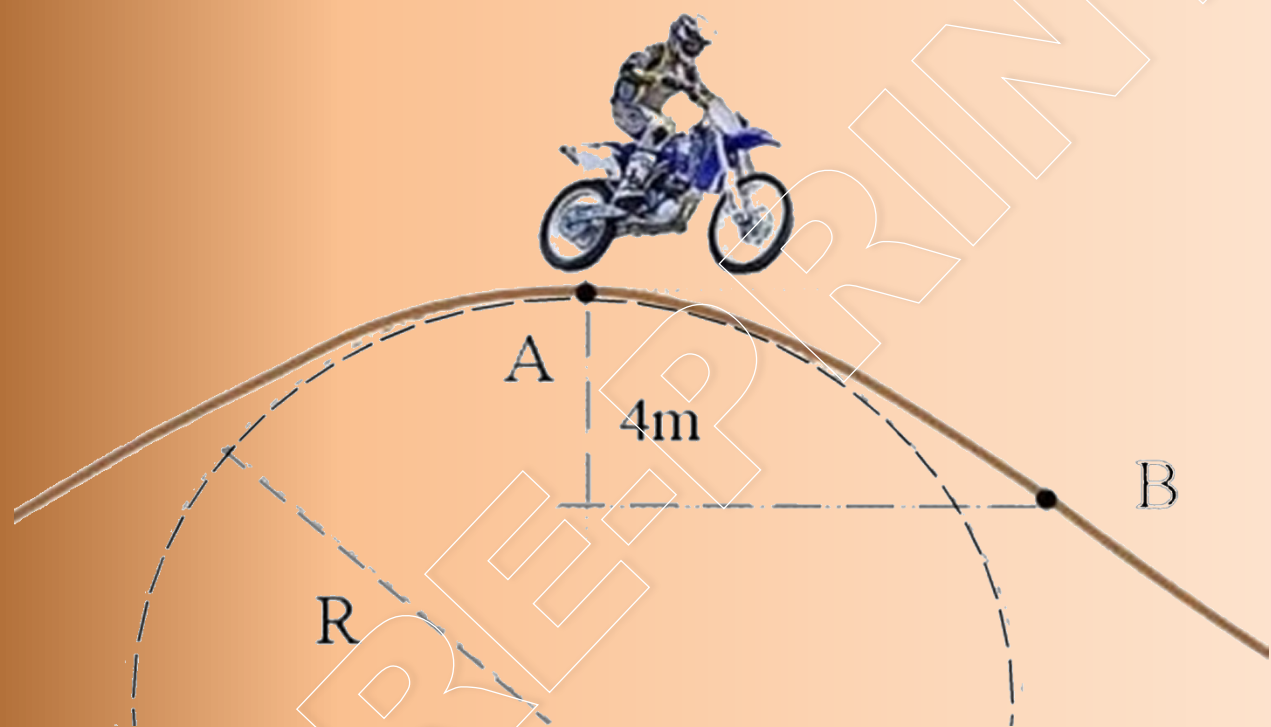


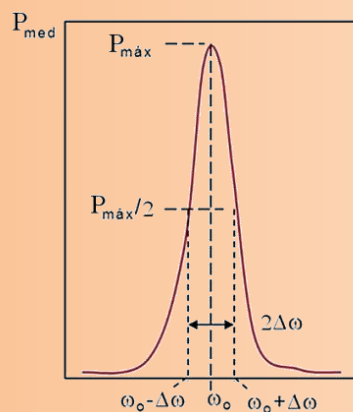
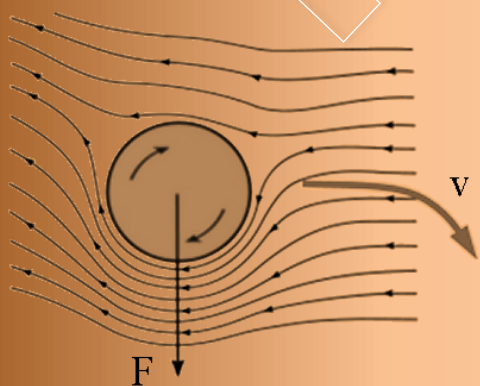
Introducción a la

MECÁNICA

Para estudiantes de la educación superior



Arnaldo González Arias
La Habana, versión 2023



Prólogo

Esta Introducción a la Mecánica resume las experiencias del autor en la impartición de conferencias, clases prácticas y laboratorios durante varios años en diversas facultades de ciencias naturales en la Universidad de La Habana. Se trata en todo momento de hacer énfasis en la relación de los contenidos del curso con los resultados experimentales que condujeron a las leyes y principios correspondientes, adicionando algún que otro resultado novedoso en relación a la validez de los conceptos tradicionales en mecánica. No es objetivo del curso presentar una discusión exhaustiva de los conceptos excepto, quizás, en la definición de energía, muchas veces controvertida en la literatura científica. Por el contrario, dada la usual escasez de tiempo disponible para impartir las disciplinas de física básica, sobre en todo en especialidades no relacionadas directamente a la física, se ha tratado de extraer lo esencial de las leyes, dejando de lado muchos aspectos interesantes y que pudieran ser de importancia para alguna disciplina en particular, pero que no son indispensables para que el estudiante pueda alcanzar una visión adecuada de la asignatura como un todo.

El curso presta especial atención a los procesos de medición ya que es la física la encargada de estudiar las mediciones y su incertidumbre en cualquier especialidad de las ciencias naturales. Como la Mecánica es sin duda la base indispensable para otros cursos de física básica como la Termodinámica, el Electromagnetismo y la Óptica, se trata de aprovechar en todo lo posible los conocimientos que brindan estas disciplinas afines, tanto desde el punto de vista macroscópico como microscópico, añadiendo ejemplos ilustrativos y relacionando el contenido del curso con ejemplos concretos, siempre que ha sido posible.

Se ha tratado de adoptar un orden lógico que facilite la comprensión del estudiante sin abandonar la rigurosidad académica mínima. Se hace uso libremente de los conocimientos previos de cálculo de nivel elemental y derivadas parciales, pero sin abusar de ellos cuando no es necesario.

En esta nueva versión se han hecho algunas correcciones, se han mejorado varias figuras y se han introducido ejemplos de aplicación práctica, mostrando algunos de los instrumentos que se usan en la actualidad.

El autor, julio de 2023

Índice

Capítulo I. Magnitudes físicas

1.1 Introducción

Materia, sustancia y campo

¿Qué estudia la mecánica?

¿Por qué es importante el estudio de la mecánica?

Leyes físicas

1.2 Sistema Internacional de Unidades

Magnitudes físicas.

Magnitudes fundamentales y derivadas.

Sistema Internacional de Unidades

Precisión y exactitud.

Múltiplos y submúltiplos de las magnitudes fundamentales.

1.3 Magnitudes escalares y vectoriales

Vector.

Suma de vectores.

Propiedades de la suma de vectores.

Resta de vectores.

Componentes de un vector.

Vectores unitarios.

Suma y resta en cartesianas.

Producto escalar de dos vectores.

Producto vectorial de dos vectores.

1.4. Problemas resueltos

1.5 Tema avanzado. El Sistema Internacional de Unidades.

Capítulo 2. Cinemática de la partícula

2.1 Conceptos básicos

Partícula o punto material.

Vector de posición.

Trayectoria y desplazamiento

2.2 Velocidad y rapidez

2.3 Aceleración

Componentes normal y tangencial

2.4 Caso en que $\bar{a} = 0$: Movimiento rectilíneo uniforme, MRU

2.5 Movimiento a lo largo de una recta con $a \neq 0$ constante, MRUV

Fórmula de la velocidad.

Fórmula del espacio.

Otras fórmulas de interés en el MRUV

2.6 Caída libre de los cuerpos

2.7 Movimiento de proyectiles

Movimiento en el eje X.

Movimiento en el eje Y.

Tiempo de vuelo.

Alcance horizontal.

Alcance máximo.

Ecuación de la trayectoria

2.8 Movimiento relativo

2.9 Problemas resueltos

Capítulo 3. Dinámica de la partícula

3.1 Introducción

3.2 Concepto de fuerza

3.3 Inercia y masa inercial

3.4 Leyes de Newton

3.5 Análisis de la primera ley

Sistemas de referencia Inerciales

Carácter de postulado de la 1ra ley

3.6 Análisis de la segunda ley

Principio clásico de la relatividad

3.7 Análisis de la tercera ley

3.8 Diagrama de fuerzas

3.9 Fuerza gravitatoria

3.10 Ley de gravitación universal

Aplicación a cuerpos finitos.

Caso particular. Esfera con densidad uniforme.

Masa de la Tierra.

Variación de la aceleración de la gravedad con la altura.

Concepto de peso.

Campo gravitatorio

3.11 Fuerzas elásticas

3.12 Fuerzas de fricción

3.13 Fuerzas centrípeta y centrífuga

3.14 Ley del movimiento y ecuación del movimiento de una partícula

3.15 Problemas resueltos

Capítulo 4. Trabajo y Energía

4.1 Trabajo de una fuerza

Movimiento rectilíneo y fuerza constante

Trabajo de varias fuerzas sobre un cuerpo

Trabajo positivo, negativo y nulo.

Unidades

Trabajo de una fuerza variable

Movimiento en trayectoria curva

Movimiento en una dimensión y fuerza variable

4.2 Potencia

4.3 Teorema del trabajo y la energía

4.4 Fuerzas conservativas. Energía potencial

4.5 Energía potencial elástica

4.6 Energía potencial gravitatoria

Cuerpo sobre la superficie de la tierra a una altura $h \ll r_t$

4.7 Energía mecánica

4.8 Sistemas conservativos y no conservativos

4.9 Relación inversa entre fuerza y energía potencial

4.10 Diagrama generalizado de energía potencial en sistemas conservativos (1 dimensión)

4.11 Límites de validez de la mecánica de newton

Distancias muy grandes y pequeñas.

Altas velocidades

Gravitación universal

Tema avanzado. La relatividad del tiempo y el espacio.

4.12 Problemas resueltos

Capítulo 5. Sistemas de partículas

5.1 Centro de masa.

Centro de masa de dos partículas.

N partículas ubicadas sobre una recta.

N partículas en tres dimensiones.

Cuerpo continuo.

- Sólidos regulares homogéneos.
- 5.2 cantidad de movimiento de un sistema de partículas.
- 5.3 Segunda ley de Newton en un sistema de partículas.
- 5.4 Teorema de conservación del momento lineal.
- 5.5 Teorema del trabajo y la energía en los sistemas de partículas.
- 5.6 Fuerzas impulsivas.
- Impulso de una fuerza.
- Segunda ley de Newton en función del impulso.
- 5.7 Choques.
- Choque elástico en una dimensión.
- Choque perfectamente inelástico en dos dimensiones.
- Las leyes de conservación en el micromundo.
- 5.8 Problemas resueltos.

Capítulo 6. Rotación

- 6.1 Conceptos básicos
- Plano de rotación
- Definición de ángulo
- Dimensiones
- 6.2 Velocidad angular
- 6.3 Aceleración angular
- 6.4 Análisis de casos particulares
- Caso en que $\alpha = 0$: movimiento circular uniforme.
- Caso en que $\alpha = \text{constante}$, (MCUV).

6.5 Relación entre las variables del movimiento lineal y el angular

6.6 Torque

- Resultados experimentales
- Definición de torque
- Unidades
- Propiedades

6.7 Energía cinética de rotación

6.8 Movimiento combinado de rotación + traslación

6.9 Cálculo de momentos de inercia

Sistemas discretos. Sistemas continuos (cuerpo rígido).

6.10 Segunda ley de Newton en la rotación

6.11 Momento angular

- Momento angular de una partícula y de un sistema de partículas
- Momento angular de un cuerpo rígido

6.12 Teorema de conservación del momento angular

Giróscopo

Precesión

6.13 Tema avanzado 1. Aceleración de Coriolis y fuerzas de inercia

6.14 Tema avanzado 2. Los períodos glaciales y la rotación de la Tierra.

6.15 Problemas resueltos

Capítulo 7. Mecánica de los fluidos

7.1 Conceptos Básicos

- Densidad de un fluido
- Presión. Unidades

Principio de Pascal
Prensa hidráulica
7.2 Ecuación fundamental de la hidrostática
7.3 Principio de Arquímedes
7.4 Presión atmosférica
Barómetro
Unidades
Manómetro
7.5 Fluidos en movimiento
Conceptos básicos
Línea de corriente y tubo de flujo
7.6 Ecuación de continuidad
7.8 Ecuación de Bernoulli
7.9 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli
Relación entre la presión y la velocidad de un fluido
Teorema de Torricelli
Medidor de Venturi
7.10 Viscosidad
Conceptos básicos.
Unidades.
Ley de Poiseuille
Flujo laminar y turbulento
Número de Reynolds
7.11 Problemas resueltos

Capítulo 8. Oscilaciones y ondas mecánicas

8.1 Conceptos Básicos
Movimiento periódico.
Movimiento armónico.
8.2 Movimiento armónico simple (MAS)
Análisis de la función seno
8.3 Sistema cuerpo-resorte
Velocidad y aceleración en el MAS
8.4 Energía en el MAS
8.5 Movimiento armónico amortiguado
8.6 Energía en el movimiento subamortiguado
8.7 Movimiento armónico forzado.
Relación entre τ y $\Delta\omega$
8.8 Ondas mecánicas transversales
8.9 Propagación de un MAS
8.10 Interferencia
8.11 Ondas longitudinales
Sonido
Número de Mach
Pulsación
8.12 Infrasonido y ultrasonido
8.13 Ondas sísmicas
8.14 Efecto Doppler
8.15 Problemas resueltos

Capítulo I

Magnitudes físicas

1.1 Introducción

Materia, sustancia y campo

¿Qué estudia la mecánica?

¿Por qué es importante el estudio de la mecánica?

Leyes físicas

1.2 Sistema Internacional de Unidades

Magnitudes físicas.

Magnitudes fundamentales y derivadas.

Sistema Internacional de Unidades

Precisión y exactitud.

Múltiplos y submúltiplos de las magnitudes fundamentales.

1.3 Magnitudes escalares y vectoriales

Vector.

Suma de vectores.

Propiedades de la suma de vectores.

Resta de vectores.

Componentes de un vector.

Vectores unitarios.

Suma y resta en cartesianas.

Producto escalar de dos vectores.

Producto vectorial de dos vectores.

1.4. Problemas resueltos

1.5 Tema avanzado. Creación del Sistema Internacional de Unidades.

Capítulo I

Magnitudes físicas

1. Introducción

Materia, sustancia y campo

Materia es todo lo que nos rodea y llega hasta nosotros reflejado por nuestros sentidos. El aire, el agua, cualquier objeto sólido, las ondas sonoras y la luz son materia.

Las ondas sonoras, causadas por el movimiento periódico de los fluidos, crean la *sensación* de sonido en el cerebro; la luz nos proporciona la visión mediante un complejo mecanismo físico-químico-biológico. Mientras que la luz es material, la visión es también una sensación que existe solo en nuestro cerebro.

