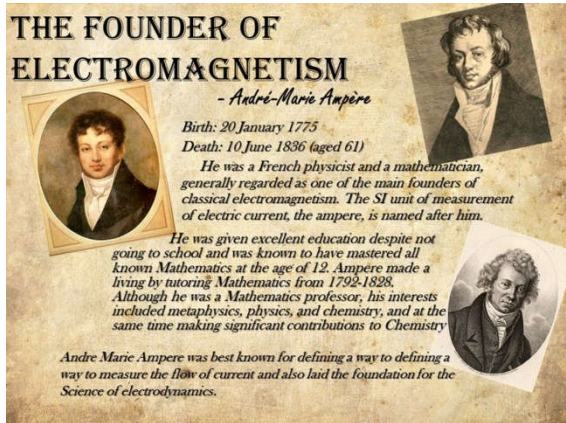


Figura 3.3b. André Marie Ampere

Unidades

En el SI de unidades, $[i] = [q]/[t] = C/s =$ ampere (A). Un ampere es la corriente que se obtiene cuando una carga de un coulomb atraviesa la superficie transversal del alambre cada segundo.

3.2 Ley de Ohm

En la figura 3.4, el electrón se mueve con velocidad constante bajo la acción de la fuerza eléctrica $F = qE$ y una fuerza promedio contraria f , originada por la interacción de las partículas cargadas con la red cristalina del conductor (modelo clásico). Cuan-

do se alcanza el régimen estacionario ambas fuerzas se equilibran, y la velocidad de los portadores (y la corriente eléctrica) se mantiene constante para una diferencia de potencial ΔV determinada.

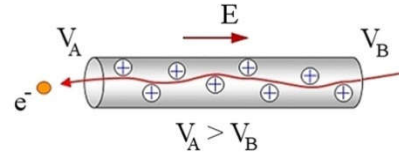


Figura 3.4. Interacción del electrón con la red cristalina

Tema avanzado. Red cristalina.

En los sólidos, los átomos están ubicados en posiciones fijas que guardan relaciones de simetría entre sí. La red cristalina del cobre, por ejemplo, es cúbica centrada en las caras (FCC).

La celda elemental se repite continuamente en todas direcciones. También hay sólidos amorfos como los vidrios, donde en enfriamiento rápido a partir del líquido impide la total cristalización (líquidos sobre-enfriados, figura 3.5).

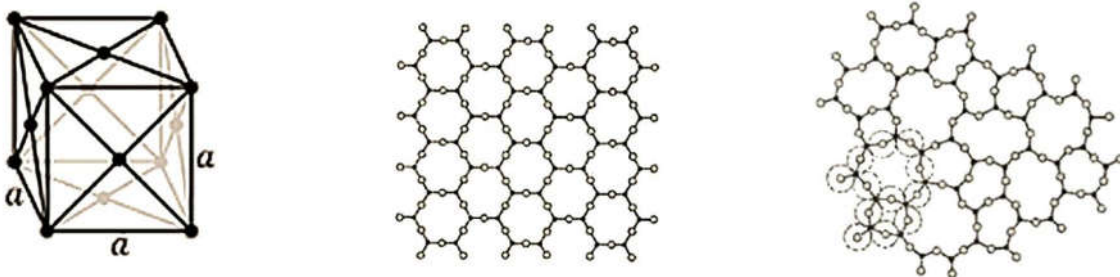


Figura 3.5. Simetrías en la red cristalina de los sólidos. De izquierda a derecha: celda elemental del cobre; red hexagonal del cinc; vidrio amorfo.

Un resultado experimental, comprobado de manera exhaustiva, es que la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico en el interior del conductor. Se conoce como *ley de Ohm*:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.1)$$

El parámetro σ es la *conductividad* del medio, característica de cada material, y varía en forma apreciable con la temperatura. El inverso de la conductividad es la *resistividad*,

$$\rho = 1/\sigma.$$

La resistividad depende de la temperatura mediante una expresión del tipo $\rho = \rho_0 \{1 + \alpha(T - T_0)\}$, donde α es una constante para cada material. La ley de Ohm expresada según (3.1) tiene carácter microscópico, pues es válida punto a punto dentro de cualquier material.

TABLA 2.1
CONDUCTORES

Material	Resistividad (Ωm)
Plata	1.58×10^{-8}
Cobre	1.68
Oro	2.22
Aluminio	2.65
Wolframio	5.28
Níquel	6.99
Hierro	8.90
Platino	10.60
Estaño	11.50
Acero inoxidable	72.00
Grafito	1.38×10^{-5}

En las tablas 2.1 y 2.2 aparecen las resistividades de algunos materiales. Sus valores pueden cambiar ligeramente en función del contenido de impurezas del material medi-

do.

Existe una forma alternativa de expresar la ley de Ohm, en función de variables macroscópicas. Para obtener esa expresión considere una porción de longitud L de alambre conductor (figura 3.6) y expresemos la intensidad de campo como

$$E = -dV/dx = -\Delta V/\Delta x = V_{ab}/L.$$

TABLA 2.2

AISLANTES

Material	Resistividad
Madera	$10^8 - 10^{11} \Omega\text{m}$
Vidrio	$10^{10} - 10^{14} \Omega\text{m}$

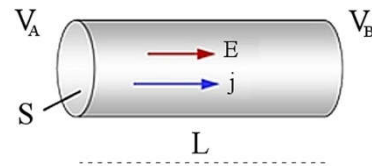


Figura 3.6. Ley de Ohm

Sustituyendo estas expresiones en (3.1) y tomando valores modulares:

$$\frac{i}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{V_{AB}}{L}$$

$$V_{AB} = i \frac{\rho L}{S}.$$

La *resistencia* de la porción de alambre considerado se define por la expresión $R = \rho L/S$, también conocida como *ley de Pouillet*. Al final la ley de Ohm queda como:

$$V_{ab} = iR. \quad (3.2)$$

La expresión nos dice que la diferencia de potencial en los extremos del alambre es igual al producto de la corriente por la re-

sistencia. El inverso de la resistencia se denomina *conductancia*, y es usual que se utilice para caracterizar las propiedades eléctricas de las disoluciones.

Símbolos de las resistencias

Para representar la resistencia de los alambres y otros dispositivos se emplea cualquiera de los símbolos de la figura 3.7 (la flecha indica un valor variable de la resistencia). Es común designar como *resistor* a los dispositivos contruidos para ser utilizados en específico como resistencias. Los más corrientes se construyen de cerámica aislante con una capa muy fina de grafito para conducir la corriente.

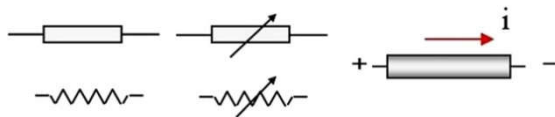


Figura 3.7. Símbolos de las resistencias o resistores. En los resistores la corriente siempre tiene el sentido de la región de mayor potencial (+) hacia la de menor potencial (-)

Unidades

Las unidades relacionadas con la resistencia y la conductancia aparecen en la tabla 2.3, que se refiere a sustancias secas. Cuando cualquier sustancia se humedece la resistividad cae bruscamente. La piel seca presenta una resistencia de varios $M\Omega$. Esta resistencia cae de forma brusca cuando la piel está húmeda.

Conductores óhmicos y no óhmicos

Al graficar la diferencia de potencial vs. intensidad de la corriente en los extremos de una resistencia, la ecuación (3.2) representa una recta que pasa por el origen y

posee pendiente R (figura 3.8). En el gráfico se ve que

$$\tan\theta = V_{AB}/i = R.$$

Si los alambres no son idénticos, la resistencia y la correspondiente pendiente serán diferentes en cada caso.

La ley de Ohm no se cumple en todas las sustancias y dispositivos, y es común referirse a los conductores como *óhmicos* y *no óhmicos*, para especificar si cumplen o no la ley de Ohm.

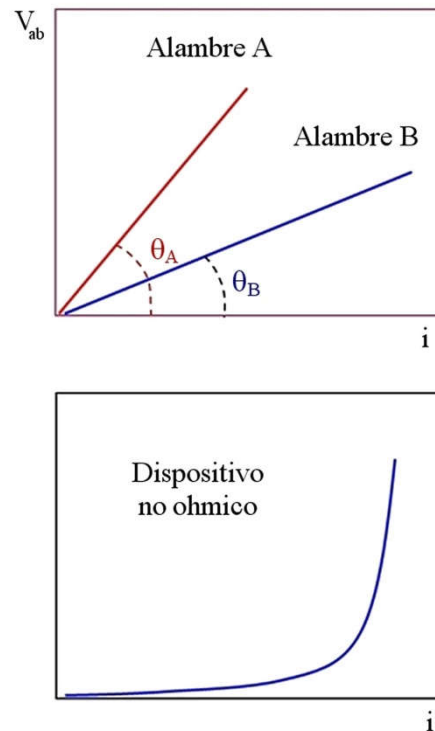


Figura 3.8. Gráficos de V vs. i para dispositivos óhmicos (a) y no óhmicos (b).

Un conductor se denomina *óhmico* cuando el gráfico de potencial vs. intensidad de la corriente proporciona una recta como las de la figura 3.8a.

TABLA 2.3
UNIDADES DE LAS MAGNITUDES DE RESISTENCIA Y CONDUCTANCIA

MAGNITUD	UNIDADES	NOMBRE	SÍMBOLO
Resistencia	$[R] = [V]/[i] = V/A$	Ohm	Ω
Conductancia	$[\Lambda] = 1/[R] = 1/\Omega$	Siemens (o Mho)	S
Resistividad	$[\rho] = [R][S]/[L] = \Omega m$	Ohm-metro	Ωm
Conductividad	$[\sigma] = 1/[\rho] = 1/\Omega m = S/m$	Siemens/metro	S/m

Pero también existen los conductores *no óhmicos* en los que la dependencia no es una línea recta (3.8b). Muchos dispositivos electrónicos contemporáneos como diodos, transistores, termistores (sensores de temperatura) y otros dispositivos semiconductores no cumplen la ley de Ohm (figura 3.9).



Figura 3.9. Dispositivos no óhmicos. Transistores y diodos de diversa potencia.

Las disoluciones electrolíticas cumplen la ley de Ohm mientras la intensidad de campo no sea muy alta y se mantenga constante. El comportamiento de la variación de la conductividad con la concentración para distintos electrolitos es el mismo. Existe un aumento inicial de la conductividad a medida que aumenta la concentración hasta un valor máximo, lo que se explica por existir un mayor número de iones dispuestos para la conducción. A partir de un determinado valor de concentración, la conductividad comienza a disminuir, porque las interac-

ciones asociativas entre los iones dificultan la conducción de la corriente.

3.3 Resistencias en serie y paralelo

Resistencias en serie

Es posible demostrar que la resistencia equivalente de varias resistencias conectadas en serie es aquella cuyo valor es igual a la suma de las resistencias consideradas. La resistencia equivalente se define como la resistencia que, al sustituir a varias, mantiene la misma diferencia de potencial V_{ab} en los extremos sin alterar la corriente.

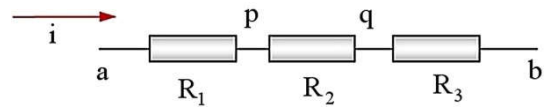


Figura 3.10. Resistencias en serie.

En la figura 3.10, el trabajo por unidad de carga necesario para llevar una carga de prueba desde a hasta b será igual a la suma de los trabajos realizados desde a hasta p, p hasta q y q hasta b;

$$V_{ab} = V_{ap} + V_{pq} + V_{qb}.$$

Dividiendo por la corriente que atraviesa el

circuito en un instante dado, considerando la definición de resistencia equivalente y aplicando la ley de Ohm en cada caso particular, se obtiene:

$$\frac{V_{ab}}{i} = \frac{V_{ap}}{i} + \frac{V_{pq}}{i} + \frac{V_{qb}}{i}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 .$$

De existir más resistencias en serie, la generalización es inmediata. Entonces es posible expresar el resultado anterior de la forma siguiente: cuando las resistencias están en serie,

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i .$$

Resistencias en paralelo

Cuando las resistencias están conectadas como en la figura 3.11, están *en paralelo*. La corriente de cargas que entra por la izquierda del dibujo se divide en tres corrientes, en general diferentes, una por cada resistencia. La conservación de la carga indica que

$$i = i_1 + i_2 + i_3 .$$

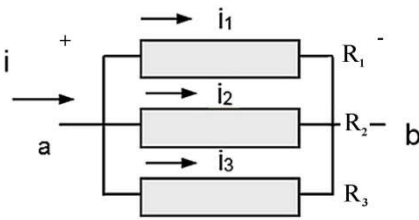


Figura 3.11. Resistencias en paralelo.

Como la diferencia de energía potencial no depende de la trayectoria, la diferencia de potencial V_{ab} es no depende de cómo se calcule desde a hasta b. De aquí que dividiendo la expresión anterior por V_{ab} , tomando en cuenta la ley de Ohm y la defini-

ción de resistencia equivalente, se obtiene:

$$\frac{V_{ab}}{R_{eq}} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} .$$

Si existieran más resistencias en paralelo, la generalización es inmediata. Expresando el resultado en notación compacta:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} .$$

3.4 Potencia entregada a un circuito

Un circuito es un sistema conductor cerrado que puede incluir resistencias, motores, instrumentos de medición y otros dispositivos. Cuando se establece una diferencia de potencial en los extremos, en el circuito se establece una corriente eléctrica. Esa corriente puede calentar una hornilla o hacer girar, por ejemplo, las paletas de un ventilador. Para mantener girando las paletas es necesario una entrega continua de energía (más adelante se analizarán las posibles fuentes de energía).

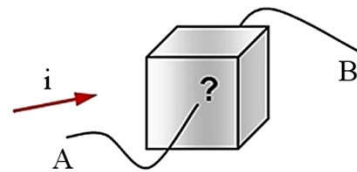


Figura 3.12. $P = V_{ab}i$

Sin embargo, no es necesario conocer las características particulares del circuito para calcular la energía entregada o consumida por él. Considere un segmento AB de un circuito y una porción de carga que se mueve desde A hasta B bajo la acción de la diferencia de potencial V_{AB} (figura 3.12). Según la definición de variación de poten-

cial,

$$V_{AB} = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{W(A \rightarrow B)}{q}.$$

Si q es pequeña (δq) y V_{AB} se mantiene constante durante el proceso, el trabajo realizado también será un infinitesimal δW . Despejando en la expresión anterior se obtiene

$$\delta W_{A \rightarrow B} = V_{AB} \delta q.$$

Según la definición general de potencia como trabajo realizado en la unidad de tiempo, la potencia instantánea involucrada en el proceso vendrá dada por

$$P = \frac{\delta W}{dt} = V_{AB} \frac{\delta q}{dt}.$$

Pero este último término no es más que la corriente instantánea, medida en un intervalo de tiempo δt tan pequeño como se quiera; por tanto,

$$P = V_{ab} i. \quad (3.3)$$

Esta expresión nos da la energía por unidad de tiempo que se está entregando a la porción de circuito considerada para mantener la corriente (igual a la consumida por el circuito, según el principio de conservación de la energía). Esta energía debe ser entregada por una fuente externa.

Unidades

$$[P] = [E]/[t] = J/s = \text{watt (W)}.$$

También, como $P = Vi$, es posible expresar:

$$\text{watt} = \text{volt} \times \text{ampere}.$$

Es decir: $1W = 1 VA$.

El kilowatt-hora es una medida de *energía* que se utiliza mucho en ingeniería. Es la cantidad de joule que se entrega en una

hora.

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

3.5 Ley de Joule – Lenz

Considere un circuito formado por una sola resistencia de valor R como la que aparece en la figura 3.7. Si $V_a > V_b$ la corriente estará dirigida desde a hacia b . Es conocido que cuando por una resistencia circula corriente, ésta incrementa su temperatura. Esto se debe a que la potencia entregada para mantener la corriente circulando se disipa en forma de calor (principio de conservación de la energía). En la resistencia se cumple la ley de Ohm y $V_{ab} = iR$. Sustituyendo esta expresión en (3.3) se obtiene

$$P = i^2 R.$$

Esta es la *ley de Joule-Lenz*. Si se sustituye $i = V_{ab}/R$, también se puede expresar como

$$P = V^2/R.$$

Es posible comprender el proceso mediante el cual se lleva a cabo el incremento de temperatura por efecto Joule si se analiza con más detalle la figura 3.4. Al moverse bajo la acción del campo aplicado, los electrones de conducción van “chocando” con los núcleos atómicos fijos en el conductor, transfiriéndoles parte de su energía. En realidad no un choque mecánico, sino algún tipo de interacción con otras cargas ligadas a la red cristalina, con un resultado similar al de un choque parcialmente inelástico.

Estos “choques” impiden la aceleración de los electrones de conducción y dan origen a la resistencia del material al paso de la corriente.

Por otra parte, la energía entregada en los choques hace que los núcleos atómicos, que

en situación normal se encuentran oscilando alrededor de sus posiciones de equilibrio, aumenten la amplitud de sus oscilaciones, lo que a nivel macroscópico se traduce como un incremento de temperatura. Al elevarse la temperatura, el resistor radiará calor al medio ambiente.

La cantidad de calor Q radiada a los alrededores en un intervalo de tiempo Δt se puede entonces calcular a partir de la ley de Joule-Lenz:

$$Q = \Delta E = P\Delta t = i^2 R \Delta t.$$

TABLA 2.4 FUERZA ELECTROMOTRIZ	
TIPO DE FEM	FUENTE DE ENERGÍA
Pila o batería	química
Generador	mecánica
Piezoelectricidad	
Celda solar	luminosa
Termoelectricidad	térmica

3.6 Fuerza electromotriz

Una fuerza electromotriz (FEM) es cualquier fuente de energía capaz de establecer una diferencia de potencial, o una corriente, en una resistencia u otro dispositivo. Se designa por la letra ε y se simboliza como aparece en la figura 3.13.

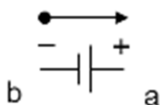


Figura 3.13. Símbolo de la FEM; $V_+ > V_-$. La flecha indica el sentido de la FEM.

El valor de la FEM es la diferencia de potencial en los bornes o electrodos del dispositivo que la genera cuando por la misma no

circula corriente; significa que $\varepsilon = V_{ab}$ a circuito abierto. El *sentido* de la FEM se toma de $-$ a $+$.

En la tabla 2.4 aparecen los diferentes tipos de FEM conocidos.

3.7 Pilas galvánicas

Las baterías o pilas aprovechan la electricidad de una reacción química espontánea para generar una corriente eléctrica. Se pueden conectar *en serie*, una a continuación de la otra, para incrementar el valor de la FEM que proporcionan.

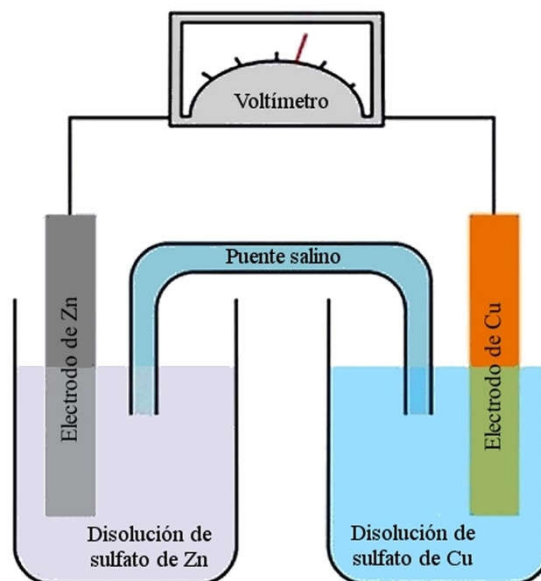


Figura 3.14. Pila galvánica de Cu-Zn.

La primera batería conocida, la llamada *pila de Volta* o *pila voltaica*, utiliza tiras de cinc y cobre sumergidas en disoluciones de ácido sulfúrico y sulfato de cobre respectivamente, que actúan como electrodos.

Un puente salino de cloruro de potasio permite a los electrones fluir entre las cubetas sin que se mezclen las disoluciones (figura 3.14). Cuando el circuito entre los dos sistemas se completa con un conductor, la

reacción genera una corriente detectable. Durante la reacción química el metal de la tira de cinc se consume (oxidación), mientras que la tira de cobre aumenta de grosor al reaccionar los electrones con el sulfato de cobre para producir metal adicional (reducción).

TABLA 2.5
PILAS GALVÁNICAS

Pila	Electrodos	Electrolito	ε (V)
seca	cinc y carbono-MnO ₂	cloruro de amonio + cloruro de zinc	1.5
acumulador de plomo	plomo y óxido de plomo	ácido sulfúrico	2
alcalina	níquel y hierro o cadmio	hidróxido de potasio	1.15
mercurio	cinc y óxido de Hg	hidróxido de potasio	1.34
combustible	hidrógeno y oxígeno	hidróxido de potasio	1.2

Existen muchos tipos de baterías en dependencia de las disoluciones utilizadas y de los metales que se usen como electrodos. Las diferencias de potencial o *voltajes* capaces de ser entregados por las baterías también son diferentes. Las pilas más utilizadas hoy en día aparecen en la tabla 2.5.

Pila de combustible

Una *pila de combustible* consiste en un ánodo en el que se inyecta el combustible (hidrógeno, amoníaco o hidracina) y un cátodo en el que se introduce un oxidante (por lo general aire u oxígeno). Los electrodos están separados por un electrolito iónico conductor (figura 3.15).

Los electrones producidos en el ánodo se mueven por un circuito externo, donde la

energía generada se puede aprovechar, y pasan al cátodo.

Los iones OH⁻ producidos en el cátodo son conducidos por el electrolito al ánodo, donde se combinan con el hidrógeno y forman agua, que debe ser extraída de forma continua para evitar que inunde la pila. La FEM de esta pila de combustible es de 1.2 V.

Las pilas de combustible de hidrógeno-oxígeno son capaces de generar mucha más energía que cualquier otro tipo de batería por unidad de masa. Por esa razón fueron usadas en los programas espaciales norteamericanos *Géminis* y *Apolo* a partir del primer descenso en la Luna el 20 de julio de 1969. Su temperatura de trabajo varía entre 60 y 200°C.

Empleando un conjunto de baterías en serie es posible obtener hasta 2 kW de potencia a bajo voltaje. Las pilas de combustible han atraído la atención de muchos como posibles fuentes de energía porque poseen una alta eficiencia y no contribuyen a la contaminación ambiental, generando solo agua y calor como productos de desecho.

Organismos vivos

También es posible encontrar fuentes de voltaje químico en los organismos vivos. Por ejemplo, el *pez torpedo* o *raya eléctrica* es capaz de generar energía eléctrica con unas columnas de células apiladas con forma de placas, llamadas *electroplacas*, que se disponen dentro de paquetes musculares muy pequeños a ambos lados de su cabeza. Unos nervios ramificados por todos los órganos eléctricos inician la descarga eléctrica, que se amplifica al pasar a través de las columnas. El pez torpedo rodea a sus

presas con sus aletas pectorales y las paraliza con una descarga de unos 200 volt.

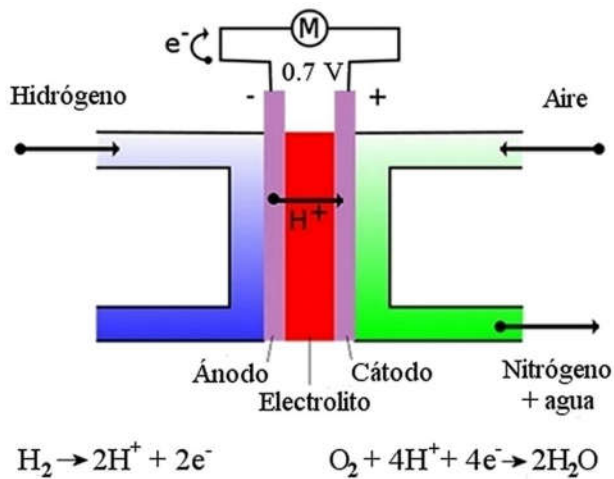
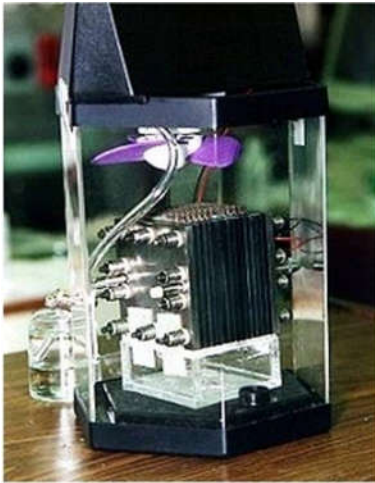


Figura 3.15. Pila de combustible y esquema de su funcionamiento.

Los peces eléctricos más importantes, además del pez torpedo, son las anguilas eléctricas y los peces gato. Las anguilas eléctricas de mayor tamaño pueden emitir descargas de 450 a 600 volt.

3.8 Generadores

Un generador es un dispositivo que permite convertir la energía mecánica a energía eléctrica, basado en el fenómeno de *inducción magnética*, descubierto por Michel Faraday en 1831. Cuando se hace rotar el eje del dispositivo mediante algún agente mecánico, las armaduras que rotan barren el campo magnético generado por el imán permanente y se establece una diferencia de potencial en sus extremos. Hay muchos tipos.

En la figura 3.16(a) aparece, el principio de operación del 1er dinamo (Faraday). Las escobillas sirven para transmitir la diferen-

cia de potencial hasta los terminales o *bornes* y de ahí a un circuito externo, donde se genera una corriente.

La electricidad generada para la red comercial utiliza generadores de corriente alterna de gran tamaño. En una central *termoeléctrica* se utiliza gas o petróleo para generar vapor de agua a presión; el vapor mueve grandes ventiladores o turbinas, que a su vez son las que hacen rotar los generadores (3.16 (b)).

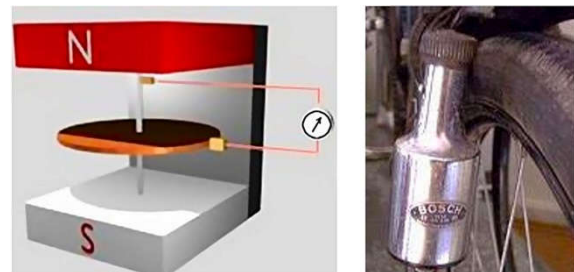


Figura 3.16. Dinamos; a) de Faraday; b) de bicicleta.

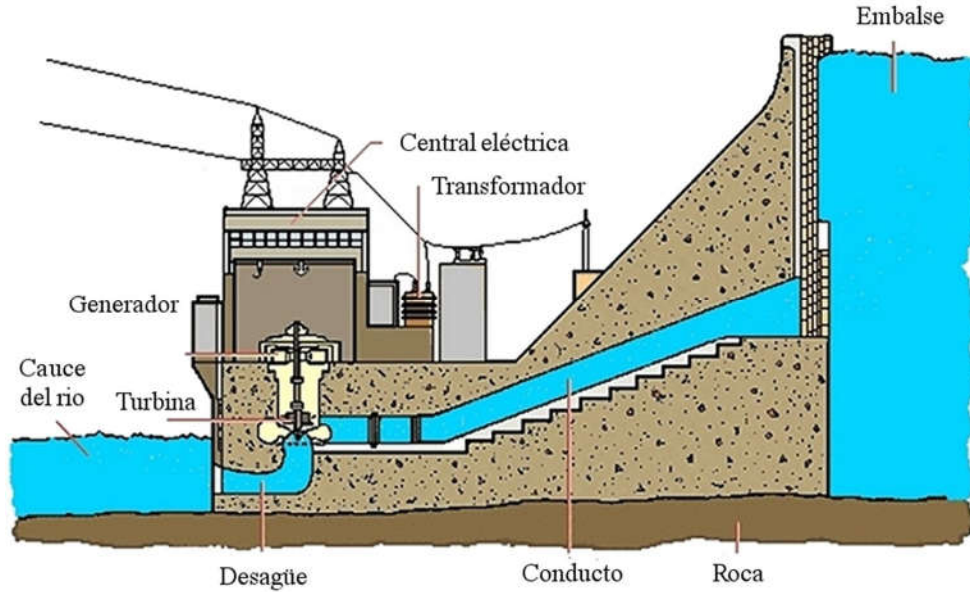


Figura 3.16B. Dinamo generador de corriente alterna en una presa. Hay una transformación de la energía gravitatoria del agua almacenada en el embalse a energía cinética y al final a energía eléctrica.

Los países que cuentan con ríos caudalosos poseen centrales *hidroeléctricas*, donde se aprovecha la energía cinética y potencial de la masa de agua para hacer rotar las turbinas (figura 3.16B). En las centrales eléctricas el dinamo es de corriente alterna, pues tiene mayor eficiencia que los de corriente continua.

En lo esencial, un *motor* es un generador trabajando a la inversa. Es decir, un dispositivo que consume energía eléctrica, a partir de la cual es capaz de realizar un trabajo mecánico.

Corriente alterna

A diferencia de la *corriente continua* entregada por una batería, donde la *polaridad* de los bornes no varía (el borne de mayor potencial o positivo es siempre el mismo), en la *corriente alterna* la polaridad de los bornes varía de manera continua con una determinada frecuencia.

La frecuencia de la red comercial en Cuba y

el resto de América es $f = 60$ Hz; en otros países la frecuencia comercial es de 50 Hz.

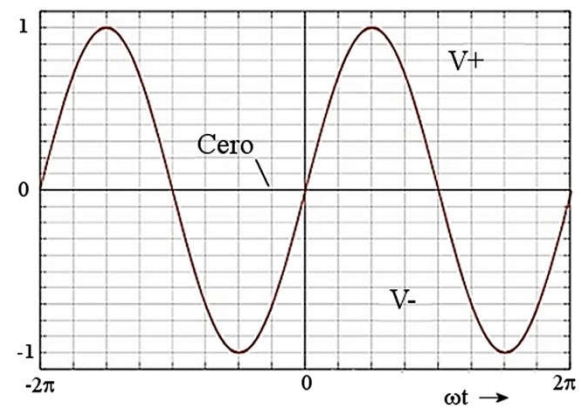


Figura 3.17. Corriente alterna. Variación del voltaje al transcurrir el tiempo.

Al graficar la diferencia de potencial o *voltaje* en función del tiempo se obtiene una dependencia sinusoidal (figura 3.17).

El voltaje instantáneo se puede expresar como

$$V = V_m \sin \omega t,$$

donde V_m es la amplitud del voltaje y $\omega =$

$2\pi f$. La corriente que aparece en una resistencia u otro dispositivo conectado a la FEM alterna también invierte su sentido de manera continua y tiene una dependencia similar, del tipo:

$$i = i_m \sin(\omega t + \phi);$$

ϕ es el desfase entre el voltaje y la corriente.

3.9 Piezoelectricidad

Algunos materiales son capaces de generar una diferencia de potencial notable cuando

son comprimidos (titanato de bario, PZT y similares), figura 3.18.

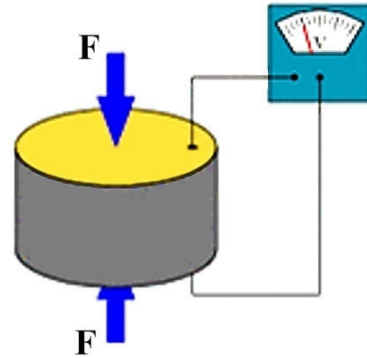


Figura 3.18. Material piezoeléctrico.

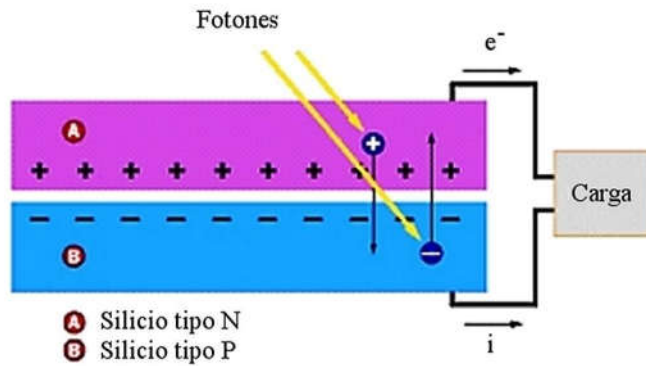


Figura 3.19. Celdas solares

Entre las aplicaciones más usuales se encuentran:

- Generadores de chispa (encendedores de diversos tipos, detonadores)
- Sensor de vibración (micrófonos, instrumentos musicales).
- Energía limpia (por ej., colocando materiales piezoeléctricos en las vías de ferrocarril).

El efecto inverso (electrostricción) también existe, con muchas aplicaciones como la producción de vibraciones al aplicar dife-

rencias de potencial. (Bocinas, generadores de ultrasonido, relojes de cuarzo).

3.10 Celdas solares

Las celdas solares producen electricidad por un proceso de conversión fotoeléctrica. Las hay de diversos tipos. La fuente de electricidad es una sustancia semiconductor foto-sensible, como puede ser un cristal de silicio al que se le han añadido impurezas (figura 3.19).

Cuando la luz incide contra el cristal, los electrones se liberan de la superficie de éste y se dirigen a la superficie opuesta, gene-

rando una diferencia de potencial que hace el papel de FEM. Las celdas solares tienen una vida muy larga y poseen muchas aplicaciones como, por ejemplo, como fuente de electricidad para el equipo de a bordo en los aviones de gran altura, y en toda la tecnología espacial.

En la actualidad se dispone de celdas solares con eficiencias de conversión del 30%. Las tecnologías más recientes permiten obtener celdas solares de pequeño espesor como para hacerlas flexibles.

3.11 Termoelectricidad

Termoelectricidad es la que se genera por la aplicación del calor a la unión de dos materiales diferentes. Un dispositivo de este tipo se denomina *termopar* (figura 3.20, izq.). Por ejemplo, si se sueldan por ambos extremos dos alambres metálicos de distinto material A y B y las uniones se mantienen a diferentes temperaturas, aparece una FEM en los extremos de los alambres. El efecto fue observado por primera vez en 1821 por

el físico alemán Thomas Seebeck, por lo que se conoce como *efecto Seebeck*.

Para una pareja de materiales dados, la FEM es casi proporcional a la diferencia de temperaturas y cumple una relación del tipo

$$\Delta T = \alpha \varepsilon,$$

donde α es constante en un intervalo no muy grande de temperaturas. Esta linealidad aproximada permite emplear el termopar de forma efectiva para la medida precisa de temperaturas en forma automática o semi-automática, manteniendo una de las uniones a una temperatura conocida (por ejemplo, un baño de hielo) y colocando la otra en el lugar cuya temperatura quiere medirse.

En dependencia del metal utilizado, la temperatura puede llegar a ser muy alta (hasta 1600° C utilizando termopares de platino-platino/rodio). También se emplean en fuentes de bajo poder para aprovechar el calor disipado en chimeneas, radiadores, tubos de escape y similares.

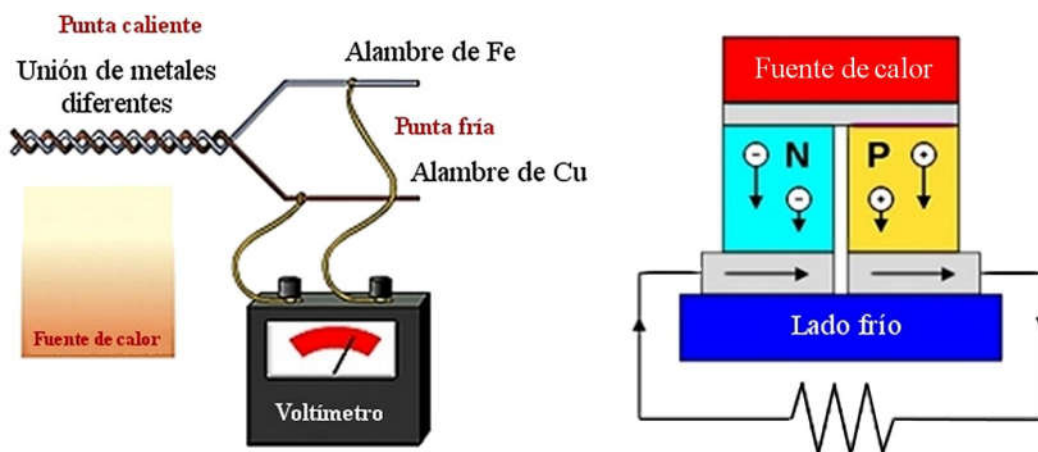


Figura 3.20 Termoelectricidad

La corriente generada se puede incrementar usando semiconductores en lugar de metales, creándose un *generador termoelectrico* (figura 3.20, der.). Para generar potencia se usan dispositivos basados en semiconductores tipo N y P (Bi_2Te_3 y otros).