Hay dos tipos fundamentales de materia: sustancia y campo. La sustancia tiene masa en reposo y se puede pesar en una balanza. El campo no tiene masa en reposo; no se puede pesar. Se reconoce la existencia de tres tipos diferentes de campo: eléctrico, magnético y electromagnético. Ese último describe radiaciones tales como la luz visible, las ondas de radio y la térmica, que es detectada por la piel. Nuestros sentidos no son capaces de revelar todos los tipos de radiación como, por ejemplo, las ondas de radio o los rayos X, pero tenemos instrumentos capaces de hacerlo.

¿Qué estudia la mecánica?

Un cuerpo es una porción limitada de sustancia que se puede mover de forma independiente respecto a otros cuerpos. La mecánica estudia y describe, con la mayor rigurosidad posible, los posibles movimientos de traslación, rotación y vibración de los

cuerpos (y todo lo que a ello se relacione). De todas las infinitas posibilidades, en éste curso se estudian sólo las más simples.

¿Por qué es importante el estudio de la mecánica?

Al menos por dos razones:

- *Introduce conceptos básicos* que son indispensables para el estudio de otras disciplinas, y analiza las leyes que relacionan estos conceptos entre sí (energía, intensidad de la corriente, cantidad de movimiento y otros.).
- Estudia el *uso correcto de los instrumentos de medición* (errores objetivos y subjetivos, incertidumbres, veracidad de los resultados y similares) y forma la base del denominado *método científico* de investigación, que comprende la *observación, hipótesis, experimentación y teoría*. Cuando la teoría es lo suficiente general, puede conducir a una *ley*. La parte experimental lleva asociada en la inmensa mayoría de los casos el uso de algún instrumento de medición.

Una tercera razón podría ser que la física está *presente en absolutamente todos los fenómenos de la naturaleza*. Por ejemplo, está comprobado que al excitarse los procesos del pensamiento, aumenta la actividad eléctrica y magnética en la corteza cerebral.

Leyes físicas

Una ley es un nexo estable y reiterado entre magnitudes físicas: (si tal fenómeno tiene lugar, este otro también lo tendrá). Las leyes son el resultado de la evidencia experimental. Representan la síntesis de muchos resultados obtenidos a lo largo de la historia.

En su gran mayoría, las leyes físicas pueden expresarse utilizando la simbología matemática, que refleja tanto el carácter cualitativo de la ley como su carácter cuantitativo. Por ejemplo, consideremos la 2da ley de Newton, referida a una partícula: “La fuerza resultante aplicada a un cuerpo es igual a la variación temporal de su cantidad de movimiento”. La expresión analítica de esta ley resulta mucho más simple:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

La cantidad de movimiento p se define como el producto de la masa (m) por la velocidad (v) de la partícula; ($\vec{p} = m\vec{v}$). Esta expresión, además de la información cualitativa (cuando se lee de manera correcta), también tiene información cuantitativa. Representa una fórmula matemática, donde se cumplen los valores numéricos. También posee información adicional: cuando la masa de la partícula no varía con el transcurso del tiempo, entonces:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} ,$$

y se llega a la conocida expresión

$$\vec{F}_R = m\vec{a} .$$

De aquí que para entender la Física sea indispensable dominar el lenguaje matemático, el concepto de derivada e integral, el despeje de fórmulas, etc. Además, no basta con memorizar una fórmula; es necesario conocer el significado exacto de cada una de ellas, y cuando es aplicable y cuando no (límites de validez o aplicación).

Las leyes físicas son el resultado de la experiencia y de la experimentación, como se

mencionó antes. Así, la ley de Newton para la gravitación universal

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

fue postulada por Newton en 1687 a partir de la generalización de las observaciones del movimiento de los planetas acumuladas durante siglos. La comprobó por vía experimental Henry Cavendish en 1789, utilizando una balanza de torsión (figura 1.1).

En general, toda ley física es el resultado de la experiencia, de la aplicación del método científico a lo largo de muchos años.

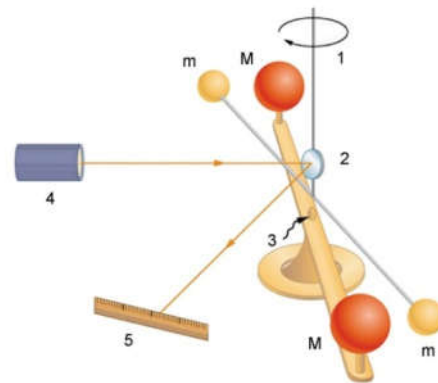


Figura 1.1. Maqueta de la balanza original de Cavendish. Note su tamaño, con el punto de observación a la derecha, la fuente de luz abajo a la izquierda y el sistema de ajuste de las masas M más arriba. La torsión de la fibra (1) hace rotar el espejo (2) y el

reflejo de la fuente (4) se mide en la regla (5).

Sin embargo, por razones de tiempo, no es posible ni siquiera resumir los aspectos históricos, ni tampoco describir los experimentos que dieron origen a las leyes tal como se les conoce hoy. De manera que en los cursos modernos de física se presenta el producto terminado: las leyes tal como se conocen en la actualidad, y se hace muy poca o ninguna referencia a cómo fueron deducidas las mismas.

El objetivo de la mecánica es, por tanto, describir las leyes que rigen los movimientos de traslación, rotación y vibración de los cuerpos. En este curso particular se analizan solo los movimientos más simples.

2. Sistema Internacional de Unidades

Magnitudes físicas

Magnitud es todo lo que se puede medir. Medir significa *comparar* utilizando algún *instrumento*. Una magnitud siempre puede expresarse como una fracción o múltiplo de otra de la misma clase. Ej., longitud, tiempo, velocidad, energía. No son magnitudes el amor, el odio, la belleza, la envidia o los celos. Cuando se efectúa una medición, el valor de la magnitud medida se compara con el de otra magnitud que se designa arbitrariamente, denominada *magnitud patrón*.

Así, la expresión

$$L = 3.12 \pm 0.01 \text{ m}$$

significa que al medir L comparándola con el patrón (metro) se encontró que era 3.12 veces mayor, y que el proceso estuvo afectado de una imprecisión o *incertidumbre* de 1 cm (0.01 m). Este valor se denomina *incertidumbre* de la medición, y se designa

aquí por δL : ($\delta L = 0.01 \text{ m}$). El valor real de la medición puede ser cualquiera comprendido entre 3.11 y 3.13 m (figura 1.2).

La incertidumbre de una medición da una medida de cuan “buena” es la medición. Por ejemplo,

$$L = 3.125 \pm 0.001 \text{ m}$$

indica una medición mucho más *precisa* que la anterior (se utilizaron mejores instrumentos, se tuvo mayor cuidado, etc.). Si al medir una longitud cualquiera A se obtiene una incertidumbre δA , entonces:

$$L = A \pm \delta A .$$

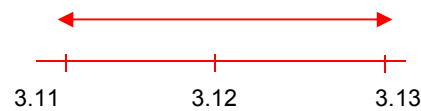


Figura 1.2. Incertidumbre de la medición.

La *incertidumbre relativa* se define como $\epsilon = \frac{\delta A}{A}$ mientras que la *porcentual* es igual al producto de la relativa por 100:

$$\epsilon_{\%} = \epsilon \times 100 .$$

Ejemplo: Se mide un intervalo de tiempo con un cronómetro que aprecia las dos décimas de segundo. Si se toma la apreciación del reloj como incertidumbre de la medición, ¿cuál fue la incertidumbre porcentual?

$$\Delta t = 22.4 \pm 0.2 \text{ s}$$

$$\epsilon = 0.2/22.4 = 8.9 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_{\%} = 0.89 \approx \mathbf{0.9 \%} .$$

Magnitudes fundamentales y derivadas

Las magnitudes derivadas son aquellas que se pueden definir a partir de otras ya conocidas, Por ej.

$$[a] = [v]/[t] ; [v] = [L]/[t] .$$

Pero... ¿cómo se define la longitud? ¿Cómo se define el tiempo? ¿La masa?

Las magnitudes que no pueden definirse a partir de otras magnitudes mediante ecuaciones se llaman *magnitudes fundamentales*. Se definen sobre la base del llamado *criterio operacional*, que considera una magnitud totalmente definida cuando se especifican los pasos necesarios para *medir* su valor.

Así, la longitud de un cuerpo a lo largo de una dirección determinada es aquella propiedad del mismo que se mide colocando una regla dividida en partes iguales a lo largo de esa dirección, haciendo coincidir el cero de la regla con el extremo del cuerpo y anotando el número de divisiones que comprende la regla hasta el otro extremo, etc. La longitud de la regla utilizada es la *magnitud patrón*, y la regla como tal es el patrón. Para evitar que haya tantos patrones como reglas hay, es necesario tomar una de ellas como patrón fundamental, y referir todas las demás longitudes a este patrón.

Durante mucho tiempo se utilizó el *metro patrón*, que se encuentra desde 1799 en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sevres, cerca de París, como patrón internacional de longitud. Se consideraba al metro como la longitud comprendida entre dos marcas hechas en los extremos de una barra de platino-iridio que se encontraba en dicho laboratorio.

En 1960 se redefinió el metro como 1.650.763,73 longitudes de onda de la luz anaranjada-rojiza emitida por el isótopo criptón 86, y volvió a redefinirse en 1983 como la longitud recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299.792.458 de segundo (definición actual).

Desde hace más de 200 años han existido una serie de convenios internacionales para definir las restantes magnitudes patrones, que sólo mencionaremos. También en 1799 se introdujeron los patrones de masa (kilogramo patrón, aún vigente) y de tiempo. Hasta 1955, el patrón científico del tiempo, el segundo, se basaba en el periodo de rotación terrestre, y se definía como 1/86.400 del día solar medio. Cuando se comprobó que la velocidad de rotación de la Tierra, además de ser irregular, estaba decreciendo de manera gradual, se hizo necesario redefinir el segundo.

En 1955, la Unión Astronómica Internacional definió el segundo como 1/31.556.925,9747 del año solar en curso el 31 de diciembre de 1899. El Comité Internacional de Pesas y Medidas adoptó esa definición el año siguiente. Con la introducción de los relojes atómicos —en particular, con la construcción de un reloj atómico de haz de cesio de alta precisión, en 1955— se hizo posible una medida más precisa del tiempo. El reloj atómico mencionado utiliza la frecuencia de una línea espectral producida por el átomo de cesio 133.

En 1967 la medida del segundo en el Sistema Internacional de unidades se definió como la duración de 9.192.631.770

periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

Sistema Internacional de Unidades

Se ha encontrado en la práctica que sólo se necesitan 7 magnitudes fundamentales para definir todas las demás magnitudes, de cualquier disciplina. En el Sistema Internacional (SI) de unidades, vigente legalmente en nuestro país y en la mayoría de los países, las magnitudes fundamentales aparecen en la tabla siguiente (aunque muchas veces otras viejas magnitudes se conserven en la práctica).

Algunas viejas unidades se han redefinido sobre la base de las unidades del SI. Así, por ejemplo:

$$1 \text{ libra-masa} = 0.4535934277 \text{ kg}$$

$$1 \text{ yarda} = 0.9144 \text{ m}$$

$$1 \text{ litro} = 0.001 \text{ m}^3$$

Precisión y exactitud

Los conceptos de precisión y exactitud muchas veces se confunden en la literatura. Entenderemos que una medición es *precisa* cuando la misma es reproducible dentro de un conjunto de valores pequeños.

Las mediciones precisas se asocian a los instrumentos de alta sensibilidad, capaces de hacer determinaciones con un número relativamente grande de cifras significativas después del punto decimal.

La *exactitud* viene dada por la veracidad de la medición cuando se compara con los valores del correspondiente patrón (figura 1.3). Una medición puede ser muy precisa,

pero si el instrumento no estaba calibrado correctamente con relación al patrón, la medición será poco exacta.



Figura 1.3. Un reloj atómico moderno como el que está sobre la mesa no varía más de 1 s en 200 000 años. (Tomado de <https://www.meteorologiaenred.com/reloj-atómico.html>)

Tabla 1.1		
Sistema Internacional de Unidades		
Magnitud	Patrón	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Intensidad de corriente	ampere	A
Intensidad de la luz	bujía, candelilla	b o cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Por ejemplo, si no se verifica que una balanza marca cero cuando el plato está vacío, cualquier pesada posterior tendrá como

error la diferencia que marcaba el instrumento con relación al cero.

Múltiplos y submúltiplos de las magnitudes fundamentales

En la tabla 1.2 aparecen los múltiplos más comunes de las magnitudes fundamentales, también utilizados para indicar múltiplos de otras magnitudes.

En vez de *mega gramo* se utiliza la tonelada: $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg} = 10^6 \text{ g}$. El litro es igual al dm^3 .

Para transformar un valor de una unidad a otra, basta sólo con sustituir el significado del prefijo. Por ej., para transformar 3 dm en metros:

$$3 \text{ dm} = 3 \times (10^{-1}\text{m}) = \mathbf{0.3 \text{ m}}$$

Para transformar 500 g en toneladas:

$$500 \text{ g} = 5 \times 10^2 \text{ g} = 5 \times (10^6 / 10^4) \text{ g} = 5 / 10^4 \text{ ton} = \mathbf{5 \times 10^{-4} \text{ ton.}}$$

Tabla 1.2 Múltiplos y submúltiplos de las magnitudes fundamentales		
Nombre	Símbolo	Significado
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hecto	h	10^2
Deca	da	10
metro, gramo, segundo, litro		
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}

Ejemplos y ejercicios

1. La densidad de un sólido se puede obtener a partir del experimento midiendo su masa (m) y su volumen (V), a partir de la relación $\rho = m/V$. Si el volumen se midió con una incertidumbre relativa de 10^{-3} y la masa del cuerpo era de 200 g, ¿cuál debería ser la apreciación de la balanza a utilizar para que la incertidumbre relativa obtenida al medir la masa no sea mayor que el del volumen?

Resolución:

La apreciación de la balanza se toma como incertidumbre de la medición (δm): $\epsilon_m = \delta m/m$

$$\delta m = \epsilon_m m \leq 10^{-3} \cdot 200 = \mathbf{0.2 \text{ g}}$$

2. Un galón contiene casi 38 decilitros y una pinta es 1/8 de galón. ¿A cuántos litros equivale una pinta aproximadamente?

$$1 \text{ pinta} = 1/8 \text{ galón} = 1/8 \cdot 38 \text{ dl} = 38/8 \cdot (10^{-1}\text{l}) = \mathbf{0.475 \text{ l}}$$

3. Hallar el factor de conversión de a) km/h a m/s; b) g/cm^3 a kg/m^3 .

$$\text{a) R: } \mathbf{1 \text{ km/h} = 5/18 \text{ m/s}}$$

4. Demostrar que 1 g/cm^3 equivale a 1 kg/l y también a 1 ton/m^3 .

3. Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes escalares se describen por una sola cifra o número (longitud, tiempo, masa, temperatura, energía). Las magnitudes vectoriales necesitan de tres parámetros

para ser descritas: intensidad o módulo, dirección y sentido (velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento). Las propiedades matemáticas de las magnitudes escalares son las de los números reales, y no necesitan mayor explicación. Las vectoriales, por el contrario, tienen sus propias reglas de suma, resta y multiplicación que difieren de las anteriores.