El efecto inverso del Seebeck también existe. Si se aplica una FEM al termopar, una de las puntas se enfría y la otra se calienta (efecto Peltier). Dispositivos Peltier se usan en refrigeración para aplicaciones especiales.

3.12 Circuitos simples de corriente continua

Un circuito es cualquier sistema conductor cerrado que incluye resistencias, motores, una o más FEM, instrumentos de medición o cualquier otro dispositivo eléctrico. En la figura 3.21 se muestra un ejemplo de *circuito simple*, que no tiene nudos. Un nudo es un punto del circuito donde se unen 3 o más conductores. Si el circuito tiene nudos, no es un circuito simple y se requiere de métodos especiales para su análisis.

Cuando una batería como la representada en el esquema genera corriente, los mismos procesos que generan la corriente también generan calor. El calor disipado se puede tomar en cuenta mediante una resistencia interna r_i que por regla general es muy pequeña, aunque no despreciable por completo en algunas ocasiones.

Si no hay corriente en el circuito, $V_{ab} = \mathcal{E}$. Pero si en el circuito circula una corriente, a causa de la resistencia interna tendremos que $V_{ab} < \mathcal{E}$, aunque la diferencia suele ser pequeña.

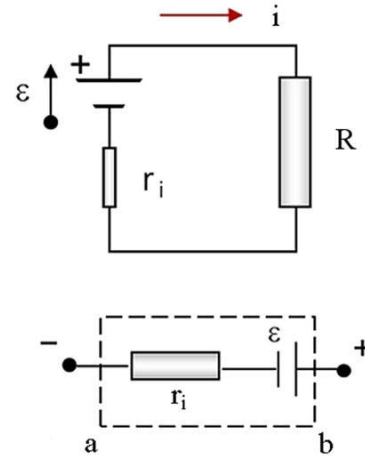


Figura 3.21. Circuito simple y representación de una FEM

Carga y descarga de una batería

Una batería que forma parte de un circuito puede estar descargándose, pero también se puede estar cargando (Figura 3.22).

- Durante el proceso de descarga: $V_a > V_b$ y $V_{ab} < \mathcal{E}$.
- La corriente y la FEM tienen el mismo sentido (figura 3.22, der.).
- Hay conversión de energía química a energía eléctrica.

Durante el proceso de carga:

- $V_a > V_b$ y $V_{ab} > \mathcal{E}$.
- La corriente y la FEM tienen sentido contrario (figura 3.22, izq.).

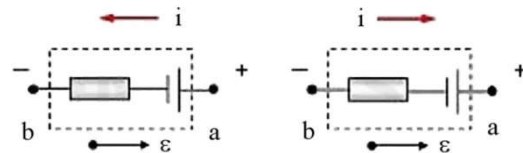


Figura 3.22. Carga (izq.) y descarga (der.) en una batería.

- Conversión de energía eléctrica a energía química. La reacción química en la pila

invierte su sentido.

Para que la carga tenga lugar se necesita una fuente externa con una diferencia de potencial mayor que la de la fuente que se desea alimentar.

Ecuación del circuito

Considere el circuito de la figura 3.23. El balance energético indica que la energía por unidad de tiempo entregada por la FEM debe ser igual a la energía disipada en las resistencias:

$$\begin{aligned} P_{\text{ent}} &= P_{\text{dis}} \\ \varepsilon i &= i^2 r_1 + i^2 R \\ i &= \frac{\varepsilon}{r_1 + R} . \end{aligned}$$

La expresión nos dice que si se conocen los valores de la FEM y las resistencias es posible obtener la corriente en el circuito. Este resultado se puede generalizar con facilidad a otros que incluyan más de una FEM y varias resistencias. En este caso la FEM de mayor valor se descargará, mientras que las restantes almacenarán carga.

Para analizar un ejemplo concreto, considere el circuito de la figura 3.23, donde se sabe que $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. En ese caso la corriente irá en sentido contrario a las agujas del reloj.

La batería ε_2 se está descargando, mientras que la ε_1 se carga y almacena energía. El balance energético de este circuito queda entonces como:

$$\begin{aligned} P_{\text{ent}} &= P_{\text{dis}} + P_{\text{alm}} \\ \varepsilon_2 i &= i^2 r_1 + i^2 r_2 + i^2 R + \varepsilon_1 i \\ i &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_1 + r_2 + R} . \end{aligned}$$

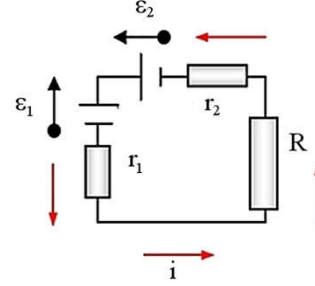


Figura 3.23. Ver texto

La expresión anterior se generaliza de inmediato a cuando hay presentes más FEMs y resistencias:

$$i = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R_i} .$$

- En esta expresión las resistencias siempre son positivas. Las FEM son positivas si están en el mismo sentido que la corriente, y negativas en caso contrario.

- La corriente *por fuera de la batería* siempre va de la región de mayor potencial a la de menor potencial.

3.13 Diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito

En la ley de Ohm siempre se considera que la corriente va de la región de mayor potencial a la de menor potencial; es decir:

$$V_1 - V_2 = iR .$$

La expresión también se puede escribir de la siguiente forma:

$$V_1 - iR = V_2 .$$

Significa que si nos trasladamos desde 1 hasta 2 podemos obtener el potencial en (2) restando del potencial en (1) el valor iR , que coincide con el hecho de que vamos de (+) a (-) en la figura 3.24.

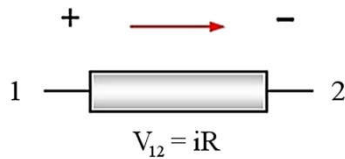


Figura 3.24. Caída de potencial en una resistencia.

El análisis también se puede llevar a cabo partiendo de (2). En este caso hay que sumar iR , porque vamos de la región de menor potencial a la de mayor; es decir:

$$V_2 + iR = V_1.$$

Si hay dos resistencias en serie, se puede calcular la diferencia de potencial en los extremos mediante un análisis similar (figura 3.25):

$$V_1 - iR_1 - iR_2 = V_2.$$

El resultado al analizar una FEM es diferente, ya que el borne de mayor potencial siempre es el mismo, independiente del sentido de la corriente. En la figura 3.26, en ambos casos, $V_1 + \varepsilon = V_2$, sin que dependa del sentido de la corriente.

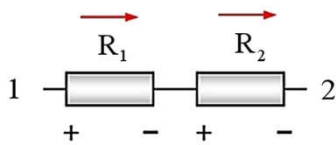


Figura 3.25. Caída de potencial en dos resistencias.

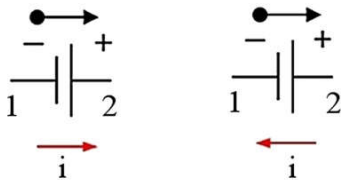


Figura 3.26. En ambos casos, LA FEM es la misma.

El siguiente ejemplo (figura 3.27) resume cómo calcular la diferencia de potencial en un segmento cualquiera de un circuito conteniendo resistencias y FEM.

$$V_1 - iR - ir_1 + \varepsilon_1 - ir_2 - \varepsilon_2 = V_2$$

$$V_1 - V_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + i(r_1 + r_2 + R).$$

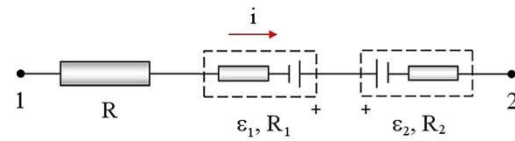


Figura 3.27. Ejemplo. Ver texto.

La FEM ε_1 se está descargando; la ε_2 se está cargando. Las tres resistencias disipan energía en forma de calor.

3.9 Circuitos complejos. Reglas de Kirchhoff

Las reglas de Kirchhoff se derivan de la aplicación de la conservación de la carga y la energía. Se usan para encontrar relaciones matemáticas entre corrientes, FEMs y resistencias en circuitos complejos.

Conceptos básicos

Nudo (o nodo). Punto de un circuito donde se unen 3 o más conductores.

Rama. Sección de circuito entre dos nudos

Malla: Contorno cerrado en un circuito complejo que se puede recorrer en su totalidad sin cambiar de sentido.

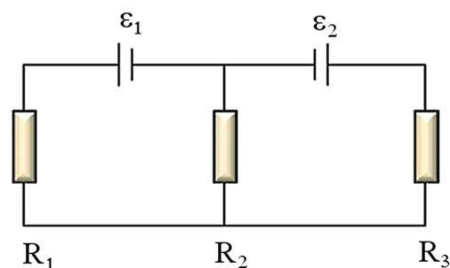


Figura 3.28. Circuito complejo.

El circuito de la figura 3.28 tiene 2 nudos, 3 ramas y 3 mallas.

1ra regla de Kirchhoff (regla de los nudos)

Se basa en el principio de conservación de la carga. La carga total que llega a un nudo en la unidad de tiempo (es decir, la corriente i) tiene que ser igual a la que sale. De aquí que:

Regla: La suma algébrica de las corrientes que llegan y salen del nudo tiene que ser cero.

$$\sum_i i_k = 0.$$

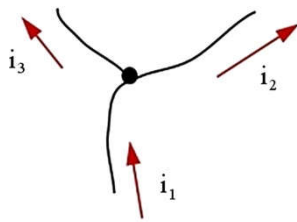


Figura 3.29. Nudo

Se toma $i > 0$ para las que llegan al nudo, e $i < 0$ para las que salen. Entonces, en la figura 3.29,

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

Se puede comprobar que si hay N nudos se obtienen $N-1$ ecuaciones independientes. El nudo restante proporciona una combinación lineal de las ecuaciones anteriores (figura 3.29).

2da regla de Kirchhoff (regla de las mallas)

Basada en el principio de conservación de la energía. La energía entregada al circuito por las fuentes tiene que ser igual a la que se consume. Por tanto:

Regla: En un recorrido completo por cada malla, se debe cumplir que $\sum iR = \sum \varepsilon$.

Convenio de signos:

- Se escoge un sentido arbitrario de recorrido de la malla
- Tanto i como ε son (+) si tienen el mismo sentido que el de recorrido de la malla y (-) en caso contrario.
- Si hay M mallas, se obtienen $(M-1)$ ecuaciones independientes.

Sumadas a las $N-1$ ecuaciones que proporcionan los nudos, arrojan un total de

$$k = N + M - 2 \text{ ecuaciones.}$$

Significa que aplicando las reglas de Kirchhoff es posible resolver circuitos con k incógnitas. Si se obtienen algunas corrientes negativas, significa que circulan en sentido contrario al asumido al inicio.

Ejemplo

Aplicar las reglas de Kirchhoff al circuito de la figura 3.28.

Hay 8 parámetros involucrados. (3 resistencias, 2 FEM y 3 corrientes). Las resistencias internas de las FEM no se consideran.

Pasos a seguir:

1. Asignar las corrientes. Hay 2 nudos $\rightarrow$ 1 sola ecuación: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (nudo inferior).

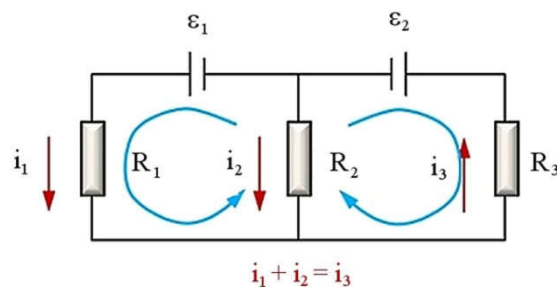


Figura 3.30. Ver texto

2. Escoger mallas y sentido de recorrido (figura 3.30). Hay 3 mallas $\rightarrow$ 2 ecuacio-

nes. Tomando las dos pequeñas:

$$\begin{aligned} i_1 R_1 - i_2 R_2 &= \varepsilon_1 \\ -i_3 R_3 - i_2 R_2 &= \varepsilon_2 . \end{aligned}$$

Como hay $k = M+N-2 = 3$ ecuaciones independientes, no puede haber más de 3 incógnitas. Por ejemplo, si se conocen los valores de las FEM y las resistencias, se pueden hallar las 3 corrientes.

3.10 Amperímetros y voltímetros

La intensidad de la corriente y la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito se miden mediante los amperímetros y voltímetros, respectivamente. Los más antiguos son variaciones del *galvanómetro*, uno de los primeros instrumentos utilizado en las mediciones eléctricas.

El galvanómetro basa su funcionamiento en las propiedades magnéticas de las sustancias, que serán analizadas en los capítulos siguientes. En un galvanómetro, un imán crea un campo magnético radial uniforme que actúa sobre una bobina móvil, conectada a una aguja, de forma tal que ésta puede rotar alrededor de un eje fijo (figura 3.31).

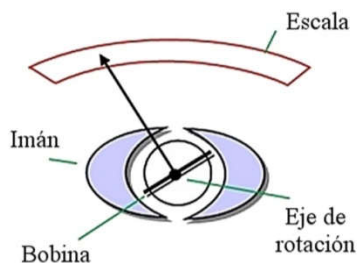


Figura 3.31. Galvanómetro de aguja.

Al pasar una corriente por la bobina, aparecen torques que originan la desviación de la aguja. Como la desviación es proporcional a la corriente, se puede utilizar una escala calibrada para medir la rotación de la aguja

y la intensidad de la corriente.

El principio de funcionamiento del voltímetro es muy similar al del amperímetro; lo que varía es la calibración de la escala.

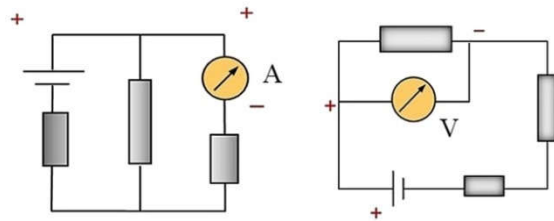


Figura 3.32. Amperímetro y voltímetro.

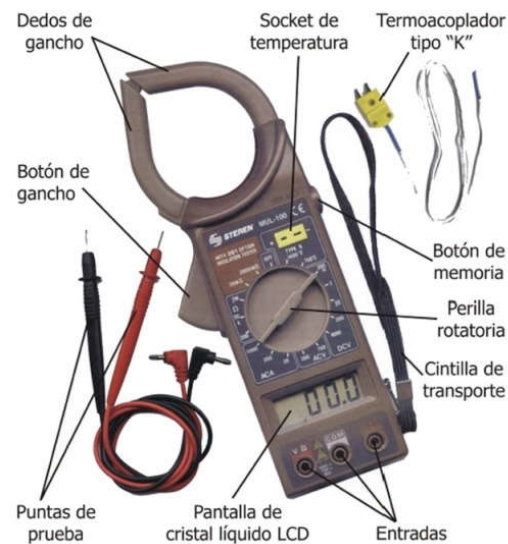


Figura 3.33. Pinza amperimétrica (amperímetro de pinza). Este modelo también se usa como un multímetro convencional.

Amperímetro. Diseñado para conectarse *en serie* en la rama donde se desea medir la corriente. Su resistencia interna debe ser muy pequeña, para que no altere la corriente que se desea medir (figura 3.32). Se debe colocar el borne positivo del instrumento en el punto de mayor potencial, como indica el dibujo. Para eso es necesario abrir el circuito e intercalar el amperímetro.

Voltímetro. El voltímetro, en cambio, se conecta *en paralelo* al dispositivo o seg-

mento de circuito a medir, entre los dos puntos donde se desea determinar la diferencia de potencial, y se construye de forma que solo toma una pequeña parte de la corriente que pasa por el segmento, para no alterar la diferencia de potencial que se desea medir. Por esta razón su resistencia interna debe ser muy alta.

Multímetros analógicos. Los instrumentos modernos de aguja (multímetros analógicos) combinan en un solo equipo la medición de corrientes, voltajes y también resistencias (óhmetros) con sólo cambiar de escala. Tanto en corriente continua (CC) como en corriente alterna (CA).

Los amperímetros y voltímetros para corriente alterna miden los valores *eficaces* del voltaje y la corriente. El voltaje eficaz se define por la expresión $V_e = V_m/\sqrt{2}$, donde V_m es la amplitud del voltaje alterno. La corriente eficaz se define por una expresión análoga: $i_e = i_m/\sqrt{2}$.

En CA es posible medir las corrientes de cierta intensidad sin tener que intercalar el amperímetro usando una *pinza amperimétrica* o amperímetro de pinza (figura 3.33). Un sensor en forma de pinza que abre y cierra se usa para rodear el cable donde se desea medir la corriente. La medición se lleva a cabo a partir del campo magnético que genera la corriente en el alambre.

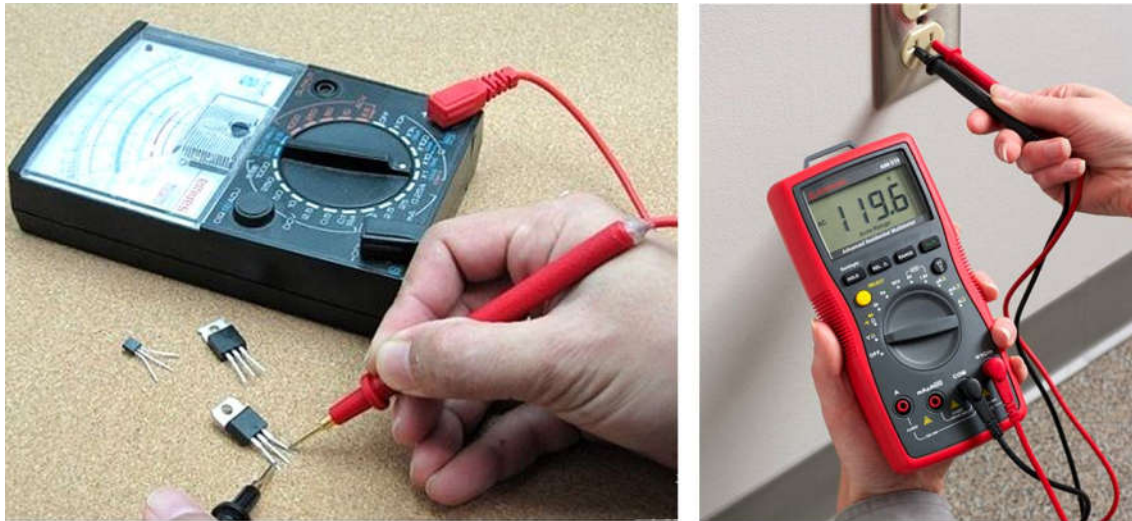


Figura 3.34. Multímetros analógico (de aguja) y digital.

Multímetros digitales. Aunque los instrumentos de aguja aún tienen un uso importante, los multímetros modernos digitales no tienen aguja. Funcionan mediante circuitos electrónicos, con otro principio de operación, y los valores se leen en una pantalla digital (figura 3.34). Los más modernos no necesitan conectarse tomando en cuenta la polaridad; el instrumento interpreta la señal

de manera correcta y da el valor (+) o (-) según sea el caso.

Problemas resueltos

1. Un alambre de resistencia $6\ \Omega$ se funde para formar otro alambre de longitud triple que la original. Si la densidad y resistividad del nuevo alambre no varían, ¿cuál será su resistencia?

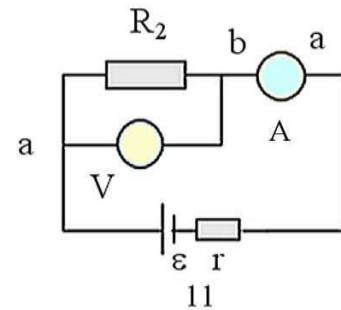
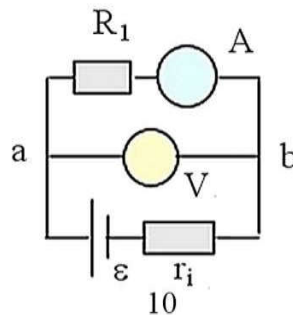
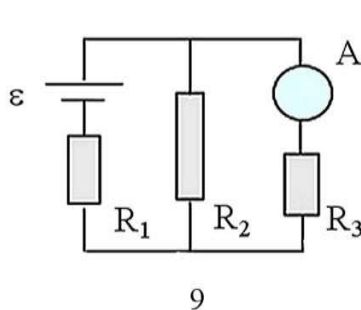
2. Un alambre de aleación nicromo de 1 m de longitud tiene un área de sección transversal de 1 mm^2 y transporta 4 A cuando la diferencia de potencial en sus extremos es de 2 V. ¿Cuál es la conductividad del NiCr?
3. Se fabrican dos conductores de igual longitud con el mismo material. El conductor A es sólido, de 1 mm de diámetro. El B es un tubo de 2 mm de diámetro externo y 1 mm de diámetro interno. Hallar la relación R_A/R_B .
4. Dos alambres, uno de cobre ($\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) y otro de hierro ($\rho = 10 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$), de igual diámetro (2 mm) y longitud (10 m), se unen para formar un solo alambre al que se aplica una diferencia de potencial de 100 V en sus extremos. Calcular la diferencia de potencial en cada alambre.
5. Una resistencia calefactora de 500 W se diseña para que opere a 110 V. ¿En qué

porcentaje se reduce el calor cedido cuando el voltaje se reduce un 4.5% (5 V)?

6. Una resistencia de $10 \text{ k}\Omega$ puede disipar un máximo de potencia de 2 W. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que admite en sus extremos?

7. Un alambre de resistencia 5Ω se conecta a una batería de 2 V y resistencia interna 1Ω . Después que pasan 2 minutos:
a) ¿Cuánta energía química de la batería se ha transformado en otros tipos de energía?
b) ¿Cuánta energía aparece en el alambre como energía térmica?

8. Un alambre de nicromo tiene una longitud de 1 m. El área de su sección transversal es de 1 mm^2 y transporta una corriente de 4.0 A cuando se aplica una diferencia de potencial de 2 V en sus extremos. ¿Cuál es la conductividad del nicromo?



Problemas 9,10 y 11.

9. En el circuito de la figura $\varepsilon = 5 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ y $R_3 = 6 \Omega$. La resistencia interna del amperímetro se desprecia.
a) Calcule el valor de la corriente en R_1 . b) Demuestre que la lectura del amperímetro no se altera si se intercambia de lugar con la FEM.

10. En la figura, el amperímetro indica

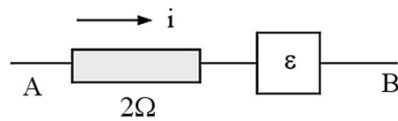
0.317 A y el voltímetro 28.1 V. La resistencia del amperímetro es de 3.62Ω . La del voltímetro 30.72Ω . ¿Cuál es el valor de R_1 ?

11. Si el amperímetro de la figura indica 0.356 A, el voltímetro 23.7 V y $R_V = 307 \Omega$ ¿Cuál es el valor de R_2 ?

12. Se dispone de cierta longitud de alam-

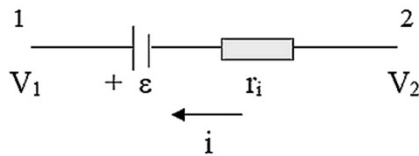
bre calefactor de nicromo de $24\ \Omega$ de resistencia. ¿Cómo se obtiene mayor potencia cuando la resistencia se conecta a una fuente de voltaje de valor $\varepsilon = 110\text{ V}$: enrollando una sola bobina, o cortando el alambre a la mitad y haciendo dos bobinas?

13. Una porción de circuito AB absorbe 50 W cuando pasa una corriente de 1 A . a) Hallar V_{ab} ; b) Hallar el valor de ε , suponiendo que no tiene resistencia interna; c) ¿cuál es la polaridad de la FEM?



Problema 13

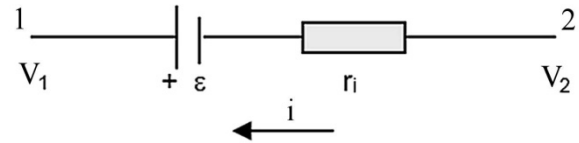
14. Demostrar que para un conjunto de resistencias en serie, $R_{eq} = \sum R_i$, mientras que si las resistencias están en paralelo: $1/R_{eq} = \sum (1/R_i)$.



Problema 14

15. Demuestre que la potencia suministrada a un circuito exterior por una batería de resistencia interna r es máxima cuando la corriente es igual a la mitad de la corriente de cortocircuito.

16. a) Calcular la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 de la figura si $\varepsilon = 6\text{ V}$, $r_i = 2\Omega$, $i = 1\text{ A}$. b) Calcular la diferencia de potencial cuando se invierte el sentido de la corriente. c) ¿Qué diferencia de potencial se necesitaría para cargar la batería a una corriente de 200 mA ?



Soluciones

1.

Antes de fundir: A_o, l_o

Después de fundir y estirar: $l = 3l_o$. Como la masa y la densidad no varían, $V = V_o$ y por tanto $A_o l_o = Al$

$$A/A_o = l_o/l = 1/3$$

Aplicando la ley de Pouillet:

$$R_o = \rho l_o / A_o$$

$$R = \rho l / A = \rho 3l_o / (A_o/3)$$

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$R/R_o = 9$$

$$R = 9R_o = 54\ \Omega$$

2.

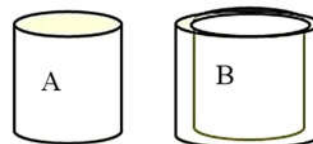
Datos: l, A, i, V_{ab}

$$\sigma = 1/\rho ; \rho = RA/l ; R = V_{ab}/i$$

$$\sigma = il / AV_{ab} = 4 \times 10^{-6} \times 2$$

$$= 2 \times 10^{-6}\text{ S/m}$$

3.



Solución 3

Datos:

$$D_A = 10^{-3} \text{ m}, D_B = 2 \times 10^{-3} \text{ m}, d_B = 10^{-3} \text{ m}$$

$$R_A = \rho l / A_A ; R_B = \rho l / A_B$$

$$R_A / R_B = A_B / A_A$$

$$A_B = (\pi/4)(D_B^2 - d_B^2) ; A_A = (\pi/4)D_A^2$$

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{D_B^2 - d_B^2}{D_A^2} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2 - (10^{-3})^2}{(10^{-3})^2} = 3$$

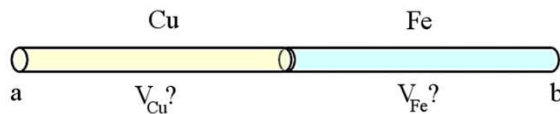
$$R_A = 3R_B$$

4. Datos:

$$l = 10 \text{ m}$$

$$d = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$V_{ab} = 100 \text{ V}$$



Solución 4

El trabajo por unidad de carga para llevar una carga desde a hasta b es la suma de los trabajos necesarios para ir hasta el punto medio y desde el punto medio al otro extremo:

$$V_{ab} = V_{cu} + V_{Fe} \quad (1)$$

Hay dos incógnitas. Se necesita otra ecuación.

$$V_{cu} = iR_{cu} ; V_{Fe} = iR_{Fe}$$

$$\frac{V_{cu}}{V_{Fe}} = \frac{R_{cu}}{R_{Fe}} = \frac{\rho_{cu} l / A}{\rho_{Fe} l / A}$$

$$\frac{V_{cu}}{V_{Fe}} = \frac{\rho_{cu}}{\rho_{Fe}} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$V_{ab} = \frac{\rho_{cu}}{\rho_{Fe}} V_{Fe} + V_{Fe}$$

$$V_{Fe} = \frac{V_{ab}}{\frac{\rho_{cu}}{\rho_{Fe}} + 1} = \frac{100}{\frac{1.7}{10} + 1} = 85 \text{ V}$$

$$V_{cu} = 100 - 85 = 15 \text{ V}$$

5. Datos: $P = 500 \text{ W}$ cuando $V = 110 \text{ V}$

$$Q_o = P_o t = V_o^2 / R t$$

Cuando cambia el voltaje,

$$Q = P t = V^2 / R t.$$

La resistencia no varía. Tomando el mismo intervalo de tiempo en ambos casos:

$$Q/Q_o = V^2 / V_o^2 = (105/110)^2 = 0.91$$

$$Q = 0.91 Q_o \quad (91\%)$$

R. El calor cedido se reduce en un 9%.

6.

Resolución

$$P_{\max} = i_{\max}^2 R$$

$$V_{\max} = i_{\max} R = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} \cdot R = \sqrt{R P_{\max}}$$

$$V_{\max} = (2 \times 10^2)^{1/2} = 141 \text{ V}$$

7.

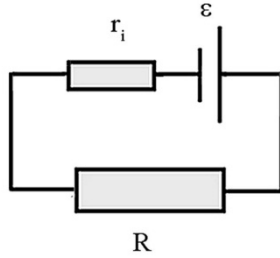
a) La energía total entregada por la batería se calcula según:

$$E = P t = \varepsilon i t$$

$$i = \varepsilon / (r + R)$$

$$E = \varepsilon^2 t / (r + R)$$

$$E = 2^2 \times 120 / (1 + 5) = 80 \text{ J}$$



Solución 7

b) La energía disipada en el alambre se calcula según:

$$E = Pt = i^2 R t = \varepsilon^2 R t / (r + R)^2$$

$$E = 2^2 \times 5 \times 120 / (1 + 5)^2 = 67 \text{ J}$$

La diferencia con los 80 J (energía restante) se disipa en la batería en forma de calor.

8. Datos: l , A , i , V ; $1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$

$$\sigma = 1/\rho ; \rho = RA/l ; V = iR$$

$$\rho = VA/il ; \sigma = il/VA$$

$$\sigma = 4.1 / (2 \times 10^{-6}) = 2 \times 10^{-6} \Omega^{-1}$$

$$\sigma = 2 \times 10^{-6} \text{ S/m}$$

9.

$$i_1 = \varepsilon / R_{\text{eq}} ; R_{\text{eq}} = R_1 + R_o ;$$

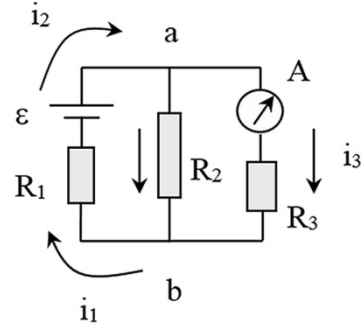
$$1/R_o = 1/R_2 + 1/R_3$$

$$R_o = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 4 \times 6 / (4 + 6)$$

$$= 2.4 \Omega$$

$$R_{\text{eq}} = 2 + 2.4 = 4.4 \Omega$$

$$i_1 = 5 / 4.4 = 1.14 \text{ A}$$



Solución 9

b) Calculando la lectura presente del amperímetro:

$$i_3 = V_{ab} / R_3$$

$$V_a - \varepsilon + i_1 R_1 = V_b$$

$$V_a - V_b = \varepsilon - i_1 R_1 = 5 - 1.14 \times 2$$

$$= 2.72$$

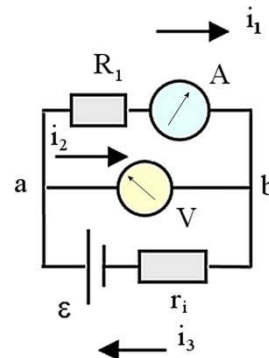
$$i_3 = 2.72 / 6$$

$$i_3 = 0.45 \text{ A}$$

Queda como ejercitación verificar que al intercambiar el amperímetro y la FEM, y repetir los cálculos, se obtiene el mismo valor en la corriente.

10.

Las resistencias internas no están representadas en la figura. En la rama 1 hay que adicionar r_A , y en la rama 2, r_V . En la rama (1) del amperímetro:



Solución 10

$$R_{eq} = R_1 + r_A$$

$$V_{ab} = i_1 R_{eq} = i_1 (R_1 + r_A)$$

$$R_1 = (V_{ab}/i_1) - r_A$$

$$R_1 = (28.1/0.317) - 3.62 = 85 \Omega$$

(Note que el problema consiste en saber interpretar y escoger los datos correctos entre todos los que se presentan).

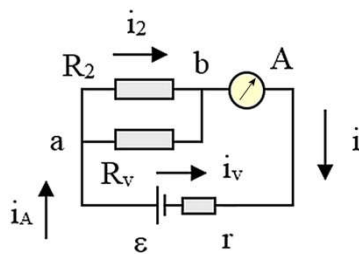
11.

$$i_A = 0.356$$

$$V_{ab} = 23.7 \text{ V}$$

$$R_v = 307 \Omega$$

$$R_2 = V_{ab}/i_2 \quad (1)$$



Solución 11

Como por la conservación de la carga

$$i_A = i_2 + i_v,$$

$$i_2 = i_A - i_v. \quad (2)$$

Para encontrar el dato que falta (i_v):

$$i_2 R_2 = i_v R_v,$$

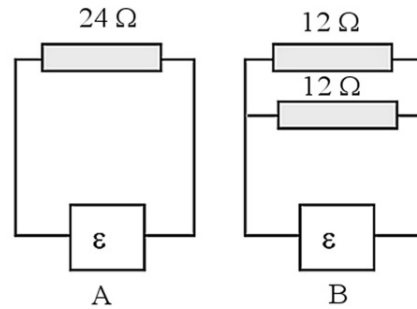
$$i_v = V_{ab}/R_v. \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) y en (1):

$$R_2 = \frac{V_{ab}}{i_A - V_{ab}/R_v} = \frac{23.7}{0.356 - 0.0772}$$

$$R_2 = 85 \Omega$$

12.



Solución 12

$$R_o = \rho l/A = 24 \Omega.$$

Si se toma la mitad de l:

$$R = \rho(l/2)/A = R_o/2 = 12 \Omega.$$

Circuito A:

$$P = V^2/R = 110^2/24 = 500 \text{ W}$$

Circuito B:

$$1/R_{eq} = 1/12 + 1/12 = 1/6$$

$$R_{eq} = 6 \Omega$$

$$P = V^2/R_{eq} = 110^2/6 = 2000 \text{ W}$$

Se obtiene mayor potencia cortando el alambre

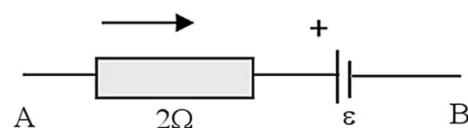
Nota: En la práctica no se puede continuar este proceso indefinidamente, porque el alambre se quema al aire o se funde.

13. Datos: P, i

a)

$$P = \varepsilon i$$

$$\varepsilon = P/i = 50/1 = 50 \text{ V}$$



Solución 13

c) Por dato: absorbe 50 W. Por tanto, el sentido de la FEM debe ser contrario al sentido de la corriente, ya que la batería se está cargando (si se estuviera descargando, la corriente tendría que estar en sentido contrario).

b)

$$V_A - iR - \varepsilon = V_B$$

$$V_A - V_B = \varepsilon + iR$$

$$\varepsilon = V_{ab} - iR = 50 - 1 \times 2$$

$$\varepsilon = 48 \text{ V}$$

14. a) Resistencias en serie:

Para una corriente i cualquiera en el circuito:

$$V_{ab} = V_{ap} + V_{pq} + V_{qb} = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

La resistencia equivalente es aquella que produce la misma diferencia de potencial V_{ab} para igual corriente i ; por tanto:

$$R_{eq} = V_{ab}/i = R_1 + R_2 + R_3$$

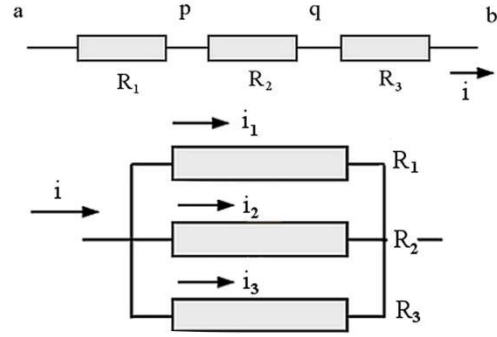
$$R_{eq} = \sum R_i$$

b) Resistencias en paralelo:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

La diferencia de potencial V_{ab} es la misma como quiera se calcule:

$$V_{ab} = V_1 = V_2 = V_3.$$



Solución 14

Dividiendo por V_{ab} la expresión de la corriente:

$$\frac{i}{V_{ab}} = \frac{i_1 + i_2 + i_3}{V_{ab}} = \frac{i_1}{V_1} + \frac{i_2}{V_2} + \frac{i_3}{V_3}$$

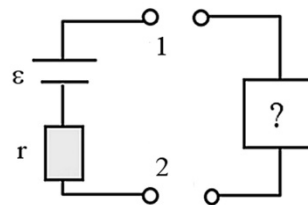
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

15.