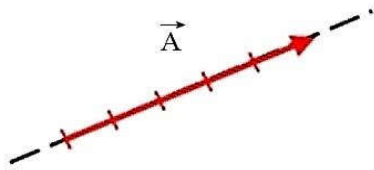


Figura 1.4. Vector 5u

Vector

Las magnitudes vectoriales se representan por vectores, que poseen módulo, dirección y sentido. Una recta en espacio determina una dirección con dos posibles sentidos de recorrido. Un vector en una dirección y sentido dados se representa por una flecha o saeta, cuya longitud representa la intensidad o módulo del mismo.

El vector de la figura 1.4, simbolizado por \vec{A} , tiene una longitud de 5 unidades, lo que se indica de la siguiente forma: $|\vec{A}| = 5u$. (O aún más simple: $A = 5u$). El vector \vec{A} será cero sólo si su módulo es cero ($A = 0$); es decir, cuando coinciden el origen y el extremo en el mismo punto.

Dos vectores son iguales cuando tienen igual módulo y sentido y son paralelos, aunque no se superpongan (vectores libres). Por ejemplo, en la figura 1.5 a la izquierda los vectores A y B son iguales ($\vec{A} = \vec{B}$).

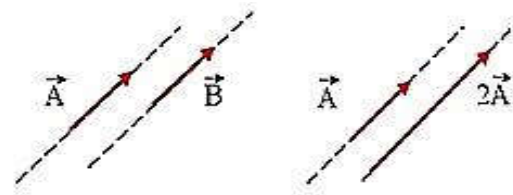


Figura 1.5. Vectores. Igualdad y producto por un escalar.

El producto de un escalar λ por un vector cualquiera \vec{A} ($\lambda\vec{A}$) es otro vector de igual dirección y sentido que \vec{A} , pero de módulo λA . (Si λ es negativo, el sentido del vector producto se invierte). La figura 1.5 muestra el vector \vec{A} junto al vector $2\vec{A}$.

El vector $-\vec{A}$ se denomina *vector opuesto* de \vec{A} :

$$-\vec{A} = (-1) \times \vec{A}.$$

Suma de vectores

La suma de vectores se define a partir de la *regla del polígono*, que consiste en lo siguiente. Considere los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} , orientados de forma arbitraria en el espacio. Para facilitar la comprensión supondremos que los tres se encuentran en el plano del papel (figura 1.6).

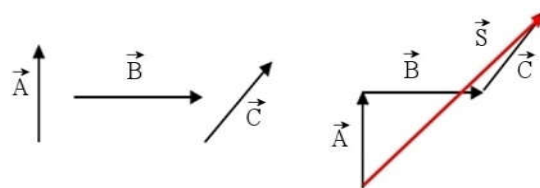


Figura 1.6. Suma de vectores

El vector suma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ se obtiene de la manera siguiente: se traslada el segundo vector, paralelo a sí mismo, hasta hacer coincidir su origen con el extremo del primero. Después se traslada el tercero hasta

hacer coincidir su origen con el extremo del segundo. El resultado se obtiene al unir el origen del primero con el extremo del último.

Si hubiera más de tres vectores, se siguen agregando vectores después del tercero por el mismo procedimiento. El vector suma se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último.

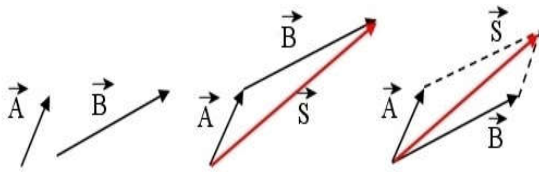


Figura 1.7. Regla del paralelogramo para la suma de dos vectores (ver texto).

Caso particular. Cuando sólo hay dos vectores, el procedimiento anterior conduce a la conocida *regla del paralelogramo*, consistente en llevar ambos vectores a un origen común, trazar las paralelas y tomar el vector suma en la diagonal. Por ejemplo, si $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, de los gráficos en la figura 1.7 se ve de inmediato la total coincidencia de ambos procedimientos.

Propiedades de la suma de vectores (sin demostración)

- El módulo de la suma es menor o igual que la suma de los módulos. Es decir,

$$|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| + |\vec{C}|$$

- La suma de vectores es conmutativa (el orden de los sumandos no altera el resultado):

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

- Es asociativa (el resultado no depende del orden de suma):

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

- 4. Es distributiva respecto al escalar

$$\lambda(\vec{A} + \vec{B}) = \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}$$

Resta de vectores

La resta de dos vectores se define como la *suma del opuesto* (figura 1.8). Por ejemplo, para calcular $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$, se ejecuta la operación $\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$, donde $-\vec{B}$ es el opuesto de \vec{B} .

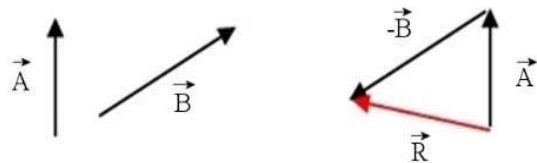


Figura 1.8. Resta de vectores; $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

La resta de vectores **no es** conmutativa; $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$. Se ve fácil que

$$\vec{A} - \vec{B} = (-1)(-\vec{A} + \vec{B}) = -(\vec{B} - \vec{A}).$$

Componentes de un vector

Considere un vector cualquiera en un plano, y un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el del vector, cuyo extremo se encuentra en el punto P (figura 1.9); A_x y A_y son las proyecciones o *componentes* del vector A a lo largo de los ejes coordenados. Representan la longitud desde el origen hasta el intercepto de la perpendicular bajada a partir del punto P a cada uno de los ejes.

Además, A_x y A_y son la abscisa y ordenada del punto respecto al sistema de referencia especificado. De la figura se ve de inmediato que: $\cos\theta = A_x/A$; $\sin\theta = A_y/A$, donde A representa el módulo $|\vec{A}|$. Por tanto, es po-

sible escribir:

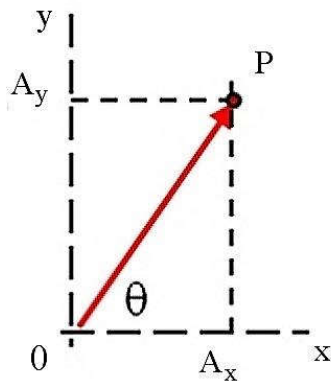


Figura 1.9. Proyecciones del vector sobre los ejes coordenados.

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta ,$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) .$$

Como lo que está entre paréntesis es igual a la unidad, al efectuar se llega a:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} .$$

Ese resultado nos muestra que si se conocen las componentes de un vector, se conoce su módulo (y también su dirección en el espacio, pues:)

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ;$$

$$\theta = \arctan(A_y/A_x) .$$

$$\tan \theta = A_y/A_x$$

Vectores unitarios

Considere los vectores \vec{i} y \vec{j} de módulo unidad $i = j = 1$ orientados a lo largo de los ejes coordenados.

De la figura 1.10 se ve que es posible ex-

presar el vector \vec{A} como una suma de vectores en función de los vectores unitarios:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} .$$

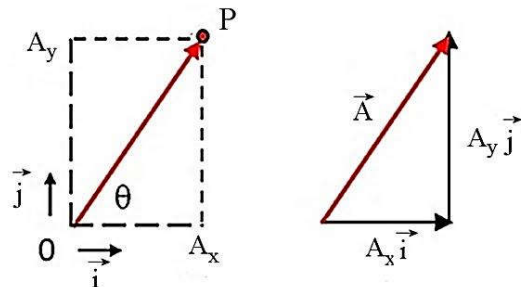


Figura 1.10. Vectores unitarios

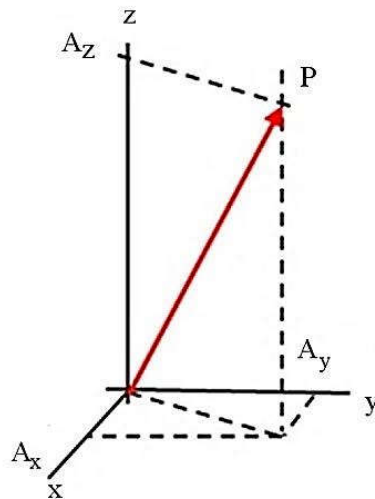


Figura 1.11. Componentes en 3 dimensiones.

Se puede extender esta notación a tres dimensiones, refiriendo el vector a tres ejes coordenados con los ejes perpendiculares entre sí. En este caso,

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} .$$

También, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ (figura 1.11).

La dirección del vector se especifica a partir de los cosenos que forma el vector con cada uno de los ejes coordenados (cosenos directores).

Suma y resta en cartesianas

Considere la suma de dos vectores, $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$ y $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$, representados en la figura 1.12. Llamando \vec{C} al vector suma de \vec{A} y \vec{B} , se ve de la gráfica que $C_x = A_x + B_x$ y que $C_y = A_y + B_y$. Cada una de las componentes del vector C es la suma de las componentes correspondientes de los vectores A y B .

Este resultado se generaliza de forma inmediata a tres dimensiones. Si consideramos las tres componentes de cada vector,

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

El vector suma de estos tres vectores, $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, se puede expresar como $\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$ donde

$$S_x = A_x + B_x + C_x$$

$$S_y = A_y + B_y + C_y$$

$$S_z = A_z + B_z + C_z$$

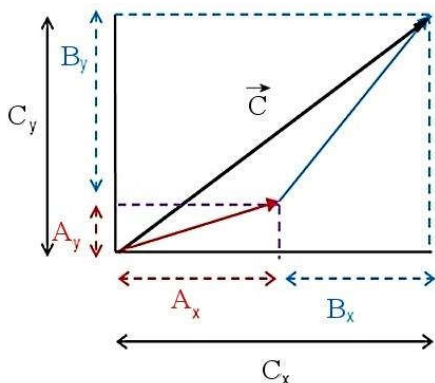


Figura 1.12. Suma de vectores en función de las componentes.

Para la resta el procedimiento es análogo. La componente será negativa si está en la parte negativa de los ejes de coordenadas.

Producto escalar de dos vectores

Sean los vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} que, al ser trasladados paralelos a sí mismos a un origen común, forman entre sí un ángulo θ (figura 1.13).

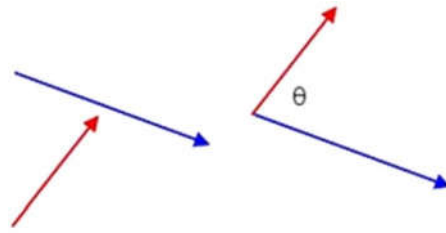


Figura 1.13. Interpretación del producto escalar.

Se define el producto escalar de estos vectores por la expresión $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (se lee: A punto B) y viene dado por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

Propiedades:

- Notar que el resultado es un escalar, no un vector.
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$
- Es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Es distributivo respecto a la suma: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- $\lambda (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \lambda \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \lambda \vec{B}$

Una condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea cero: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}$ y \vec{B} son perpendiculares.

Producto vectorial de dos vectores

Sean los vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} que,

al ser trasladados paralelos a sí mismos a un origen común, forman entre sí un ángulo θ , de manera similar a lo expresado en la figura 1.13 para el producto escalar. Se define el producto vectorial de estos dos vectores por la expresión

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

(y se lee “A cruz B”), donde el vector C tiene las siguientes propiedades:

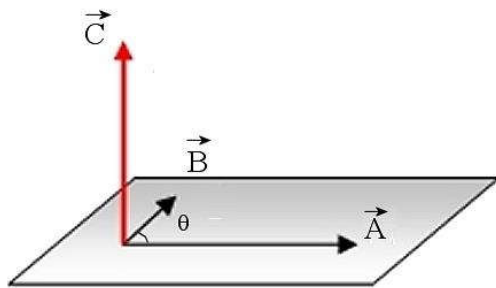


Figura 1.14. Producto vectorial

- Es perpendicular al plano formado por los vectores A y B (figura 1.14),
- Su valor modular viene dado por la expresión $C = AB\text{sen}\theta$.
- Su sentido viene dado por la regla de la mano derecha, que consiste en lo siguiente:

Si se extienden los dedos de la mano derecha a lo largo del primer vector, y se cierra la mano hacia el segundo (por el ángulo mas pequeño) el pulgar indica el sentido de \vec{C} . Note que el producto de vectores *no es conmutativo*:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Propiedades:

- $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
- Es distributivo respecto a la suma:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$\bullet \lambda(\vec{A} \times \vec{B}) = \lambda\vec{A} \times \vec{B}$$

Cuando los vectores A y B se expresan en coordenadas cartesianas, es posible demostrar que su producto vectorial viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

que corresponde al desarrollo por menores de un determinante del tipo

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

1.5 Tema Avanzado

Creación del Sistema Internacional de Unidades

Es posible considerar el inicio de lo que hoy se conoce como Sistema Internacional de Unidades (SI) a partir de la implantación en Francia del *Sistema Métrico Decimal* (SMD), a finales de los 1700. Poco después de la implantación del SMD se elaboraron dos patrones de platino iridio; el *metro* y el *kilogramo*, que fueron registrados de forma oficial en ese país a mediados de 1799 (figuras 2.14 y 2.15). El kilogramo patrón aún se mantiene. La definición del metro se ha modificado varias veces a lo largo de los años, con el fin de disminuir cada vez más la incertidumbre en las comparaciones con los patrones secundarios de otros países.

La 17ª Conferencia General de la Oficina

Internacional de Pesos y Medidas (BIPM en el idioma original, Bureau International des Poids et Mesures) adoptó el acuerdo de que, a partir de 1983, el metro se definiera como la distancia que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de $1/299\,792\,458$ de segundo.



Figura 1.15. Patrones secundarios del metro patrón primario (distancia entre dos marcas en la superficie de la barra).

Las obligaciones del BIPM incluyen la actualización de un sistema global de unidades para que exista unicidad en la presentación de los descubrimientos científicos e innovaciones, en la industria y en el comercio internacional.

El Buró también se encarga de promover la importancia de la metrología para la ciencia, la industria y la sociedad y de velar por la calidad de los patrones primarios contra los que se comparan los patrones secundarios del resto del mundo.

Con ese fin colabora con otras agencias internacionales, coordina eventos científicos, publica informes periódicos, proporciona servicios para la correcta calibración de instrumentos y patrones, realiza actividades científicas y técnicas en sus propios laboratorios para beneficio de los estados

miembros y coordina el mejoramiento del Sistema Internacional de Unidades organizando conferencias generales.



Figura 1.16. Prototipo internacional del kilogramo.

El primero de enero de 2015 el BIPM contaba con 55 estados miembros y 41 asociados a las conferencias. Entre los miembros permanentes 7 de ellos son latinoamericanos: Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México, Uruguay y Venezuela.

Entre los asociados se encuentran otros 7: Bolivia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, Panamá, Paraguay y Perú. Es usual que cada país cuente con su propia oficina de pesas y medidas, aunque hay países donde la denominación es diferente y se hace un énfasis mayor en la metrología que en los patrones.

El Sistema Internacional de Unidades reconoce 7 magnitudes fundamentales, definidas a partir del criterio operacional, que

consiste en describir la forma en que se mide cada magnitud (tabla 1.3). Cualquier otra magnitud es una magnitud derivada, obtenida a partir de fórmulas o expresiones matemáticas que reflejan alguna propiedad física.