Al unir los puntos 1 y 2 (cortocircuito),

$$i = i_c$$

$$i_c = \varepsilon/r.$$



Solución 15

Cuando se encuentra acoplado al circuito externo, $i \neq i_c$.

$$V_1 - \varepsilon + ir = V_2$$

$$V_1 - V_2 = \varepsilon - ir$$

$$P = V_{12}i = (\varepsilon - ir)i = \varepsilon i - i^2 r.$$

Considerando $P = P(i)$ y derivando e iguala-

lando a cero para calcular el extremo relativo (máximo en este caso).

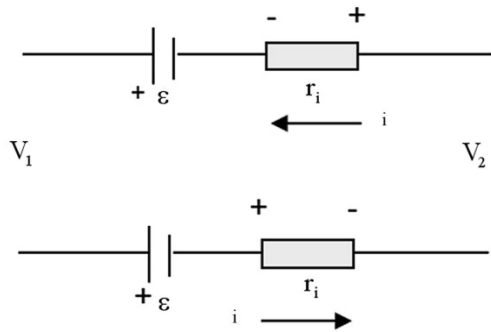
$$dP/di = \varepsilon - 2ir = 0$$

$$i = \varepsilon/2r = i_c/2$$

Luego, $P(i)$ es máxima cuando $i = i_c/2$.

Para comprobar que es un máximo, analizando la 2da derivada: $d^2P/di^2 = -2r (<0, \text{máximo})$.

16.



a)

$$V_1 - \varepsilon + ir_i = V_2$$

$$V_1 - V_2 = \varepsilon - ir_i$$

$$V_1 - V_2 = 6 - 1 \times 2 = 4V.$$

b)

$$V_1 - \varepsilon - ir_i = V_2$$

$$V_1 - V_2 = \varepsilon + ir_i$$

$$V_1 - V_2 = 6 + 1 \times 2 = 8V$$

c)

$$6.4 V$$

CAPÍTULO 4

Magnetostática

4.1 El magnetismo en la naturaleza

Evidencia experimental

4.2 Líneas de inducción magnética

Ley de Gauss del magnetismo

Interacción entre imanes

4.3 Campo magnético terrestre

4.4 Relación entre las propiedades eléctricas y magnéticas

4.5 Definición del vector de inducción magnética

4.6 Fuerza sobre un alambre recto con corriente

4.7 Momento de dipolo magnético

4.8 Ley de Ampere

Ley de Ampere en forma diferencial

4.9 Aplicaciones de la ley de Ampere

Inducción magnética asociada a un alambre recto de longitud infinita

Inducción magnética en el interior de un solenoide

4.10 Origen microscópico del magnetismo

Momento magnético nuclear

4.11 Interacción de la sustancia con el campo magnético

Paramagnetismo

Ley de Curie

4.12 Diamagnetismo y ferromagnetismo

Ferromagnetismo

Histéresis y magnetización técnica

Temperatura de Curie

4.13 Medición de los campos magnetostáticos

Balanza de Gouy. Magnetómetros

Sensor de efecto Hall

4.14 Resonancia magnética nuclear

Imágenes por resonancia magnética (RMI)

CAPÍTULO 4

Magnetostática

4.1 El magnetismo en la naturaleza



Figura 4.1. Mineral magnetita

Las primeras manifestaciones del magnetismo se presentan en la naturaleza asociadas al mineral de óxido ferroso-férrico $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, también conocido por *piedra imán* o *magnetita* (figura 4.1).

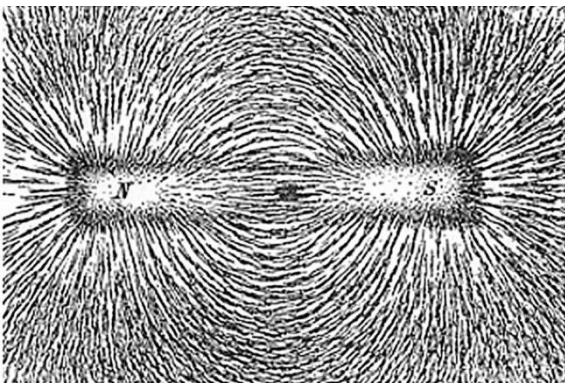


Figura 4.2. Imán espolvoreado con limaduras de hierro.

Sus propiedades ya eran conocidas por los antiguos egipcios, griegos y romanos. Diferentes fragmentos de este mineral son capaces de atraerse entre sí y al hierro metálico. Los primeros yacimientos de que se tenga noticia se encontraban cerca de Magnesia

de Tesalia, en Grecia, donde el óxido de hierro aparecía mezclado con óxidos y carbonatos de magnesio, de donde se derivó el nombre *magnetismo*.

Cuando se frota repetidamente una piedra imán contra un pedazo de hierro alargado, éste adquiere a su vez la capacidad de atraer otros pedazos de hierro; se *magnetiza* y se convierte en un *imán permanente*.

Evidencia experimental

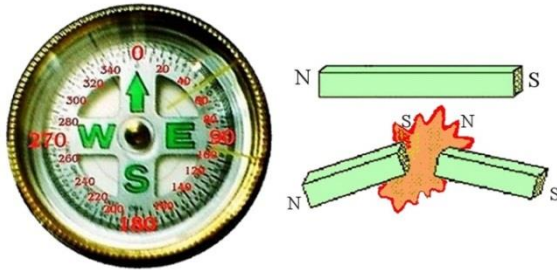
- Cada imán posee dos regiones localizadas o polos donde el magnetismo se manifiesta con mayor intensidad (figura 4.2).
- Si se magnetiza un pedazo de hierro en forma de aguja y se deja girar libre, se orienta en dirección norte-sur. De ahí los nombres de polo norte y polo sur que se le da a las regiones del imán donde el magnetismo es más intenso. Por convenio se acordó darle el nombre de *polo norte* del imán al polo que se orienta hacia el norte geográfico y *polo sur* al orientado hacia el sur.

La brújula es un dispositivo construido especialmente para orientarse con la ayuda del campo magnético terrestre (figura 4.3). Existen evidencias de que los chinos utilizaban brújulas rudimentarias para guiarse en la navegación desde hace unos mil años. Se comenzó a utilizar en occidente como instrumento de navegación alrededor del año 1300.

- No hay forma de separar los polos magnéticos, aunque se llegue al nivel atómico (figura 4.4). Si se intenta dividir un imán a la mitad para separar los polos, siempre aparecen los dos polos (más o menos concentrados) en ambos pedazos. Por la misma razón, *no existe un análogo magnético de la*

carga eléctrica. Las líneas de inducción magnética no tienen principio ni final; se cierran sobre sí mismas (figura 4.5).

- Los polos de igual signo se repelen, los de signo contrario se atraen. Ambos polos atraen al hierro por igual.



Figuras 4.3 y 4.4. Brújula contemporánea; los polos magnéticos no se pueden separar.

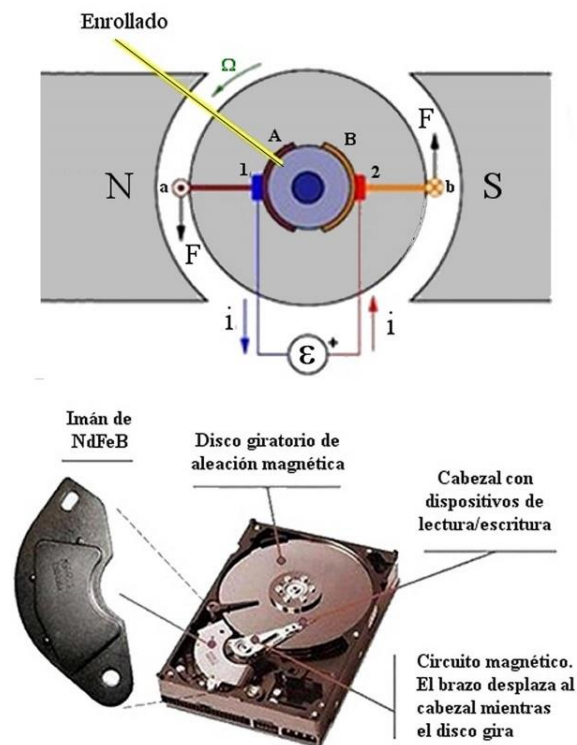


Figura 4.5. Arriba. Motor de corriente continua; 1,2 escobillas; A,B delgas, a,b conexiones de la bobina con las delgas. Abajo. Interior de un disco duro.

Hoy día se conoce que las partículas que constituyen los átomos (electrones y protones), además de poseer carga eléctrica tie-

nen asociado un momento magnético propio. Los neutrones, que no tienen carga, también poseen momento magnético. Es por eso que se debe considerar al magnetismo como una propiedad intrínseca de la sustancia, al mismo nivel que otras propiedades como la extensión, la masa o la carga eléctrica.

En la actualidad los imanes permanentes se construyen sintéticos, tanto a partir óxidos de hierro con otros componentes como de aleaciones que contengan Fe, Ni o Co, o sus mezclas. Una de las composiciones más antiguas, aún en uso, combinan el aluminio con el níquel y el cobalto (Alnico). Los imanes más recientes, con mucha mayor energía magnética, son los de neodimio-hierro-boro (NdFeB).

Las aplicaciones son muy variadas, desde el cierre de las puertas de los refrigeradores hasta como soporte magnético de los cabezales de grabación en los discos duros de las computadoras (figura 4.5).

4.2 Líneas de inducción magnética

Al igual que el campo eléctrico, el campo magnético posee propiedades vectoriales. En el SI de unidades se acostumbra representarlo en el vacío de dos formas:

1. Mediante la intensidad de campo $\vec{H}$ (A/m)
2. Mediante la inducción magnética $\vec{B}$ (Tesla [T])

En el vacío B y H se relacionan mediante la permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T/A/m;

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

En cualquier otro medio que no sea el vacío

hay que incluir la magnetización de la sustancia, que será analizada en las secciones siguientes.

Tanto B como H se representan mediante las líneas de inducción magnética, construidas de forma análoga a las líneas de fuerza del campo eléctrico. La diferencia esencial consiste en que las líneas de fuerza comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas, mientras que las de inducción magnética no tienen principio ni fin. Son cerradas. En un imán permanente, se cierran por dentro del imán, como se muestra en la figura 4.6.

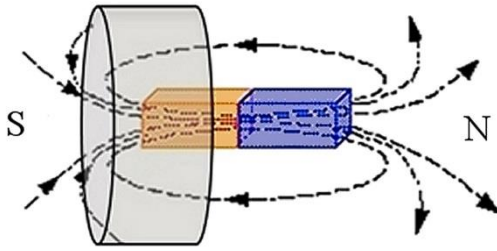


Figura 4.6. Líneas de inducción magnética.

Ley de Gauss del magnetismo

Al no existir las cargas magnéticas, haciendo una analogía con los razonamientos de la sección 1.12 para la intensidad del campo eléctrico, en la mencionada figura se puede ver que como quiera que se dibuje la superficie gaussiana (un cilindro en este caso), incluso cortando al imán, las líneas de fuerza que entran serán las mismas que salen y el flujo total a través de la superficie cerrada será nulo. De aquí que, para la inducción magnética,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 ,$$

y según el teorema de la divergencia (sección 1.13),

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ siempre.}$$

Esta es la forma matemática de representar que el análogo magnético de la carga eléctrica no existe, al no haber fuentes ni sumideros del campo magnético. No obstante, más adelante se verá que a pesar de poseer propiedades disímiles, el campo eléctrico y el magnético no son independientes por completo: en ciertas condiciones la presencia de uno trae aparejada la presencia del otro.

De manera similar al campo electrostático, el campo magnetostático es conservativo. El trabajo realizado contra las fuerzas magnetostáticas no depende de la trayectoria y el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es nulo. Si para el campo electrostático se cumple la relación

$$\vec{E} = -\nabla V$$

(sección 2.5), para el campo magnetostático también existe un potencial Ψ , que se relaciona con el vector inducción magnética por la expresión

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Psi ,$$

aunque su estudio detallado no es tema usual en los cursos de física básica.

Interacción entre imanes

Existen dos modelos diferentes para tratar de expresar en forma analítica las fuerzas de interacción entre imanes.

1. Modelo de Gilbert. Considera los polos del imán cubierto de ‘cargas magnéticas’ inexistentes, como si fueran cargas eléctricas, donde se originan y terminan las líneas de inducción magnética. Si se conoce la distribución exacta de estas ‘cargas’, se puede calcular el campo magnético fuera

del imán con, pero el modelo fracasa al intentar describir el campo en el interior del imán. En el modelo de Gilbert,

$$\mu = q_m d;$$

q_m es la ‘carga magnética’ y d la distancia de separación entre dos cargas de distinto signo. No obstante, el modelo de Gilbert puede ser útil en algunos casos para percibir una noción intuitiva del problema, aunque no es recomendable para cálculos cuantitativos.

2- Modelo de Ampere. Considera que la magnetización se origina por corrientes ligadas al imán que circulan por espiras perpendiculares al campo magnético. El tratamiento matemático es complicado, pero proporciona resultados cuantitativos adecuados dentro y fuera del imán. Para una espira de área pequeña el momento magnético dipolo de Ampere toma un valor

$$\mu = iA.$$

Cuando un dipolo magnético se encuentra bajo la acción de un campo magnético no uniforme, el modelo de Ampere predice, de forma correcta, una fuerza actuando sobre el dipolo

$$\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \times \vec{B}).$$

4.3 Campo magnético terrestre

Cuando Cristóbal Colón cruzó el Atlántico en 1492 en busca de las Indias, notó que la aguja de la brújula se desviaba un poco de la dirección norte indicada por las estrellas y que la desviación cambiaba a medida que se alejaba del continente.

Pero no fue hasta unos 100 años después que el médico de la reina Isabel I de Inglaterra, *William Gilbert*, logró explicar la

desviación al considerar que la tierra era un imán gigantesco, con sus polos magnéticos situados a cierta distancia de los polos geográficos (los polos geográficos son los puntos imaginarios de la superficie terrestre por donde pasa su eje de rotación).

De ahí que la brújula apunte siempre al polo magnético, y no al polo geográfico. La diferencia entre la lectura de la brújula y el norte verdadero se llama *declinación magnética*. Como los polos de igual signo se repelen y los de diferente signo se atraen, el polo magnético situado al norte resulta en realidad ser un polo negativo (o sur) magnético, lo que puede inducir a confusión.

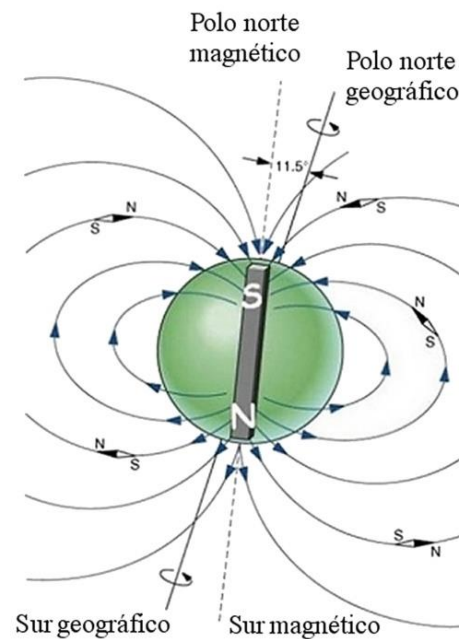


Figura 4.7. Campo magnético terrestre.

La distribución aproximada de las líneas de fuerza del campo magnético terrestre se muestra en la figura 4.7. Note que las líneas de fuerza son paralelas a la superficie terrestre sólo en el ecuador, y que van incliniéndose hasta llegar a ser prácticamente perpendiculares en los polos, donde la in-

tensidad es máxima.

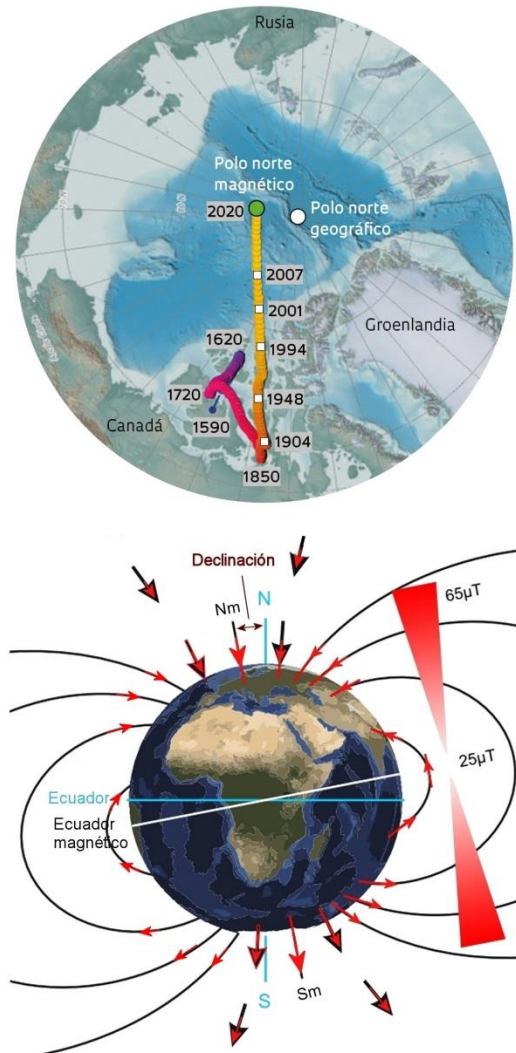


Figura 4.8. Arriba: desplazamiento del polo magnético norte desde 1590 hasta 2020. Abajo: particularidades del campo geomagnético: polaridad, declinación, intensidad e inclinación. La intensidad viene indicada por los triángulos rojos.

Los polos magnéticos se encuentran a una considerable distancia de los polos geográficos; el polo norte magnético se encuentra cerca de la isla de Bathurst, en el norte de Canadá, a unos 1600 km del polo norte; el polo sur magnético se encuentra cerca de la Tierra Adelia de la Antártica, a unos 2600 km del polo sur.

La posición de los polos magnéticos cambia en forma notable con el tiempo, fenómeno conocido como *deriva polar*. Se ha dado incluso el caso de que la deriva polar se invierta; es decir, que el desplazamiento de los polos cambie de sentido o retroceda (figura 4.8).

El campo magnético terrestre protege a la tierra del flujo de partículas proveniente del sol, el *viento solar*, desviándolo en su mayor parte (figura 4.9). El viento solar es responsable de la formación de las auroras boreal y austral. De no existir el campo magnético, los especialistas opinan que nuestro planeta sería un lugar tal desolado como la superficie de Marte.

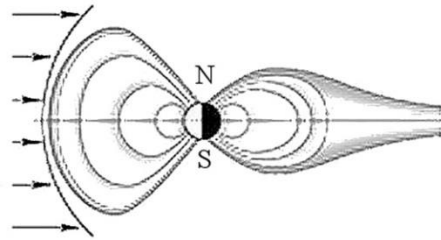


Figura 4.9. Campo magnético terrestre y viento solar

Tema avanzado

La roca fundida, o *magma*, que fluye de los volcanes y hendiduras de la corteza terrestre, contiene gases disueltos y partículas minerales sólidas, entre ellas partículas de magnetita. La magnetita pierde sus propiedades magnéticas por encima de los 587°C , pero vuelve a recuperarlas cuando la temperatura disminuye por debajo de ese valor. Cuando el magma se enfría y solidifica, las partículas de magnetita se magnetizan en la misma dirección que el campo magnético terrestre, y quedan “congeladas” en la posición original, señalando la ubicación del

campo magnético de la tierra en el momento que el magma solidificó. Estudiando la magnetización de las rocas, tanto en la tierra como en el fondo de los lechos marinos, fue posible conocer con exactitud cuál era la orientación del campo magnético terrestre en una determinada era geológica.

La figura 4.10 muestra una representación artística de la formación de bandas magnéticas en el fondo del océano atlántico. La corteza oceánica nueva se forma de manera continua en la cresta o parte superior de la cordillera atlántica:

- a) la cresta hace 5 millones de años,
- b) hace 2 millones de años,
- c) hoy día.

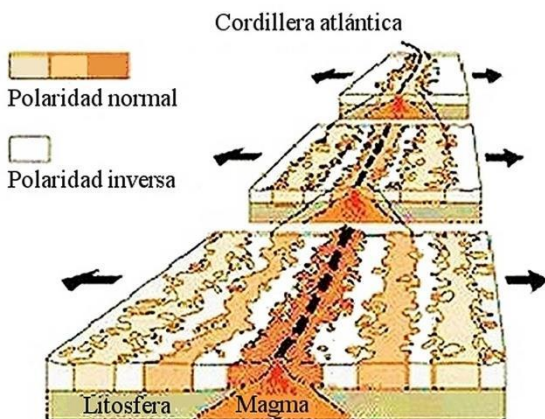


Figura 4.10 Cordillera del atlántico.

A medida que nos alejamos de la cresta atravesamos regiones cada vez más antiguas, que fueron expulsadas antes. No existe por el momento una hipótesis definitiva sobre el origen del magnetismo terrestre.

En cuanto al magnetismo solar y planetario, tampoco se ha encontrado aún una explicación razonable sobre la intensa actividad magnética del sol, o sobre el hecho de que algunos planetas tengan polos magnéticos y

otros no.

4.4 Relación entre las propiedades eléctricas y magnéticas

En 1819 Hans Cristian Oersted, físico y químico danés, descubrió que una aguja imantada, cercana a un conductor por el que circula una corriente, se orienta en dirección perpendicular al conductor. El comportamiento se explica asumiendo que hay un campo magnético de intensidad H (o B) asociado al conductor con corriente, con dirección perpendicular al alambre en todos los puntos del espacio. Colocando la brújula en diferentes puntos es posible determinar la distribución del campo y su sentido. De esta forma se comprobó que las líneas de inducción magnética tienen la forma de *circunferencias concéntricas* alrededor del alambre (figura 4.11).

Hasta ese momento se consideraba que los fenómenos magnéticos eran independientes de los eléctricos, de aquí que se considere que es Oersted quien inicia el estudio del *electromagnetismo*.

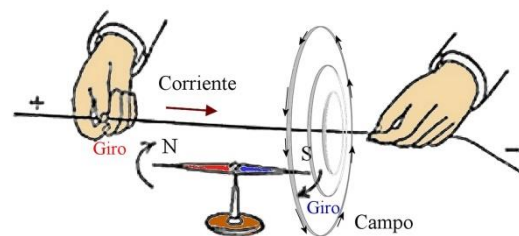


Figura 4.11. Experimento de Oersted. Cuando la brújula está por encima del alambre el giro es en sentido contrario.

El sentido de las líneas de fuerza en un conductor con corriente es tal que cumple la *regla de la mano derecha*. Si se coloca el pulgar en el sentido de la corriente, la orien-

tación de los dedos restantes indica el sentido de rotación de B (figura 4.12).

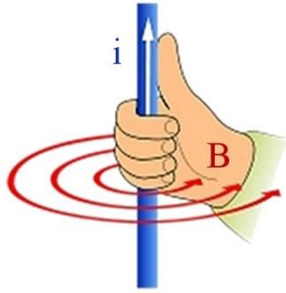


Figura 4.12. Regla de la mano derecha.

Una bobina de alambre enrollado en forma de *solenoides* se comporta de la misma forma que un imán, con sus polos norte y sur, ejerciendo fuerzas de atracción y repulsión (figura 4.13).

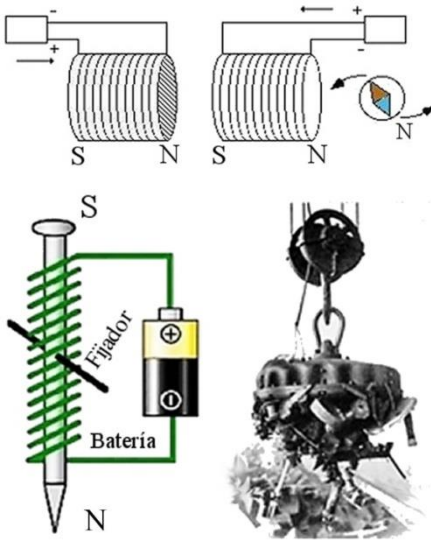


Figura 4.13. Solenoides energizados (arriba) y electroimanes. El principio físico es el mismo.

La función del clavo en el electroimán casero es concentrar las líneas de inducción magnética para que el efecto magnético sea más intenso en la punta. Los electroimanes tienen un sinnúmero de aplicaciones en la tecnología moderna, que incluyen bocinas, audí-

fonos, motores, relés y otros.

4.5 Definición del vector de inducción magnética

El vector intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ se definió colocando en el campo una carga de prueba positiva q_0^+ en reposo y midiendo la fuerza que actuaba sobre ella;

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0^+.$$

Sin embargo, no es posible introducir una definición análoga porque... ¡los campos magnéticos no interactúan con las cargas en reposo!

Los imanes interactúan con las cargas en movimiento, pero no con las cargas en reposo. Sólo aparecen fuerzas de interacción cuando hay movimiento relativo, y esta es la razón por la que para definir la inducción magnética hay que considerar partículas cargadas en movimiento. El experimento se realiza lanzando partículas cargadas hacia la región donde se encuentra el campo magnético.

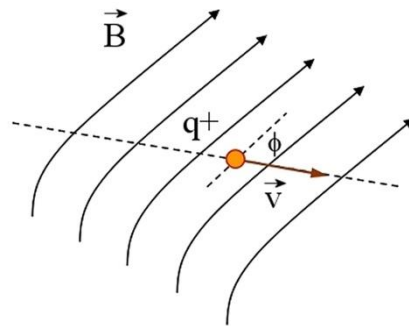


Figura 4.14. Definición del vector inducción magnética $\vec{B}$.

Considere una región del espacio donde está presente un campo magnético, y sea q_0^+ una carga de prueba que atraviesa esa región con velocidad v (figura 4.14). Al reali-

zar el experimento repetidas veces, variando los ángulos y las velocidades, se encuentra que siempre aparece una fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula con las siguientes características:

- $\vec{F}$ es perpendicular tanto a la velocidad como a las líneas de inducción magnética.
- Para un valor de B dado, el módulo de $\vec{F}$ es proporcional a $qv\sin\phi$, donde ϕ es el ángulo que forman la velocidad y las líneas de inducción en el punto considerado ($F = qvB\sin\phi$)

Note que al ser F perpendicular a v , la trayectoria se curva.

Estas características se pueden resumir en forma analítica utilizando el concepto de producto vectorial. Se *define* entonces el vector inducción magnética $\vec{B}$ como aquel que aporta una fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula de carga q dada por la relación

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

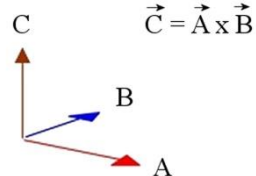
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$


Figura 4.15. Regla de la mano derecha para el producto vectorial.

Producto vectorial

1. Llevar los vectores a un origen común.
2. C es perpendicular al plano AB.
3. Barrer de B hacia A con la mano derecha. El pulgar indica la dirección de C.

Cuando la carga es negativa, la fuerza apa-

rece en sentido contrario.

Para interpretar de manera correcta la expresión anterior, note que el producto vectorial de dos vectores cumple la regla de la mano derecha. Esta regla establece que si después de llevar los vectores a un origen común se dirige la mano a lo largo del primer vector y se barre hacia el segundo por la vía más corta, el pulgar indicará el sentido del producto (ver figura 4.15).

En la figura 4.16 se muestran dos ejemplos de cómo aplicar el producto vectorial.

Note que la fuerza siempre es perpendicular a la velocidad (y, por tanto, a la trayectoria). De aquí que el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre la partícula será siempre nulo:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

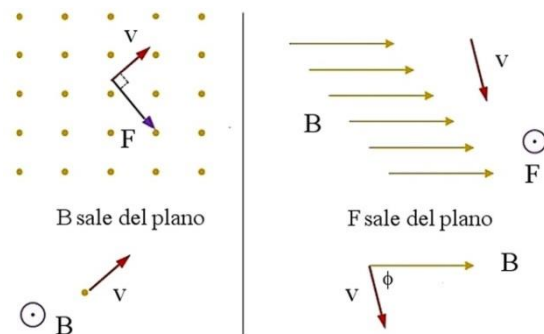


Figura 4.16. El vector que sale del plano se representa por $\odot$. A la izquierda, B y v son $\perp$ y F está en el plano. En la parte derecha B y v forman un ángulo agudo en el plano. F es $\perp$ al plano.

Al tomar en cuenta el teorema del trabajo y la energía, considerando que no hay otras fuerzas actuando,

$$W_R = \Delta E_c = 0.$$

Significa que la fuerza magnética no puede hacer variar la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ (es

decir, no puede hacer variar el *módulo* de su velocidad, aunque sí es capaz de alterar la *dirección* de su velocidad a módulo constante).

Por tanto, al entrar en la región magnética, la partícula tenderá a seguir una trayectoria circular, que por lo general disminuye su radio a causa de las pérdidas de energía causadas por otras interacciones (por ej., con las moléculas de aire, figura 4.17).

Unidades

Las unidades de B se obtienen a partir de la definición:

$$[B] = [F]/[q][v] = \text{N/C/m/s} = \text{Tesla (T)} .$$

Superposición de campos eléctricos y magnéticos

Un resultado comprobado muchas veces en la práctica es que cada campo actúa sobre las partículas cargadas como si el otro no estuviera presente.

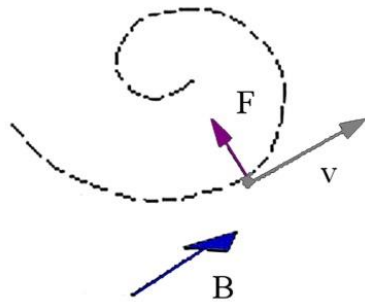


Figura 4.17. Partícula + cargada en un campo magnético.

La fuerza resultante actuando sobre la partícula será entonces

$$\vec{F}_R = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} .$$

Esta expresión se conoce como *relación de Lorentz*.

4.6 Fuerza sobre un alambre recto con corriente

Considere un segmento de alambre de longitud l y sea A el área de su sección transversal. Por el alambre circula una corriente i (figura 4.18). Para simplificar el análisis supondremos que, en vez de electrones, lo que se mueve son cargas positivas a favor de la corriente con la misma carga q_e del electrón.

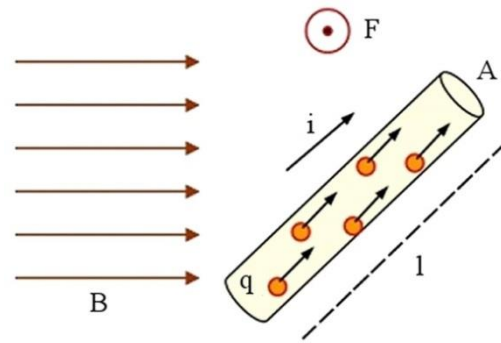


Figura 4.18. Fuerza sobre un alambre con corriente.

En el capítulo anterior se demostró que la densidad de corriente $\vec{j}$ en un conductor podía ser escrita como

$$\vec{j} = nq_e \vec{v} .$$

Aquí n es el número de cargas por unidad de volumen dentro del conductor y $\vec{v}$ la velocidad de arrastre de las partículas cargadas. Como j y v tienen el mismo sentido, tomando valores modulares y llamando N al número de cargas dentro del volumen $V = Al$, es posible escribir la expresión anterior como:

$$\frac{i}{A} = \frac{N}{Al} q_e v$$

$$i\vec{l} = Nq_e \vec{v} .$$

Para mantener la notación vectorial se ha

introducido el vector $\vec{v}$ ($\vec{l}$), de modulo l y paralelo a $\vec{v}$.

Si F_i es la fuerza actuando sobre cualquiera de las partículas cargadas en el seno del alambre, la fuerza resultante actuando sobre las N cargas será

$$\vec{F} = N\vec{F}_i = Nq_e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Sustituyendo Nqv en la expresión anterior al final se obtiene:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}. \quad (4.1)$$

Si la sección de alambre analizada no es recta, siempre se puede tomar una sección de alambre $d\vec{l}$ tan pequeña como se quiera. La fuerza sobre esa sección será infinitesimal y es posible escribir entonces

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}.$$

Utilizando esta expresión es posible calcular la fuerza actuando sobre cualquier alambre mediante integración, cualquiera sea su forma, aunque las integrales usualmente conducen a expresiones difíciles de resolver, excepto en casos donde se presenta gran simetría.

4.7 Momento de dipolo magnético

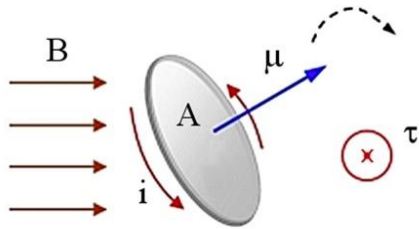


Figura 4.19. Dipolo magnético.

Cuando se coloca una espira cerrada con corriente i en una región donde hay presente un campo magnético uniforme y constan-

te, aparece un torque sobre la espira que tiende a alinearla en dirección perpendicular al campo, como muestra la figura 4.19. Se puede comprobar que el valor del torque viene dado por la expresión:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

El vector $\vec{\mu}$ es el *momento de dipolo magnético* de la espira, se construye perpendicular al área A y posee valor modular $\mu = iA$. Su sentido se determina colocando los dedos de la mano derecha a lo largo de la corriente en la espira; entonces el pulgar indica el sentido del vector.

Demostración. Es posible comprender el resultado anterior analizando lo que sucede en el caso particular de una espira cuadrada con corriente y lados de longitud l que interacciona con un campo magnético externo constante y uniforme (figura 4.20).

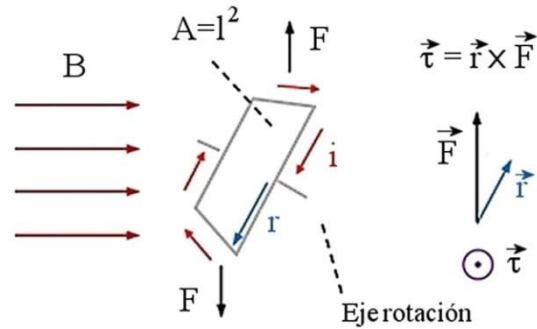


Figura 4.20. Torque sobre una espira cuadrada de lado l con corriente. El eje de rotación es $\perp$ al plano del papel.

Las fuerzas actuando en los laterales que soportan el eje de rotación son iguales y se compensan. Las corrientes en los lados superior e inferior son perpendiculares a la inducción B ($\theta = 90^\circ$) y por tanto $\sin(\theta) = 1$. Aplicando entonces (4.1), tendremos $F = ilB$. El eje de rotación se encuentra a una

distancia $r = l/2$ de los extremos superior e inferior. El torque $\vec{r} \times \vec{F}$ actuando sobre el lado superior será $\tau = rF \sin \phi$. El torque sobre el lado inferior tiene el mismo valor, y también está dirigido el mismo sentido. Por tanto, el torque resultante actuando sobre la espira será

$$\tau_R = 2rF \sin \phi = 2(l/2)ilB \sin \phi$$

$$\tau_R = il^2 B \sin \phi = iAB \sin \phi.$$

Sustituyendo $\mu = iA$ se llega a lo que se deseaba demostrar:

$$\tau = \mu B \sin \phi$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

4.8 Ley de Ampere

La ley de Ampere es una de las leyes fundamentales del electromagnetismo.

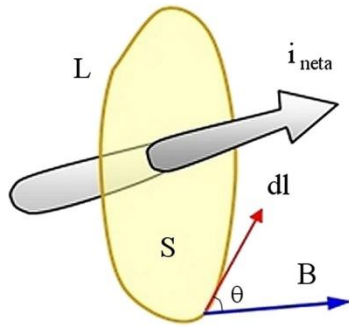


Figura 4.21. Ley de Ampere

Resume la evidencia experimental acumulada por muchos experimentos de diversos investigadores sobre las relaciones que existen entre campos magnéticos y corrientes.

Es posible enunciar la Ley de Ampere de la forma siguiente: la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de una curva cualquiera cerrada en el espacio, cuya superficie es atravesada por una corriente eléctrica, es proporcional

al valor de la corriente (figura 4.21). En notación analítica:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{neta}}.$$

Si hay más de una corriente atravesando la superficie encerrada por la curva, se toma la suma algébrica de las corrientes o *corriente neta*. La integral anterior también puede ser escrita como

$$\oint_L B \cos \theta dl = \mu_0 i_{\text{neta}}. \quad (4.2)$$

La ley de Ampere en forma integral resulta útil para calcular el valor de B en sistemas donde existe una alta simetría. Sustituyendo

$$i_{\text{neta}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

se llega a la siguiente expresión equivalente:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}. \quad (4.3)$$

En resumen:

- $\oint$: indica integrar por todo el contorno. Se integra por una curva cerrada (L).
- B : vector inducción magnética (en cada punto sobre la curva).
- dl : diferencial de longitud a lo largo de la curva.
- ds : diferencial de superficie.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T/A/m}$ (permeabilidad del vacío).
- i : resultante de las corrientes que atraviesan la superficie S en uno u otro sentido.

Ley de Ampere en forma diferencial

Desde el punto de vista matemático estricto, es posible demostrar el teorema de Stokes,

donde S es el área encerrada por la curva:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}.$$

Aplicando el teorema en la Ley de Ampere (ecuación 4.3) y tomando un ds tan pequeño como se quiera, se obtiene su forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (4.4)$$

En este caso el conocido operador

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

se lee como *rotacional de B*, y su valor se determina desarrollando por menores el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

El significado físico de 4.4 se toma de la misma ecuación 4.3, escogiendo una superficie de integración tan pequeña como se quiera. Siempre que exista una corriente en un punto, la circulación de B alrededor de ese punto tendrá valor finito. Y viceversa. Si no hay circulación y el rotacional es cero, no hay corriente neta cercana a ese punto.

4.9 Aplicaciones de la ley de Ampere

Inducción magnética asociada a un alambre recto de longitud infinita

En un alambre con corriente (figura 4.22) las líneas de inducción magnética son circunferencias concéntricas, determinadas del experimento (con una brújula, por ejemplo). En lo que sigue se considera la aproximación del alambre de longitud infinita, para

no tener que tomar en cuenta los efectos de las conexiones a la FEM que origina la corriente. La aproximación es válida cuando el observador se encuentra lejos de los extremos.

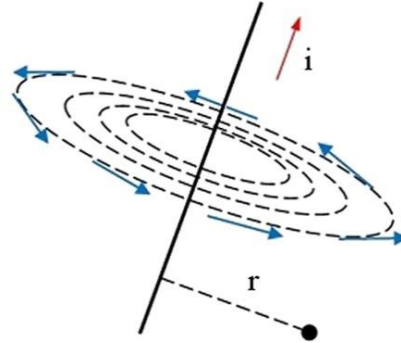


Figura 4.22. Alambre recto con corriente.

Suponemos que el grosor del alambre no es despreciable, y que su radio es r_0 .

Aplicando la ley de Ampere en una de las líneas de fuerza de la figura, a una distancia $r > r_0$. Como dl y B son paralelos sobre cada circunferencia, $\theta = 0^\circ$ y $\cos(\theta) = 1$.

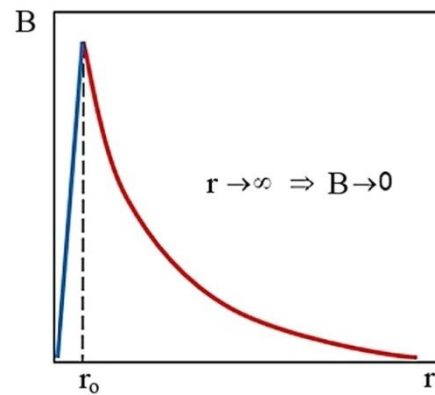


Figura 4.23. B para un alambre recto infinito.

Por simetría, el valor modular de B puede que varíe con r , pero no con la posición alrededor del alambre. Para un valor de r dado, $B = \text{constante}$, pues si el alambre es recto y homogéneo, no hay diferencia física

cuando un observador se mueve alrededor del alambre manteniendo la distancia constante (o si se rota el alambre). De aquí que es posible sacar a B fuera de la integral en la ley de Ampere, lo que conduce a:

$$\oint_L B dl = \mu_0 i.$$

El valor de la integral es la longitud de la curva, $L = 2\pi r$, y sustituyendo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Si se grafica B en función de la distancia r al alambre para $r \geq r_0$, se obtiene una dependencia como la de la figura 4.23. La línea recta que se muestra para $r < r_0$ se obtiene de forma similar, considerando la curva de integración dentro del alambre. El corte transversal del alambre aparece en la figura 4.24.

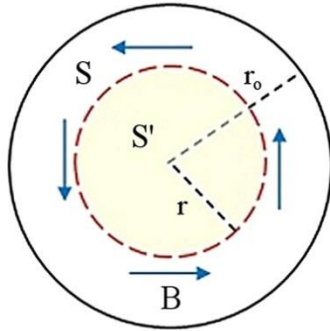


Figura 4.24. B en el interior de un alambre.

Suponiendo que la corriente está distribuida de manera uniforme en toda la superficie transversal del alambre, la densidad de corriente es:

$$j = \frac{i}{S} = \frac{i}{\pi r_0^2}.$$

La corriente que pasa por la superficie encerrada dentro de la curva de integración

será

$$i' = jS' = \frac{i}{\pi r_0^2} \cdot \pi r^2$$

$$i' = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 i.$$

Al aplicar la ley de ampere a la curva de integración y agrupar términos, se llega a:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{r_0^2} i$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2}.$$

Esta expresión nos dice que la inducción magnética aumenta linealmente con r desde el origen hasta su valor máximo $B(r_0)$ en la superficie del alambre (ver figura 4.24).

Inducción magnética en el interior de un solenoide

Supondremos un solenoide muy largo y estrecho, para no tener que tomar en cuenta los efectos de distorsión del campo en los extremos.

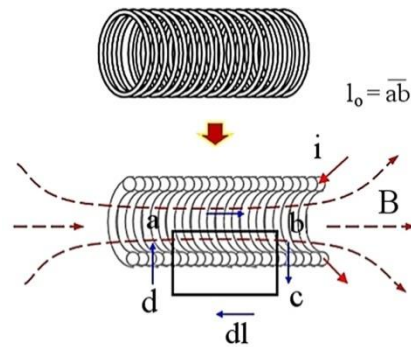


Figura 4.25. Cálculo de B en un solenoide.

La figura 4.25 representa un corte transversal del solenoide que se muestra más arriba. Como curva de integración se toma un rectángulo abcd, con la mitad fuera del solenoide.

noide y la mitad dentro. Si el solenoide es lo suficiente largo y estrecho, dentro del solenoide $B \approx$ constante, mientras que fuera de él, en su región media, $B \approx 0$.

Si hay N vueltas de alambre dentro de la curva de integración, $i_{\text{neta}} = Ni$. Resulta conveniente expresar la corriente neta en función del número de vueltas por unidad de longitud $n = N/l_0$. Despejando y sustituyendo, $i_{\text{neta}} = nl_0 i$.

Aplicando la ley de Ampere al rectángulo de integración:

$$\oint_L B \cos \theta dl = \mu_0 i$$

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = \mu_0 nl_0 i.$$

Las integrales 2 y 3 son nulas, por ser $\theta = \pi/2$ (ángulo entre B y dl) y $\cos \pi/2 = 0$. La 4ta integral también es nula, por ser $B \approx 0$ fuera del solenoide. Por tanto, sólo es necesario evaluar la integral desde a hasta b . Como B es constante dentro del solenoide, queda fuera de la integral, y se obtiene:

$$B \int_a^b dl = \mu_0 nl_0 i.$$

Sustituyendo el valor de la integral y cancelando términos, se llega finalmente a:

$$B = \mu_0 ni.$$

La inducción magnética en el interior del solenoide largo y estrecho es proporcional al número de vueltas por unidad de longitud y a la corriente que circula.

4.10 Origen microscópico del magnetismo

Según el *modelo clásico* del átomo, éste está compuesto por electrones negativos

que giran alrededor de un núcleo formado por protones positivos y neutrones sin carga. Cada electrón girando alrededor del núcleo constituye una pequeña *corriente elemental* que tiene asociado un momento de dipolo magnético *orbital* $\vec{\mu}_L$ y se comporta como un pequeño imán (figura 4.26).

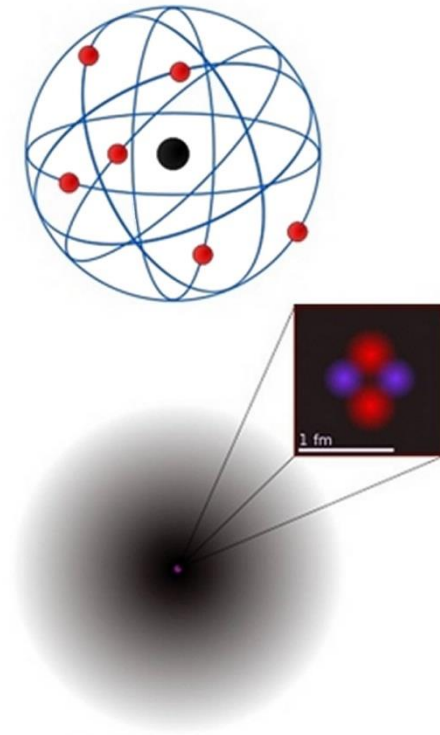


Figura 4.26. Arriba. Modelo planetario clásico del átomo. Abajo; modelo contemporáneo probabilístico de un átomo de He.

Además de $\vec{\mu}_L$, la evidencia experimental muestra que es necesario considerar el momento magnético de *spin* $\vec{\mu}_s$, que se asocia a una supuesta rotación del electrón sobre sí mismo. El valor modular de $\vec{\mu}_s$ se designa por μ_B y se denomina “magnetón de Bohr”:

$$\mu_B \approx 10^{-23} \text{ J/T (figura 4.27).}$$

De ahí que cada electrón en realidad contribuye con dos componentes magnéticas al momento magnético del átomo:

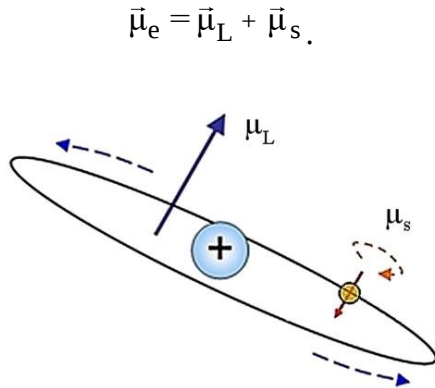


Figura 4.27. Momentos magnéticos de un electrón en un átomo.

El *momento magnético atómico* μ_a se define como la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales y de spin de todos los electrones, no siempre colineales. Sin embargo, en la inmensa mayoría de los átomos se encuentra que $\mu_s \gg \mu_L$, y el momento magnético orbital se puede despreciar en comparación con el momento magnético de spin.

Por otra parte, el llenado de las capas electrónicas en un átomo cumple el *principio de exclusión de Pauli* y la *regla de máxima multiplicidad de Hund*, que indican que la mayoría de los orbitales están ocupados por electrones *pareados*, con sus vectores magnéticos apuntando en sentido contrario ($\uparrow\downarrow$). Sólo hay preferencia de electrones no pareados en los llamados ‘orbitales degenerados’ que poseen igual energía ($\uparrow\uparrow$). Los electrones pareados anulan su magnetismo mutuamente y no contribuyen al momento magnético atómico.

De aquí que para hacer un estimado del momento magnético atómico sólo son de interés, en la gran mayoría de los casos, el número N de electrones no pareados. En ese caso,

$$\mu_a \approx N\mu_B.$$

Cuando todos los electrones de un átomo están pareados $N=0$, $\mu_a=0$ y el átomo es *diamagnético*. Si el átomo posee electrones no pareados ($N \neq 0$), es *paramagnético*. Los gases inertes y algunos metales como el bismuto son diamagnéticos, mientras que los átomos de hierro, níquel, cobalto, que poseen electrones no pareados, son paramagnéticos.

El vector *magnetización* M se define por la expresión

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{\mu}_a, \quad (4.5)$$

donde V es el volumen de sustancia considerado. Es una medida macroscópica de la magnetización microscópica de la sustancia. Cuando el material considerado no es un imán permanente, M es cero si no hay campo externo aplicado, porque los momentos magnéticos atómicos están orientados en todas las posibles direcciones a causa de la agitación térmica, y al llevar a cabo la suma vectorial el resultado es nulo.

Momento magnético nuclear

Muchos núcleos atómicos también poseen un momento magnético, que designamos por μ_N . Tanto los protones como los neutrones poseen momento magnético. El magnetón nuclear, una constante física asociada a los núcleos atómicos, toma el valor

$$\mu_N = -5.051 \cdot 10^{-27} \text{ J/T},$$

tres órdenes menor que el magnetón de Bohr,

$$\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}.$$

El momento magnético del protón es unas 660 veces menor que el magnetón de Bohr.

Por tanto, cuando hay presente magnetismo atómico, no es necesario tomar en cuenta magnetismo nuclear.

4.11 Interacción de la sustancia con el campo magnético

La interacción de un determinado material con el campo magnético trae resultados muy diferentes en dependencia de si el material es diamagnético, paramagnético o ferromagnético. Este último tipo de material puede considerarse, en principio, como un paramagnético con propiedades especiales y será analizado más adelante.

Paramagnetismo

Los materiales paramagnéticos son aquellos formados por átomos paramagnéticos, o por moléculas que incluyen átomos diamagnéticos, pero que dejan algunos spines no apareados al formar los enlaces y poseen dipolos magnéticos a nivel microscópico.

La figura 4.28 representa una porción de material paramagnético antes (1) y después (2) de aplicar un campo magnético externo uniforme y constante. Antes de aplicar el campo, la orientación aleatoria a nivel microscópico hace que la magnetización M en la ecuación (4.5) se anule. Después de aplicar el campo externo en (2), aparecen torques que tienden a ordenar los dipolos en la dirección del campo aplicado. Como los vectores microscópicos se ordenan hacia un mismo sentido, la suma vectorial ya no se anula y el vector magnetización M será diferente de cero.

La magnetización contribuye al campo magnético total, de manera que ahora

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \quad (4.6)$$

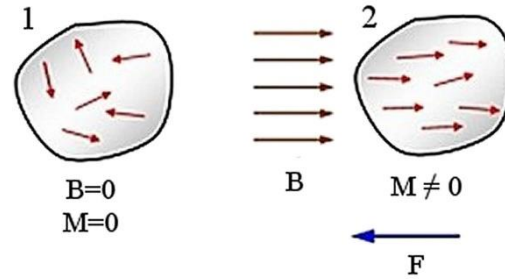


Figura 4.28. Paramagnetismo. Ver texto.

Las sustancias paramagnéticas son atraídas muy débilmente hacia la región donde el campo magnético es más intenso. En el laboratorio se emplean balanzas especiales de gran sensibilidad para poder medir esas fuerzas. Ejemplos de sustancias paramagnéticas son el N_2 , O_2 , Al, W, Pt y algunas sales como el sulfato hidratado de cromo potasio, $CrK(SO_4) \cdot 12H_2O$.

Ley de Curie

Expresa como varía la dependencia de M y H con la temperatura. Se expresa por la relación

$$M = \chi H,$$

donde $\chi = \frac{C}{T}$.

En esta expresión,

χ : susceptibilidad magnética adimensional, con valores del orden de $+10^{-5}$.

C : constante de Curie (T^{-1}).

T : temperatura absoluta.

El valor de C varía para cada material. La ley de Curie deja de ser válida cuando H es lo suficiente intenso como para alinear todos los momentos magnéticos atómicos, pues un incremento adicional de H ya no puede hacer que M aumente más.

Al sustituir $M = \chi H$ en la ecuación 4.6 se

obtiene

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H},$$

y definiendo $\mu_r = 1+\chi$ como la permeabilidad relativa:

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}.$$

En ocasiones también se usa la permeabilidad absoluta; $\mu = \mu_0\mu_r$. La tabla 4.1 muestra algunos valores de la susceptibilidad magnética.

No debe ser objeto de confusión que por tradición se utilicen símbolos parecidos para indicar parámetros diferentes: $\vec{\mu}_L$, $\vec{\mu}_s$ y $\vec{\mu}_a$ son vectores representado propiedades microscópicas a nivel atómico, mientras que μ , μ_r y μ_0 son escalares que representan propiedades macroscópicas del material.

Tabla 4.1 Susceptibilidad magnética		
Sustancia	χ (adimensional)	
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$	Diamagnético
Magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$	Paramagnético
Oxígeno (1 atm)	$193,5 \times 10^{-8}$	Paramagnético
Agua	$-0,56 \times 10^{-6}$	Diamagnético

4.12 Diamagnetismo y ferromagnetismo

Los átomos de las sustancias diamagnéticas no poseen momento magnético. Sin embargo, al aplicar un campo externo, la interacción del campo con los momentos magnéticos orbitales da origen a un alineamiento de los mismos *en sentido contrario* al del campo aplicado, y aparecen fuerzas de *repulsión* muy débiles, mucho más pequeñas que el caso del paramagnetismo (figura

4.29).

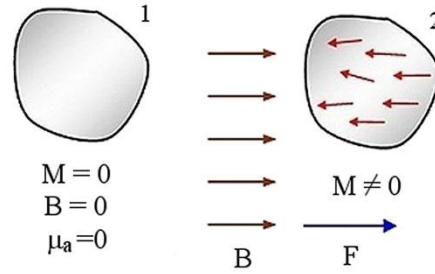


Figura 4.29. Diamagnetismo. 1. Sin campo externo aplicado. 2. En presencia del campo.

El efecto no depende de la polaridad del campo externo, puesto que de alguna manera está relacionado con la ley de inducción de Faraday, cuyos efectos siempre se oponen a la causa que les da origen. La ley de Faraday-Lenz se analiza en secciones posteriores.

Es usual considerar que este comportamiento está asociado a los momentos magnéticos orbitales (y no a los momentos magnéticos de spin, causantes principales del paramagnetismo); de aquí que el diamagnetismo también está presente en las sustancias paramagnéticas.

Lo que sucede es que, como las fuerzas de repulsión son tan débiles, no son capaces de anular las fuerzas de atracción que surgen en las sustancias paramagnéticas.

Ejemplos de sustancias diamagnéticas son el H_2 , Cu, NaCl, Bi y H_2O . Los valores de la susceptibilidad χ de estas sustancias son negativos (ver tabla 4.1).

Ferromagnetismo

Existe un grupo de materiales sólidos que se caracterizan porque los momentos magnéticos de sus átomos se orientan espontáneamente a lo largo de una dirección de-

terminada, formando los denominados *dominios magnéticos* dentro del material. Ejemplos típicos de ferromagnéticos son el Fe, Ni, Co, muchas de sus aleaciones y algunos óxidos como la magnetita, $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$.

En la figura 4.30 se observa un esquema de la distribución de los dominios magnéticos a nivel microscópico antes y después de

aplicar un campo magnético externo al material y su lazo de histéresis característico. El mecanismo de magnetización es muy diferente al de los materiales diamagnéticos. Al aplicar el campo, los dominios cuyos momentos magnéticos están dirigidos en la dirección del campo aumentan de tamaño a costa de la disminución de los restantes, por un proceso de *desplazamiento de las paredes de dominio*.

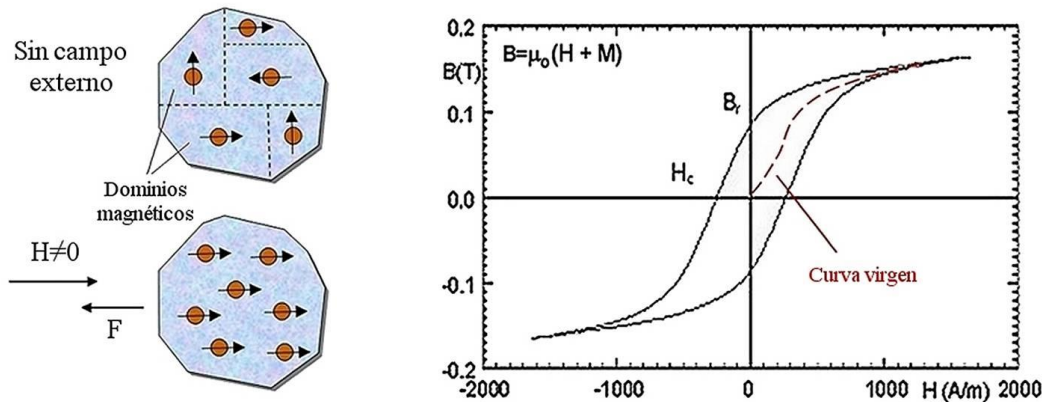


Figura 4.30. Esquema de un material ferromagnético y lazo de histéresis.

Las fuerzas de atracción que aparecen son intensas. Los valores de μ_r pueden llegar a ser muy grandes, de hasta 10 000 o más. La susceptibilidad χ deja de ser constante y la dependencia $M = \chi H$ ya no es lineal.

Histéresis y magnetización técnica

Los materiales ferromagnéticos poseen histéresis (*retraso, en griego*). Al graficar B en el seno del material en función del campo aplicado H , se obtiene una curva característica denominada *lazo de histéresis* (figura 4.30).

Note en la figura que, una vez aplicado un campo H externo y reducido después a cero B no se hace cero, sino que queda una *inducción remanente* B_r . En esta propiedad de

los materiales ferromagnéticos se basa la *magnetización técnica*. Si un material ferromagnético se somete a un campo externo intenso, al retirar el campo el material no se desmagnetiza por completo. Un imán permanente es, por tanto, cualquier material ferromagnético con una remanencia alta, suficiente como para retener una buena parte de la magnetización al ser sometido a un proceso de magnetización técnica. En un imán permanente todos los dominios magnéticos quedan, en lo esencial, orientados en la misma dirección (figura 4.31).

En adición al diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo, también existen el ferrimagnetismo y antiferromagnetismo, característico de los óxidos magnéticos, y el

superparamagnetismo, donde los núcleos de material magnético son tan pequeños que cambian las características de su magnetización.

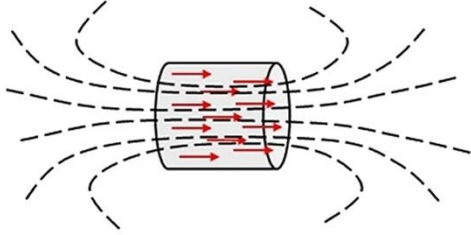


Figura 4.31. Material magnetizado en forma permanente (imán sintético).

Temperatura de Curie

Es conocido que cuando la temperatura de cualquier sólido se incrementa, las vibraciones de los átomos o moléculas que lo componen aumentan de amplitud. En el caso de un ferromagnético, también aumentarán las desviaciones de los momentos magnéticos del llamado “orden magnético”.

A una determinada temperatura las vibraciones de la red cristalina del sólido son tan grandes que el orden magnético deja de existir, y las propiedades magnéticas del material desaparecen. Esa temperatura se conoce como *temperatura de Curie* y es diferente para cada material. El proceso es reversible desde el punto de vista microscópico, e irreversible en lo macroscópico, pues la magnetización técnica desaparece. Los dominios que se forman lo hacen en direcciones aleatorias.

En el caso de las sustancias ferrimagnéticas se acostumbra hablar de la *temperatura de Néel* en vez de la temperatura de Curie. En la tabla 4.2 se muestra la temperatura de Curie de algunos materiales.

Tabla 4.2 Temperaturas de Curie			
Material	T _c (K)	Material	T _c (K)
Fe	1043	CrO ₂	386
Co	1388	MnOFe ₂ O ₃	573
Ni	627	Fe ₃ O ₄	858
Gd	292	NiO ₂ Fe ₃	858
Dy	88	CuOFe ₂ O ₃	728
MnAs	318	MgO ₂ Fe ₃	713
MnBi	630	EuO	69
MnSb	587	Y ₃ Fe ₅ O ₁₂	560

4.13 Medición de campos magnetostáticos

Balanza de Gouy. Magnetómetros.

Inventada por el físico francés Louis Georges Gouy (siglos XIX y XX), su balanza es quizás el primer instrumento empleado para medir la susceptibilidad magnética de las sustancias. La medición se lleva a cabo con la muestra en un recipiente cilíndrico alargado, suspendido de una balanza e introducido parcialmente entre los polos de un imán. La balanza mide el cambio de peso al ser repelida o atraída la muestra por la región de alto campo magnético entre los polos (figura 4.32). La fuerza que causa el cambio aparente de peso se relaciona con χ por la expresión

$$F = \frac{A\chi_M H^2}{2V_m},$$

donde A es el área del cilindro y V_m el volumen molar¹ de la muestra considerada.

¹ Volumen de un mol de muestra.

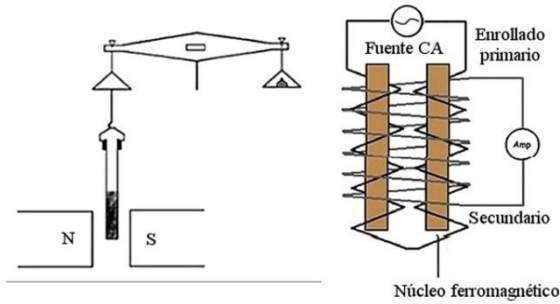


Figura 4.32. Balanza de Guoy (izq.) y magnetómetro de compuerta de flujo.

Sensor de efecto Hall

Descubierto por Edwin Hall en 1879, el efecto Hall consiste en la aparición de una diferencia de potencial transversal en un conductor en la presencia de una corriente y un campo magnético perpendicular al conductor (figura 4.33).

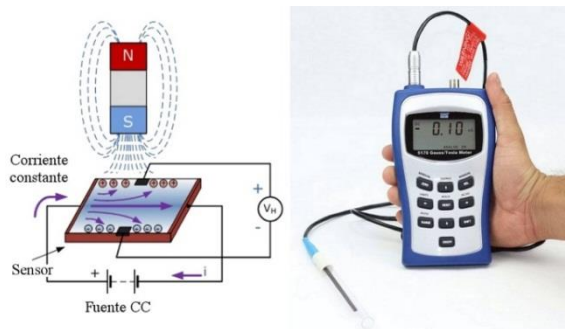


Figura 4.33. Sensor de efecto Hall (Gaussímetro) para la medición de campos magnéticos. El sensor va colocado en la punta de prueba.

Las cargas se separarán hasta que la fuerza eléctrica $q_e \vec{E}$ creada por la separación de las cargas equilibre la fuerza magnética $q_e \vec{v} \times \vec{B}$ originada por la interacción del campo magnético con las cargas en movimiento.

En un conductor metálico de longitud L , donde sólo hay un tipo de portador de cargas, como B y v son perpendiculares, al

igualar las fuerzas y simplificar queda:

$$E_y = v_x B.$$

En la figura 4.33 se ha considerado el eje x paralelo a la corriente y el eje y perpendicular en el plano del conductor. Una aplicación médica se muestra en la figura 4.34.

El potencial de Hall tendrá la forma $V_H = E_y d$, donde d es el ancho de la sección conductora considerada, y $v_x = L/t$, donde L es su longitud. Sustituyendo:

$$V_H/d = LB/t.$$

Llamando h al espesor de la capa (eje z) y n al número de cargas por unidad del volumen Lhd , entonces

$$q = nq_e Lhd.$$

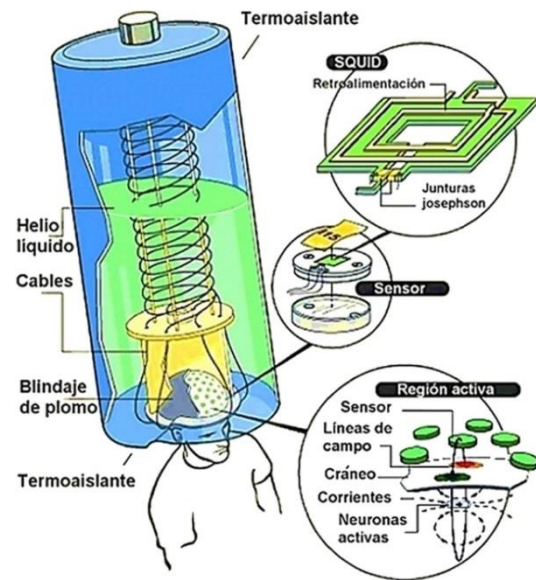


Figura 4.34. Magnetómetro SQUID (del inglés *superconducting quantum interference device*) para estudios de magnetoencefalografía usando superconductores de interferencia cuántica de muy alta sensibilidad.

Por tanto:

$$V_H = BLd/t = Bq/nq_e ht.$$

Sustituyendo $i = q/t$,

$$V_H = \frac{iB}{nq_e h}.$$

Se acostumbra expresar este resultado en función de la constante de Hall, $R_H = 1/nq_e$:

$$V_H = R_H \frac{iB}{h}.$$

Para una corriente dada y espesor dado, V_H depende linealmente del valor de B aplicado.

4.14 Resonancia magnética nuclear

La resonancia magnética nuclear es una técnica de análisis muy utilizada hoy. Se ha generalizado como método de diagnóstico médico, pues permite obtener figuras informáticas tridimensionales del interior del organismo.

Su principio de funcionamiento se basa en lo siguiente. El agua es diamagnética, por tanto las propiedades magnéticas originadas por sus electrones son despreciables. Sin embargo, el momento magnético de los protones o núcleos de hidrógeno que la componen no es nulo, a pesar de ser muy pequeño ($\mu_p = \mu_B/660$).

Desde el punto de vista clásico, cuando el momento magnético de un protón se somete a la acción de un campo magnético externo se obtiene una situación similar a la de un trompo que gira sometido a la acción de la gravedad; el protón *precesa*. Es posible calcular teóricamente esa frecuencia de precesión, de un valor

$$\omega_p = \mu_p B / L_p,$$

donde L_p es el momento angular del protón (figura 4.35).

Si en estas condiciones se añade un campo magnético variable en dirección perpendi-

cular a la del campo B (por ejemplo, mediante una bobina donde circule una corriente alterna, figura 4.36) y se hace variar la frecuencia de oscilación de la corriente, se observa que cuando $\omega = \omega_p$ aparece un máximo en la absorción de energía; ocurre una *resonancia*.

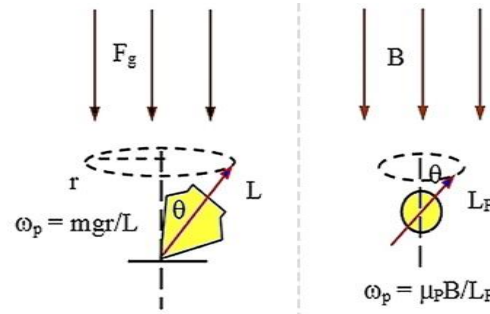


Figura 4.35 Comparación entre la precesión de un trompo y la del protón en un experimento de resonancia magnética nuclear en el modelo clásico.

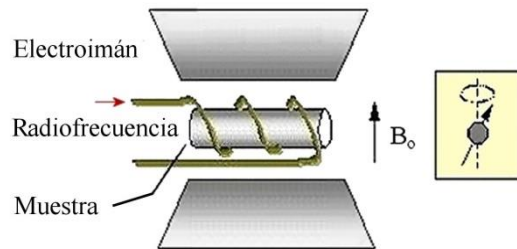


Figura 4.36. Montaje experimental para estudios de RMN.

A la frecuencia de resonancia, la absorción de energía será también proporcional a la cantidad de protones o núcleos de hidrógeno (y de agua) presente. A mayor cantidad de agua, mayor absorción. Variando la frecuencia de resonancia es posible estudiar el comportamiento de otros núcleos atómicos, no sólo el de hidrógeno, lo que permite aplicar el método a diversas investigaciones.

Imágenes médicas por resonancia mag-

nética (RMI)

El principio de la resonancia magnética es aplicable al cuerpo humano porque está lleno de pequeños imanes biológicos, de los cuales el más abundante y que mejor responde es el núcleo del átomo de hidrógeno. El proceso de obtención de imágenes por RMI comprende tres aspectos esenciales (figura 4.37).

Se somete al paciente a un campo magnético muy potente e inócuo (30 000 veces superior al campo magnético de la Tierra),

para hacer precesar los protones del agua.

- Diferentes partes del organismo se estimulan con una señal alterna de radiofrecuencia, de varios kHz. La absorción de la señal depende de la concentración de protones en cada región.
- La señal transmitida a través del cuerpo se registra mediante un receptor diseñado con ese fin. La diferente concentración de agua da origen a contrastes que se recogen mediante circuitos electrónicos.

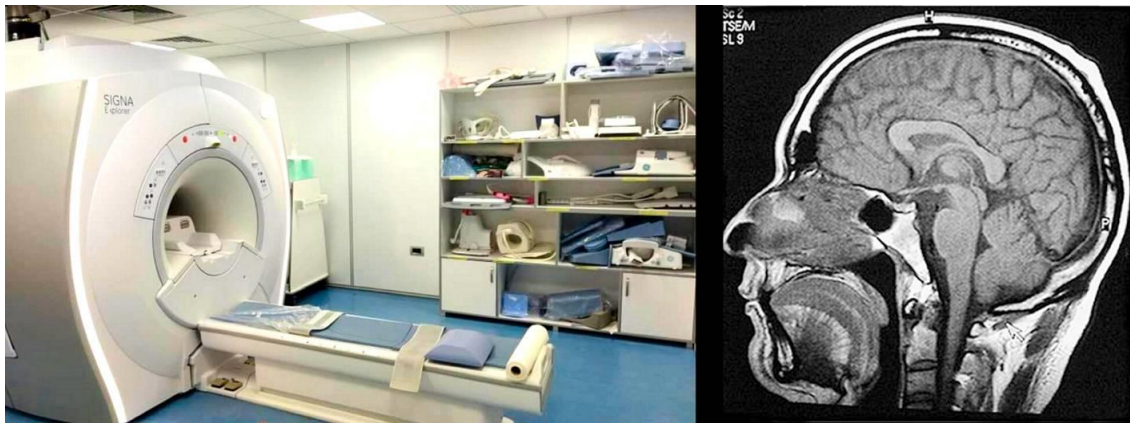


Figura 4.37. Equipo de formación de imágenes por resonancia magnética (RMI).

- La señal registrada se utiliza para construir imágenes internas del cuerpo empleando técnicas matemáticas y de computación, similares a las que se utilizan en otras técnicas contemporáneas de análisis como la TAC (tomografía axial computarizada).

Problemas resueltos

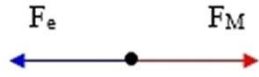
1. Sobre un electrón en movimiento actúan un campo eléctrico de 1500 V/m y otro magnético de 0.40 T, de tal forma que no producen fuerza alguna sobre el electrón. a)

Calcular la mínima velocidad del electrón. b) Dibujar los vectores intensidad de campo eléctrico y magnético, y la velocidad del electrón.