TABLA 1.3 MAGNITUDES FUNDAMENTALES DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES		
Magnitud	Unidad	Símbolo de la unidad
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

En la tabla 1.4 aparecen las unidades derivadas del Sistema Internacional traducidas al castellano, junto a su correcta denominación. Note que los nombres de las magnitudes se escriben con minúscula, aunque siguen la ortografía del correspondiente apellido que le dio origen en el idioma original, i.e., no se castellanizan.

Con excepción del metro, el kilogramo, el segundo, el mol y la candela, los símbolos se escriben con mayúscula. En adición se reconocen dos magnitudes y unidades suplementarias, el ángulo plano (radián [rad]) y el ángulo sólido (esterradián [sr]).

Las normas que regulan las unidades de medida y su terminología alcanzan la categoría de ley en muchos países.

TABLA 1.4 MAGNITUDES DERIVADAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES			
Magnitud	Unidad	Símbolo	Relación con otras unidades
Frecuencia	hertz	Hz	s ⁻¹
Fuerza	newton	N	kg·m/s ²
Presión	pascal	Pa	N/m ²
Energía, trabajo	joule	J	N·m
Potencia	watt	W	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	A·s
Potencial, fuerza electromotriz	volt	V	J/C, W/A
Capacidad	farad	F	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
Conductancia	siemens	S	A/V
Flujo magnético	weber	Wb	V·s
Inducción magnética	tesla	T	Wb/m ²
Inductancia	henry	H	Wb/A
Flujo luminoso	lumen	lm	cd·sr
Luminancia	lux	lx	lm/m ²
Actividad radiactiva	becquerel	Bq	1/s
Dosis de radiación absorbida	gray	Gy	J/kg
Dosis equivalente	sievert	Sv	J/kg

En Cuba están definidas por el Decreto-ley 92 de fecha 30 de diciembre de 1982, que

también regula la equivalencia con las unidades de otros sistemas de medida.

Bibliografía

www.geocities.ws/fisicay2/mediciones/mediciones.htm

<http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/basic.html>

Decreto-ley 92, 30 de diciembre de 1982. Accesible en

<http://www.nc.cubaindustria.cu/Documentos/DL%2062%20SI.PDF>

<http://www.bipm.org/en/measurement-units/history-si/>

<http://www.bipm.org/en/about-us/>

Ley de Metrología 19.511, Bs.As. 2/3/72. Accesible en

<http://www.inti.gob.ar/metrologia/pdf/19511.pdf>

Ley No. 15.298. Sistema de unidades de medida. 22/jul/982.

<http://www.parlamento.gub.uy/leyes/ AccesoTextoLey.asp?Ley=15298&Anchor=>

<http://www.normalizacion.gob.ec/>

http://www.bipm.org/utis/common/pdf/si_summary_en.pdf

www.inecc.gob.mx/publicaciones/download/si_mexico1.pdf.

1.4 Problemas resueltos

1. Suponiendo que para el agua destilada $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ exactamente, exprese ésta densidad en kg/L.
2. Hallar el factor de conversión de a) km/h a m/s; b) g/cm^3 a ton/m^3 .
3. Hallar el módulo de la suma de los vectores de la figura si $\theta = 60^\circ$, $A = 1$ y $B = 3$.

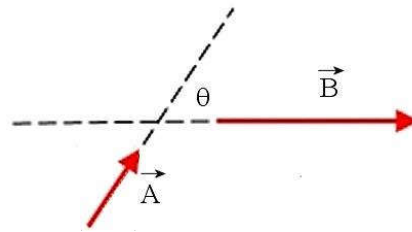
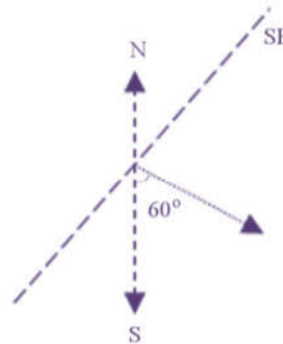


Figura problema 3

4. Un auto recorre 50 km hacia el Este, después 30 km hacia el Norte y como final, 25 km en una dirección de 30° hacia el Este del Norte. Determinar el desplazamiento total.
5. Considere los vectores $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Hallar: a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{b}$; c) el vector \vec{c} tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.
6. Un vector \vec{a} de 10 unidades y otro \vec{b} de 6 unidades apuntan en direcciones que difieren 60° . Calcular: a) producto escalar; b) producto vectorial.

Problema propuesto



Un turista sale de su campamento en los trópicos en una dirección que forma un ángulo de 60° con la dirección SUR y recorre 5 km. Después gira en dirección NORTE, y recorre 8 km. Luego gira hacia el SURESTE, a 45° de la dirección SUR y recorre otros 3 km, hasta que decide hacer un descanso. a) ¿A qué distancia se encuen-

tra en ese momento del campamento? b) ¿En qué dirección debe moverse para regresar al campamento por la vía más corta posible? ($\cos 60 = 0.5$; $\sin 60 = 0.866$, $\sin 45 = \cos 45 = 0.7$)

Soluciones

Problema 1.1

Para hallar el factor de conversión,

$$\text{g/cm}^3 = 10^3 \text{g}/10^3 \text{cm}^3 = \text{kg}/10^3(10^{-1} \text{dm})^3 = \text{kg}/\text{dm}^3 = \text{kg/L}$$

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ kg/L}$$

Problema 1.2

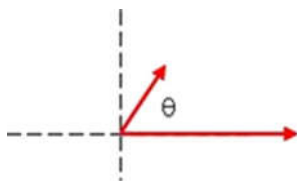
$$\text{a) km/h} = 10^3 \text{m}/3600 \text{s} = 5/18 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ km/h} = 5/18 \text{ m/s}$$

$$\text{b) g/cm}^3 = 10^6 \text{g}/10^6 \text{cm}^3 = \text{ton}/10^6(10^{-2} \text{m})^3 = \text{ton}/10^6(10^{-6} \text{m}^3) = \text{ton}/\text{m}^3$$

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ ton/m}^3$$

Problema 1.3



Llevando los vectores a un origen común en un sistema de coordenadas adecuado; y calculando las componentes de cada vector:

$$A_x = 1 \times \cos 60 = 1/2$$

$$A_y = 1 \times \sin 60 = \sqrt{3}/2$$

$$B_x = 3 \times \cos 0 = 3$$

$$B_y = 3 \times \sin 0 = 0$$

Llamando S al vector suma de A y B:

$$S_x = 1/2 + 3 = 3.5$$

$$S_y = \sqrt{3}/2 + 0 = \sqrt{3}/2$$

Por tanto, el vector suma tendrá la forma:

$$\vec{S} = 3.5\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Como se pide el módulo de la suma:

$$S = \sqrt{(3.5)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = (13)^{1/2}$$

$$S = 3.6$$

Problema 1.4

Haciendo la representación gráfica:

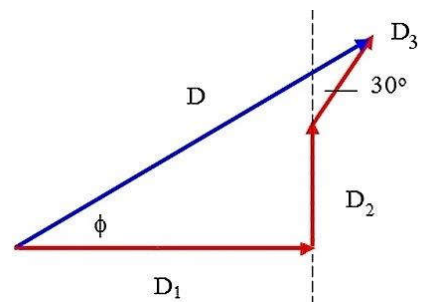
$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$$

Calculando las componentes:

$$\vec{D}_1 = 50\vec{i}$$

$$\vec{D}_2 = 30\vec{j}$$

$$\vec{D}_3 = 25\sin 30\vec{i} + 25\cos 30\vec{j}$$



Sumando las componentes para obtener el vector D:

$$D_x = 50 + 25(1/2) = 62.5$$

$$D_y = 30 + 25(\sqrt{3}/2) = 51.65$$

$$\vec{D} = 62.5\vec{i} + 51.65\vec{j}$$

$$D = \sqrt{(62.5)^2 + (51.65)^2}$$

$$D = 81.1 \text{ km}$$

La dirección del desplazamiento total forma un ángulo con la dirección Este que viene dado por

$$\tan\phi = D_y/D_x = 62.5/51.65 = 1.21$$

$$\phi = \arctan(1.21) \approx 50.4^\circ$$

Respuesta: El auto se desplazó 81.1 km, formando una dirección de 50.4° con la dirección Este.

Problema 1.5

$$a) \vec{a} + \vec{b} = (4-1)\vec{i} + (-3+1)\vec{j} + (1+1)\vec{k}$$

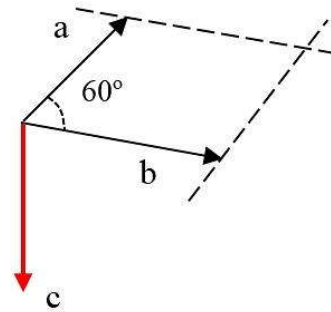
$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$b) \vec{a} - \vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$c) \text{Despejando, } \vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = -(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\vec{c} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$$

Problema 1.6



$$a) \vec{a} \times \vec{b} = abc\cos\theta = 10 \times 6 \times 0.5 = 30$$

$$b) |\vec{a} \times \vec{b}| = absen\theta = 10 \times 6 \times \sqrt{3}/2 = 30\sqrt{3} \approx 52$$

La dirección de $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano que forman \vec{a} y \vec{b} . El sentido viene dado por la regla de la mano derecha.

CAPÍTULO 2

Cinemática de la partícula

2.1 Conceptos básicos

Partícula, punto material o masa puntual.

Vector de posición.

Trayectoria y desplazamiento

2.2 Velocidad y rapidez

2.3 Aceleración

Componentes normal y tangencial

2.4 Caso en que $\bar{a} = 0$: Movimiento rectilíneo uniforme, MRU

2.5 Movimiento a lo largo de una recta con $a \neq 0$ constante, MRUV

Fórmula de la velocidad.

Fórmula del espacio.

Otras fórmulas de interés en el MRUV

2.6 Caída libre de los cuerpos

2.7 Movimiento de proyectiles

Movimiento en el eje X.

Movimiento en el eje Y.

Tiempo de vuelo.

Alcance horizontal.

Alcance máximo.

Ecuación de la trayectoria

2.8 Movimiento relativo

2.9 Problemas resueltos

Capítulo 2

Cinemática de la partícula

2.1 Conceptos básicos

Partícula, punto material o masa puntual

Además del movimiento de traslación, los cuerpos pueden efectuar movimientos de rotación y de vibración. Cuando se analiza el movimiento de traslación exclusivamente, resulta conveniente introducir el concepto de *partícula*, asumiendo que el cuerpo se comporta como un punto, con toda su masa concentrada en él (figura 2.1). También es común referirse a la partícula como *punto material* o como *masa puntual*. Este último es muy común en textos de habla inglesa.



Figura 2.1. Concepto de partícula. Ver texto.

Siempre que sólo interese analizar el movimiento de traslación, se puede asumir, en una primera aproximación, que el cuerpo en cuestión se comporta como una masa puntual. De esta forma se centra la atención en la traslación, y se dejan de tomar en cuenta las posibles rotaciones y vibraciones, que siempre podrán ser analizadas más adelante. La aproximación será más cercana a la realidad mientras mayores sean las distancias involucradas en comparación con las dimensiones del objeto en cuestión.

Vector de posición

El movimiento es *relativo*. Cuando se menciona que un cuerpo se mueve, hay que especificar con relación a qué se está mo-

viendo. Es usual tomar la Tierra como *sistema de referencia*, pero la Tierra también se mueve alrededor del Sol, y éste, junto con todo el sistema solar, alrededor del centro de la galaxia y con relación a otras galaxias, etc.

La posición de una partícula respecto a cualquier sistema de referencia se especifica mediante el *vector de posición* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (figura 2.2).

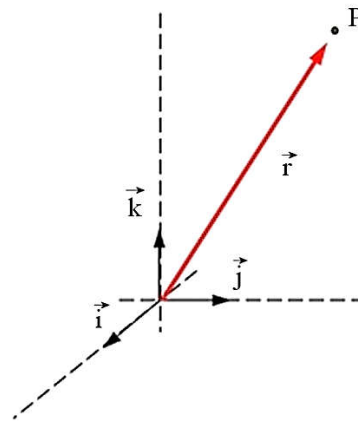


Figura 2.2. Vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Conociendo (x,y,z) se conoce con exactitud la posición de la partícula. En lo que sigue sólo se analizarán problemas en 1 y 2 dimensiones (recta y plano), por lo que la representación del vector de posición será en el plano xy :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Trayectoria y desplazamiento

Cuando la partícula varía su posición con el transcurso del tiempo, la curva imaginaria que se obtiene al unir las posiciones sucesivas que va ocupando la partícula se denomina *trayectoria* de la misma.

En este caso el vector de posición será

función del tiempo, lo que se designa por $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Como $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, también se cumplirá que

$$x = x(t); y = y(t).$$

Supongamos que en un instante t_1 , medido con reloj, la partícula se encuentra en la posición P_1 , con vector de posición \vec{r}_1 . Y que en un instante posterior se encuentra en P_2 , asociado a \vec{r}_2 . Se define el *desplazamiento* de la partícula (figura 2.3) en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Se ve con facilidad que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$.

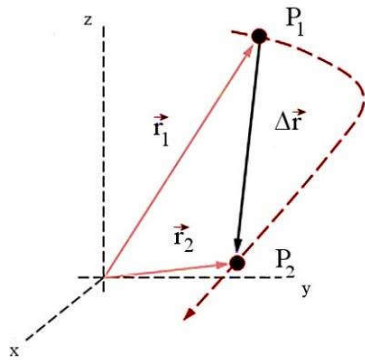


Figura 2.3. Trayectoria de P_1 a P_2 (línea quebrada) y desplazamiento (vector $\Delta\vec{r}$).

2.2 Velocidad y rapidez

Si la partícula ha realizado un desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en el intervalo de tiempo Δt , es posible definir su velocidad media por la expresión

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Como Δt es un escalar siempre positivo, la velocidad media siempre tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (figura 2.4). La velocidad instantánea

(o simplemente, la velocidad) se define como el límite para cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

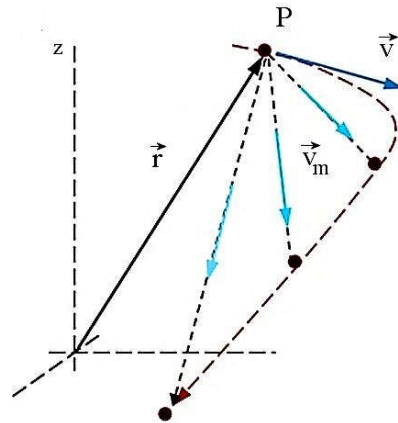


Figura 2.4. Velocidad media e instantánea.

Cuando Δt tiende a cero, el vector desplazamiento también tiende a cero, y cada vez la cuerda se acerca más a la tangente a la curva (ver figura). Como la velocidad tiene la misma dirección que $\Delta\vec{r}$, también su dirección se acercará cada vez más a la tangente a la curva. En el límite, cuando $\Delta t = 0$, la dirección de la velocidad coincide con la tangente a la trayectoria. Es decir, *la velocidad instantánea de la partícula siempre es tangente a la trayectoria*.

En coordenadas cartesianas en dos dimensiones $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j},$$

donde v_x y v_y son las componentes de la velocidad a lo largo de los ejes coordenados: $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$.

Rapidez

Considere un segmento cualquiera de trayectoria recorrida entre los puntos P_1 y P_2 , y sea $\Delta \ell$ la longitud de ese intervalo. Si la longitud se recorre en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, la rapidez de la partícula se define por la expresión

$$\text{rapidez} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \ell}{\Delta t}.$$

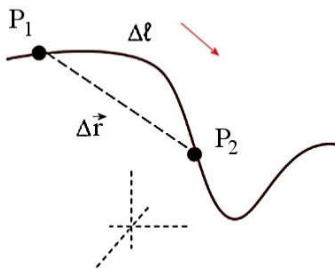


Figura 2.5. Rapidez

De la figura 2.5 se ve que $\Delta \ell$ y Δr no son iguales sino que, a lo más, $\Delta \ell \approx \Delta r$. Sin embargo, a medida que el intervalo Δt se hace menor y el punto P_2 se acerca a P_1 , el valor de Δr y el de $\Delta \ell$ irán siendo cada vez más similares. En el límite para $\Delta t \rightarrow 0$ el punto P_1 y el P_2 coinciden, y es posible sustituir uno por el otro. En ese caso $d\ell = dr$ (figura 2.6), y queda entonces

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = \frac{d\ell}{dt} = \frac{dr}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\vec{v}|.$$

Por tanto, la rapidez de la partícula no es más que el módulo de su velocidad (figura 2.7).

Resumiendo:

$$|\vec{v}| = \frac{d\ell}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

Longitud recorrida a lo largo de la tra-

yectoria

Si se desea calcular la longitud $\Delta \ell$, despejando en la expresión anterior se obtiene $d\ell = v dt$; por tanto,

$$\Delta \ell = \sum_1^2 d\ell$$

$$\int_{l_0}^l d\ell = \int_{t_0}^t v dt,$$

$$\Delta \ell = \int_{t_0}^t v dt.$$

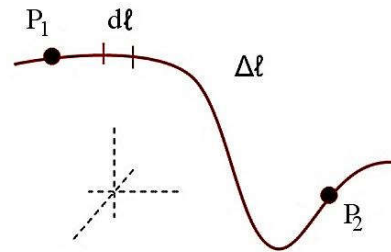


Figura 2.6. Longitud o espacio recorrido a lo largo de la trayectoria ($\Delta \ell$).



Figura 2.7. El velocímetro indica la rapidez y el odómetro el $\Delta \ell$ recorrido (151517 total, 6536 parcial).

Unidades

En el SI de unidades las longitudes patrones se miden en metros y el tiempo patrón en

segundos. De aquí que, en las unidades básicas:

$$[v] = [L]/[t] = \text{m/s}.$$

2.3 Aceleración media e instantánea en el plano

Sean \vec{v}_1 y \vec{v}_2 las velocidades de una partícula en los instantes t_1 y t_2 . Entonces,

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

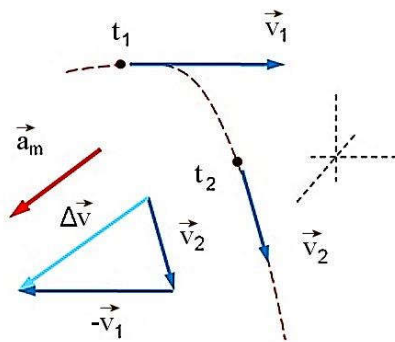


Figura 2.8. Aceleración media a_m .

La *aceleración media* de la partícula en ese intervalo de tiempo se define por la expresión

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

y se comprueba con facilidad que el vector a_m , paralelo al vector Δv , está dirigido siempre hacia la parte cóncava de la trayectoria (figura 2.8). La aceleración (instantánea) se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo Δt tiende a cero:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Cuando la velocidad se expresa en función de sus componentes,

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j},$$

aplicando la definición anterior, se obtiene

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j},$$

$$a_x = dv_x/dt,$$

$$a_y = dv_y/dt.$$

Componentes normal y tangencial de la aceleración

Hasta el momento se ha utilizado para establecer la posición de la partícula un sistema de referencia ligado a tierra. Consideremos ahora otro sistema de referencia: uno ligado a la partícula, de manera que se mueve junto con ella con uno de los lados tangente a la trayectoria (figura 2.9).

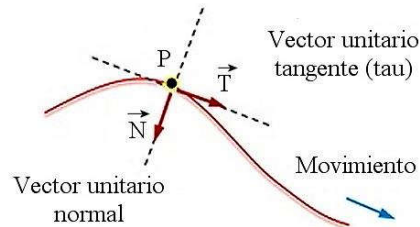


Figura 2.9. Componentes en un sistema de referencia móvil.

Los ejes coordenados de este sistema de referencia se toman de forma que uno de ellos es tangente a la trayectoria en cada instante, y el otro es perpendicular a esa tangente. Se introducen, además, el vector unitario tangente \vec{T} (tau) y el vector unitario normal \vec{N} , este último dirigido hacia la parte cóncava de la curva. El vector \vec{T} se puede expresar en función de la velocidad de la partícula, que también es tangente a la

trayectoria, como

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$$

Expresando la aceleración en función de \vec{T} :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

El primer término, dv/dt , es la variación de la rapidez a lo largo de la curva, y tiene la dirección del vector tangente; es la *aceleración tangencial*:

$$a_t = \frac{dv}{dt}.$$

Más adelante se demuestra que el 2do término se puede expresar como

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right| \vec{N}$$

$$\text{donde } \left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right| = \frac{v}{R},$$

por lo que el 2do término es igual a $\frac{v^2}{R} \vec{N}$.

Llamando aceleración tangencial al primer término

$$a_t = \frac{dv}{dt},$$

y aceleración normal al 2do:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

al sustituir en la expresión de la aceleración se obtiene

$$\vec{a} = a_t \vec{T} + a_n \vec{N}.$$

Demostración $v \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{N}$

Como \vec{T} es un vector unitario, entonces el producto escalar de él consigo mismo es igual a la unidad:

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1.$$

La derivada del producto escalar sigue las mismas reglas que las derivadas de las funciones reales; y derivando respecto al tiempo se obtiene

$$2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = 0.$$

De acuerdo a las propiedades analizadas del producto escalar, significa que los vectores \vec{T} y $d\vec{T}/dt$ son perpendiculares, por lo que el vector $d\vec{T}/dt$ tiene la dirección del vector unitario normal \vec{N} , y por tanto es posible escribir

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right| \vec{N}.$$

Para dilucidar el significado de $\left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right|$ consideremos la definición de derivada:

$$\left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

y $\Delta T/\Delta t$ se puede evaluar de la figura 2.10.

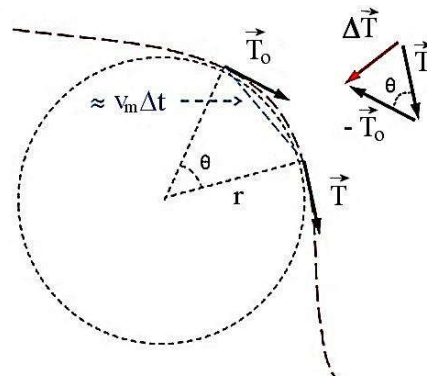


Figura 2.10. Evaluación de $\Delta T/\Delta t$

El triángulo formado por los dos radios y el

segmento de cuerda de valor $v_m \Delta t$ en la figura es semejante al triángulo formado por \vec{T} , \vec{T}_0 y $\Delta \vec{T}$, por ser isósceles con ángulo común entre los lados iguales. Que el ángulo es el mismo en ambos casos se ve de inmediato, considerando que los vectores unitarios son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia. Cuando dos ángulos agudos tienen sus lados correspondientes perpendiculares entre sí, son iguales.

Analizando entonces la proporcionalidad entre lados homólogos de triángulos semejantes, se cumplirá que

$$\frac{\Delta T}{v_m \Delta t} = \frac{T}{R} = \frac{1}{R},$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{v_m}{R}.$$

Considerando ahora un intervalo Δt tendiendo a cero, la velocidad media v_m tenderá al valor de la velocidad instantánea en un punto, y el cociente $\Delta T/\Delta t$ se convertirá en la derivada dT/dt ; luego:

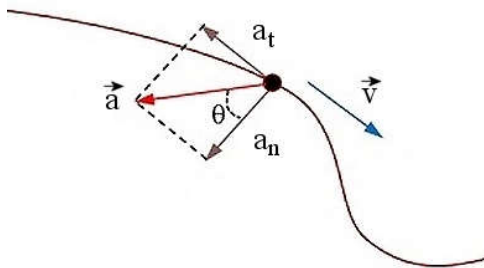


Figura 2.11. Aceleración en el plano.

$$v \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{N},$$

que es la expresión que deseábamos encontrar.

La componente a_n es siempre positiva,

mientras que a_t puede ser positiva o negativa, según sea que la partícula vaya aumentando o reduciendo su velocidad a lo largo de la trayectoria.

La figura 2.11 indica que el vector aceleración siempre estará dirigido hacia la parte cóncava de la curva. Su dirección puede obtenerse a partir de las componentes; $\tan \theta = a_n/a_t$.

2.4 Caso en que $\vec{a} = 0$: Movimiento rectilíneo y uniforme (MRU).

A continuación se estudian algunos casos particulares de movimiento, comenzando por el más sencillo posible.

Si $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, entonces $\vec{v} = \text{constante}$. Y si

la velocidad es constante (módulo, dirección y sentido), el movimiento tiene que ser a lo largo de una recta (figura 2.12).

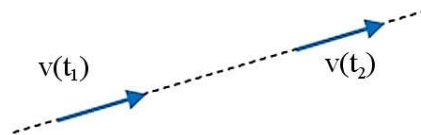


Figura 2.12. MRU

En este caso resulta conveniente escoger el eje x de forma que coincida con la dirección del movimiento. El vector de posición de la partícula tendrá la forma $\vec{r} = x\vec{i}$.

En la figura 2.13, $|\vec{r}_1| = x_1$; $|\vec{r}_2| = x_2$. Como sólo hay una dirección con dos posibles sentidos, se puede adoptar el convenio de que los vectores que estén dirigidos hacia la derecha se representen con un signo (+), mientras que los dirigidos a la izquierda se representen con un signo (-). De esta forma se puede obviar completamente la represen-

tación vectorial, y trabajar sólo con los escalares.

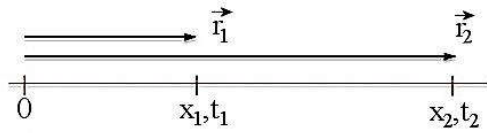


Figura 2.13. Ver texto.

Así se obtiene, para la velocidad media $v_m = \Delta x / \Delta t$, donde $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

La velocidad es positiva cuando el movimiento es hacia la derecha y negativa en caso contrario. Como la velocidad es constante, la velocidad instantánea será igual a la velocidad media en todo instante, por tanto:

$$v = \Delta x / \Delta t.$$

Esta es la fórmula de la velocidad en el MRU.

Formula del espacio en el MRU

Tomando $t_1 = 0$ como el momento en que se comienza a contar el tiempo y despejando Δx en la expresión anterior, se llega a la expresión para el espacio recorrido:

$$\Delta x = vt.$$

Si se desea expresar como varía la abscisa en función del tiempo, sustituyendo Δx en la expresión anterior, se obtiene

$$x = x_0 + vt,$$

donde x_0 es la posición de la partícula para $t = 0$.

Si se grafica la velocidad en función del tiempo, se obtiene una recta paralela al eje de las t . En cambio, la ecuación de la abscisa en función del tiempo es la ecuación de

una recta con intercepto x_0 y pendiente v (figura 2.14).

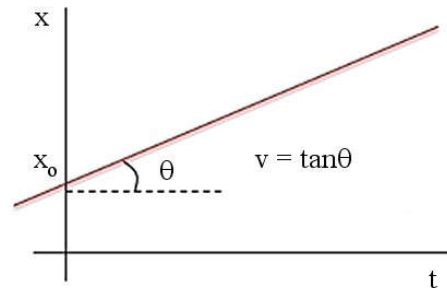


Figura 2.14. Abscisa en el MRU

Ejercicio: Analizar cómo queda el gráfico cuando x_0 es negativo y como cuando la velocidad es negativa.

Unidades

En el SI de unidades las longitudes se miden en metros (magnitud patrón) y el tiempo en segundos. Por tanto,

$$[v] = [L]/[t] = \text{m/s}$$

$$[a] = [v]/[t] = \text{m/s}^2.$$

2.5 Movimiento a lo largo de una recta con aceleración constante (MRUV)

Fórmula de la velocidad

Como el movimiento es en una recta, la expresión de la aceleración queda como $a = dv/dt$. Considerando la derivada como un cociente de infinitesimales antes de alcanzar el límite, es posible trabajar con los diferenciales como si fueran números reales. Por tanto, despejando en la ecuación anterior,

$$dv = a dt.$$

La igualdad debe mantenerse cuando se integra a ambos lados de la expresión, considerando que para el instante inicial t_0 la velocidad de la partícula tenía el valor t_0

y que la aceleración es constante y se puede sacar fuera de la integral,

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_{t_0}^t dt.$$

Integrando ambas expresiones y haciendo $t_0 = 0$ por conveniencia (instante en que se comienza a contar el tiempo), se llega a la *fórmula de la velocidad* en el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

$$v = v_0 + at. \quad (1)$$

Note que t siempre es (+), pero v , v_0 y a pueden ser positivos o negativos, y que aquí se sigue el mismo convenio de signos que en el caso del MRU. El vector que apunte a la derecha (sea \vec{v} o \vec{a}) será positivo, y negativo en caso contrario. Si v y a están dirigidas en el mismo sentido el movimiento es acelerado; si están en sentido contrario el movimiento es retardado

Hay cuatro posibilidades que se resumen en la tabla 2.1. Es oportuno enfatizar que los vectores carecen de signo; poseen módulo, dirección y sentido. El convenio de la tabla 2.1 es válido sólo si el movimiento es unidimensional.

El gráfico de v en función del tiempo proporciona la ecuación de una recta. En el ejemplo de la figura 2.15 se ha representado un movimiento retardado hacia la derecha.

Tabla 2.1	
Posibles movimientos en el MRUV	
	v a
Acelerado a la derecha ($v > 0, a > 0$)	→ →
Acelerado a la izquierda ($v < 0, a < 0$)	← ←
Retardado a la derecha ($v > 0, a < 0$)	→ ←

Retardado a la izquierda ($v < 0, a < 0$) ← →

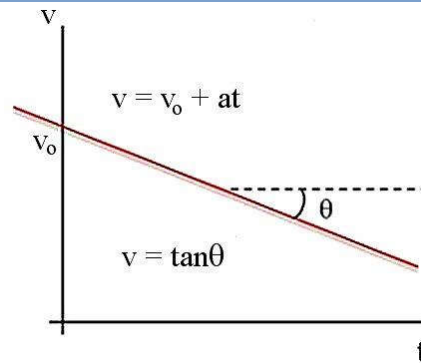


Figura 2.15. Velocidad en el MRUV

Fórmula del espacio en el MRUV

Para hallar la expresión del espacio recorrido, a partir de la definición de velocidad $v = dx/dt$ es posible despejar dx considerando un instante antes de llegar al límite:

$$dx = v dt.$$

Integrando a ambos lados del signo de igualdad, y sustituyendo $v = v_0 + at$, se obtiene:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t (v_0 + at) dt = v_0 \int_{t_0}^t dt + a \int_{t_0}^t t dt.$$

La integración definida de la expresión anterior, considerando $t_0 = 0$ como se hizo antes, conduce a:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (2)$$

Si se prefiere, es posible expresar la abscisa explícitamente en función del tiempo:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

Note que estas expresiones proporcionan en realidad *la abscisa* en un instante determinado, *que no es lo mismo* que el espacio total recorrido (que tampoco es igual a $x - x_0$; por ejemplo, si el móvil sale y retrocede al origen, el espacio total no es cero, pero Δx

= 0).