2. Una carga puntual de magnitud $+q$ y rapidez v está a una distancia d de un alambre recto que transporta una corriente i y se mueve perpendicular al alambre. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre la carga, si ésta se mueve: a) hacia el alambre; b) alejándose del mismo?

Soluciones

1. a)



Solución 1a.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_E + \vec{F}_M = 0$$

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_M$$

$$\vec{F}_E = q\vec{E} ; \vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$qE = vB\sin\phi.$$



Solución 1b

$$v = \frac{E}{B\sin\phi}.$$

El ángulo ϕ se desconoce, pero se pide la *mínima velocidad*, correspondiente a $\sin\phi = 1$ (máximo). Por tanto, $\phi = \pi/2$.

$$\begin{aligned} v_{\min} &= E/B = 1500/0.4 \\ &= 3750 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ forman 90° .

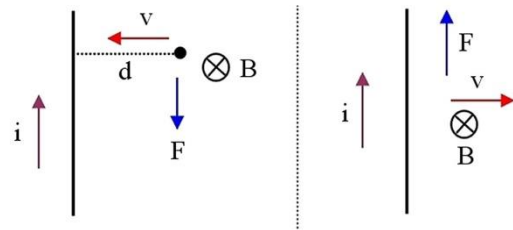
F_E y F_M son colineales, por tanto el vector $\vec{E}$ es perpendicular a $\vec{v} \times \vec{B}$ y de sentido contrario:

$$q\vec{E} = -q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

2.

a) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} ; B = \mu i / 2\pi d$



Solución 2

b) El valor modular es el mismo. La fuerza de igual dirección, pero sentido contrario al anterior.

CAPÍTULO 5

Campos variables en el tiempo

5.1 Campos magnéticos variables. Ley de Faraday

5.2 Ley de Lenz

5.3 Generación de una FEM alterna sinusoidal

5.4 Coeficiente de inducción mutua

Coeficiente de autoinducción

L para un solenoide

5.5 Corrientes de Foucault

Generación de campos eléctricos en el vacío

5.6 Energía del campo magnético

Energía almacenada en una bobina

Densidad de energía del campo magnético

5.7 Corriente de desplazamiento y campo electromagnético

5.8 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

Energía de la radiación

5.9 Espectro electromagnético

Reflexión de las ondas de radio en la ionosfera

Radar

Horno de microondas

El efecto Doppler en la radiación.

5.10 Efectos biológicos de la radiación

CAPÍTULO 5

Campos variables en el tiempo

5.1 Campos magnéticos variables. Ley de Faraday

En 1831, Miguel Faraday descubrió el fenómeno de *inducción magnética*, que en lo esencial consiste en que un campo magnético *variable en el tiempo* puede inducir una FEM (o una corriente) en un circuito.

En la figura 5.1, al mover el imán delante de la bobina, se induce una corriente que puede ser detectada con facilidad mediante un amperímetro. Si el imán no se mueve, no aparece corriente alguna. Si en vez del imán se mueve la bobina, también aparece una corriente. Los diferentes resultados experimentales que se obtienen cuando se utilizan diferentes configuraciones y formas de variar el campo magnético se pueden resumir en una expresión general única.

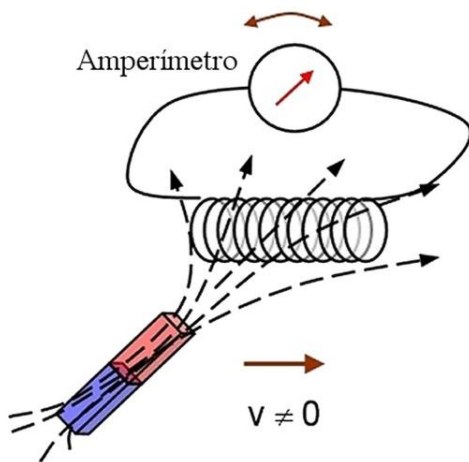


Figura 5.1. Imán en movimiento frente a un solenoide.

La acumulación de evidencias condujo a lo que hoy se conoce como ley de Faraday:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt};$$

ϕ es el *flujo magnético* a través de la superficie encerrada por el circuito (figura 5.2):

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Unidades

En el SI de unidades,

$$[\phi] = [B][A] = \text{Tm}^2 = \text{Weber (Wb)}.$$

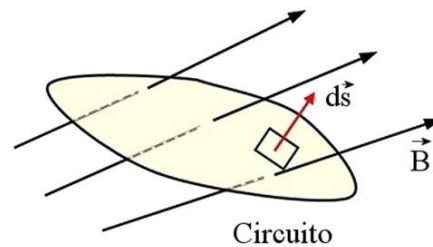


Figura 5.2. Flujo de B.

5.2 Ley de Lenz

El signo (-) que aparece en la ley de Faraday no es estrictamente una parte cuantitativa de la ley, sino más bien una forma convencional de recordar la *ley de Lenz*, que establece que la FEM (o la corriente) inducida tiene un sentido tal que *siempre se opone a la causa que la produce*. Lo usual es tomar el valor modular de $d\phi/dt$, y el sentido de la FEM se establece con el auxilio de la ley de Lenz.

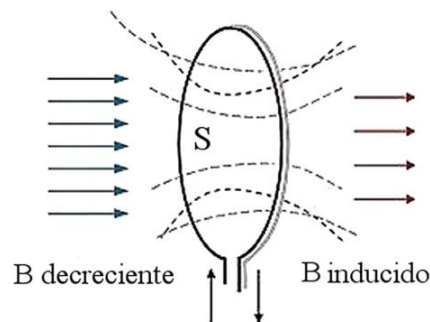


Figura 5.3. Ley de Lenz.

Para esclarecer el significado de la ley de Lenz analicemos lo siguiente. En la figura 5.3, la espira es perpendicular a la dirección de B , por tanto se puede omitir la notación vectorial ($\theta = 0$, $\cos(\theta) = 1$) y $\phi = \mu_0 \int B ds$.

Si B comienza a disminuir de valor, ϕ también decrecerá; $d\phi/dt$ no será nula, y según la ley de Faraday aparecerá una FEM inducida $\varepsilon = -d\phi/dt$. Si la espira tiene una resistencia R distribuida en toda su longitud, la corriente inducida será $i = \varepsilon/R$.

Según la ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida debe ser tal que se oponga a la causa que la produjo. ¿Cuál fue esa causa? Pues *la disminución* de B . Para oponerse a la disminución de B , la corriente inducida debe generar un campo magnético B_{ind} que se suma a B para evitar su disminución.

En secciones anteriores se vio que un alambre con corriente siempre tiene asociado un campo magnético, y que el sentido del campo es tal que cumple la regla de la mano derecha. Por tanto, analizando las dos posibles direcciones de la corriente en la espira, se llega rápido a la conclusión de que la dirección correcta de la corriente es la que se muestra en el dibujo, pues en este caso el campo inducido tiende a reforzar el campo decreciente, oponiéndose así a su disminución.

Se deja al lector el análisis de una situación similar, pero ahora con un campo B creciente y de sentido contrario.

Ejemplo

En la parte superior de la figura 5.4, B es uniforme y varía con el tiempo según la

expresión en Tesla: $B = B_0 - 5t$. Si el área encerrada por la espira es de 10 cm^2 : a) ¿Cuál es el valor de la FEM inducida en la espira? b) ¿Cuál es el sentido de la corriente que se induce?

Resolución:

$$a) \phi = \int B \cos(\theta) ds$$

Como B y ds son paralelos, $|\cos\theta| = 1$. Sustituyendo B :

$$\phi = \int (B_0 - 5t) ds = B_0 A - 5At .$$

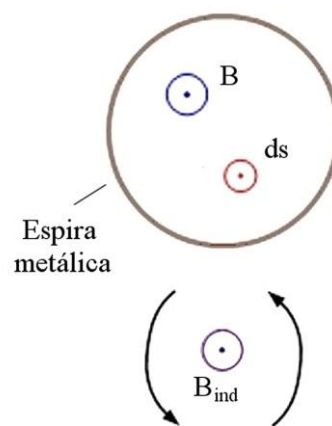


Figura 5.4. Ver texto.

Tomando valor modular:

$$\varepsilon_{ind} = d\phi/dt = 5A$$

$$A = 10 \text{ cm}^2 = 10 \cdot (10^{-2})^2 \text{ m}^2$$

$$= 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\varepsilon_{ind} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

b) Si B está disminuyendo su valor, el sentido de B_{ind} debe ser tal que tienda a reforzar el de B , es decir, saliendo del plano del papel. Por tanto, el sentido de recorrido de la corriente será contrario al de las agujas del reloj.

5.3 Generación de una FEM alterna si-

nusoidal

Es posible generar una FEM alterna de la forma representada en la figura 5.5. La inducción magnética B es constante y uniforme, y la espira se encuentra rotando alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω . En la parte inferior se representan en forma esquemática las conexiones que permiten a la espira rotar a la vez que mantiene un contacto eléctrico continuo con otros circuitos.

A la derecha se muestra la espira vista desde la parte superior, rotando hacia la izquierda. El flujo que atraviesa la espira en un instante determinado será:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B \cos \theta ds = \int B \cos(\omega t) ds.$$

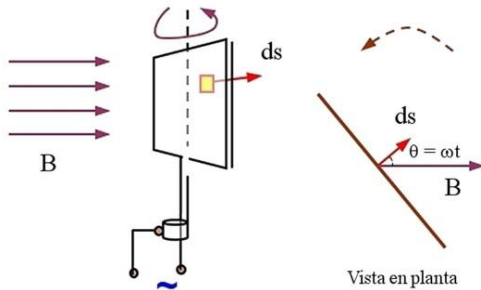


Figura 5.5. Generación de una FEM alterna sinusoidal.

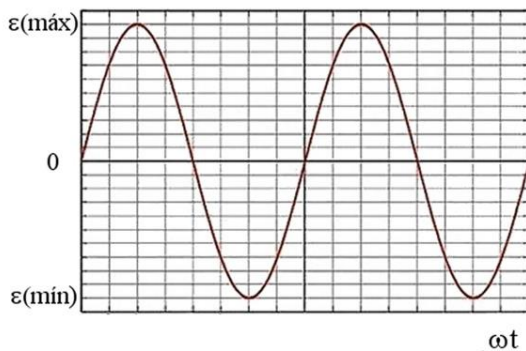


Figura 5.6. FEM alterna sinusoidal

Como B es uniforme y constante, tomará el

mismo valor en todos los puntos de la superficie de la espira, y se puede sacar fuera de la integral. Lo mismo sucede con el factor $\cos(\omega t)$, que depende del tiempo, pero no del diferencial de superficie ds . La integral restante toma el valor del área S de la espira. Por tanto:

$$\phi = BS \cos(\omega t).$$

Aplicando la ley de Faraday, $\varepsilon = - d\phi/dt$ y tomando $\varepsilon_m = BS\omega$ se llega a:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t).$$

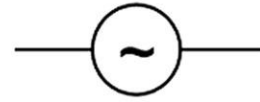


Figura 5.7. Representación de una FEM alterna.

Si se analiza el gráfico de ε vs. t en la figura 5.6, se ve de inmediato que la polaridad de los bornes cambia continuamente con el transcurso del tiempo, con una dependencia sinusoidal y frecuencia dada por $f = \omega/2\pi$.

Una FEM alterna se representa por el símbolo en la figura 5.7.

En la mayoría de los países de latinoamérica y en EE.UU. la red comercial tiene una frecuencia de 60 Hz; en los países europeos es usual la frecuencia de 50 Hz.

5.4 Coeficiente de inducción mutua y autoinducción

En la figura 5.8, la corriente i_1 varía con el tiempo y origina una inducción B_1 , que es proporcional a i_1 . Recordar que para un solenoide $B = \mu_0 n i$; es decir, $B \propto i$. La expresión para un alambre con corriente también es proporcional.

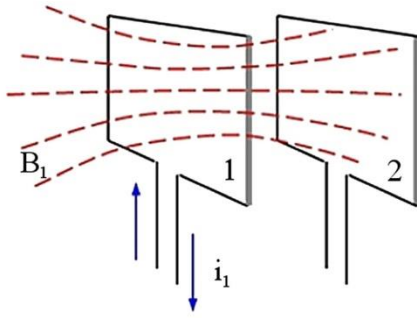


Figura 5.8. Inducción mutua

El flujo que pasa por la espira 2 viene dado por

$$\phi_2 = \int_{\vec{S}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2,$$

y también será proporcional a i_1 . Llamando M a la constante de proporcionalidad, es posible escribir entonces,

$$\phi_{21} = M i_1,$$

donde ϕ_{21} representa el flujo en la espira (2) originado por la corriente en la espira (1). El coeficiente M se denomina *coeficiente de inducción mutua* entre las espiras.

Si la corriente i_1 está variando en el tiempo $i = i(t)$, también lo hará el flujo: $\phi_{21} = \phi_{21}(t)$. De acuerdo a la ley de Faraday, en la espira (2) tendremos, en valor modular:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\phi_{21}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}.$$

Si se invierte la situación, haciendo pasar una corriente por la espira (2) y analizando el valor de la FEM en la espira (1), se obtiene un resultado análogo, con la particularidad de que el coeficiente M es el mismo en ambos casos, como se puede demostrar a partir de consideraciones energéticas:

$$M = \frac{\phi_{21}}{i_1} = \frac{\phi_{12}}{i_2}.$$

M es una propiedad del sistema formado por ambas espiras, y depende solo de la geometría de los circuitos.

Unidades:

$$[M] = \frac{[\phi]}{[i]} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \text{H (henry)}$$

Coeficiente de autoinducción

Considere una espira por la que circula una corriente variable en el tiempo. La corriente genera un campo $B(t)$ también variable, quien a su vez genera un flujo $\phi(t)$ en la espira (figura 5.9).

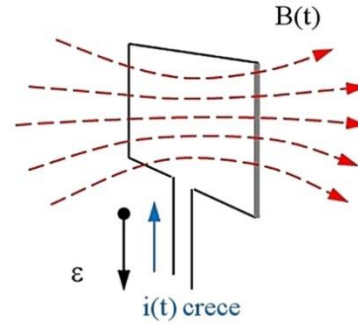


Figura 5.9. Espira con corriente variable

Pero según la ley de Faraday, ese flujo, creado por la propia espira, debe dar origen a una FEM *en la propia espira*:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Esa FEM debe cumplir la ley de Lenz, oponiéndose a la causa que la produce (la variación de la corriente). La propiedad se denomina *autoinducción*. Por analogía con el coeficiente de inducción mutua, el coeficiente

$$L = \phi/i$$

se denomina coeficiente de autoinducción. Depende solo de la geometría de la espira (o del circuito) en cuestión.

Sustituyendo en la ley de Faraday se obtiene una expresión en función del coeficiente de autoinducción,

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}.$$

L para un solenoide

Considere un solenoide de N vueltas, sección transversal de área A y longitud l por el que circula una corriente (figura 5.10). La inducción $B = \mu_0 ni$ atraviesa el área encerrada por las N espiras.

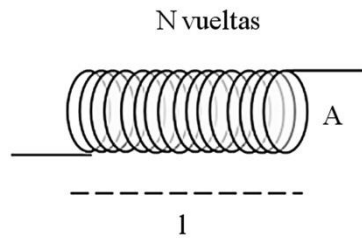


Figura 5.10. Solenoide.

Si ϕ_0 es el flujo que atraviesa el área de una de las espiras, de acuerdo a la definición de L tendremos:

$$L = \frac{N\phi_0}{i}$$

$$\phi_0 = \int B \cos(\theta) ds = \mu_0 ni \int ds = \mu_0 niA.$$

Sustituyendo ϕ_0 en la expresión de L con $n = N/l$ se llega a:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}. \quad (5.1)$$

Note que L sólo depende de la geometría del solenoide y no de parámetros eléctricos o magnéticos.

5.5 Corrientes de Foucault

Considere que en vez de actuar sobre un circuito, un campo magnético variable en el tiempo actúa sobre una lámina metálica

(figura 5.11).

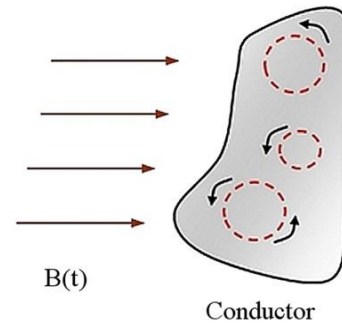


Figura 5.11. Corrientes de Foucault

En el seno del metal aparecerán corrientes inducidas que causan el calentamiento del conductor: las *corrientes de Foucault*. También surgen corrientes de Foucault cuando un conductor no magnético se mueve en un campo magnético no homogéneo, de manera que B varía con la posición del conductor y $dB/dt \neq 0$.

Como para generar una corriente es necesario gastar energía, queda claro que el campo magnético variable es capaz de transmitir energía al seno del metal. Por lo general las corrientes de Foucault son indeseables, pues causan pérdidas de energía y el calentamiento del material, pero también se pueden usar para algunas aplicaciones útiles como, por ejemplo, en los sistemas de frenado.

El sentido de las corrientes inducidas es tal que se oponen a la causa que las originó (Lenz). En la figura 5.12, los campos que crean las corrientes de Foucault en el conductor de cobre se oponen al movimiento (frenado magnético).

El frenado magnético también se aplica para disipar energía en sistemas de amortiguamiento de equipos pesados como trenes y camiones. La energía disipada aparece en

forma de calor óhmico y su efecto es mayor mientras mayor sea la velocidad del movimiento relativo, por lo que proporciona un frenado suave. Como no hay rozamiento mecánico, no hay desgaste.

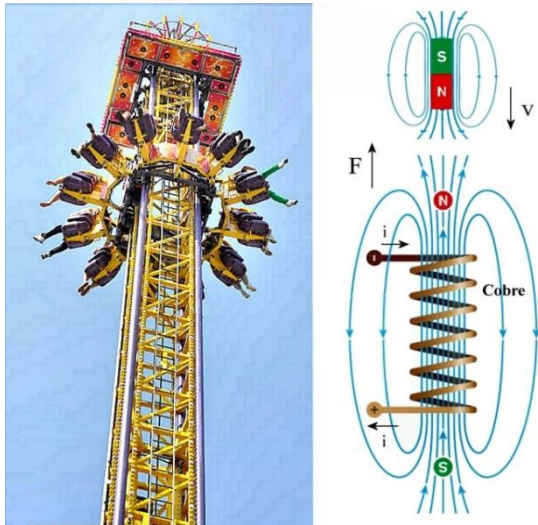


Figura 5.12. Ejemplo de frenado magnético. Plataforma de torre de caída (drop tower ride) en un parque de diversiones y esquema de un sistema de frenaje.

Para evitar las pérdidas por corrientes de Foucault, los metales sometidos a la acción de campos magnéticos variables deben ser laminados y barnizados con algún aislante. Las uniones y tornillos que unen las láminas no deben formar circuitos magnéticos por los que se puedan cerrar las corrientes inducidas y los soportes de las bobinas no deben ser conductores.

Generación de campos eléctricos en el vacío

A nivel microscópico la ley de Ohm toma la forma $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Si se retira el conductor y el campo es variable, los campos eléctricos que aparecen al variar el flujo de B seguirán actuando en el vacío (aunque ahora sin co-

rrientes).

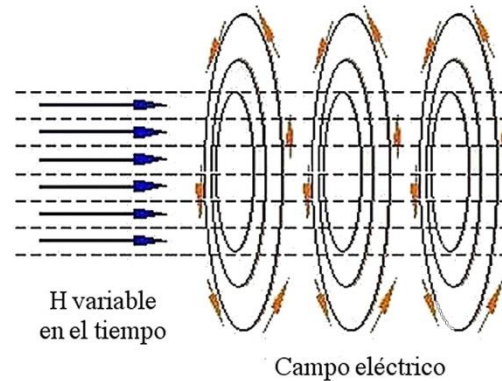


Figura 5.13. Generación de campos eléctricos en el vacío.

Lo que sucede es que al variar el campo magnético se genera un campo eléctrico, también variable en el tiempo, aunque no haya algún material presente. Las líneas de fuerza son cerradas y perpendiculares a las líneas de inducción magnética (figura 5.13).

Esta es una diferencia esencial con los campos electrostáticos, donde las líneas de fuerza empiezan en las cargas (+) y terminan en las (-). El campo eléctrico así generado *no es conservativo*. El trabajo realizado sobre una carga eléctrica en una trayectoria cerrada no es nulo.

Para tomar en cuenta esta realidad fue necesario generalizar la ley de Faraday. Recordando que $\Delta V = \int E dx$, es posible escribir

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Sustituyendo en la expresión de la FEM inducida,

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt},$$

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

se llega a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Si recordamos que el teorema de Stokes expresa que

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s},$$

al aplicar el teorema a la ecuación anterior sustituyendo A por E, se llega a que se cumple la siguiente igualdad:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Siempre que se encuentre presente un campo magnético variable en el tiempo en una región dada del espacio, también existirá un campo eléctrico asociado de carácter rotacional.

5.6 Energía del campo magnético

Energía almacenada en una bobina

Considere el solenoide de la figura 5.14 y un intervalo de tiempo durante el cual la corriente incrementa de continuo su valor. Suponga además que la resistencia de los alambres que conforman el solenoide es despreciable.

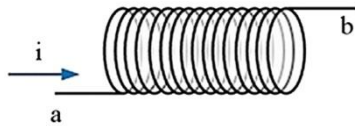


Figura 5.14. Bobina con corriente variable.

La FEM inducida por la corriente tomará el valor

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt},$$

y como suponemos que la corriente está creciendo, su sentido será en oposición a la corriente. Note que en este caso el signo (-)

es válido, pues $di/dt > 0$ y se obtiene una FEM contraria (< 0).

Se desea calcular la energía que hay que gastar para llevar la corriente desde un valor i_0 hasta otro $i > i_0$, trabajando en contra de la FEM inducida. El valor de la FEM inducida es igual a la diferencia de potencial V_{ab} en los extremos de la bobina. Y como el potencial no es más que la energía potencial por unidad de carga, es posible escribir

$$\varepsilon_{\text{ind}} = V_{ab} = \Delta E_p / q.$$

Considerando una porción infinitesimal de carga dq trasladada desde a hasta b en la figura 5.14, la correspondiente variación infinitesimal de energía dE_p vendrá dada por:

$$dE_p = \varepsilon_{\text{ind}} dq = L \frac{di}{dt} i dt = L i di,$$

donde el signo (-) se ha omitido por estar ya considerado en la ley de Lenz. Integrando a ambos lados de la expresión, tomando $i_0 = 0$:

$$\int_0^E dE_p = L \int_0^i i di.$$

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2. \quad (5.2)$$

El subíndice p se ha sustituido por L para indicar que esta es la energía que hay que gastar para establecer una corriente i en la bobina de autoinducción L. La energía gastada se emplea en crear el campo magnético, y no se disipa mientras éste exista. Al desconectar la corriente, se revierte al circuito o se disipa bruscamente en forma de chispa (extracorrente de ruptura).

Ejemplo

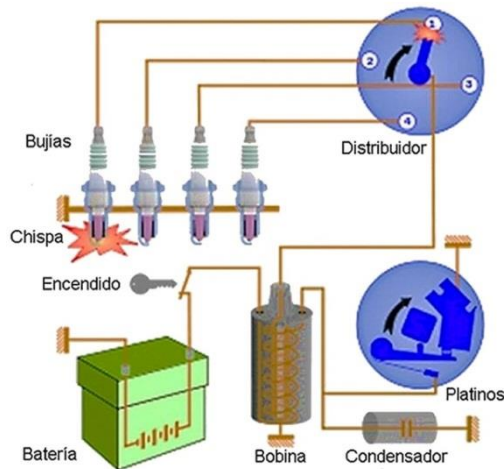


Figura 5.15. Sistema de encendido tradicional del transporte automotriz (4 tiempos). En la actualidad el distribuidor ha sido sustituido por sistemas electrónicos.

En la figura 5.15 aparece un esquema del sistema tradicional de encendido del transporte automotriz de 4 tiempos, que incluye un sistema de bobinas y el distribuidor. El sistema almacena energía en el campo magnético mediante la corriente de la batería (o del generador si el motor está en movimiento) con la ayuda del condensador, que acumula energía en el campo eléctrico. El distribuidor conecta y desconecta el sistema para generar chispas en las bujías por extracorrente de ruptura. Esas chispas son las que producen la ignición del combustible.

Densidad de energía del campo magnético

Si se sustituye en (5.2) la corriente en función de la inducción en la bobina en $B = \mu_0 n i$, y el valor del coeficiente de autoinducción que aparece en (5.1), se obtiene

$$E_L = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \frac{B^2}{\mu_0 n^2}.$$

Sustituyendo $n = N/Al$, simplificando y agrupando, llamando al volumen $V = Al$, se llega a:

$$E_L = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V.$$

Dividiendo por el volumen V del solenoide se obtiene la energía por unidad de volumen ϵ_M o *densidad de energía* en la bobina:

$$\epsilon_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Note que esta energía depende solo de la inducción magnética y no de algún parámetro de la bobina. De aquí que se pueda asociar directamente a la presencia del campo magnético, con independencia de su origen. Este resultado refuerza la idea, comprobada muchas veces en la práctica, de que es necesario gastar energía para crear un campo magnético, cualquiera que éste sea, y que esa energía deber ser retirada, o pasada a otro sistema, para lograr que el campo desaparezca.

El resultado es muy similar al obtenido para la densidad de energía del campo eléctrico. Como en el vacío $B = \mu_0 H$, comparando con esta última:

$$\epsilon_M = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 ; \epsilon_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

5.7 Corriente de desplazamiento y campo electromagnético

En la sección 5.4 se analizó como un campo magnético variable es capaz de generar un campo eléctrico, cuyas líneas de fuerza son perpendiculares a la dirección de la inducción magnética. En lo que sigue se analiza el efecto contrario: el hecho de que un campo eléctrico variable es capaz de generar un campo magnético.

Considere un condensador sometido a una diferencia de potencial que varía con el tiempo (figura 5.16). Como la diferencia de potencial varía, habrá un flujo de cargas continuo hacia o desde el condensador, y por tanto $i = dq/dt \neq 0$.

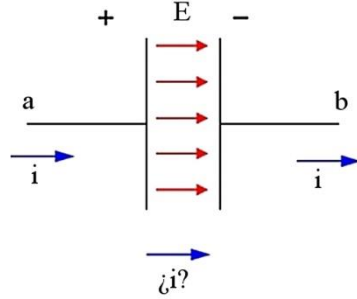


Figura 5.16. Condensador sometido a una diferencia de potencial variable.

Si d_0 es la separación entre las placas, entonces, en un instante determinado,

$$V_{ab} = Ed_0. \quad (5.3)$$

La capacidad del condensador es $C = q/V_{ab}$. Despejando q y derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dV_{ab}}{dt}.$$

Sustituyendo V_{ab} según (5.3) y la capacidad del condensador plano

$$C = \epsilon_0 A/d,$$

simplificando y agrupando términos con $dq/dt = i_D$, se obtiene:

$$i_D = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}.$$

El parámetro i_D indica que hay un análogo a la corriente eléctrica dentro del condensador (donde no hay conductor) y se denomina *corriente de desplazamiento* (figura 5.17). Significa que se puede asociar una cierta corriente a la *variación* de E dentro

del condensador, que tendrá el mismo valor que la corriente ‘real’ en el conductor. Si no hay variación, $dE/dt = 0$, y por el condensador no circula corriente.

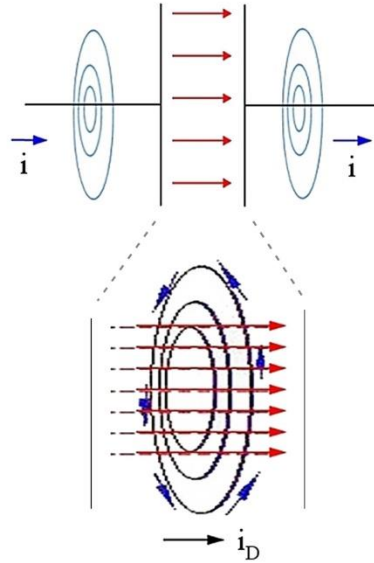


Figura 5.17. Corriente de desplazamiento i_D .

La corriente de desplazamiento justifica de alguna manera el hecho de que hay corriente donde no debería haberla, ya que el condensador representa un circuito abierto por el que no debería pasar la corriente. Además, se sabe que la corriente en el alambre tiene un campo magnético asociado de valor aproximado $B = \mu_0 i / 2\pi r$. De ahí sigue que la corriente i_D dentro del condensador también debería tener un campo magnético asociado. En la práctica se encuentra que, efectivamente, el campo eléctrico variable tiene asociado un campo magnético, también variable, cuyas líneas de fuerza son cerradas y perpendiculares a la dirección del campo eléctrico.

Esta propiedad de los campos eléctricos variables en el tiempo se resume en la generalización de la ley de Ampere debida a Maxwell, añadiendo un término que depen-

de de dE/dt y describe cualitativa y cuantitativamente toda la evidencia experimental conocida.

La ley de Ampere generalizada queda como

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

En su forma diferencial, al aplicar el teorema de Stokes la ley generalizada en el vacío queda:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Si el medio considerado no es el vacío, es necesario sustituir E por $D = \epsilon E$, donde ϵ es la permitividad absoluta del medio $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ y D el vector desplazamiento eléctrico.

5.8 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

Las ecuaciones de Maxwell describen por completo los fenómenos descubiertos mediante el experimento por Coulomb, Gauss, Ampere y Faraday – con la contribución de muchos otros – y generalizados más tarde por Maxwell.

A lo anterior se debe añadir la relación de Lorentz, que también proviene de la evidencia experimental:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} .$$

Cuando el medio considerado no es el vacío, las ecuaciones se modifican para incluir la permitividad y la permeabilidad del medio considerado (tabla 5.1).

TABLA 5.1
ECUACIONES DE MAXWELL

NOMBRE	FORMA INTEGRAL	FORMA DIFERENCIAL
Ley de Gauss	$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_N}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss del magnetismo	$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Ley de Faraday	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ley de Ampere generalizada	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Las ecuaciones de Maxwell proporcionan un modelo matemático muy preciso que permite identificar la radiación electromagnética con ondas donde oscilan los campos eléctricos y magnéticos y que se propagan por el espacio con independencia de la fuente que les dio origen.

Ondas electromagnéticas

En la sección 5.4 se analizó como un campo magnético variable tiene asociado un campo eléctrico también variable. Y en la sección anterior se describió como un campo eléctrico variable también tiene asociado un campo magnético.

Esto indica que los campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo siempre

tienen asociados un campo de la otra especie. Por tanto, cuando hay variación temporal, lo correcto es hablar del *campo electromagnético*: la presencia de uno trae siempre aparejada la presencia del otro.

La figura 5.18 muestra en tres etapas, en forma esquemática, como un condensador sometido a una FEM alterna puede ser convertido en un dipolo radiador de energía electromagnética.

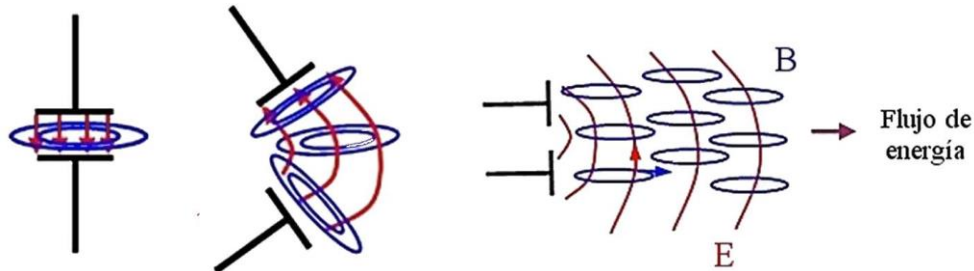


Figura 5.18. Generación de ondas electromagnéticas.

Se supone que la FEM aplicada al condensador varía con el tiempo según una dependencia sinusoidal del tipo $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t)$, aunque puede ser cualquier otra. Cualquier dispositivo similar que sirva para radiar energía al medio ambiente se denomina *dipolo radiante* u oscilante, aunque el término *antena emisora* es más común (figura 5.19a).

Quizás las antenas más familiares en el pasado inmediato hayan sido las de los teléfonos celulares, aunque los modelos más recientes la ocultan en el interior del dispositivo (figura 5.19b).

Los celulares emiten radiación electromagnética a frecuencias bastante altas, del orden de megahertz. Significa que la FEM que genera la señal varía de sentido millones de veces por segundo. La fuente de energía es una batería química convencional, y la transformación del sonido en una señal electromagnética se lleva a cabo utilizando circuitos electrónicos.

Cuando se hace un estudio detallado de la

radiación de energía, se encuentra que el flujo radiado por la antena posee propiedades ondulatorias; la radiación emitida por la antena se comporta como una onda, donde oscilan los campos eléctricos y magnético.



Figura 5.19a. Diferentes tipos de antenas emisoras y receptoras en un centro de telecomunicaciones.

La onda electromagnética es capaz de auto-sostenerse, pues existe y se propaga con independencia de la fuente que le dio origen. El campo eléctrico variable es capaz de engendrar otro magnético, también variable, que a su vez engendra otro eléctrico y así en lo sucesivo.



Figura 5.19b. Evolución de los teléfonos celulares. A partir de determinado momento, la antena emisora-receptora quedó oculta en el interior del celular (antena fractal), las pantallas se volvieron táctiles, se añadió una cámara fotográfica, etc.

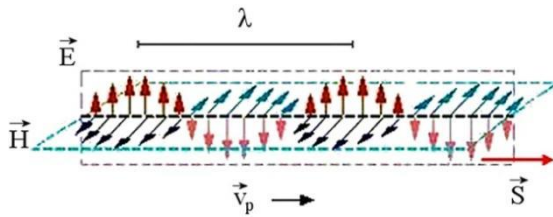


Figura 5.20. Onda electromagnética plana monocromática (una sola frecuencia), sinusoidal y polarizada ($\vec{E}$ no cambia de dirección con el tiempo).

En la figura 5.20 se muestra el esquema instantáneo de una onda electromagnética de frecuencia f , tal como se vería si la dirección de $\vec{E}$ se mantuviera constante en el espacio, lo que no es usual. Al transcurrir el tiempo, los valores de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ cambian de sentido de manera continua, a la vez que se propagan en la dirección de $\vec{S}$.

Las principales propiedades de la onda electromagnética son las siguientes:

- Las intensidades de los campos eléctrico y magnético varían en el tiempo de acuerdo a la ecuación de una onda, donde $\omega = 2\pi f$:

$$E = E_m \sin(kx - \omega t)$$

$$H = H_m \sin(kx - \omega t).$$

- La onda que aparece en el esquema está *polarizada* en un plano. Significa que el vector E (y el H) siempre oscilan en un mismo plano. En el caso más común el vector E puede estar, en un instante dado, apuntando en cualquier dirección del espacio perpendicular a la dirección de propagación (onda no polarizada).

- Es posible demostrar a partir de las leyes del electromagnetismo que la velocidad de propagación $v = \lambda f$ en el vacío, donde λ es la longitud de onda, se relaciona con los parámetros del electromagnetismo por la relación

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 300\,000 \text{ km/s},$$

(velocidad de la luz).

- E y H siempre son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación y están en fase (alcanzan los máximos y los mínimos a la vez).

- Los valores de E y H no son independientes. Se demuestra a partir de las relaciones de Maxwell que están relacionados por la expresión

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E.$$

Energía de la radiación

En secciones anteriores se obtuvieron las expresiones para la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico y en el

magnético. La energía por unidad de volumen almacenada en la onda electromagnética que se propaga en el vacío tiene la forma

$$\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2.$$

Si se calcula la energía por unidad de tiempo que atraviesa una sección transversal perpendicular a la dirección de propagación se obtiene el vector de *Poynting* $\vec{S}$, donde E y H representan las amplitudes (valores máximos) del campo (figura 5.21):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Para demostrarlo, consideremos lo siguiente: cuando la radiación avanza un Δl , la energía contenida en el volumen $V = \Delta A v_p \Delta t$ será

$$E = \epsilon V = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) v_p \Delta A \Delta t.$$

Dividiendo por el $\Delta A \Delta t$ se obtiene la energía por unidad de área por unidad de tiempo que atraviesa la superficie (S):

$$S = \frac{v_p}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2 \right).$$

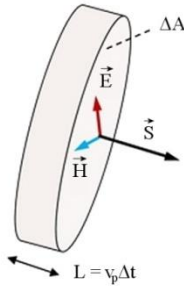


Figura 5.21. Vector de Poynting (S).