Otras fórmulas de interés en el MRUV

Si se despeja el tiempo en la fórmula de la velocidad (1), se sustituye en la fórmula de Δx (2) y se simplifican términos, se llega a

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x, \quad (3)$$

relación que no depende del tiempo y puede ser de utilidad en muchos casos. Si se sustituye la fórmula del espacio (2.5.2) en la expresión de la velocidad media $v_m = \Delta x / \Delta t$ y se simplifican términos, se llega a:

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}. \quad (4)$$

Finalmente, como Δx también puede escribirse como $\Delta x = v_m t$, sustituyendo la expresión (4) se llega a

$$\Delta x = \left(\frac{v_0 + v}{2} \right) t. \quad (5)$$

Note que las ecuaciones (1) a la (5) se derivaron para el caso particular en que la aceleración es constante y a lo largo de una recta. No se pueden aplicar en ningún otro caso.

2.6 Caída libre de los cuerpos

Cuando es posible despreciar la resistencia del aire, todos los cuerpos caen verticalmente hacia la tierra con la misma aceleración, de aproximadamente $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Esto se puede comprobar con facilidad en experimentos de cátedra, donde una pluma y una esfera pequeña de acero caen al unísono en un tubo al que se le ha extraído antes el aire.

Los ejes de la gráfica en la figura 2.16 representan la distancia al punto inicial y el

tiempo transcurrido desde que se deja caer un objeto cerca de la superficie terrestre.

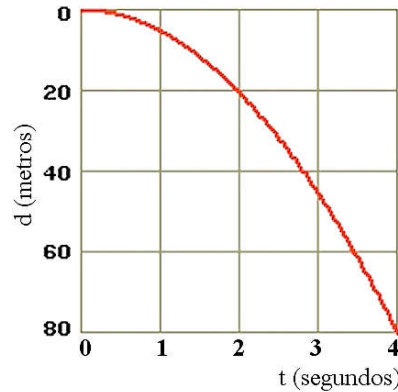


Figura 2.16. Avance de una masa puntual en caída libre.

La gravedad acelera el objeto, que sólo cae unos 20 metros en los primeros dos segundos, pero casi 60 metros en los dos segundos siguientes. También se encuentra en la práctica que g disminuye a medida que aumenta la altura sobre la tierra (se analizará más adelante) y que, además, varía con la latitud geográfica: (tabla 2.2).

Tabla 2.2 Aceleración de la gravedad g en diversas latitudes	
Lugar	cm/s^2
Ecuador (0°)	978.0
La Habana (23° N)	978.2
Washington (47° N)	980.7
Alaska (64° N)	982.2
Polos norte y sur (90°)	983.2

Como el movimiento de caída libre es con aceleración constante y a lo largo de una recta, se regirá por las mismas expresiones que rigen el MRUV. Lo único que varía es

el sistema de referencia, que ahora se encuentra vertical (equivale a rotar 90° a la izquierda el sistema de referencia que se utiliza para el movimiento en el eje x). El convenio de signos se mantiene, figura 2.17).

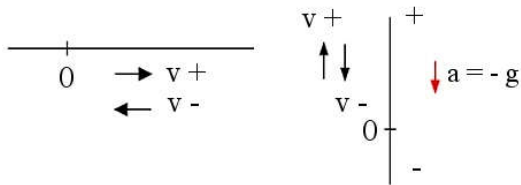


Figura 2.17. Sistema de referencia para caída libre. Basta rotar el horizontal en sentido contrario al reloj.

Con este convenio de signos, las ecuaciones de la caída libre toman la forma siguiente:

$$v = v_0 - gt$$

$$\Delta y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y.$$

Notar que, al igual que el movimiento analizado en el eje x , la variable y representa la abscisa en un instante determinado, y *no* el espacio recorrido por la masa puntual. Por lo general el cero del sistema de referencia se toma de forma que coincida con la superficie de la tierra, pero es posible colocarlo en cualquier otro lugar.

2.7 Movimiento de proyectiles

Un proyectil es cualquier objeto que se mueve bajo la acción exclusiva de la gravedad y de la resistencia del aire, después que se le aplica un impulso inicial. En lo que sigue no tomaremos en cuenta la resistencia del aire (aproximación válida cuando la distancia a recorrer por el proyectil no es muy grande).

Cuando se analiza la variación de la posi-

ción ($y = y(x)$) se comprueba que cualquier proyectil describe una trayectoria característica representada en un esquema en la figura 2.18. Si sólo actúa la gravedad, la trayectoria es una parábola perfecta.

El movimiento del proyectil se caracteriza por una serie de parámetros:

\vec{v}_0 : velocidad inicial

θ_0 : ángulo de lanzamiento o ángulo inicial (note que el ángulo que forma la velocidad con la horizontal varía a medida que el proyectil avanza)

y_m : altura máxima que alcanza el proyectil

x_h : alcance horizontal (distancia recorrida a lo largo del eje x)

t_v : tiempo de vuelo (tiempo que el proyectil está en el aire)

Existen relaciones entre todas estas magnitudes; por ejemplo, el alcance horizontal es función de la velocidad inicial y el ángulo de disparo. La posición del proyectil quedará determinada por completo en cada instante si se conoce su *ley del movimiento*, es decir, si se conoce la dependencia $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Como estamos en un movimiento en dos dimensiones, entonces

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

donde $x = x(t)$; $y = y(t)$. Si se conoce el vector de posición en cada instante, entonces se puede conocer también la velocidad en cada instante, puesto que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Para calcular $y(t)$ y $x(t)$ analicemos la componente del movimiento en cada eje por

separado.

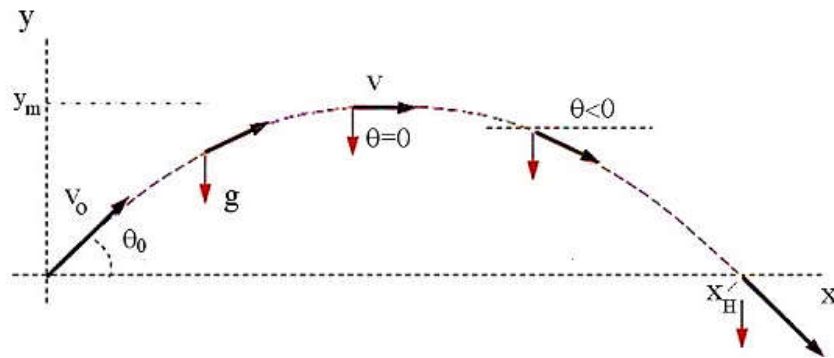


Figura 2.18. Trayectoria de un proyectil

Movimiento en el eje X

La única aceleración actuando es la de la gravedad, que no tiene componente en el eje x. Por tanto, el movimiento en el eje x es con velocidad constante, a lo largo de una recta. Las expresiones a utilizar son las mismas del MRU tomando la proyección o componente de la velocidad inicial a lo largo del eje x:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0$$

$$\Delta x = v_0 \cos \theta_0 t.$$

Movimiento en el eje Y

La componente de la velocidad inicial en eje y es:

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0.$$

Y se ve fácil que las expresiones serán las mismas que las de caída Libre (movimiento en el eje y con aceleración de la gravedad).

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

$$\Delta y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Tiempo de vuelo t_v

Cuando no hay fricción se comprueba con facilidad que el proyectil tarda el mismo intervalo de tiempo en llegar hasta su altura

máxima que el que tarda en regresar después hasta el suelo. Por tanto, es posible escribir

$$t_v = 2t',$$

donde t' es el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. El tiempo t' se puede calcular considerando que, al alcanzar la altura máxima el proyectil invierte su recorrido en el eje y, por lo que en ese instante $v_y = 0$. Haciendo $v_y = 0$ en la expresión correspondiente:

$$0 = v_0 \sin \theta_0 - gt'$$

$$t' = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}.$$

El tiempo de vuelo es el doble de este valor,

$$t_v = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}.$$

Alcance horizontal x_h

Al sustituir el tiempo que el proyectil está en el aire (t_v) en la expresión de Δx más arriba, obtendremos su máximo alcance. Sustituyendo:

$$\Delta x = v_0 \cos \theta_0 \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}.$$

Considerando que $2\text{sen}\theta_0\text{cos}\theta_0 = \text{sen}(2\theta_0)$ y que $x_0 = 0$, agrupando y simplificando se obtiene:

$$x_h = \frac{v_0^2 \text{sen}2\theta_0}{g}$$

En la figura 2.19 se muestra el efecto de incrementar la velocidad inicial del proyectil cuando θ_0 es constante.

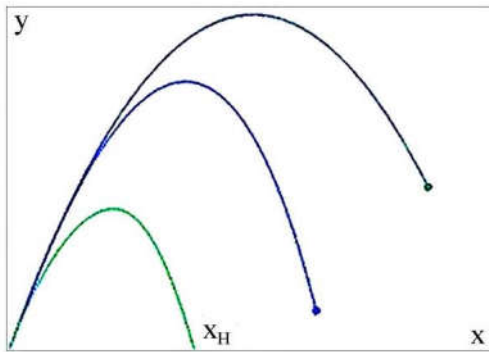


Figura 2.19. Efecto de aumentar la velocidad inicial en el alcance horizontal x_h para un valor dado de θ_0 .

Ángulo de alcance máximo

Dada una velocidad inicial v_0 , el ángulo inicial que proporciona el máximo alcance del proyectil se obtiene imponiendo la condición de extremo relativo en la expresión anterior, ya que en ese caso x_h solo depende de θ_0 .

$$\frac{dx_h}{d\theta_0} = \frac{v_0^2 \text{cos}(2\theta_0) \times 2}{g}$$

Igualando a cero esta expresión (condición de extremo relativo) se obtiene que la derivada será cero si $\text{cos}(2\theta_0) = 0$, o lo que es igual, si $2\theta_0 = \pi/2$. De aquí se obtiene

$$\theta_0(\text{máx}) = \pi/4 \text{ (} 45^\circ \text{)},$$

que se comprueba corresponde a un máximo de la función $x_h = x_h(\theta_0)$.

Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo en las expresiones para Δx y Δy , haciendo $x_0 = y_0 = 0$, es posible demostrar que la ecuación de la trayectoria sigue la siguiente dependencia parabólica (ejercicio para el lector);

$$y = x \tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta_0} x^2$$

2.8 Movimiento relativo

Cuando un objeto cae de un móvil (automóvil, tren) la descripción del movimiento que proporciona un observador en el móvil por lo general difiere de la descripción que ofrece un observador en tierra. Un observador en una de las ventanas del móvil verá que el objeto se aleja de sí en línea recta hacia la tierra, mientras que el observador en tierra verá que sigue al móvil en su movimiento, describiendo una parábola (figura 2.20).

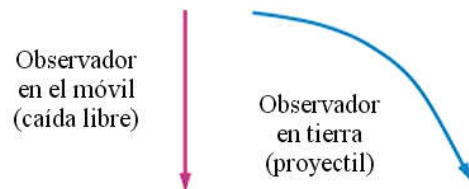


Figura 2.20. Un mismo movimiento en diversos sistemas de referencia.

Interesa encontrar la relación que hay entre el movimiento visto por ambos observadores. Con este fin, considere una masa puntual en movimiento y dos sistemas de referencia, uno fijo a tierra (xy) y otro ligado a un móvil ($x'y'$) que se mueve con velocidad constante respecto al sistema fijo.

Los vectores \vec{r} y \vec{r}' son los vectores de posición de la masa puntual P respecto a

cada sistema de referencia. El vector \vec{r}_μ es el vector de posición del sistema móvil respecto al sistema fijo. Según las reglas de la suma de vectores, $\vec{r} = \vec{r}_\mu + \vec{r}'$ (figura 2.21).

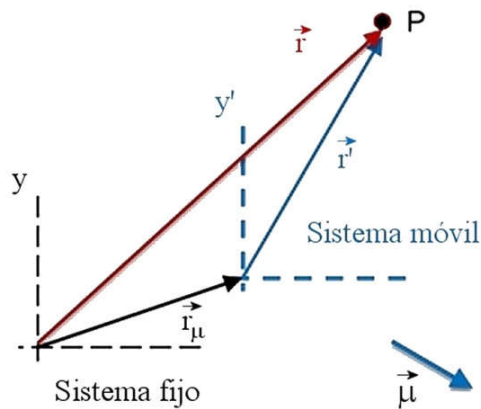


Figura 2.21. Movimiento relativo del punto P en dos sistemas de referencia.

Como la masa puntual está en movimiento, y el sistema móvil suponemos que se mueve con velocidad constante, los tres vectores están variando su posición de forma continua con el transcurso del tiempo. Derivando en la expresión anterior con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\vec{v} = \vec{\mu} + \vec{v}'.$$

donde:

\vec{v} : velocidad de la masa puntual respecto al sistema fijo.

\vec{v}' : velocidad de la masa puntual respecto al sistema móvil.

$\vec{\mu}$: velocidad del sistema móvil respecto al sistema fijo.

Se acostumbra representar la expresión anterior despejando \vec{v}' :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu}.$$

Ejemplo: Un auto se mueve a 10 m/s. Comienza a llover sin viento, cayendo las gotas con velocidad constante de 5 m/s. ¿Con qué Angulo chocan las gotas de lluvia el parabrisas lateral?

Datos:

(Ver figura 2.22).

Auto (sistema móvil): $\mu = 10$ m/s

Lluvia (masa puntual respecto a tierra): $v = 5$ m/s

Lluvia respecto al sistema móvil (v')?

$$\tan \theta = \mu/v = 10/5 = 2$$

$$\theta = \arctan(2)$$

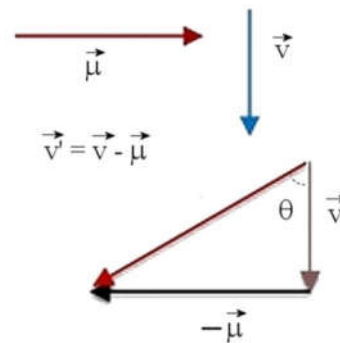


Figura 2.22

Respuesta: $\theta \approx 63^\circ$ con la vertical

2.9 Problemas resueltos

1. Un auto sube una loma a 40 km/h y la baja a 80 km/h. ¿Cuál fue su velocidad media en el recorrido?

2. Dos trenes salen en el mismo instante de las ciudades A y B, separadas 300 km, con diferente rapidez media constante de 60 y

90 km/h, uno al encuentro del otro. a) ¿A qué distancia de la ciudad A se cruzan? b) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta ese momento?

3. En el momento que se enciende la luz verde de un semáforo, un auto arranca con aceleración de 6 m/s^2 . En el mismo instante, un camión que iba con rapidez constante de 30 m/s alcanza y rebasa al automóvil. a) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el auto al camión? b) ¿Cuál era la velocidad del auto en ese instante? c) Dibuje el gráfico de x vs. t para ambos vehículos.

4. Una persona sube por una escalera automática inmóvil en 90 s . Cuando la persona está inmóvil sobre la escalera y ésta se mueve, llega arriba en 60 s . ¿Qué tiempo tarda la persona en subir cuando ella y la escalera están en movimiento?

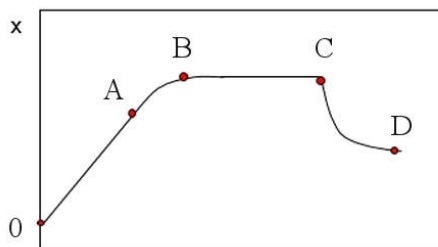


Figura problema 6

5. Un tren que avanza a velocidad v_{01} comienza a frenar con aceleración a para no chocar con otro que avanza delante en el mismo sentido con velocidad $v_{02} < v_{01}$ y que se encuentra a una distancia d del primero. Demuestre que si $d < (v_{01}-v_{02})^2/2a$ habrá choque, y no lo habrá en caso de que $d > (v_{01}-v_{02})^2/2a$.

6. La gráfica representa el movimiento de una masa puntual en una recta. a) Diga, para cada intervalo, si la velocidad y la

aceleración son (+), (-) o cero. b) Describa el movimiento de la masa puntual.

7. Un globo asciende con rapidez de 12 m/s y deja caer un bulto cuando se encuentra a la altura de 80 m . ¿Cuánto tarda el bulto en llegar al suelo? (No se toma en cuenta la resistencia del aire. Tome $g = 10 \text{ m/s}^2$).

8. Desde un puente de 45 m de altura se deja caer una piedra. Otra piedra se arroja por la vertical hacia abajo, 1 segundo después. Si ambas piedras llegan al suelo al mismo tiempo, ¿cuál fue la velocidad inicial de la segunda piedra?

9. Un cuerpo en caída libre a partir del reposo recorre la mitad de su camino total en el último segundo de su caída. Calcular: a) tiempo de vuelo y b) altura inicial.

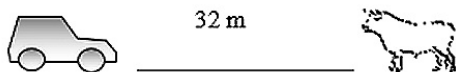
10. Se dispara en la horizontal un proyectil desde un cañón situado a 44 m por encima de la horizontal con velocidad inicial de 240 m/s . Diga: a) tiempo de vuelo, b) alcance horizontal, c) componente vertical de la velocidad al llegar al suelo.

11. Un auto que viajaba a 108 km/h comienza a frenar al entrar en una sección circular de la carretera de radio de curvatura 20 m . Si su rapidez se reduce de manera uniforme en 2 m/s cada segundo, ¿cuál será su aceleración en el momento que alcance 72 km/h ?

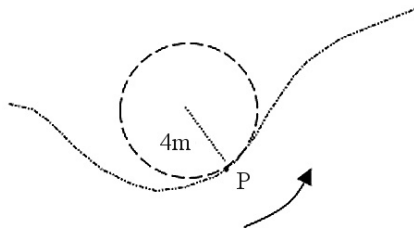
Problemas propuestos

1. Un auto que al inicio se movía con MRU acelera a partir de un cierto instante a razón de 1 m/s^2 durante 12 s . Si en esos 12 s el auto recorrió 180 m . a) ¿Cuál fue su velocidad final? b) ¿Cuál era la velocidad inicial? c) ¿Cuál fue su velocidad media en los de 12 s ?

2. A 32 m por delante de un auto que viaja a 72 km/h se atraviesa una vaca que andaba suelta en la vía. El chofer aplica los frenos pero, no obstante, 2 segundos después el auto choca con la vaca. Calcular: a) velocidad del auto al chocar y, b) aceleración del auto después de aplicar los frenos, supuesta constante.



3. Considere una masa puntual moviéndose de izquierda a derecha por la trayectoria curvilínea de la figura, de forma tal que cuando se encuentra en P su rapidez disminuye con el tiempo.



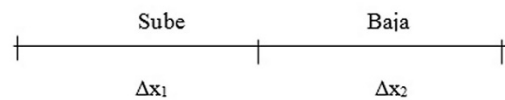
a) Escriba la expresión para la aceleración de la masa puntual en función de las componentes normal y tangencial; b) señale en el gráfico la representación vectorial aproximada de la aceleración de la masa puntual; c) Calcule el módulo de esa aceleración sabiendo que cuando la masa puntual está en P su rapidez es de 4 m/s y varía a razón de 3 m/s cada segundo; el radio de curvatura en ese punto es 4 m. d) ¿Cuál es el valor del ángulo existente entre la aceleración de la masa puntual y su velocidad?

4. ¿Qué tipo de movimiento surge cuando: i) la componente normal de la aceleración es cero y la componente tangencial es constante y de sentido contrario a la velocidad? Haga un esquema que ilustre su res-

puesta. ii) la aceleración tangencial es cero y la aceleración normal es de módulo constante y está siempre dirigida hacia el mismo punto? Haga un esquema que ilustre su respuesta.

Soluciones

Problema 2.1



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2\Delta x_1$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 ;$$

$$\Delta t_1 = \Delta x_1 / v_1 ;$$

$$\Delta t_2 = \Delta x_2 / v_2$$

$$v_m = \Delta x / \Delta t = \frac{2\Delta x_1}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{80}} = 53.3 \text{ km/h}$$

Problema 2.2

Escogiendo un sistema de referencia común para ambos móviles

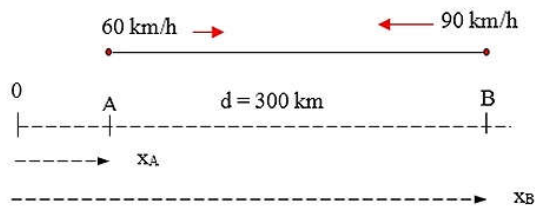
$$x_A = v_A t$$

$$x_B = d - v_B t$$

t es el mismo, porque arrancan en el mismo instante. Cuando se crucen:

$$x_A = x_B$$

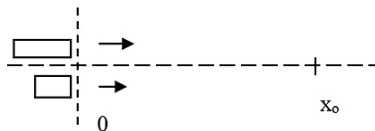
$$v_A t = d - v_B t$$



$$t = d / (v_A + v_B) = 300 / 150 = 2 \text{ h}$$

$$x_B = x_A = v_A t = 60 \times 2 = 120 \text{ km}$$

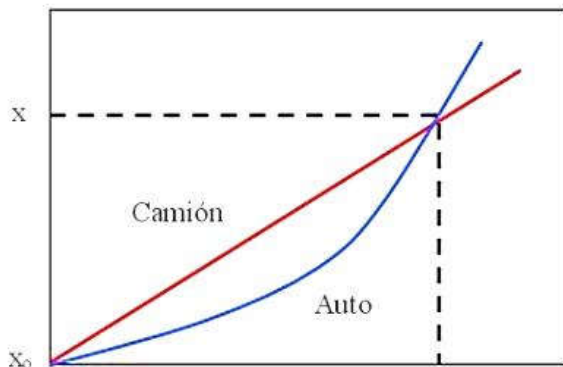
Problema 2.3



a)

Camión (MRU): $x_C = v_C t$

Auto (MRUV): $x_A = \frac{1}{2} a t^2$ ($v_0 = 0$)



Como el tiempo es el mismo para los dos, cuando el auto alcanza al camión en x_0

$$x_A = x_C$$

$$\frac{1}{2} a t^2 = v_C t.$$

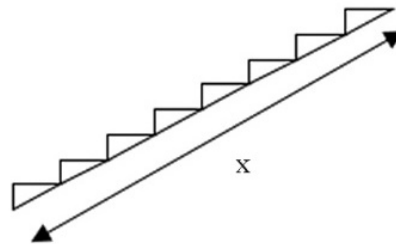
Despejando: $t = 2v_C/a$ es el tiempo que tarda en alcanzarlo. Sustituyendo en x_c se obtiene la distancia:

$$x_c = x_0 = 2v_C^2/a = 2 \times (30)^2 / 6 = 300 \text{ m}$$

$$b) v = at = 2v_C = 2 \times 30 = 60 \text{ m/s.}$$

Problema 2.4

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu}$ (el movimiento es a lo largo de una recta)



μ : velocidad del sistema móvil (escalera) respecto a tierra

v : velocidad de la masa puntual (persona) respecto a tierra

v' : velocidad de la masa puntual (persona) respecto al sistema móvil (escalera)

$$v' = x/t_1 = x/60$$

$$\mu = x/t_2 = x/90$$

Despejando y considerando que los vectores son colineales:

$$v = v' + \mu = x(1/60 + 1/90)$$

$$t = x/v = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{90}} = 36 \text{ s}$$

Problema 2.5

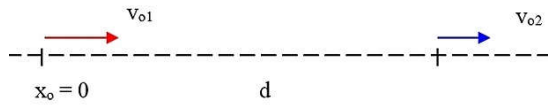
$$x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_2 = d + v_{02}t$$

Habrá choque si $x_1 \geq x_2$ en algún momento:

$$v_{01}t + \frac{1}{2} a t^2 \geq d + v_{02}t$$

$$t^2 + (2/a)(v_{01} - v_{02})t - 2d/a \geq 0$$



Esta ecuación tendrá solución real sólo si el discriminante $B^2 - 4AC$ es mayor o igual que cero:

$$(4/a^2)(v_{01} - v_{02})^2 - 8d/a \geq 0$$

lo que conduce a: $d < (v_{01} - v_{02})^2 / 2a$ (condición de choque)

Si $B^2 - 4AC < 0$ se obtiene una raíz imaginaria y no hay solución. No es posible que $x_1 \geq x_2$ y no hay choque. Al sustituir arriba se obtiene

$$d > (v_{01} - v_{02})^2 / 2a \text{ (no hay choque).}$$

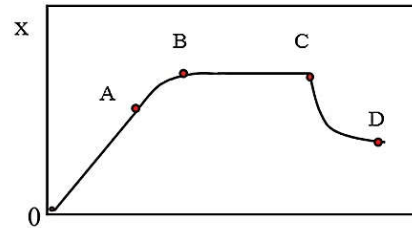
Problema 2.6

Analizando la definición de velocidad y aceleración para el movimiento en una dimensión;

$$v = dx/dt, a = dv/dt$$

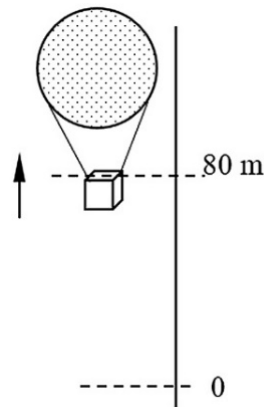
	v	a
OA	+	0
AB	+	-
BC	0	0
CD	-	+

b) La partícula, a partir de un impulso inicial a la derecha, se mueve con velocidad constante, comienza a frenar en t_A , hasta que se detiene en el instante t_B y ahí se mantiene hasta el instante t_C .



En t_C recibe otro impulso, pero ahora en sentido contrario, y a partir de ese momento comienza a frenar hasta el instante t_D , donde se detiene ($dx/dt = 0$ en D).

Problema 2.7



Se conocen v_0, y_0, y, g . Se quiere conocer t:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sustituyendo $v_0 = 12 \text{ m/s}, y_0 = 80 \text{ m}, y = 0$, se obtiene una ecuación de segundo grado:

$$5t^2 - 12t - 80 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 1600}}{10} = 1.2 \pm 4.18$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$t_1 = 5.38 \text{ s}; t_2 = -2.98 \text{ s.}$$

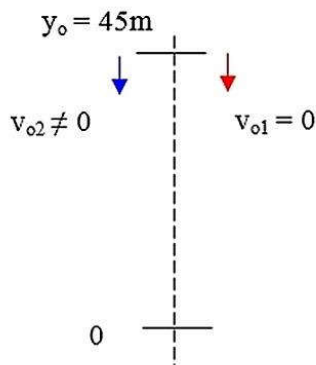
La segunda no tiene significado como solución del problema (tiempo negativo), por tanto:

Respuesta: tarda 5.4 s.

Ejercicio: resolver el problema cuando el bulto se lanza *hacia abajo* con la misma rapidez.

Problema 2.8

Como ambas piedras no se lanzan en el mismo instante, existirá una diferencia de un segundo entre los tiempos contados para ambos movimientos. Llamando $t_1 = 0$ al instante en que se lanza la primera piedra, cuando $t_1 = 1$ entonces $t_2 = 0$.



Como la diferencia en el tiempo se mantiene, es posible escribir

$$t_2 = t_1 - 1.$$

Calculando lo que tardan en llegar al suelo:
piedra 1:

$$y_1 = 0, y_{o1} = y_{o2} = y_0 = 45, v_{o1} = 0$$

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$t_1 = (2y_0/g)^{1/2} = 3 \text{ s.}$$

piedra 2:

$$t_2 = t_1 - 1 = 2 \text{ s}$$

$$0 = y_{o2} - v_{o2} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$v_{o2} = (y_0/t_2) - \frac{1}{2} g t_2^2 =$$

$$= (45/2) - (\frac{1}{2}) \times 10 \times 2 = 12.5 \text{ m/s}$$

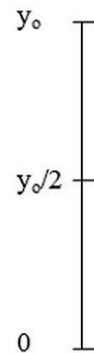
Problema 2.9

a) Si recorre la mitad en el último segundo, la otra mitad la recorrió en $t = t_v - 1$, donde t_v es el tiempo total.

En ese intervalo recorre $y = y_0/2$. Como es a partir del reposo,

$$y_0/2 = y_0 - \frac{1}{2} g (t_v - 1)^2$$

$$y_0 = g (t_v - 1)^2$$



Tenemos hasta el momento una ecuación y dos incógnitas (t_v, y_0). Hace falta otra ecuación, que se obtiene a partir de que cuando $t = t_v, y = 0$:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} g t_v^2.$$

Igualando esta ecuación con la anterior:

$$g (t_v - 1)^2 = \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$t_v^2 - 4t_v + 2 = 0$$

$$t_v = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Las dos raíces son: $t_1 = 3.41 \text{ s}$; $t_2 = 0.59 \text{ s}$. Esta última no tiene sentido, ya que el tiempo de vuelo debe ser por fuerza mayor de un minuto. Luego

$$t_v = 3.41 \text{ s}$$

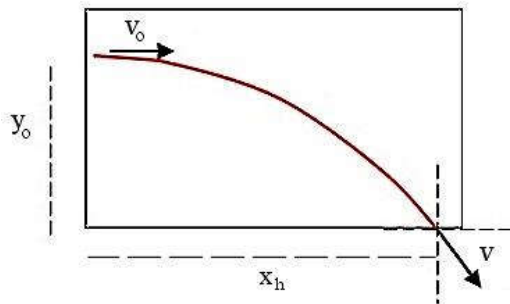
b) $y_o = \frac{1}{2} g t_v^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (3.41)^2 = 58.14 \text{ m.}$

Problema 2.10

Datos: $y_o = 44 \text{ m}$, $v_{ox} = 240 \text{ m/s}$, $v_{oy} = 0$, t ?

a) $0 = y_o - \frac{1}{2} g t^2$

$$t_v = \sqrt{\frac{2y_o}{g}} = \sqrt{8.8} \cong 3 \text{ s}$$



b) $x_h = v_{ox} t_v = 240 \times 3 = 720 \text{ m}$

c) $v_y = - g t = - 10 \times 3 = - 30 \text{ m/s}$

Problema 2.11

$$v_o = 108 \text{ km/h} = 108 \times 5/18 = 30 \text{ m/s}$$

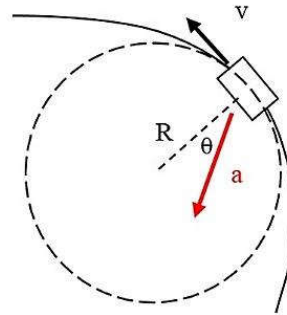
$$v = 72 \text{ km/h} = 72 \times 5/18 = 20 \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = a_t \vec{T} + a_n \vec{N}$$

$$a_t = dv/dt = - 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = v^2/R = 20^2/20 = 20 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = - 2 \vec{T} + 20 \vec{N} .$$



En esta expresión están incluidos el módulo y la dirección del vector a .