Por otra parte, como se dijo antes, E y H no son independientes; están relacionados según

$$H = (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} E.$$

$$\mu_0 H^2 = \epsilon_0 E^2.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$S = v_p \epsilon_0 E^2 \quad (= v_p \mu_0 H^2).$$

Pero:

$$v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \epsilon_0 E^2 = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \right) E$$

$$S = HE.$$

Como E y H son siempre $\perp$ s entre sí y a la dirección de propagación, y $\sin 90^\circ = 1$, es posible escribir la relación en forma vectorial, que indica a la vez el valor modular HE y la dirección S de propagación:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Una ecuación similar se obtiene cuando el medio de propagación no es el vacío, aunque los valores de las constantes no serán los mismos.

La expresión anterior también puede escribirse como

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2.$$

Para mantener una notación similar a la utilizada en la mayoría de los textos de óptica, en lo que sigue llamaremos *intensidad de la radiación* al módulo del vector de Poynting (energía por unidad de área por unidad de tiempo). Por tanto, de acuerdo al resultado de Poynting, la intensidad de la radiación es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, lo que por lo general se denota como $I \propto E^2$.

5.9 Espectro electromagnético

Se le llama *espectro electromagnético* al conjunto de todas las posibles frecuencias

con que puede presentarse una onda electromagnética.

TABLA 5.2
ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

$f(\text{Hz})$	$\lambda(\text{m})$	DENOMINACIÓN
$10^2 - 10^{10}$	$10^6 - 10^{-1}$	Ondas de radio
$10^{10} - 10^{12}$	$10^{-1} - 10^{-3}$	Microondas (radar)
$10^{12} - 10^{14}$	$10^{-3} - 10^{-6}$	Infrarrojo
$10^{14} - 10^{15}$	$10^{-6} - 10^{-7}$	Visible
$10^{15} - 10^{16}$	$10^{-7} - 10^{-8}$	Ultravioleta
$10^{17} - 10^{20}$	$10^{-9} - 10^{-11}$	Rayos X
$> 10^{20}$	$< 10^{-11}$	Rayos γ

El espectro electromagnético abarca una región muy amplia, desde unos pocos cientos de Hz hasta miles de millones de Hz (tabla 5.2 y figura 5.22).

Las propiedades de la radiación electromagnética varían de manera notable en dependencia de su frecuencia; las radiaciones de más baja frecuencia constituyen las conocidas ondas de radio, las de más alta frecuencia corresponden a la radiación gamma penetrante (de la letra griega gamma [γ]), que se obtiene como producto de las reacciones nucleares. Dentro de ese intervalo se encuentran todas las demás radiaciones; onda corta, radiación infrarroja (IR), espectro visible, ultravioleta (UV) y rayos X.

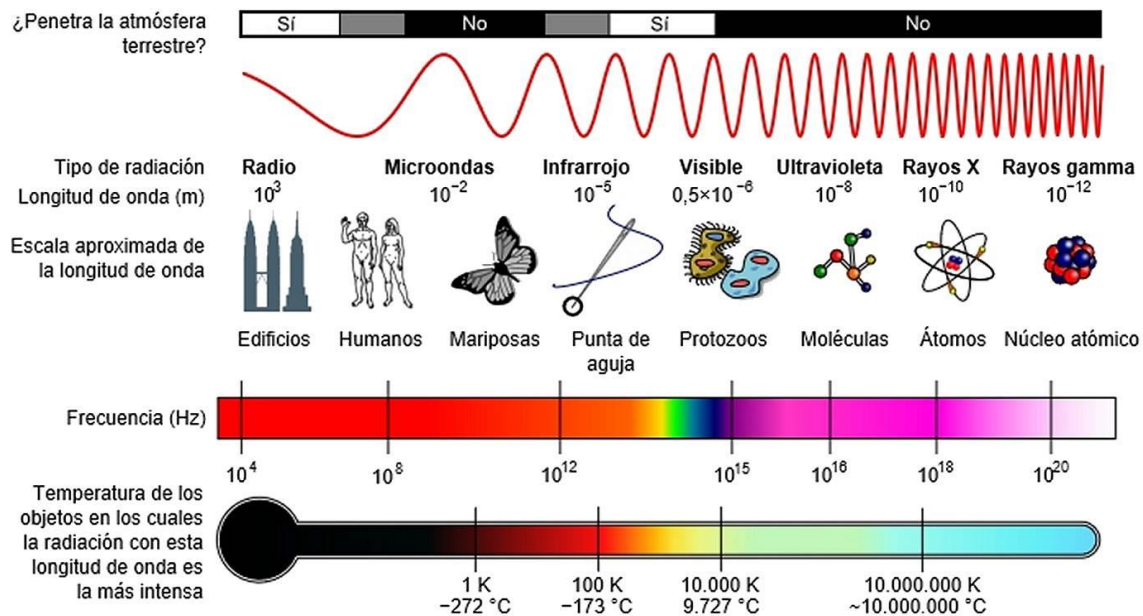


Figura 5.22. Espectro electromagnético

Las características de la radiación de frecuencia superior a la de microondas se estudian en los cursos de óptica y física atómica.

El descubrimiento de las ondas de radio a finales del siglo XIX trajo aparejado un impetuoso desarrollo de los medios de comunicación, incluyendo la televisión, las

transmisiones por satélite y la telefonía celular, con infinidad de aplicaciones en otras ciencias como la meteorología y la astronomía.

La denominada *onda media* de los receptores de radio en amplitud modulada (AM) cubre el intervalo 550 – 1250 kHz. Las frecuencias mayores corresponden a las *ondas cortas* de diferentes bandas: 19 m, 25 m, etc.

TEMA AVANZADO. Reflexión de las ondas de radio en la ionosfera

La *ionosfera* es un conjunto de capas de aire ionizado en la atmósfera que se extienden desde una altura de casi 80 km sobre la superficie terrestre hasta 640 km o más (figura 5.23). En comparación, la altura de las líneas aéreas comerciales es de unos 10 km. A estas alturas el aire está enrarecido en extremo, como si se hubiera hecho vacío con una bomba mecánica. Cuando las partículas de gas en la atmósfera se ionizan a causa de la radiación ultravioleta del sol, tienden a permanecer ionizadas, pues el aire se encuentra tan enrarecido que las colisiones entre partículas son mínimas.

El aire ionizado es capaz de reflejar de manera parcial las ondas de radio. Es por eso que una parte de la energía radiada por un transmisor hacia la ionosfera es absorbida por el aire ionizado y otra es parcialmente reflejada hacia la superficie de la Tierra.

Este último efecto permite la recepción de señales de radio a distancias mucho mayores de lo que sería posible si las ondas de radio viajaran solo en línea recta por la superficie terrestre.

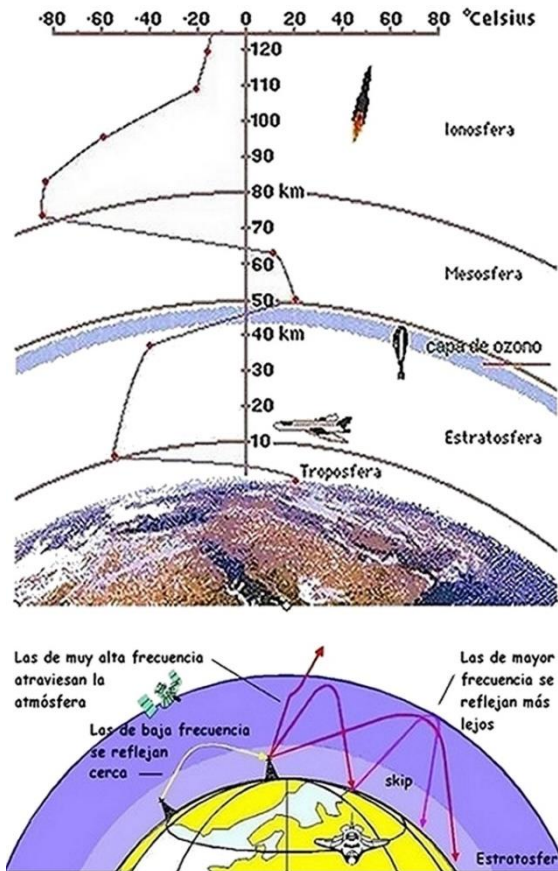


Figura 5.23. Capas de la atmósfera.

No obstante, las ondas reflejadas alcanzan el suelo sólo a distancias definidas del transmisor. La distancia depende del ángulo de reflexión y de la altura. Así, una señal de radio puede no ser detectable a 100 km de la fuente, pero sí a 500 km. Esta propiedad se conoce como *skip*. En otras regiones, las señales terrestres y las refractadas por la ionosfera pueden alcanzar el receptor de conjunto e interferir una con otra, produciendo un efecto llamado *fading* (la señal se debilita).

La reflexión en la ionosfera decrece con el incremento de la frecuencia; si la frecuencia es alta el fenómeno desaparece y la radiación atraviesa la ionosfera sin impedimentos.

Por tanto, la transmisión a larga distancia de ondas de radio de alta frecuencia se limita a la línea del horizonte. Ese es el caso de la televisión y de la radio de frecuencia modulada (FM). Para hacer transmisiones a larga distancia es necesario utilizar satélites de comunicaciones como puntos intermedios de retransmisión.

Como la ionización de las capas y su altura sobre la superficie se ve influenciada por la actividad solar, las características de reflexión en la ionosfera suelen diferir notablemente del día a la noche.

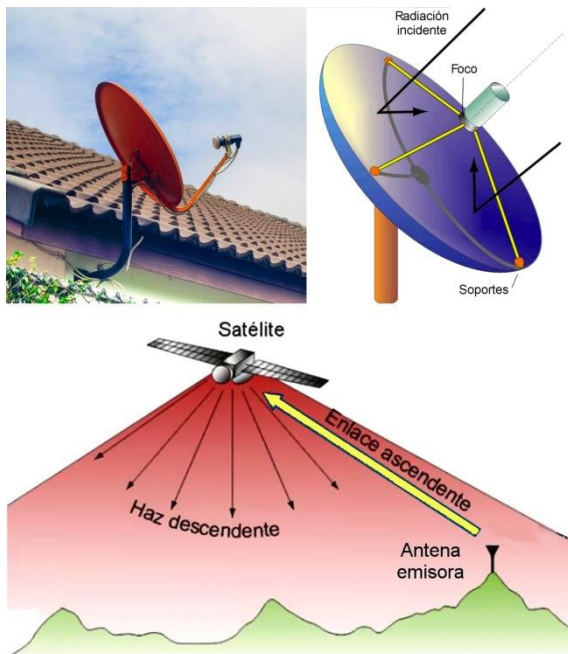


Figura 5.23a. Antena satelital de TV. La superficie parabólica concentra la radiación en el foco, donde se coloca el receptor. Frecuencias satelitales típicas son de 14 GHz para el haz ascendente y de 10-13 GHz para el descendente, con el fin de evitar interferencias.

La figura 5.23a muestra una antena receptora satelital y un esquema de transmisión satelital. La superficie parabólica tiene la propiedad de concentrar los rayos perpendi-

culares al plano de la antena en el foco, reforzando su ganancia.



Figura 5.24. Marconi

Guillermo Marconi, (1874-1937). Ingeniero italiano, conocido como el inventor del primer sistema práctico de señales de radio (figura 5.24). Ya en 1890 se interesaba por la telegrafía sin hilos y hacia 1895 había inventado un aparato con el que consiguió enviar señales a varios kilómetros de distancia mediante una antena direccional. En 1909 Marconi recibió el Premio Nobel de Física por su trabajo.

Radar

El radar es un instrumento muy utilizado en el control de tráfico aéreo y en la meteorología. Los sistemas de radar (del inglés RADio Detection And Ranging) utilizan un transmisor-receptor de radio de alta frecuencia que emite radiaciones con λ comprendida entre algunos centímetros y 1 m (ondas métricas y centimétricas).

La radiación en este intervalo de frecuencias tiene la particularidad de que los objetos metálicos que se hallan en la trayectoria

del haz reflejan las ondas, y el transmisor/receptor es capaz de detectarlas. Midiendo el retardo de la señal por medios electrónicos es posible conocer la distancia hasta el objeto en cuestión, ya que la velocidad de propagación es conocida.



Figura 5.25. Radar secundario para identificación de aeronaves.

En la actualidad existen radares de muy diversos tipos. En la figura 5.25 se muestra un radar secundario, que permite la identificación y seguimiento de aeronaves. Sus señales son detectadas por *transpondedores* instalados en el avión, de decodifican los mensajes del radar y responden en consecuencia.

El *radar meteorológico* es capaz de detectar las ondas reflejadas por la lluvia que acompaña a fenómenos meteorológicos severos como huracanes, tornados y otras tormentas. Puede alcanzar distancias de varios miles de kilómetros. Se utiliza tanto para detectar estos fenómenos como para determinar su localización con exactitud.

TEMA AVANZADO. El Horno de Microondas.

Los hornos de microondas calientan la comida mediante radiación electromagnética que interacciona con el dipolo eléctrico de las moléculas de agua contenidas en los alimentos. El torque ejercido por el campo eléctrico oscilante sobre los dipolos invierte su dirección millones de veces por segundo. Esa interacción incrementa la vibración de las moléculas a nivel microscópico, lo que a nivel macroscópico equivale a elevar su temperatura (figura 5.26).

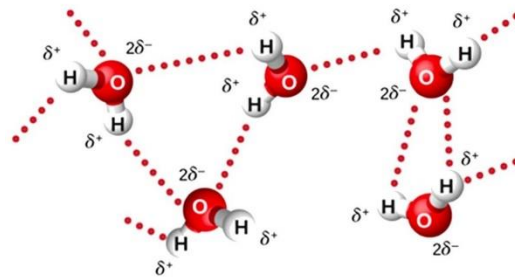


Figura 5.26. Moléculas de agua mostrando la concentración de cargas δ iguales y opuestas de la estructura dipolar.

La interacción del agua con otras moléculas distribuye la energía hacia los restantes componentes de los alimentos. La placa soporte y la cerámica o vidrio donde se encuentran los alimentos no contienen agua; se calientan por conducción, a causa del contacto con los alimentos en su interior. La radiación también afecta otras moléculas polares contenidas en los alimentos,

pero con mucha menor intensidad.

Es usual que los hornos trabajen a la frecuencia de 2.45 GHz, a la que el agua absorbe energía con gran intensidad. El metal de las paredes del horno actúa como un espejo para las microondas, creando ondas estacionarias similares a las que se forman en las cuerdas de una guitarra o un violín. La longitud de onda que corresponde a esa frecuencia es de $\lambda = c/f = 12.2$ cm, con nodos separados a una distancia $d = \lambda/2$ (unos 6 cm aproximadamente)

Es por esta razón que los hornos de microondas poseen platos giratorios para cocinar los alimentos. Si los alimentos no giran, sus partes se calientan de forma desigual, en particular si coinciden con un nodo.

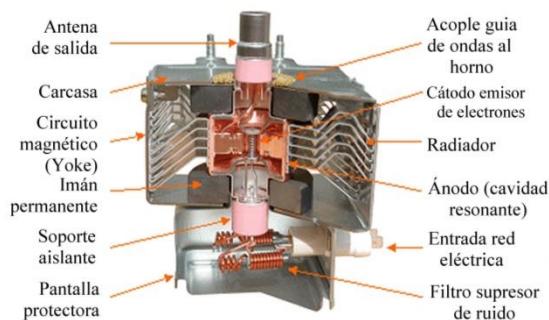


Figura 5.27. Interior de un magnetrón. La fuente de energía es la emisión termoiónica de electrones. Note que el campo magnético estático generado por el imán es perpendicular al movimiento de los electrones y no realiza trabajo; sólo desvía su trayectoria. Es el campo eléctrico variable quien genera corrientes y radiación en la cavidad.

El corazón de un horno de microondas es el *magnetron*, que genera ondas electromagnéticas de gran potencia a partir de un flujo de electrones (figura 5.27). Los electrones emitidos por el cátodo en un proceso de emisión termoiónica curvan su trayectoria por la presencia del campo magnético per-

pendicular, mientras que el ánodo posee cavidades que se comportan como cavidades resonantes.

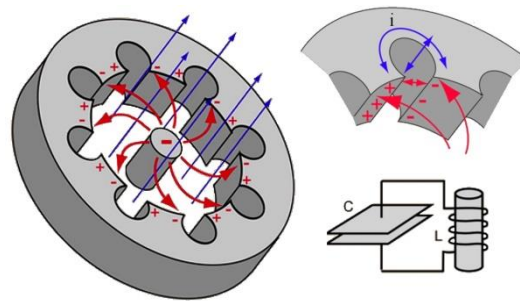


Figura 5.28. Principio de funcionamiento del magnetron. El movimiento circular de los electrones genera campos electromagnéticos que entran en resonancia con la frecuencia natural de oscilación de los campos eléctrico y magnético en las cavidades, de manera similar a lo que tiene lugar en un circuito LC en paralelo entre el inductor y el capacitor.

El movimiento rotatorio de los electrones crea diferencias de potencial en las cavidades resonantes, mientras que las corrientes que se generan a su alrededor crean campos magnéticos adicionales. Los campos electromagnéticos así generados entran en resonancia con la frecuencia natural de oscilaciones de las cavidades, emitiendo radiación electromagnética de gran intensidad. El resultado es similar a un circuito LC,

$$\text{donde } f_{\text{resonancia}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

5.10 Efectos biológicos de la radiación

Desde el punto de vista de la interacción con las sustancias biológicas, las radiaciones electromagnéticas pueden dividirse en *ionizantes* y *no ionizantes*.

A frecuencias muy altas, correspondiente al ultravioleta lejano, los rayos X y los rayos γ , la radiación tiene energía suficiente para

romper los enlaces químicos e *ionizar* los átomos. La correspondiente radiación se denomina *ionizante* (extremo derecho de la figura 5.22). A frecuencias más bajas como las de la luz visible, microondas y radio, la energía no es suficiente para romper enla-

ces químicos; la radiación es *no ionizante* (tabla 5.3). La exposición a las microondas es peligrosa cuando se producen densidades elevadas de radiación, que pueden causar quemaduras, cataratas, daños en el sistema nervioso y esterilidad.

TABLA 5.3
RADIACIONES ELECTROMAGNÉTICAS

TIPO DE RADIACIÓN	CARACTERÍSTICAS
Ionizante	Ioniza o rompe las moléculas (UV lejano, rayos X y rayos γ). Dañina en gran intensidad.
No ionizante (óptica)	Excita los electrones e induce reacciones químicas (UV cercano, visible e IR)
No ionizante (radio alta frecuencia)	Induce corrientes e interacciona con los dipolos eléctricos produciendo el calentamiento de los tejidos (microondas y radio AF)
No ionizante (radio baja frecuencia)	No produce calentamiento detectable (campos de frecuencia industrial y radio por debajo de 1 MHz)

Aún no se conocen bien los posibles peligros de la exposición prolongada a las microondas con bajo nivel de intensidad.

La capacidad de penetración de la radiación en los organismos vivos difiere para las diferentes frecuencias. Las ondas de radio y los rayos X son capaces de atravesar con facilidad las sustancias biológicas, mientras que la radiación visible y ultravioleta es absorbida en la superficie.

La *diatermia* por radiación es muy utilizada para tratar el dolor y la inflamación en los tejidos, irradiando la zona afectada con radiofrecuencias para producir calor. La frecuencia utilizada en los equipos comerciales es cercana a los 2 GHz. Como el campo

eléctrico actúa sobre las cargas por vía directa, la componente eléctrica del campo electromagnético es capaz de generar pequeñas corrientes eléctricas en los tejidos. Estas corrientes son proporcionales tanto a la intensidad del campo como a la rapidez de su variación en el tiempo. El calor se puede originar por diversos mecanismos, a partir de la inducción de corrientes alternas o por interacción con los enlaces O-H de las moléculas del agua contenida en los tejidos, en forma similar a lo que ocurre en un horno de microondas.

En el intervalo de radiofrecuencias y microondas entre 30 y 2000 MHz, la profundidad de penetración en la piel y los múscu-

los varía entre 3 y 100 cm aproximadamente, siendo mayor la penetración mientras menor es la frecuencia. Esos valores pueden aumentar entre 5 y 10 veces en los tejidos con menor cantidad de agua como la grasa y los huesos.

TEMA AVANZADO. El efecto Doppler en la radiación.

Considere una fuente luminosa de frecuencia f_0 que se mueve con velocidad u y un

observador que observa la luz a cierta distancia. Desde el punto de vista del observador, al transcurrir un período T , el observador detecta el frente de onda a una distancia cT de la fuente, mientras que la fuente se ha desplazado una distancia más corta uT antes de emitir el segundo frente. Por lo tanto, la distancia λ entre crestas o frentes de onda sucesivos (la longitud de onda que ve el observador en reposo) es $\lambda = (c - u)T$, menor que la original (figura xxx). Como $c = \lambda f$, la frecuencia detectada por el observador en reposo será $f = c/\lambda = c/(c-u)T$.

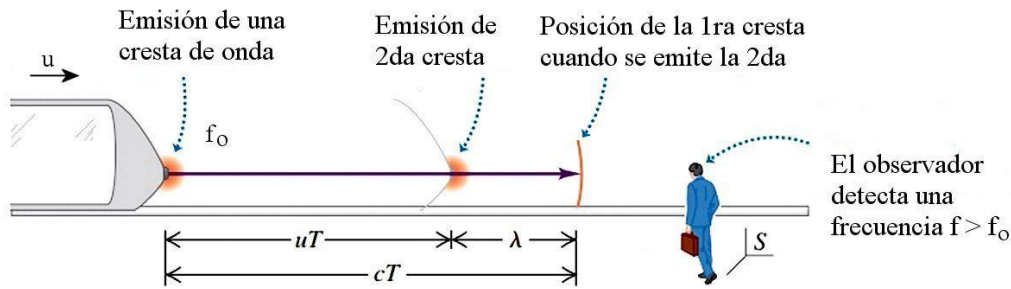


Figura 5.29. Al observar una fuente en movimiento que avanza hacia él, el observador percibe una frecuencia $f = c/\lambda = c/(c-u)T$.

Hasta aquí el análisis es similar al efecto Doppler en las ondas de sonido. Sin embargo, como la radiación viaja a la velocidad de la luz, es necesario considerar los efectos relativistas, pues cada sistema inercial tiene su tiempo propio. El tiempo T que mide el observador en reposo no es el mismo que el tiempo T_0 medido en el sistema en movimiento; ambos se relacionan por la expresión

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Sustituyendo $T_0 = 1/f_0$:

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0,$$

y al expresar la frecuencia f que mide el observador en función de la frecuencia f_0 de la fuente, se obtiene

$$f = \frac{c}{c - u} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0.$$

Tras simplificar la diferencia de cuadrados se llega a:

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}} f_0.$$

En esta expresión,

f : frecuencia medida por el observador

f_0 : frecuencia medida por un sistema en reposo respecto a la fuente

u : velocidad de la fuente de luz respecto al observador

c : velocidad de luz en el vacío.

Es decir, cuando la fuente se desplaza hacia el observador, la frecuencia observada f es *mayor* que la frecuencia emitida f_0 . Si la fuente se aleja del observador, en la expresión anterior cambia el signo de u y se obtiene una frecuencia menor para el observador:

$$f = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} f_0.$$

Tomando $\Delta f = f - f_0$, cuando $v \ll c$, la expresión anterior se puede aproximar por

$$\Delta f \approx 2u \frac{f_0}{c},$$

válida para la mayoría de las aplicaciones prácticas. Note que las expresiones son válidas para cualquier fuente de radiación electromagnética, no solo para la radiación visible.

Una aplicación común de esta propiedad es la de los radares que se usan para detectar el exceso de velocidad en los automóviles (figura 5.30).

El efecto Doppler en las ondas electromagnéticas también se usa para rastrear satélites y otros vehículos espaciales. Un satélite emite una señal de radio de frecuencia constante f_{sat} . Al pasar cerca del receptor en su órbita, primero se acerca y luego se aleja y la frecuencia f_{recep} de la señal recibida en tierra cambia de un valor mayor a uno me-

nor durante el proceso.



Figura 5.30. Radar Doppler. El instrumento calcula la rapidez del auto infractor comparando las frecuencias del haz emitido y del haz reflejado, que son diferentes en virtud del efecto Doppler.

El *corrimiento hacia el rojo* es un término utilizado en astronomía para indicar que las galaxias se separan unas de otras (f disminuye y λ aumenta), lo que se revela a partir de las mediciones del efecto Doppler de la luz que llega de las galaxias lejanas. La figura 5.31 muestra las franjas de absorción de uno de estos corrimientos, tomando la luz solar como base de comparación. Note que las líneas de absorción se desplazan hacia la parte roja del espectro.

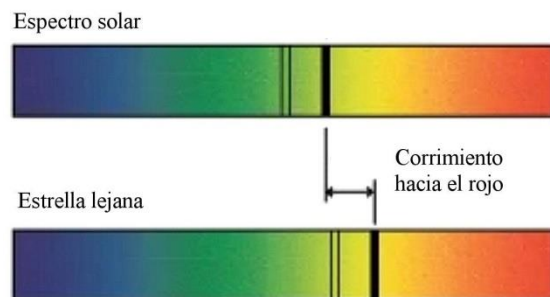


Figura 5.31. Corrimiento hacia el rojo de luz proveniente de una estrella que se aleja del observador. Si la fuente se acerca al observador, el corrimiento es hacia el violeta.

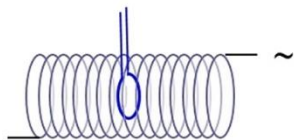
La observación del corrimiento hacia el rojo es una de las bases fundamentales de la

teoría del *Big Bang* para la formación del universo, que considera una gran explosión primigenia como su origen, tras de lo cual llegará un *Big Crunch*, cuando el impulso de la explosión inicial desaparezca y la fuerza de gravitación universal invierta el movimiento de expansión de las galaxias. Sin embargo, las evidencias más recientes apuntan en la dirección de que las galaxias se mueven con mayor rapidez mientras más lejos se encuentran, lo que contradice las ideas del Big Crunch.

Por este descubrimiento S. Perlmutter, B.P. Schmidt y A.G. Riess, de EE.UU., recibieron en 2011 el premio Nobel de física. Al estudiar varias docenas de explosiones de estrellas, llamadas supernovas, encontraron que el Universo se está expandiendo a un ritmo cada vez mayor. El jurado del Nobel apuntó que hace ya un siglo que se sabe que el Universo se expande, pero no había indicio alguno de su aceleración. Inicialmente el resultado fue difícil de creer y hubo que llevar a cabo una y otra vez múltiples comprobaciones, pues la expansión acelerada contradice las leyes conocidas de la física hasta el momento.

Problemas resueltos

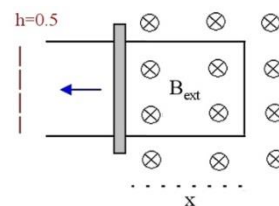
1. Una espira pequeña de área A se encuentra dentro de un solenoide de n vueltas por unidad de longitud en el que circula una corriente i .



Problema 1

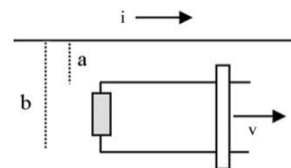
El eje de la espira está en la misma dirección que el eje del solenoide. Si $i = i_0 \sin \omega t$, determinar la FEM inducida en la espira.

2. La barra conductora de la figura hace contacto con dos raíles metálicos separados 50 cm en un campo magnético uniforme y constante de 1 T. ¿Cuál es la magnitud y sentido de la FEM inducida cuando la barra se mueve a la izquierda con rapidez de 8 m/s?



Problema 2

3. La figura muestra una barra de cobre que se mueve sobre unas líneas conductoras con velocidad v paralela a un alambre que transporta una corriente i .



Problema 3

Calcular la FEM inducida en la barra si $v = 5$ m/s, $i = 100$ A, $a = 1$ cm, $b = 20$ cm.

Soluciones

1. Datos: n , i , $i = i_0 \sin \omega t$

$$\varepsilon_{ind} = -d\phi/dt$$

$$\phi = \int B \cos \theta ds \quad (\theta = 0^\circ)$$

$B = \mu_0 n i \approx$ constante dentro del solenoide, y se puede sacar fuera de la integral. Sustituyendo y llamando $\int ds = A$,

$$\phi = \mu_0 n i A$$

$$\phi = \mu_0 n A i_0 \sin(\omega t)$$

$$d\phi/dt = \mu_0 n A i_0 \omega \cos \omega t$$

$$\varepsilon_{\text{ind}} = - \mu_0 n A i_0 \omega \cos \omega t$$

En este caso el signo (-) indica que el sentido de la FEM es tal que se opone, en cada instante, a la *variación* de la corriente (la causa que lo origina). (Note que *no se opone a la corriente, sino a su variación*). Es decir, el campo originado por la FEM en la espira (y la correspondiente corriente inducida) debe ser tal que se opone a la variación del campo asociado a la corriente del solenoide. (Si el campo del solenoide aumenta, debe oponerse al aumento; si disminuye, debe oponerse a la disminución).

2.

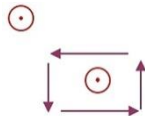
$$\varepsilon_{\text{ind}} = - d\phi/dt$$

$$\phi = \int B \cos(\theta) ds = BA = Bhx$$

$$d\phi/dt = Bh dx/dt = Bhv$$

$$|\varepsilon_{\text{ind}}| = Bhv = 1 \times 0.5 \times 8 = 4V$$

Para calcular el sentido de la FEM, como ϕ está aumentando, B_{ind} dentro de la espira debe tener un sentido tal que se oponga al aumento de ϕ ; opuesto al del campo externo.



Solución 2

Y por tanto la corriente inducida, de acuerdo a la regla de la mano derecha, debe ir en sentido contrario a las agujas del reloj.

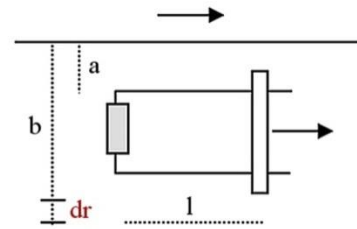
3.

$$\varepsilon_{\text{ind}} = - d\phi/dt$$

$$\phi = \int B \cos \theta ds \quad (\theta = 0^\circ \text{ o } 180^\circ);$$

$$B = \mu_0 i / 2\pi r.$$

Cálculo del flujo para un instante determinado. Tomando valor modular:



Solución 3

$$ds = l dr$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Ahora hay que considerar que l aumenta a medida que el tiempo transcurre, y que $dl/dt = v$. Por tanto:

$$|\varepsilon_{\text{ind}}| = d\phi/dt = \frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 5}{2\pi} \ln \frac{20}{1} = 10^{-4} \ln 20$$

$$\varepsilon_{\text{ind}} = 3 \times 10^{-4} V = \varepsilon_{\text{ind}} = 0.3 \text{ mV}$$

CAPÍTULO 6

Nociones de corriente alterna

6.1 Oscilaciones en un circuito LC

6.2 Oscilaciones en un circuito RLC

6.3 FEM alterna aplicada a un resistor

Potencia disipada

6.4 FEM alterna aplicada a un capacitor

Potencia disipada

6.5 FEM alterna aplicada a un inductor

Potencia disipada

6.6 Ley de Ohm en corriente alterna

6.7 Potencia disipada en un circuito

6.8 Circuito RLC en serie

6.9 Resonancia

6.10 Algunas aplicaciones de las resonancias electromagnéticas

Frecuencias de radio, TV y microondas.

Radiación infrarroja (IR), visible y ultravioleta (UV)

Radiación gamma (γ)

Transformador

Bobina de Tesla

CAPÍTULO 6

Nociones de corriente alterna

6.1 Oscilaciones en un circuito LC

Considere el circuito que aparece en la figura 6.1, formado por un inductor y un capacitor conectados en serie. La llave k sirve para abrir y cerrar el circuito. La resistencia de los alambres es lo suficiente pequeña como para no tomarla en cuenta ($R = 0$) y supondremos que al inicio el condensador está cargado, con una carga q y con energía

$$E_c = \frac{1}{2} q^2/C.$$

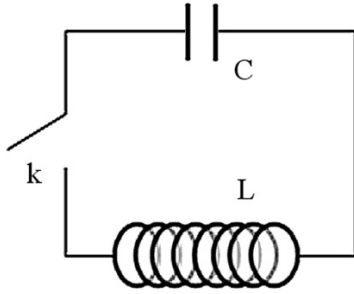


Figura 6.1. Circuito LC

Al cerrar la llave k , el condensador se descarga. Aparece una corriente variable en el circuito y una FEM inducida $\varepsilon_{\text{ind}} = -L di/dt$ en el inductor. Además, éste adquiere una energía

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2,$$

que también varía con el tiempo.

Para conocer cómo varía con el tiempo la carga en el condensador considere lo siguiente. Como $R = 0$, no hay pérdidas de energía en el circuito y se debe cumplir que la potencia disipada es nula:

$$P_{\text{dis}} = dE_{LC}/dt = 0.$$

Impongamos esta condición a la energía almacenada en el circuito en un instante determinado:

$$E_{LC} = \frac{1}{2} q^2/C + \frac{1}{2} Li^2.$$

Derivando respecto al tiempo, igualando a cero y simplificando, se llega a la siguiente ecuación:

$$q/C + L di/dt = 0.$$

$$\text{Pero } \frac{di}{dt} = \frac{d(dq/dt)}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

sustituyendo y agrupando términos arriba se obtiene:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Esta ecuación es análoga a la que se llega en mecánica al analizar el movimiento armónico simple (MAS),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

donde la carga q en el condensador ocupa el lugar de la elongación x , L sustituye a m y la constante k es sustituida por $1/C$.

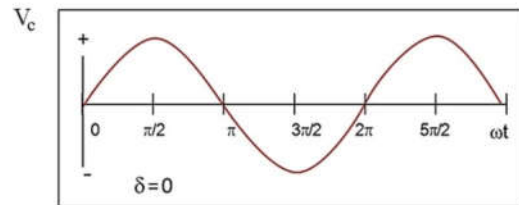


Figura 6.2. Diferencia de potencial en los extremos del condensador.

En el MAS la solución toma la forma $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$, donde $\omega = (k/m)^{1/2}$. Por tanto, en este caso la solución para la carga en el condensador será, por analogía:

$$q = q_0 \sin(\omega t + \delta),$$

$$\text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

El potencial instantáneo en el condensador

se obtiene dividiendo por la capacidad, que es constante:

$$V_C = (q_0/C)\text{sen}(\omega t + \delta).$$

Este resultado indica que la polaridad en las placas del condensador cambia continuamente con el transcurso del tiempo (figura 6.2).

La frecuencia de cambio viene dada por la expresión $f_0 = \omega_0/2\pi$;

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La frecuencia f_0 recibe el nombre de *frecuencia de oscilación propia* del circuito o también frecuencia de oscilación libre.

Derivando q respecto al tiempo se obtiene la expresión para la corriente en el circuito, cuyos máximos estarán desfasados en $\pi/2$ respecto al voltaje en el condensador. Cuando se analiza el voltaje V_L en el inductor se obtienen ecuaciones similares. También oscilan las energías almacenadas en el inductor y en el condensador (figura 6.3).

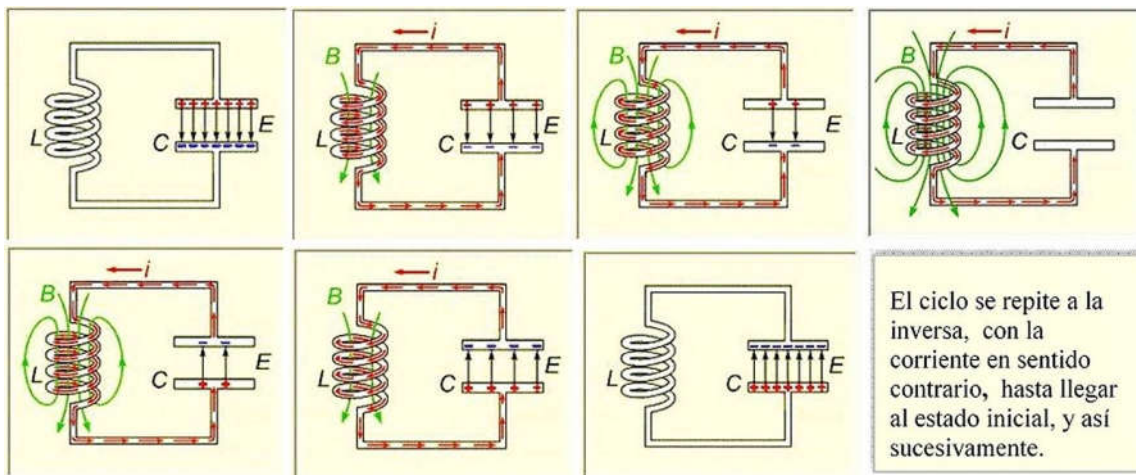


Figura 6.3. Intercambio de energías eléctrica y magnética entre el condensador y el inductor en un circuito LC a partir de una carga inicial en el condensador. Se lee de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

Lo más importante a resaltar de estas propiedades es que aquí no se cumplen las reglas de los circuitos de corriente continua, donde sólo hay FEM y resistencias. Por ejemplo, al recorrer el circuito en un instante determinado, a pesar de que no hay FEM no se cumple que $V_C - V_L = 0$, pues los voltajes están *desfasados* (cuando uno es máximo, el otro es mínimo y viceversa). De manera que en los circuitos donde la corriente varía con el tiempo es imprescindible tomar en cuenta los desfases entre

voltajes y corrientes para llevar a cabo cualquier análisis.

6.2 Oscilaciones en un circuito RLC

Considere un caso similar al de la sección 6.1, tomando ahora en cuenta la resistencia de los alambres (figura 6.4).

Supondremos que esa resistencia está concentrada en un resistor de valor R (ver dibujo en la figura anterior). La potencia instantánea disipada en la resistencia será $P = i^2 R$,

y en cada instante debe ser igual a la pérdida de energía almacenada en el circuito:

$$dE/dt + i^2 R = 0,$$

donde dE/dt es intrínsecamente negativa.

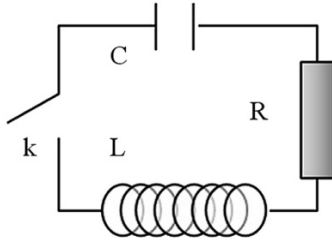


Figura 6.4. Circuito RLC en serie.

Sustituyendo la energía por su expresión en función de la carga en el condensador y la corriente en el inductor, simplificando y agrupando términos, se llega a:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Aquí

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ y } \tau = \frac{L}{R}.$$

El parámetro τ tiene dimensiones de tiempo, y se denomina *tiempo de relajación* por razones que se harán evidentes más adelante. Esta ecuación es análoga a la del movimiento armónico amortiguado en Mecánica,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

y por tanto la solución es similar:

$$q = q' \text{sen}(\omega t + \delta)$$

donde

$$q' = q_0 e^{-t/2\tau}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}.$$

Si se grafica el voltaje en el condensador

$$V_C = q/C$$

en función del tiempo, a partir de un voltaje inicial en el condensador, se obtiene un gráfico como el de la figura 6.5. La corriente y el voltaje en el inductor proporcionan gráficos similares. La energía almacenada en el condensador en una de las oscilaciones vendrá dada por:

$$E_c(\text{máx}) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \\ = \frac{1}{2C} q_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

y llamando E_0 a la parte independiente del tiempo en la expresión anterior, se llega a:

$$E = E_0 e^{-t/\tau}.$$

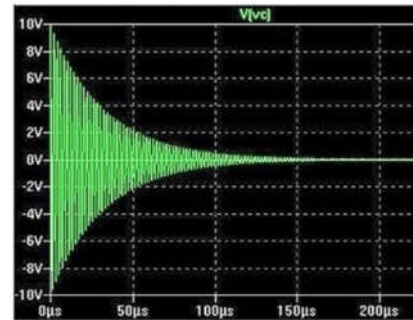
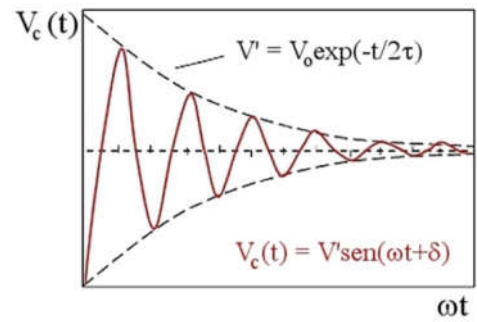


Figura 6.5. Oscilaciones libres en un circuito RLC. Abajo: resultado experimental

Cuando ha transcurrido un tiempo $t = \tau$, tendremos que $E = E_0/e$, y la energía almacenada al inicio ha disminuido ~ 2.7 veces (de aquí el nombre de tiempo de relajación). Para $t \rightarrow \infty$ la energía del circuito se hace igual a cero y la corriente se detiene.

6.3 FEM alterna aplicada a un resistor

Una FEM alterna es cualquier fuerza electromotriz cuya polaridad varía de forma periódica con el transcurso del tiempo. La FEM será *sinusoidal* si su variación temporal sigue una función seno (o coseno) como en la figura 6.6. La correspondiente corriente en el circuito será una *corriente alterna*.

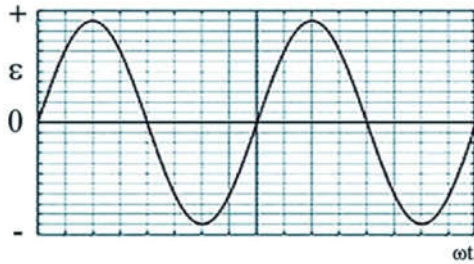


Figura 6.6. FEM alterna sinusoidal con $\delta=0$ y FEM $\varepsilon_o \sin(\omega t + \delta)$.

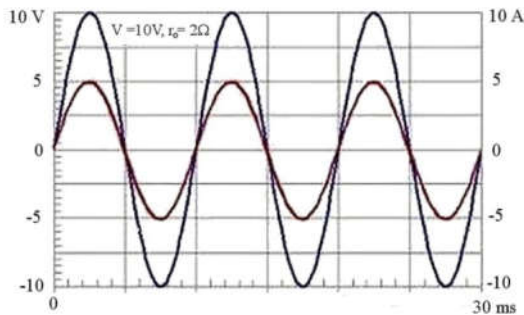


Figura 6.7. Voltaje V_{ab} e intensidad de la corriente i en los extremos de una resistencia sometida a una FEM alterna: $i_{\max} = V_{\max}/r_o$.

Se acostumbra designar la diferencia de potencial en los bornes de una FEM alterna por el término *voltaje*, indicando así la continua variación de la polaridad.

En una resistencia, la ley de Ohm $V_{ab} = iR$ se debe cumplir en cada instante. Suponiendo que la fase inicial es cero ($\delta = 0$) para simplificar las expresiones, la diferencia de potencial instantánea vendrá dada por

$$V_{ab} = V_o \sin(\omega t).$$

Despejando la corriente en la ley de Ohm tendremos:

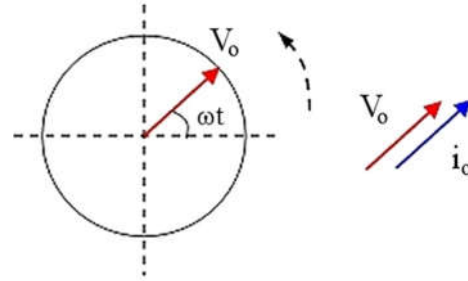


Figura 6.8. Representación vectorial del voltaje y la corriente en una resistencia. Al girar a velocidad constante, el extremo de los vectores generan las curvas de la figura 6.6.

$$i = V_{ab}/R = (V_o/R) \sin \omega t.$$

Tomando

$$i_o = V_o/R,$$

$$i = i_o \sin(\omega t).$$

Una primera conclusión que se deriva de esta expresión es que, en una resistencia, la corriente y el voltaje están en fase. Significa que ambos parámetros alcanzan sus máximos y mínimos a la vez (figura 6.7).

Es usual representar la corriente y el voltaje alternos mediante vectores que rotan con movimiento circular uniforme (MCU). De esta forma, el voltaje y la corriente instantáneos quedan representados por las proyecciones a lo largo del cualquiera de los ejes coordenados. Estos vectores, cuando se representan en el plano complejo, reciben el nombre de *fasores* (figura 6.8). Como el voltaje en los extremos de una resistencia, y la corriente que la atraviesa están en fase, los vectores i_o y V_o son paralelos.

Potencia disipada

La potencia instantánea disipada en la resis-

tencia viene dada por:

$$P = i^2 R = i_o^2 R \sin^2(\omega t),$$

y varía con el tiempo de acuerdo al $\sin^2(\omega t)$ (figura 6.9).

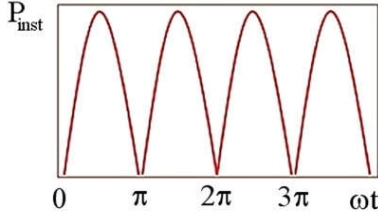


Figura 6.9. Potencia instantánea disipada en una resistencia.

Sin embargo, como la frecuencia de variación puede llegar con facilidad a miles de oscilaciones por segundo o más, resulta más útil trabajar con la potencia media $\bar{P}$. Aplicando el teorema del valor medio, la potencia media se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el período de las oscilaciones. Sustituyendo $P = i_o^2 R \sin^2(\omega t)$ en la integral anterior y resolviendo la integral se llega a:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{i_o^2 R}{T} \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt \\ \bar{P} &= \frac{1}{2} i_o^2 R. \end{aligned}$$

Se puede establecer una analogía con la expresión de la potencia disipada por la corriente continua si se define la *corriente eficaz* en el circuito por la expresión

$$i_e = i_o / \sqrt{2}.$$

Como $i_e^2 = i_o^2 / 2$, sustituyendo en la expresión de la potencia media se obtiene:

$$\bar{P} = i_e^2 R.$$

Significa que la potencia disipada por una resistencia en CA se calcula de la misma forma que cuando pasa una corriente continua, siempre y cuando se utilice la corriente eficaz para hacer los cálculos.

Los voltímetros y amperímetros de CA están designados para medir el voltaje eficaz, de manera tal que puedan aplicarse las fórmulas conocidas de CC para calcular los parámetros en CA.

6.4 FEM alterna aplicada a un capacitor

Supongamos que en los extremos del condensador el voltaje instantáneo tiene la forma

$$V_{ab} = V_o \sin(\omega t).$$

Entonces, de acuerdo a la definición de capacidad, $C = q/V_{ab}$;

$$q = C V_{ab}$$

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dV_{ab}}{dt}.$$

Considerando que $i = dq/dt$; $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$, derivando y sustituyendo en la expresión anterior, se llega a:

$$i = C V_o \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

resultado que puede ser escrito como

$$i = \frac{V_o}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

donde $X_C = 1/\omega C$.

El parámetro X_C tiene dimensiones de resistencia y se denomina *reactancia capacitiva*.

En resumen, la corriente tendrá la forma

$$i = i_o \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$i_o = V_o / X_C$$

$$X_C = 1/\omega C.$$

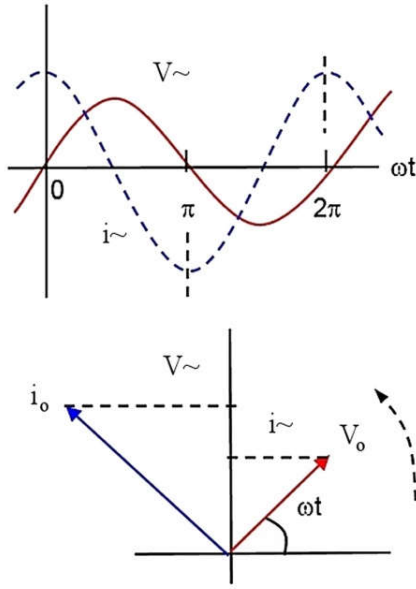


Figura 6.10. Relación entre el voltaje y la corriente en un condensador con CA (ver texto).

Comparando las fases del voltaje y la corriente se ve inmediatamente que el voltaje en el condensador se retrasa en $\pi/2$ respecto a la corriente:

$$i = i_o \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$V_{ab} = V_o \sin(\omega t).$$

La figura 6.10, arriba, muestra el gráfico de la corriente y el voltaje en función del tiempo. Note que cuando V_C es máximo, $i_C = 0$, y viceversa. La representación vectorial del voltaje y la corriente en este caso particular queda como aparece abajo.

Potencia disipada

La potencia media disipada se puede calcular aplicando el teorema del valor medio en un período; como la potencia instantánea se calcula a partir de $P = Vi$, entonces

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T V_C i_C dt$$

$$\bar{P} = \frac{V_o i_o}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = 0,$$

y el condensador ideal no disipa energía. La energía se acumula en el condensador durante un semiperíodo (carga) y en el semiperíodo siguiente se revierte al circuito donde está conectado (descarga).

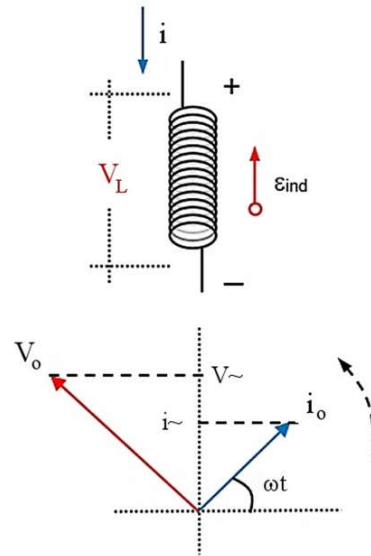


Figura 6.11. Inductor sometido a una corriente alterna.

Los condensadores reales sí tienen pérdidas de energía a causa de las pérdidas asociadas al dieléctrico y a la posible dispersión del campo eléctrico en sus bordes.

6.5 FEM alterna aplicada a un inductor

Al pasar una corriente i por un inductor, la ley de Faraday establece que aparecerá una FEM inducida que se opone a la variación de la corriente, de valor absoluto

$$\varepsilon_{ind} = L di/dt.$$

El voltaje en los extremos del inductor de la figura 6.11 será, por tanto,

$$V_L = \varepsilon_{ind}.$$

Si la corriente varía en forma sinusoidal podemos expresarla como

$$i = i_0 \sin(\omega t);$$

$$di/dt = i_0 \omega \cos(\omega t) = i_0 \omega \sin(\omega t + \pi/2).$$

Sustituyendo en la ley de Faraday para calcular $V_L = L di/dt$ se obtiene entonces:

$$V_L = i_0 \omega L \sin(\omega t + \pi/2),$$

que puede ser escrita como

$$V_L = V_0 \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$V_0 = i X_L$$

$$X_L = \omega L.$$

El término $X_L = \omega L$ se denomina *reactancia inductiva*, y también tiene dimensiones de resistencia. Note que, contrario al caso del voltaje en el condensador, *ahora es el voltaje quien se adelanta a la corriente en $\pi/2$* .

Potencia disipada

De manera similar al caso del capacitor, es posible demostrar que la potencia media disipada en un inductor ideal es cero ($\bar{P} = 0$). En la realidad siempre hay presentes pequeñas pérdidas, a causa de la resistencia óhmica del enrollado. Si el inductor tiene un núcleo metálico las pérdidas de energía pueden llegar a ser muy grandes, a causa de las corrientes inducidas y de las pérdidas por histéresis en el material del núcleo si éste es ferromagnético.

6.6 Ley de Ohm en corriente alterna

En los circuitos de corriente alterna la Ley de Ohm toma la forma

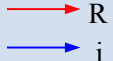
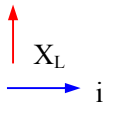
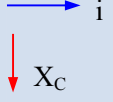
$$V = iZ$$

donde Z es la *impedancia* del circuito, que

toma en cuenta la diferencia de fase introducida por cada dispositivo en el circuito.

El voltaje V y la corriente i no se refieren a los valores instantáneos, sino a los valores máximos del voltaje y la corriente i_0 y V_0 (o también a los correspondientes valores efectivos i_e y V_e , que sólo difieren de los anteriores en el factor $\sqrt{2}$).

TABLA 6.1
NOTACIÓN VECTORIAL
EN CORRIENTE ALTERNA

ELEMENTO	IMPEDANCIA (Z)	DESFASAJE ($\Delta\phi$)	POTENCIA MEDIA	NOTACIÓN VECTORIAL
R	R	0	$i_e^2 R$	
L	$X_L = \omega L$	$+\pi/2$	0	
C	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$-\pi/2$	0	

Cuando un circuito que contiene un solo elemento R, C o L, la impedancia se calcula de acuerdo a lo expresado en la tabla 6.1, según lo analizado con anterioridad. También se ha adicionado en la tabla el correspondiente desfasaje entre voltaje y corriente, la potencia disipada en cada caso y la notación vectorial que se utiliza para representar la impedancia asociada a cada elemento.

Si el circuito tiene dos o más elementos conectados en serie, se demuestra que la impedancia total viene dada por el módulo de la suma vectorial de las impedancias asociadas a cada elemento, y que el desfa-

saje entre el voltaje y la corriente se obtiene a partir del ángulo que forma Z con R . Como la corriente es la misma en todo el circuito, el eje de la corriente siempre se toma como referencia.

Ejemplo

a) Calcular la impedancia de una resistencia de 4Ω conectada en serie con un condensador cuya reactancia capacitiva es de 3Ω . b) ¿Qué sucede si se aplica una FEM de 10 V en los extremos?

Resolución.

- Se construye el diagrama vectorial tomando en cuenta los desfases correspondientes (figura 6.12). Como la corriente y el voltaje están en fase en la resistencia, se toma esta última como referencia.

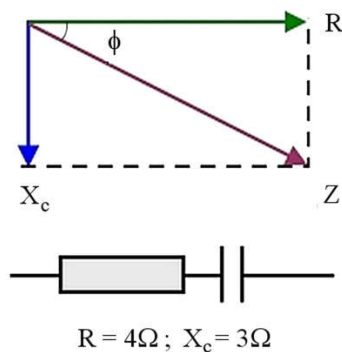


Figura 6.12. Ver ejemplo texto.

- La impedancia del circuito es la correspondiente suma vectorial, con valor modular,

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = (4^2 + 3^2)^{1/2} = 5\Omega.$$

- Si se aplica una diferencia de potencial de 10 V en los extremos del circuito, para calcular la corriente en el mismo se aplica la ley de Ohm,

$$i_0 = V_0/Z = 10/5 = 2\text{ A}.$$

- El desfase entre el voltaje y la corriente se obtiene del ángulo que forma Z con R :

$$\tan\phi = X_c/R = -3/5 = -0.75$$

$$\phi = \arctan(-0.75) = 37^\circ = -0.646\text{ rad}.$$

Significa que el voltaje en los extremos del circuito se retrasa respecto a la corriente en 37° (hay una diferencia de fase de 37°).

- Finalmente, para las expresiones de la corriente y el voltaje, considerando $\delta=0$ para la corriente:

$$i = 2\sin(\omega t) \text{ (A)},$$

$$V = 10\sin(\omega t - 0.646) \text{ (V)}.$$

Cuando los componentes están conectados en paralelo, en vez de sumarse las impedancias se suman sus *admitancias*. Las admitancias se definen a partir de los inversos de las correspondientes impedancias, pero no serán objeto de estudio en este curso.

6.7 Potencia disipada en un circuito

Para calcular la expresión general de la potencia media disipada en un circuito de corriente alterna, consideremos la expresión general de la potencia disipada en un circuito de corriente continua. En un instante determinado,

$$P = V_{ab}i.$$

Los valores instantáneos de la corriente y el voltaje son:

$$i = i_0\sin(\omega t)$$

$$V_{ab} = V_0\sin(\omega t + \phi).$$

Aplicando el teorema del valor medio en un período T y agrupando términos se llega a:

$$\bar{P} = V_o i_o \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t) dt .$$

De las tablas de integrales la integral toma el valor $\frac{1}{2}\cos\phi$. Sustituyendo $\frac{1}{2}V_o i_o$ en función del voltaje y la corriente efectiva se obtiene al final:

$$P = V_e i_e \cos\phi .$$

El término $\cos\phi$ se denomina *factor de potencia*.

Según este resultado, la potencia disipada en un circuito de corriente alterna depende tanto de los valores del voltaje y la corriente como del desfase entre ambos. Para valores determinados de i_e y V_e el valor de la potencia transmitida será máximo cuando $\phi = 0$ y $\cos\phi = 1$. El factor de potencia será igual a cero cuando $\phi = \pi/2$.

Si en un circuito de corriente alterna se desea entregar la máxima potencia, se debe mantener el factor de potencia lo más cercano posible a la unidad. Si, por ejemplo, el circuito es muy inductivo, se puede reducir el factor de potencia introduciendo condensadores en serie.

En las redes comerciales eléctricas se usa este método para incrementar el factor de potencia, adicionando bancos de condensadores a las líneas de transmisión. Los motores de todo tipo (fábricas, ventiladores, reactores de luz fría) incrementan la parte inductiva y reducen el factor de potencia de forma significativa.

Ejemplo

Calcular la potencia media disipada en el circuito del ejemplo anterior.

$$P = V_{ab} i \cos\phi = \frac{1}{2} 10 \times 2 \times \cos(37^\circ)$$

$$P = 7.986 \text{ w}$$

6.8 Circuito RLC en serie

El circuito que se muestra en la figura 6.13 se presenta en muy diversas ocasiones. También hay procesos que pueden representarse por analogía mediante un circuito RLC, pues se describen mediante las mismas ecuaciones.

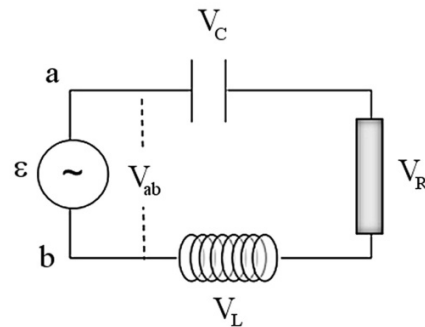


Figura 6.13. Circuito RLC en serie.

La diferencia de potencial en los extremos ab del circuito será igual a la FEM aplicada:

$$V_{ab} = \varepsilon_o \sin(\omega t) .$$

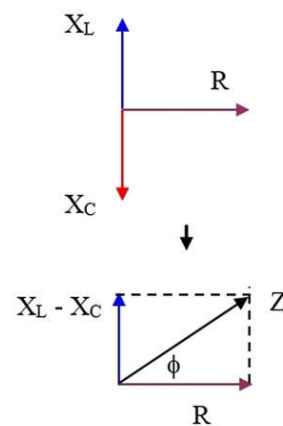


Figura 6.14. Cálculo de la impedancia.

Desarrollando el diagrama vectorial para calcular la impedancia (figura 6.14), suponiendo que $X_L > X_C$ (en caso contrario las ecuaciones seguirán siendo válidas), se ob-

tiene:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Aplicando la ley de Ohm para calcular la corriente máxima:

$$i_o = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (6.1)$$

Tomando en cuenta que la corriente es la misma en todos los elementos (conexión en serie) tendremos que $V_{oR} = i_o R$; $V_{oC} = i_o X_C$; $V_{oL} = i_o X_L$; $V_o(ab) = iZ$. Significa que multiplicando los módulos de los vectores en el diagrama anterior por i_o se obtiene un diagrama similar para los voltajes máximos del voltaje (figura 6.15).

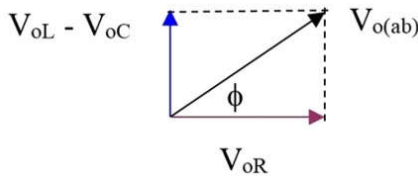


Figura 6.15. Relación entre los voltajes en un circuito RLC. La corriente está en fase con V_{oR} .

Si recordamos que el voltaje en la resistencia V_R está en fase con la corriente, entonces el desfase entre el voltaje y la corriente en los extremos del circuito se calcula a partir de

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{V_{oL} - V_{oC}}{V_{oR}}.$$

Si $X_L > X_C$ el desfase ϕ será positivo, y el circuito tendrá carácter *inductivo* (V_{ab} se adelanta a la corriente). En caso contrario, $\phi < 0$ y el circuito es *capacitivo*. Del gráfico también se ve de inmediato que

$$V_{o(ab)} = \sqrt{V_{oR}^2 + (V_{oL} - V_{oC})^2}.$$

6.9 Resonancia

Analicemos en detalle la corriente máxima en el circuito en serie RLC (ecuación 6.1).

Expresando X_L y X_C en función de ω ,

$$i_o = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Si para valores determinados de ε y R la frecuencia angular ω de la FEM aplicada varía, la corriente máxima i_o también variará. El mayor valor posible de i_o tendrá lugar cuando $\omega L - 1/\omega C = 0$.

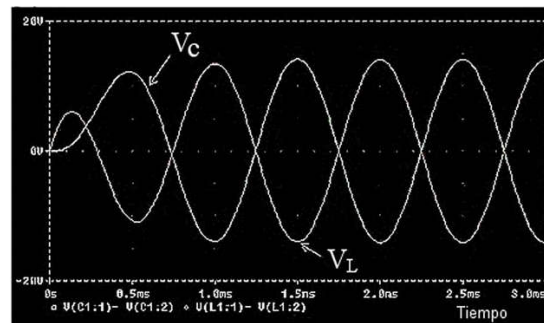
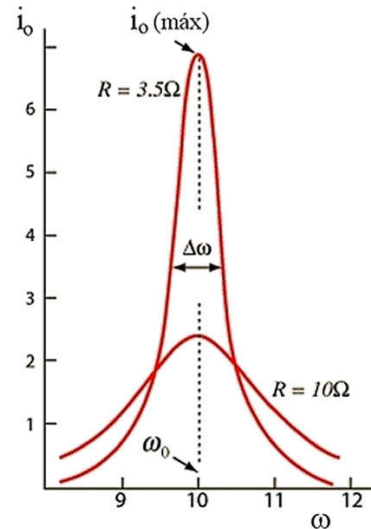


Figura 6.16. Resonancia

Es decir, cuando

$$\omega L = 1/\omega C$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Significa que el mayor valor de la corriente máxima tendrá lugar cuando la frecuencia $f = \omega/2\pi$ de la fuente coincida con la frecuencia de oscilaciones propias del circuito analizadas en 6.1.

Esta propiedad se conoce como *resonancia de tensiones* o simplemente como *resonancia*. El gráfico de la corriente en función de la frecuencia aplicada por lo general tiene la forma que se muestra en la figura 6.16.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

En la resonancia $X_L = X_C$, y como tienen diferencia de fase de π (180°), la suma de V_L y V_C se anula en cada instante, aunque cada uno de estos voltajes no es nulo por separado (figura 6.16, abajo).

Cuando el circuito de figura 6.13 está en resonancia, si se conecta un voltímetro en los extremos del condensador se obtiene un voltaje no nulo dado por

$$V_C(\text{eficaz}) = (1/\sqrt{2})i_0X_C.$$

Si el voltímetro se coloca en los extremos del inductor también se obtiene un voltaje no nulo

$$V_L(\text{eficaz}) = (1/\sqrt{2})i_0X_L.$$

Sin embargo, cuando se coloca en los puntos ab se obtendrá $V_{ab} = iR$, como si el capacitor y el inductor no estuvieran presentes.

En la resonancia

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

y no hay desfase entre el voltaje V_{ab} y la corriente. En ese instante $\cos\phi = 1$, la potencia disipada en el circuito es máxima y viene dada por

$$P = V_{ab}i = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2}{R}.$$

En resumen, en la resonancia:

- Coinciden la frecuencia de la fuente externa y la frecuencia de oscilaciones propias del circuito: $\omega_{\text{ext}} = \omega_0$.
- La corriente en el circuito es la máxima posible.
- La diferencia de fases entre el voltaje y la corriente es nula ($\phi = 0$).
- La suma de los voltajes en el condensador y el inductor se anula en todo instante.
- La potencia disipada (igual a la potencia entregada) es máxima.

6.10 Algunas aplicaciones de las resonancias electromagnéticas

Transformador

El transformador es un dispositivo estático que sirve para elevar o disminuir el voltaje en los circuitos de corriente alterna. Está constituido por dos bobinas de material conductor, devanadas sobre un núcleo cerrado de material ferro o ferrimagnético, aisladas entre sí eléctricamente (figura 6.17).

En un transformador ideal, sin pérdidas, el flujo magnético es el mismo en todo el núcleo, y la inducción es proporcional al número de vueltas en cada enrollado, por tanto:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -N_1S\frac{dB}{dt} = V_1$$

con una expresión similar para ε_2 . Como $\frac{dB}{dt}$ y el área S es la misma para ambos enrollados, igualando:

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

y la relación entre los voltajes a la entrada y la salida del condensador queda como

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

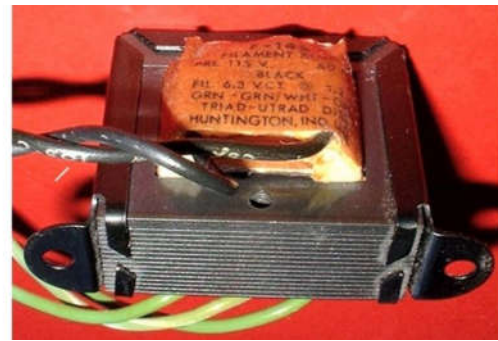
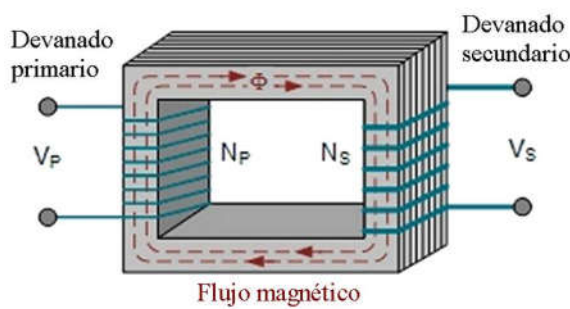


Figura 6.17. Transformador

Bobina de Tesla

La bobina de Tesla (*teslacoil*), diseñada por Nicola Tesla en 1891, es un transformador acoplado a un circuito resonante (ver sección 6.9) que trabaja en la región de radiofrecuencias (figura 6.18).

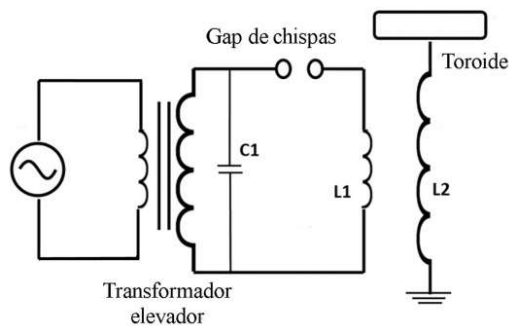


Figura 6.18. Esquema de una bobina de Tesla.

Para producir el mayor voltaje posible en el secundario, los enrollados primario y se-

En los transformadores reales siempre hay pérdidas de energía por histéresis del material y a causa de la dispersión del campo magnético fuera del núcleo, por la resistencia de los alambres y por las corrientes inducidas en el seno del material, que producen calentamiento. Por esa razón los núcleos magnéticos se laminan, añadiendo un barniz aislante entre las láminas (ver figura).

cundario se acoplan de manera tal que las frecuencias de resonancia sean iguales:

$$f_0(1) = f_0(2);$$

es decir:

$$f_0(1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = f_0(2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}}$$

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

En este caso la relación entre los voltajes a la entrada y a la salida no es proporcional al número de vueltas, como en un transformador convencional. Se calcula a partir del principio de conservación de la energía y proporciona la siguiente solución aproximada:

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = V_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

En la figura, una minibobina Tesla es capaz de energizar a distancia una luminaria compacta. A la izquierda, si la energía es suficiente es capaz de ionizar el aire y generar chispas de alta frecuencia a objetos cercanos.



Figura 6.19. Izq. Ionización del aire a causa del alto voltaje. Der. Minibobina Tesla iluminando a distancia una lámpara fluorescente compacta (LFC).

Una descripción aproximada del proceso que tiene lugar en cada ciclo es la siguiente. La corriente entregada por el transformador carga el capacitor C_1 hasta alcanzar el voltaje de ruptura del gap de chispa, y al saltar la chispa la resistencia cae de forma brusca, a la vez que una gran corriente circula por el inductor primario L_1 (extracorrente de ruptura). La corriente en L_1 induce una corriente en L_2 , que a su vez resuena con las capacitancias parásitas entre los alambres de la bobina (C_2), que al ser pequeñas generan un voltaje mucho mayor que el voltaje de entrada V_1 . La variación de voltaje en L_2 retroalimenta la corriente en L_1 , que a su vez se refleja en la mayor carga de C_1 , y así sucesivamente.

Frecuencias de radio, TV y microondas.

Los receptores de radio, TV y microondas se *sintonizan* gracias a la resonancia de la señal que proviene de la emisora con una frecuencia determinada y un circuito resonante del tipo RLC o similar (figura 6.17).

Las señales de microondas empleadas en

diversas aplicaciones (comunicaciones, hornos de microondas) se generan mediante el *magnetron* (figura 6.18).

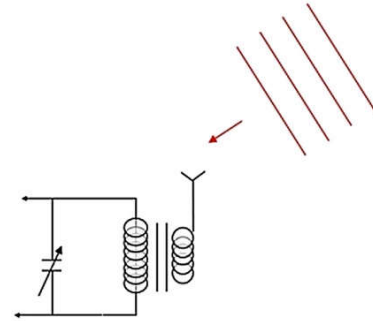


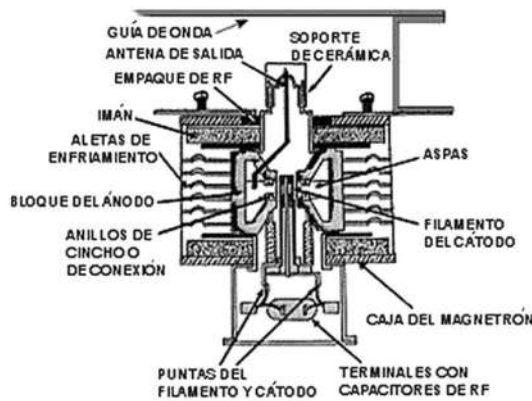
Figura 6.20. Sintonía.

En ese dispositivo, una corriente de electrones generada por una resistencia al rojo (que emite electrones) se introduce en un campo magnético que la hace rotar. Esa corriente interacciona con unas cavidades colocadas de manera conveniente. Se producen resonancias electromagnéticas en las cavidades al interactuar el campo magnético y las cargas eléctricas, que originan la emisión de radiación electromagnética. La frecuencia típica de un horno de microondas es de 2450 MHz.

Los *relojes de cuarzo* miden el tiempo con gran precisión gracias a la resonancia electromecánica que se establece al aplicar una señal eléctrica a una capa muy fina de cuarzo. Este material tiene la propiedad de realizar oscilaciones mecánicas al ser estimulado eléctricamente. Se logra producir una resonancia a frecuencia muy específica, y el período sirve de patrón para el resto del circuito que mide el tiempo.

Los equipos de *Resonancia Magnética Nuclear* (RMN) son bien conocidos en medicina e investigaciones. En este resuena el campo electromagnético externo de radiofrecuencias con el núcleo de los protones

del agua. Como en la resonancia la absorción de energía es máxima, es posible obtener una imagen por contraste de las regiones del cuerpo en dependencia de la cantidad de agua que contienen los tejidos.



También existen la RPE (Resonancia Paramagnética Electrónica) y la RFM (Resonancia Ferromagnética), que sólo mencionaremos.

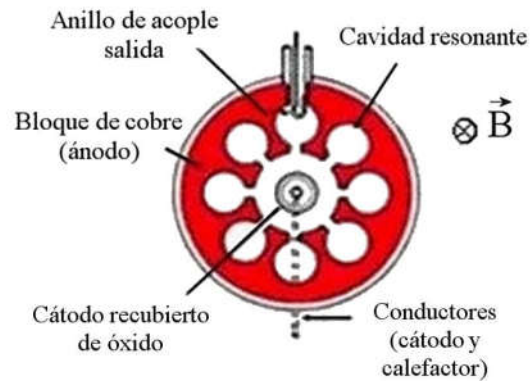


Figura 6.21. Magnetron.

Radiación infrarroja (IR), visible y ultravioleta (UV)

La *radiación láser* se basa en la resonancia de absorción/emisión de luz coherente proveniente de átomos excitados.

Los *espectros de absorción* están asociados a la resonancia que tiene lugar al irradiar átomos o moléculas con radiación de diferentes frecuencias. Hay absorción cuando la frecuencia de la radiación externa coincide con la de la radiación que emite la sustancia cuando se excita por algún medio. Esa radiación está asociada a saltos electrónicos entre diferentes niveles energéticos atómicos, o a la variación en los niveles de rotación y vibración de las moléculas. En esos casos se cumple la relación $\Delta E = hf$, donde ΔE es la diferencia en los niveles energéticos, f la frecuencia de la radiación y h la constante de Planck.

Radiación gamma (γ)

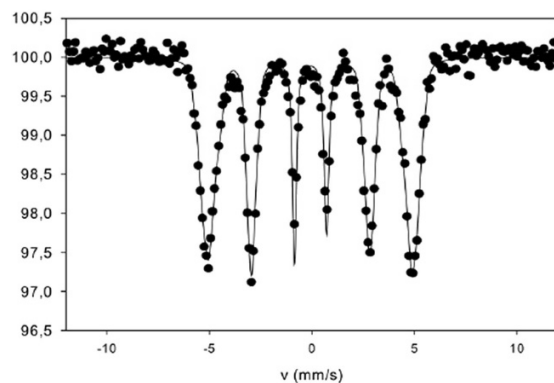


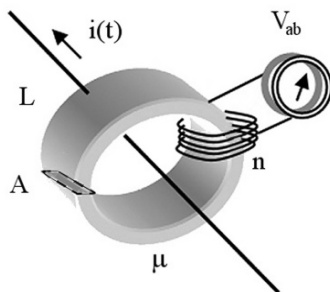
Figura 6.22. Espectrometría Mossbauer

La Resonancia Gamma Nuclear o Espectrometría Mossbauer consiste en la interacción de esta radiación con los núcleos atómicos. Se aplica en diversas investigaciones. Un núcleo atómico excitado puede emitir radiación gamma. El espectro de absorción gamma se obtiene cuando la frecuencia de la radiación externa resuena con la frecuencia a la que el núcleo emite energía cuando es excitado. También se cumple $\Delta E = hf$, donde ahora ΔE se refiere a los

niveles de energía en el núcleo. La energía se traspa al átomo y al sólido en cuestión, creando espectros característicos (figura 6.19).

Problemas resueltos

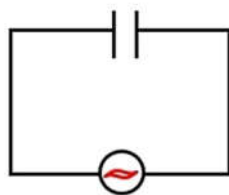
1. En la figura, un alambre recto muy largo atraviesa perpendicular el centro de un anillo de longitud media L , área A y permeabilidad relativa μ_r que es a su vez núcleo de un enrollado de n vueltas.



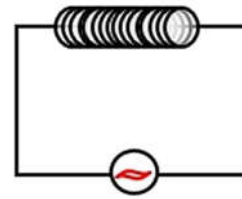
Problema 1

Si la corriente varía con el tiempo de acuerdo a la expresión $i = i_0 \sin(\omega t)$; a) ¿Cuál será el voltaje efectivo que se lee en el voltímetro? b) ¿Se altera este resultado si el alambre no pasa por el mismo centro? c) ¿Se altera el resultado si el anillo se inclina respecto al alambre?

2. En la figura, $C = 150 \mu\text{F}$, $f = 60 \text{ Hz}$, $\varepsilon_m = 300 \text{ V}$. Calcular: a) Voltaje máximo en el condensador; b) reactancia capacitiva; c) corriente máxima en el condensador.



Problema 2



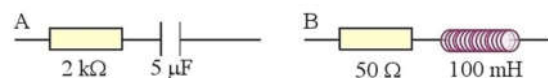
Problema 3

3. En la figura, $L = 60 \text{ mH}$, $f = 60 \text{ Hz}$, $\varepsilon_m = 300 \text{ V}$. Determinar: a) voltaje máximo en el inductor; b) reactancia inductiva; c) corriente máxima en el inductor.

4. En un circuito RLC sometido a un voltaje alterno, $R = 5 \Omega$, $L = 60 \text{ mH}$, $f = 60 \text{ Hz}$ y $\varepsilon_m = 300 \text{ V}$. a) ¿Para qué valor de la capacidad será la potencia disipada: a) máxima?, b) mínima? c) ¿Cuál es el valor máximo de la potencia, el ángulo de fase y el factor de potencia correspondiente?

5. Considere un circuito RLC donde $R = 20 \Omega$, $C = 20 \mu\text{F}$ y $L = 1 \text{ H}$. a) ¿Para qué frecuencia es máxima la potencia consumida en el circuito? b) ¿Para cual frecuencia la corriente se reduce en $\sqrt{2}$ veces con relación a la de resonancia?

6. a) Calcular la impedancia total de los circuitos A y B de la figura a la frecuencia de la red comercial (60 Hz).



Problema 6

b) Si en el circuito A el voltaje eficaz en los extremos es de 1 V , y R y C son tales que $R = 4 \Omega$ y $X_C = 3 \Omega$: ¿cuál es la intensidad de la corriente?; ¿cuál es su valor máximo?; ¿cuál es la potencia media disipada?; ¿de cuántas formas se puede calcular este último resultado?

Soluciones

1. a)

Según la ley de Ampere en forma diferencial, en el vacío $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$, donde $\vec{B}$ está contenido en el plano perpendicular al alambre y es, a la vez, perpendicular a éste. Para calcular el valor promedio de B en el seno del anillo de permeabilidad relativa μ_r , tomando $\cos\Phi = 1$ y aplicando el teorema del valor medio,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{prom}} L$$

$$B_{\text{promedio}} = \frac{\mu_r \mu_0 i}{L}$$

Aplicando la ley de Faraday en la bobina de n vueltas con $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = BA$ se obtiene la diferencia de potencial instantáneo,

$$V_{ab} = |\varepsilon_{\text{ind}}| = d\Phi/dt = nA dB/dt$$

$$= \mu_r \mu_0 \frac{nA}{L} \frac{di}{dt}$$

$$V_{ab} = \mu_r \mu_0 \frac{nA}{L} i_0 \omega \cos \omega t$$

Como $V_{\text{ef}} = 0.707 V_{\text{max}}$,

$$V_{\text{ef}} = 0.707 \mu_r \mu_0 \frac{nA}{L} i_0 \omega.$$

b) El valor promedio de B dentro del anillo no se altera, y tampoco el resultado.

c) Sugerencia: analice que le sucede al flujo de B en el anillo.

2.a)

$$V_{\text{max}} = \varepsilon_{\text{max}} = 300 \text{ V},$$

ya que la FEM está aplicada directo al condensador.

$$\begin{aligned} b) X_C &= 1/2\pi fC = 1/(2 \times 60 \times \pi \times 150 \times 10^{-6}) \\ &= 17.7 \Omega \end{aligned}$$

$$c) V_C = i_C Z = i_C X_C$$

$$\begin{aligned} i_C(\text{máx}) &= V_C(\text{máx})/X_C = 300/17.7 \\ &= 16.9 \text{ A} \end{aligned}$$

3.a)

$$V_{\text{max}} = \varepsilon_{\text{max}} = 300 \text{ V},$$

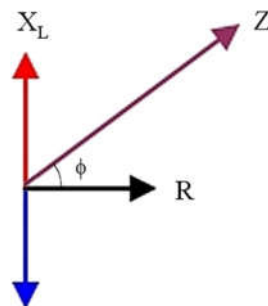
ya que la FEM está aplicada directamente al inductor.

$$\begin{aligned} b) X_L &= 2\pi fL = 6.28 \times 60 \times 60 \times 10^{-3} \\ &= 22.6 \Omega (= Z) \end{aligned}$$

$$c) V_L = i_L Z = i_L X_L$$

$$i_{\text{max}} = V_{\text{max}}/X_L = 300/22.6 = 13.3 \text{ A}$$

4.



Solución 4

a) P es máxima en resonancia. En ese caso se cumple $X_C = X_L$

$$\omega L = 1/\omega C$$

$$C = 1/\omega^2 L = 1/4\pi^2 f^2 L =$$

$$1/(4 \times 10 \times 3600 \times 60 \times 10^{-3})$$

$$= 115.7 \mu\text{F}$$

b)

$$P = V \cos \phi$$

Como $V \neq 0$, P será mínima si $i = 0$, o si $\cos \phi = 0$ ($\phi = \pm \pi/2$)

$\phi = \pm \pi/2$ sólo si $R = 0$. En ese caso $P = 0$ es mínima, cualquiera sea el valor de C .

Una segunda posibilidad es que $X_C \rightarrow \infty$, pues en este caso $\phi \approx -\pi/2$

$X_C \rightarrow \infty$ implica que $C \rightarrow 0$ (circuito abierto, no circula corriente, caso trivial).

c)

$$P_{\text{res}} = V_e^2 / R$$

$$= \frac{(300/\sqrt{2})^2}{5} = 9 \times 10^3 \text{ W}$$

En la resonancia, $\cos \phi = 1$ ($\phi = 0$).

5.a)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = 1/(6.28 \times \sqrt{1 \times 20 \times 10^{-6}}) = 36 \text{ Hz}$$

b)

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (X_L^2 - X_C^2)}}$$

$$i_0(\text{máx}) = \varepsilon_0 / R \text{ (resonancia)}$$

Imponiendo la condición

$$i_0 = i_0(\text{máx})/\sqrt{2}$$

para obtener el valor de f :

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (X_L^2 - X_C^2)}} = \frac{\varepsilon_0}{R\sqrt{2}}$$

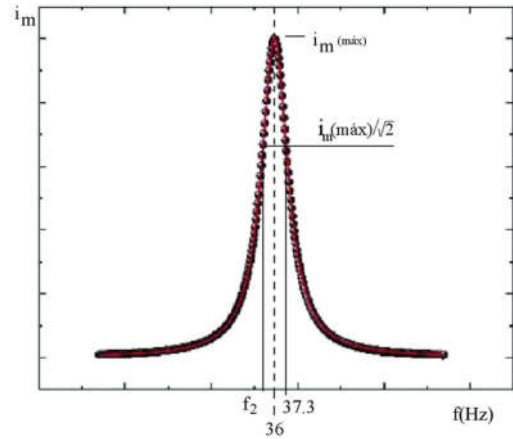
$$R^2 + (X_L - X_C)^2 = 2R^2$$

$$(X_L - X_C)^2 = R^2$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$(1) X_L - X_C = R$$

$$(2) X_L - X_C = -R$$



Solución 5

Analizando la solución (1):

$$\omega L - 1/\omega C = R$$

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$(R/2L)^2 = (20/2)^2 = 100$$

$$1/LC = \omega_0^2 = 10^6/20 = 5 \times 10^4$$

(frecuencia angular de resonancia al cuadrado) y es posible despreciar el primer término en comparación con el segundo.

Por tanto:

$$\omega = 10 \pm 224.$$

Como un valor negativo de frecuencia carece de sentido físico,

$$f = \omega/2\pi = 234/6.28 = 37.3$$

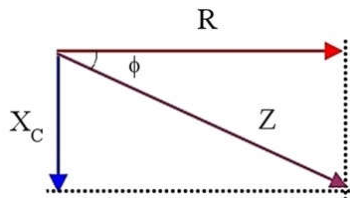
$$f_1 = 37.3 \text{ Hz}$$

Una segunda frecuencia f_2 se obtiene a partir de la ecuación (2). *Se deja como ejercicio al lector.*

6. Circuito A

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$X_C = 1/2\pi fC = 1/(6.28 \times 60 \times 5 \times 10^{-6})$$



Solución 6

$$= 31831 \, \Omega$$

$$Z = (2000^2 + 31831^2)^{1/2}$$

$$= 4321.6 \, \Omega .$$

circuito B

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$X_L = 2\pi fL = 6.28 \times 60 \times 100 \times 10^{-3} = 37.7 \, \Omega$$

$$Z = (50^2 + 37.7^2)^{1/2} = 164.1 \, \Omega$$

b)

$$Z = (3^2 + 4^2)^{1/2} = 5 \, \Omega$$

$$i_e = V_e/Z = 1/5 = 0.2 \, A$$

$$i_m = i_e \sqrt{2} = 0.28 \, A$$

$$\tan \phi = X_C/R = 3/4 = 0.75$$

$$\phi = \arctan 0.75 = 37^\circ$$

$$P = V_e i_e \cos \phi = 1 \times 0.2 \times \cos 37^\circ$$

$$P = 0.16 \, w$$

En un condensador ideal no se disipa potencia. Por tanto,

$$P = i_e^2 R = 0.2^2 \times 4$$

$$= 0.16 \, w.$$

Capítulo 7

Problemas propuestos

Carga y campo

1a. Una gota de agua esférica de $1.20 \mu\text{m}$ de diámetro está suspendida en el aire a causa de un campo eléctrico atmosférico de intensidad $E = 462 \text{ N/C}$ dirigido hacia abajo. a) ¿Cuánto pesa la gota? b) ¿Cuántos electrones en exceso contiene?

1b. Un electrón con velocidad de $5.0 \times 10^8 \text{ cm/s}$ penetra en una región donde está presente un campo eléctrico de intensidad $1.00 \times 10^3 \text{ N/C}$, viajando en la dirección y sentido que hace retardar su movimiento. a) ¿Qué distancia avanzará el electrón antes de detenerse momentáneamente? b) ¿Qué tiempo habrá transcurrido? c) Si la región donde está presente el campo eléctrico fuera de sólo 8.0 mm de ancho (demasiado pequeña para que el electrón se detenga), ¿cuál será la fracción de la energía cinética del electrón que desaparece en el proceso? R: 7.12 cm , 28.5 ns , 11.2% .

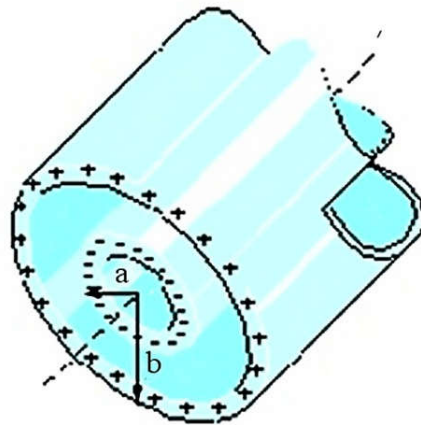
1c. Un dipolo eléctrico está formado por las cargas $+2q_e$ y $-2q_e$ (q_e es la carga del electrón) separadas por 0.78 nm . El dipolo se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico de intensidad $3.4 \times 10^6 \text{ N/C}$. Calcule la magnitud del torque actuando sobre el dipolo cuando el momento del dipolo es a) paralelo a la intensidad de campo y del mismo sentido; b) paralelo y de sentido contrario; c) perpendicular.

Ley de Gauss

2. La figura muestra una sección de dos cilindros concéntricos metálicos largos y

estrechos de radios a y b , con $a < b$. Los cilindros tienen cargas por unidad de longitud iguales y opuestas λ . Usando la ley de Gauss demuestre que: a) $E = 0$ cuando $r < a$; b) Que para $a < r < b$ se cumple que

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}.$$



Problema 2

3. Una lámina plana de espesor d tiene una densidad volumétrica uniforme de carga ρ . Encontrar la magnitud de la intensidad de campo eléctrico en todos los puntos del espacio a) dentro y b) fuera de la lámina, en función de x (la distancia medida desde el centro de la lámina). R: a) $\rho x/\epsilon_0$; b) $\rho d/2\epsilon_0$.

Capacidad y condensadores

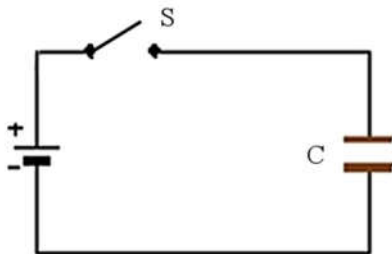
4. Los dos objetos metálicos de la figura poseen cargas netas de $+70 \text{ pC}$ y -70 pC , lo que resulta en una diferencia de potencial de 20 V entre ellos.



Problema 4

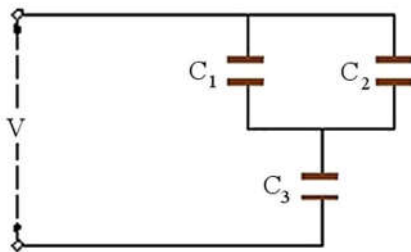
a) ¿Cuál es la capacitancia del sistema? b) Si las cargas cambian a $+200 \text{ pC}$ y -200 pC ¿cómo se transforma la capacidad? c) ¿Cómo se transforma la diferencia de potencial?

5. El capacitor de la figura tiene una capacidad de $25 \text{ }\mu\text{F}$ y se encuentra descargado. La batería proporciona una diferencia de potencial de 120 V . Después que el interruptor S se cierra y se estabiliza el sistema, ¿cuánta carga habrá pasado a través de la batería? R: 3.30 mC .



Problema 5

6. Suponga que el capacitor inferior C_3 de la figura se perfora, convirtiéndose en el equivalente de un alambre conductor. ¿Cuáles son las variaciones para C_1 en: a) la carga, b) la diferencia de potencial? Asuma que $V = 100 \text{ V}$.



Problema 6

7. Un capacitor de 100 pF se carga a una diferencia de potencial de 50 V y se desco-

necta de la batería. Después se conecta en paralelo con otro capacitor descargado. Si la diferencia de potencial que se mide cae a 35 V , ¿cuál es la capacidad del segundo capacitor? R: 27.43 pF

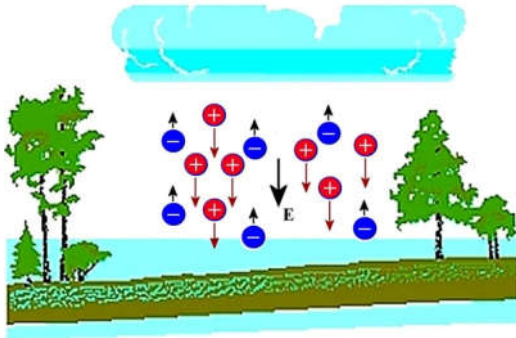
8. Dos capacitores de 2.0 y $4.0 \text{ }\mu\text{F}$ se conectan en paralelo a una fuente de 300 V . Calcular la energía total almacenada en el sistema. R: 0.27 J .

9. Se desea construir un condensador de placas paralelas y se poseen dos placas de cobre, una lámina de mica de espesor 0.10 mm y $\epsilon_r = 5.4$, una lámina de vidrio de espesor 2.0 mm y $\epsilon_r = 7.0$, y otra lámina de parafina de espesor 1 cm y $\epsilon_r = 2.0$. ¿Cuál lamina colocaría Ud. entre las placas para obtener la mayor capacidad posible?

Ley de Ohm y circuitos

10. Un alambre con resistencia de $6.0 \text{ }\Omega$ se estira de forma que su nueva longitud es el triple de la original. Encuentre la resistencia de este nuevo alambre, suponiendo que ni la resistividad ni la densidad del material varían durante el proceso de estiramiento. R: $25.54 \text{ }\Omega$

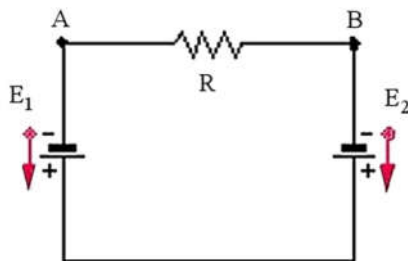
11. En las capas inferiores de la atmósfera siempre hay presentes iones positivos y negativos, originados por los elementos radioactivos en el suelo y los rayos cósmicos provenientes del espacio exterior. En una cierta región, la intensidad del campo eléctrico atmosférico es de 120 V/m y está dirigido verticalmente hacia abajo. A causa de este campo, los iones positivos de carga $+1$, en cantidad de 620 por cm^3 , se mueven hacia abajo, y los iones negativos de carga -1 , en cantidad de 550 por cm^3 , hacia arriba.



Problema 11

La conductividad obtenida de las mediciones es $2.70 \times 10^{-14} \Omega\text{m}$. Calcule: a) la velocidad de arrastre de los iones (asumiendo que es la misma para iones positivos y negativos), b) la densidad de corriente. R: b) 3.24 pA/m^2 .

12. En la figura, $\varepsilon_1 = 12 \text{ V}$ y $\varepsilon_2 = 8 \text{ V}$. a) ¿Cuál es la dirección de la corriente en el resistor? b) ¿Cuál batería está haciendo trabajo positivo? c) ¿Cuál punto, A o B, está a mayor potencial?

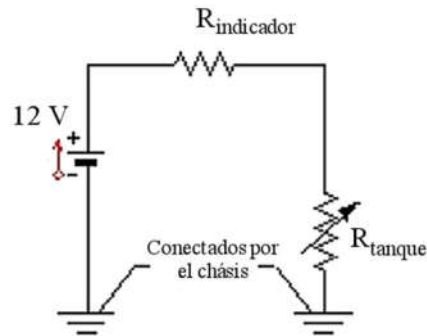


Problema 12

13. La corriente in un circuito con una resistencia R es de 5.0 A . Cuando se conecta una resistencia adicional de 20Ω en serie la corriente disminuye a 4.0 A . ¿Cuál es el valor de R ? (R: 80Ω)

14. El circuito del indicador del tanque de gasolina de un automóvil se muestra esquemáticamente en la figura. El metro indicador en la pizarra tiene una resistencia de

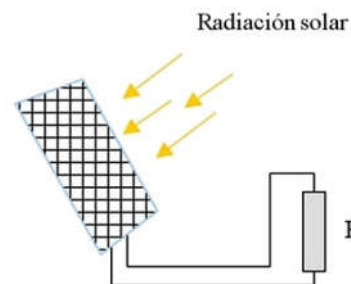
10Ω . El sensor en el tanque de gasolina es un simple flotador conectado a una resistencia variable que marca 140Ω cuando el tanque está vacío, 20Ω cuando está lleno y que varía linealmente con el volumen de gasolina.



Problema 14

Encuentre la corriente en el circuito cuando el tanque a) está vacío; b) está por la mitad; c) está lleno.

15. Una celda solar genera una diferencia de potencial de 0.10 V cuando sus extremos se conectan a un resistor de 500Ω , mientras que genera 0.15 V cuando el resistor se sustituye por otro de 1000Ω .



Problema 15

¿Cuál es a) la FEM de la celda; b) su resistencia interna?; c) Si el área de la celda es de 5.0 cm^2 y recibe energía solar a razón de 2.0 mW/cm^2 , ¿cuál es la eficiencia de la

celda para convertir energía luminosa en energía térmica en la resistencia externa de $1000\ \Omega$? R: $1000\ \Omega$; $300\ \text{mV}$; 2.3×10^{-3} .

16. Un alambre de resistencia $5\ \Omega$ se conecta a una FEM de 2V con resistencia interna de $1.0\ \Omega$. Cuando pasan dos minutos, a) ¿Cuánta energía se ha transformado de la forma química a la eléctrica? b) ¿Cuánta energía térmica aparece en el alambre? ¿A qué se debe la diferencia entre a) y b)?

17. Dos bombillos de resistencia R_1 y R_2 , con $R_1 > R_2$, se conectan a una batería, a) en paralelo y b) en serie. ¿Cuál bombillo alumbra más (disipa más energía) en cada caso? c) ¿Cuál combinación alumbra más, en serie o en paralelo? Considere $r_i = 0$.

18. Se dese ensamblar una resistencia de $3\ \Omega$ utilizando una de $12\ \Omega$ combinada con alguna otra. ¿Cuál debe ser el valor de la otra resistencia, y como debe conectarse? R: $4\ \Omega$

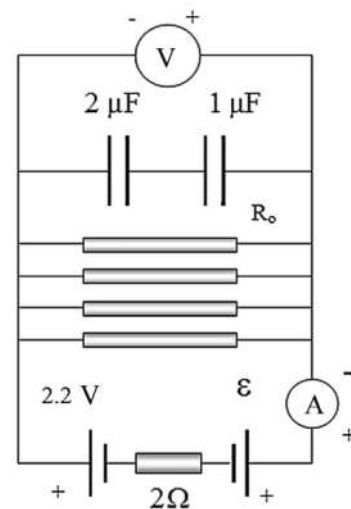
19. Una línea de potencia de 110 está protegida por un fusible de $30\ \text{A}$. ¿Cuál es la máxima cantidad de lámparas de $500\ \text{W}$ que se pueden conectar en paralelo sin que se funda el fusible? R: 6

20. Las 4 resistencias R_o de la figura son idénticas, el voltímetro indica un valor estable de $10\ \text{V}$, y el amperímetro $100\ \text{mA}$. La polaridad de los bornes de cada instrumento aparece indicada en la figura.

a) ¿Cuál es la carga almacenada en cada condensador?

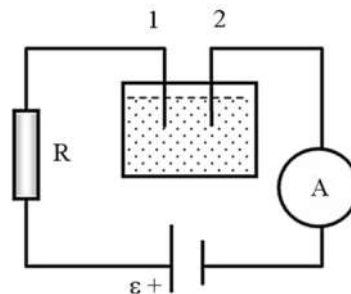
b) ¿Cuál es el valor de cada resistencia R_o ?

b) ¿Cuál es el valor de la FEM ε ?



Problema 20

21. La resistencia entre los puntos 1 y 2 es desconocida (electrolito). El amperímetro, de resistencia despreciable, marca una corriente de $0.1\ \text{A}$ en el sentido de la FEM cuando $\varepsilon = 12\ \text{V}$.

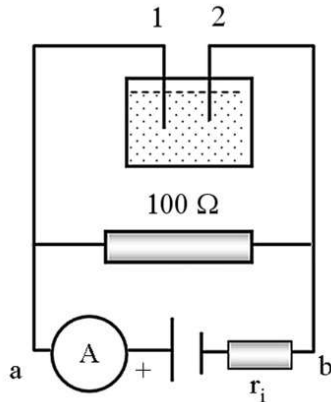


Problema 21

Si $R = 10\ \text{Ohm}$, a) ¿Cuanto marcará un voltímetro al conectarlo entre los puntos 1 y 2? b) ¿Cuánta energía por segundo se está consumiendo en el electrolito? c) ¿Cuál es la resistencia al paso de la corriente que ejerce el electrolito).

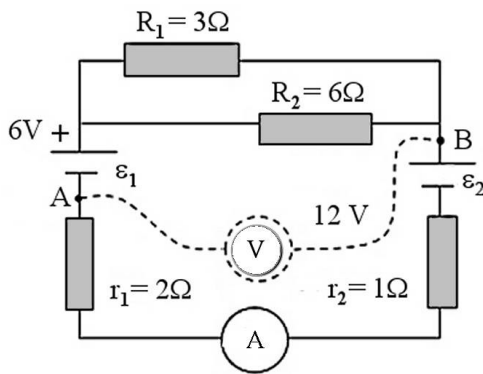
22. Se sabe que la resistencia equivalente de las resistencias de $100\ \Omega$ y el electrolito de la figura es de $20\ \Omega$. a) ¿Cuál es la corriente en el amperímetro si $\varepsilon = 12\ \text{V}$. b)

¿Cuál es la conductancia del electrolito? d) ¿Cuánto marca un voltímetro al conectarlo entre los puntos a y b? ¿Y entre los puntos 1 y 2? ($\varepsilon = 12 \text{ V}$, $i = 0.1 \text{ A}$, $r_i = 2 \Omega$, $R = 100 \Omega$).



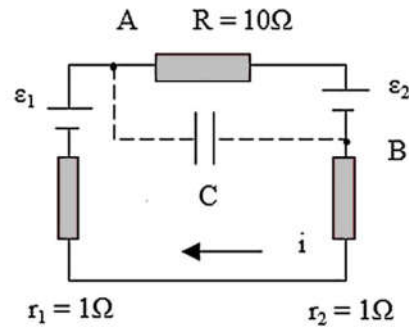
Problema 22

23. En el circuito de la figura: a) ¿Cuál será la corriente que indica el amperímetro? ¿Cuál es su sentido?



Problema 23

b) ¿Habrá intercambio de energía en el proceso? De haberlo, ¿cómo sería? Explique brevemente por qué. c) Si se conecta un voltímetro entre los puntos A y B, ¿cuál será su lectura? ¿Cuál de esos puntos tiene mayor potencial? ($R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $r_1 = 2 \Omega$, $r_2 = 1 \Omega$, $\varepsilon_1 = 6 \text{ V}$, $\varepsilon_2 = 12 \text{ V}$).

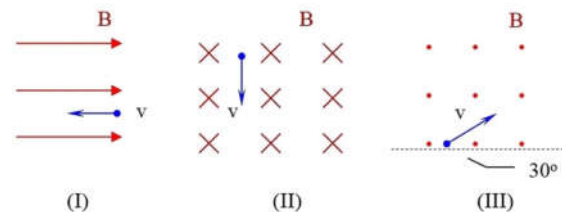


Problema 24

24. En la figura del problema, $i = 0.5 \text{ A}$ y $\varepsilon_1 = 12 \text{ V}$. a) ¿Cuál será el valor de ε_2 ? b) ¿Cuánta energía por segundo se está entregando al circuito? ¿Quién la entrega? c) Si se coloca un ultracondensador de 100 F entre los puntos A y B en estas condiciones, ¿Cuál será la carga almacenada en el mismo?

Campo magnético e inducción magnética

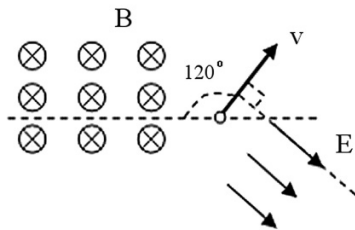
25. En una región del espacio donde hay una inducción magnética constante y uniforme $B = 10^{-3} \text{ T}$ se lanzan partículas de carga $+2 \times 10^{-6} \text{ C}$ con velocidad de 10^2 m/s y con diferentes orientaciones respecto al campo.



Problema 25

a) Represente gráficamente la fuerza inicial que actúa sobre la carga en cada caso I, II y III y calcule su valor. b) La energía cinética de las partículas al atravesar el campo ¿aumenta, disminuye o se queda igual? Justifi-

que su respuesta sobre la base de leyes conocidas de la Física.

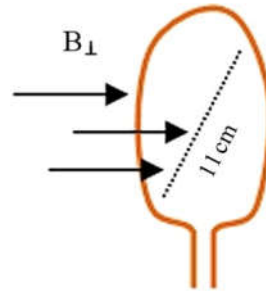


Problema 26

26. Una partícula de carga $q = -2 \times 10^{-10} \text{ C}$ y velocidad 100 m/s penetra en una región donde coexisten un campo eléctrico con $E = 120 \text{ N/C}$ y otro magnético con $B = 2.4 \text{ T}$, ambos constantes y uniformes. a) Calcule el módulo, dirección y sentido de la fuerza resultante actuando al inicio sobre la partícula. b) Explique qué sucede cuando un metal se introduce en una región del espacio donde sólo está presente un campo eléctrico constante y uniforme.

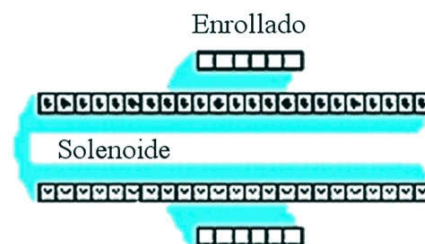
27. Un conductor horizontal en una línea de potencia del hemisferio norte conduce una corriente de 5000 A de sur a norte. El campo magnético de la tierra en ese lugar tiene un valor aproximado de $60.0 \mu\text{T}$, y está inclinado 70° respecto a la horizontal. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza causada por el campo magnético terrestre actuando sobre una longitud de 100 m del conductor.

28. Una varilla de cobre de 1 kg descansa sobre dos raíles paralelos horizontales, llevando una corriente de 50 A de un raíl al otro. El coeficiente de fricción estático es de 0.6 . ¿Cuál es la menor intensidad de campo magnético (no necesariamente vertical) que hará que la barra comience a deslizarse?



Problema 29

29. Una antena circular UHF de TV tiene un diámetro de 22 cm . En un instante determinado, el campo magnético uniforme de la señal de TV es normal al plano determinado por la circunferencia y su magnitud está cambiando a la razón de 0.16 T/s . a) ¿Cuál es el valor de la FEM inducida en la antena? b) Suponga que en instante dado la intensidad el campo magnético está disminuyendo. Explique cómo se determina el sentido de la FEM inducida e indíquelo en la figura. c) Si la antena se rota 90° alrededor del eje que pasa por la vertical, ¿la FEM aumenta, disminuye o se queda igual? Explique por qué.



Problema 30

30. En la figura, un enrollado o bobina pequeña de 120 vueltas, radio 1.8 cm y resistencia de 5.3Ω se coloca por fuera de un solenoide. a) ¿Qué corriente aparece en la bobina cuando la corriente del solenoide varía?

31. Dos solenoides forman parte del sistema de bujías de un automóvil. Cuando la corriente en uno de ellos cae de 6.0 A hasta cero en 2.5 ms, una FEM de 30 kV se induce en el otro. ¿Cuál es la inductancia mutua M entre ellos? R: 1.25 H.

32. Considere un solenoide largo y cilíndrico con 100 vueltas/cm y radio de 1.6 cm. Asuma que el campo magnético que produce es paralelo a su eje y uniforme en el interior. a) ¿Cuál es su inductancia por metro de longitud? b) Si la corriente está variando a razón de 13 A/s, ¿cuál es la FEM que induce por metro? R: 0.10 H, 1.3 V.

33. La inductancia de un enrollado es tal que se induce una FEM de 3.0 V cuando la corriente cambia a razón de 5.0 A/s. Una corriente constante de 8.0 A produce un flujo magnético de 40 μWb en cada vuelta. a) Calcule la inductancia de la bobina. b) ¿Cuántas vueltas tiene la bobina?

34. ¿Cuál debería ser la magnitud de un campo eléctrico uniforme para que tenga la misma densidad de energía que la que posee un campo magnético de 0.50 T?

35. Dos espiras se encuentran separadas a una distancia fija. Cuando en la espira 1 no hay corriente y en el 2 la corriente aumenta a razón de 15.0 A/s, la FEM en la espira 1 es de 25.0 mV. a) ¿Cuál es la inductancia mutua del sistema formado por las dos espiras? b) Cuando la espira 2 no tiene corriente

y en la espira 1 circula una corriente de 3.6 A, ¿cuál es el flujo que atraviesa la espira 2? R: 1.67 mH, 6.0 mWb.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs. **University Physics, Volume 2**. OpenStax Rice University, 6100 Main Street MS-375. Houston, Texas 77005. ©2021 Rice University. <https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-2>.

Hugh D. Young Roger A. Freedman y A. Lewis Ford. **Sears y Zemansky; Física Universitaria con Física Moderna 2**. Traducción autorizada de la edición en inglés titulada *University Physics With Modern Physics, 14th Edition* (capítulos 21–44), publicada por Pearson Education, Inc., Copyright © 2016.

S. Frisch y A. Timoreva, **Curso de Física General II**, Moscú, Editorial Mir, 1968.

John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la Teoría Electromagnética, 4ta. Ed.**, Addison-Wesley Iberoamericana.

David Halliday, Robert Resnick, Kenneth S. Krane. **Física**. Vol. II, Tomo I, 4ta. Ed. John Wiley and Sons, 1992. Versión en Español Editorial Félix Varela.