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 20^2} = 20.1 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \theta = a_t/a_n = 2/20 = 0.1$$

Respuesta: $\theta = \arctan(0.1) = 5.7^\circ$.

CAPÍTULO 3

Dinámica de la partícula

3.1 Introducción

3.2 Concepto de fuerza

3.3 Inercia y masa inercial

3.4 Leyes de Newton

3.5 Análisis de la primera ley

Sistemas de referencia inerciales

Carácter de postulado de la 1ra ley

3.6 Análisis de la segunda ley

Principio clásico de la relatividad

3.7 Análisis de la tercera ley

3.8 Diagrama de fuerzas

3.9 Fuerza gravitatoria

3.10 Ley de gravitación universal

Aplicación a cuerpos finitos.

Caso particular. Esfera con densidad uniforme.

Masa de la Tierra.

Variación de la aceleración de la gravedad con la altura.

Concepto de peso.

Campo gravitatorio

3.11 Fuerzas elásticas

3.12 Fuerzas de fricción

3.13 Fuerzas centrípeta y centrífuga

3.14 Ley del movimiento y ecuación del movimiento de una partícula

3.15 Problemas resueltos

CAPÍTULO 3

Dinámica de la Partícula

3.1 Introducción

La cinemática estudia las ecuaciones del movimiento, pero no las causas que lo producen. La dinámica se dedica al estudio de esas causas.

Ejemplos:

Caída libre: El cuerpo acelera porque algo lo atrae hacia abajo (la interacción gravitatoria) que depende de la distancia y de la masa de los cuerpos que interactúan (figura 3.1).

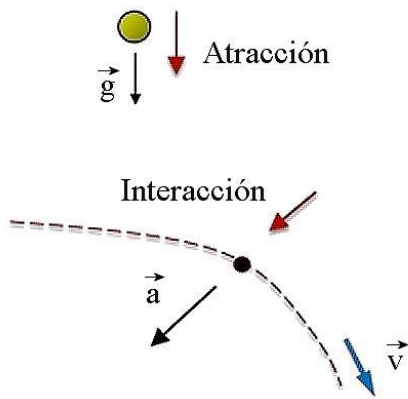


Figura 3.1. Interacciones diversas

Movimiento en una trayectoria curva: Existe una aceleración normal a causa de la variación de la dirección de la velocidad. Para que exista esa aceleración, tiene que haber algún tipo de interacción del móvil con el exterior, actuando a lo largo de la dirección radial (fricción del pavimento en el caso de un automóvil, etc.).

El concepto de *fuerza* permite introducir una medida de esa interacción con valores numéricos.

3.2 Concepto de fuerza

El concepto de fuerza es un concepto intuitivo. Para empujar una mesa o cargar un peso hay que hacer fuerza. Se relaciona de forma intuitiva con el esfuerzo físico que hay que realizar para mover o cargar determinado objeto. Por tanto, es posible definir la fuerza a partir de este concepto intuitivo, como una *medida de la interacción entre diferentes cuerpos*.

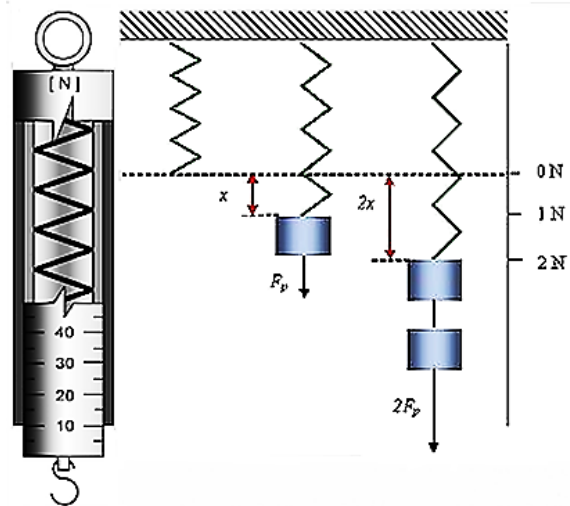


Figura 3.2. Dinamómetro calibrado.

Sin embargo, para la física no es suficiente este concepto intuitivo. Las magnitudes físicas tienen que poder compararse entre sí numéricamente y para describir una fuerza sin ambigüedades es necesario dar su valor numérico. Significa que hay que comparar las fuerzas contra alguna fuerza patrón, o por vía indirecta contra algún otro patrón, mediante fórmulas. Para medir fuerzas se emplean los dinamómetros, instrumento que en lo esencial cuenta con resorte y una escala graduada (figura 3.2).

En la figura 3.3 aparece un montaje experimental para la definición de fuerza a partir del criterio operacional, donde un cuerpo es arrastrado hacia la derecha utilizando un

dinamómetro no calibrado. Al aplicar una interacción en sus extremos, el resorte se estira y es posible leer diferentes valores en la escala. Los resultados que se obtienen al llevar a cabo diferentes experimentos son los siguientes:

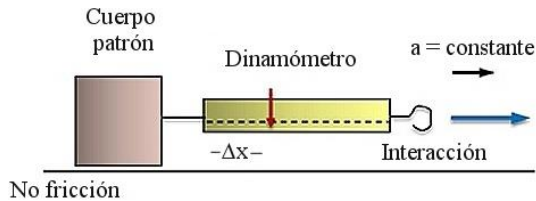


Figura 3.3. Criterio operacional para la definición de fuerza.

- Para un cuerpo determinado, diferentes aceleraciones conducen a diferentes extensiones Δx del resorte, que son proporcionales. (Al duplicar la aceleración se duplica Δx , etc.)
- Si se cambia el cuerpo, cambian los valores de la escala y las aceleraciones, pero siguen siendo proporcionales. Además, los experimentos son reproducibles (para un cuerpo dado, a igual aceleración, igual posición de la escala).

Por tanto, es posible escoger un cuerpo cualquiera como patrón y asignar valores a las fuerzas ejercidas por el resorte en función de las aceleraciones que se obtienen;

$$F \propto \Delta x = ka,$$

donde k es una constante de proporcionalidad arbitraria (que más adelante se verá cómo se determina).

Se puede entonces calibrar diferentes dinamómetros, y estudiar el efecto de diferentes fuerzas aplicadas al mismo cuerpo. Se comprueba entonces por el experimento que *las fuerzas se comportan como vectores*

(figura 3.4):

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

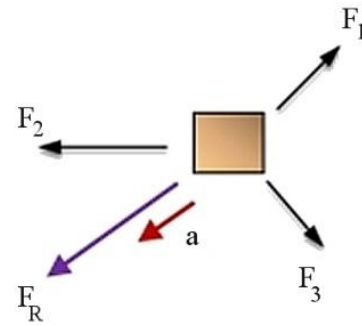


Figura 3.4. Efecto de diversas fuerzas sobre un cuerpo.

Si las fuerzas están equilibradas $\vec{a} = 0$ y el efecto de las fuerzas solo se traduce en la deformación de los resortes. Por tanto, es posible redefinir el concepto de fuerza de la forma siguiente:

Fuerza: medida de la interacción entre diferentes cuerpos, capaz de originar aceleraciones y/o deformaciones en los mismos.

3.3 Inercia y masa inercial

La misma fuerza, actuando sobre cuerpos diferentes, origina diferentes aceleraciones. Si un cuerpo está en reposo, necesita que se le aplique una fuerza para iniciar su movimiento. Si está en movimiento, necesita una fuerza para detenerse.

La propiedad de los cuerpos que hace que se resistan a cambiar su estado de movimiento se denomina *inercia*. La *masa inercial* es la medida cuantitativa de la inercia. Para asignar valores a la masa se usa un criterio operacional similar al usado para definir la fuerza.

La misma fuerza origina diferentes aceleraciones en diferentes cuerpos. En la figura

3.5, las aceleraciones originadas por la misma fuerza F son diferentes.

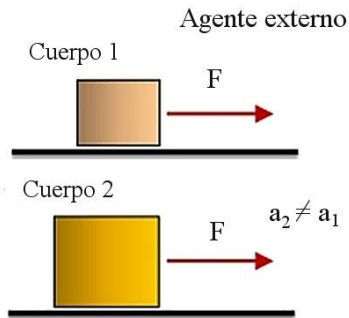


Figura 3.5. Definición de masa (ver texto).

Si se aplica otra fuerza F' a estos dos cuerpos, se encuentran otras dos aceleraciones diferentes a'_1 y a'_2 . Sin embargo, se ha encontrado que cualquiera sea el valor de la fuerza aplicada la siguiente relación se cumple:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a'_1}{a'_2} = \frac{a''_1}{a''_2} = \dots = \text{constante} .$$

Este es un resultado muy importante. Quiere decir que la relación a_1/a_2 no depende de la fuerza aplicada, ni tampoco de las aceleraciones alcanzadas por los cuerpos, sino que sólo depende de alguna característica particular de los cuerpos. Si se hace el experimento con otros cuerpos, la constante toma otro valor, pero se cumple una relación similar.

Como el cociente de las aceleraciones está asociado exclusivamente a alguna propiedad de los cuerpos, es posible definir su masa a partir de la relación de sus aceleraciones.

Así, se *define* la relación de las masas (m_2/m_1) de los cuerpos 1 y 2 por la expresión

$$a_1/a_2 = m_2/m_1.$$



Figura 3.6. Patrón de masa de EE.UU., (kg. patrón de 1889).

Si se toma un cuerpo arbitrario como patrón, al que se le asigna $m = 1$, entonces es posible asociarle un número a la masa de cualquier otro cuerpo, al comparar su aceleración con la del cuerpo patrón cuando se somete a la acción de la misma fuerza.

En la práctica la masa no se determina midiendo aceleraciones, sino utilizando una balanza (se verá más adelante).

La masa patrón del Sistema Internacional de Unidades es el kilogramo patrón, cilindro de platino-iridio que se encuentra en la ciudad de Sevres, en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, cerca de París.

3.4 Leyes de Newton

Las siguientes leyes fueron enunciadas en 1686 por Isaac Newton, con muy poca diferencia a como se conocen hoy en día.

1ra Ley (ley de la inercia).

Todo cuerpo conserva su estado de reposo o MRU mientras no actúen fuerzas externas sobre él. En lenguaje simbólico puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{constante} \rightarrow \begin{cases} 0 \\ \text{MRU} \end{cases}$$

2da Ley (ley de la fuerza).

La resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración.

$$\vec{F}_R = m\vec{a}.$$

(Más adelante se verá que tiene una expresión más general).

3ra Ley (ley de acción y reacción).

Cuando dos cuerpos interactúan, la fuerza F_{12} que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 es de igual magnitud y de sentido contrario a la que ejerce el cuerpo 2 sobre el 1.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Aunque los enunciados de las leyes no lo dicen en forma explícita, en los mismos se considera que:

- La masa m es constante
- Los cuerpos se comportan como partículas o masas puntuales (no se consideran posibles rotaciones o vibraciones; sólo la traslación).

En lo que sigue se analizan en detalle el origen y significado de cada ley, y sus consecuencias.

Galileo Galilei (1564-1642), físico y astrónomo italiano que descubrió las leyes que rigen la caída de los cuerpos y el movimiento de los proyectiles. Sostenía que la Tierra giraba alrededor del Sol, lo que contradecía la creencia de que la Tierra era el centro del Universo. Se negó a obedecer las órdenes de la Iglesia católica para que dejara de exponer sus teorías, y fue condenado a reclusión perpetua. En la historia de la cultura, Galileo ha pasado a representar el símbolo de la lucha contra la autoridad y por la libertad en la investigación.



Figura 3.7. Galileo Galilei.

3.5 Análisis de la 1ra ley

De manera similar a como ocurre con las restantes leyes de la física, la 1ra ley de Newton se obtiene a partir de una generalización de la experiencia. Por ejemplo, ya alrededor del año 1600 el italiano Galileo Galilei razonaba de la siguiente forma: al lanzar un cuerpo en la horizontal, llegará más lejos mientras más pulidas estén las superficies en contacto. De ahí se infiere que si no hubiera interacción entre las superficies, el cuerpo no se detendría nunca.

La primera ley expresa que si no hay fuerzas externas, la velocidad será constante o nula, pero no especifica respecto a cuál sistema de referencia la velocidad es cero o constante.

Se sabe que el movimiento es relativo. Cuando algo se mueve, siempre lo hace en referencia a otro objeto. Por tanto, es im-

prescindible especificar respecto a cuál sistema de referencia son válidas estas leyes. Newton no pudo resolver este problema, y lo dejó sin esclarecer. Él pensaba que las leyes eran válidas en un sistema de referencia "absoluto", ligado al espacio, pero que no pudo especificar porque, sencillamente, no existe tan sistema absoluto.

Todo se mueve. La tierra gira sobre sí misma y alrededor del sol, el sol se mueve junto con todo el sistema solar con la rotación de la galaxia, las galaxias se mueven unas con relación a otras. Por tanto; ¿en qué sistemas de referencia son válidas las leyes de Newton?

Estas leyes son válidas en los sistemas de referencia inerciales, cuyas características se analizan a continuación.

Sistemas de referencia inerciales

Un sistema de referencia inercial es un sistema que no está acelerado. La definición parece muy sencilla; sin embargo, no es fácil encontrar tales sistemas. Para comprender mejor el problema consideremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Vagón acelerado.

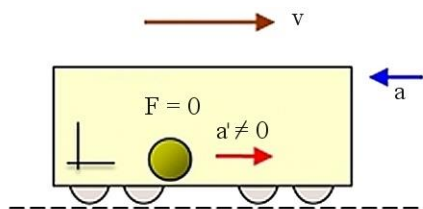


Figura 3.8. Ejemplo 1, sistema no inercial. No se cumple la 2da ley de Newton.

Cuando un vagón de ferrocarril frena, acelera o dobla, una pelota en el suelo del vagón se mueve sin que actúen fuerzas exter-

nas sobre ella. Luego, la 2da ley de Newton no se cumple en un sistema de referencia ligado al vagón.

Si a' representa la aceleración respecto al sistema de referencia móvil, entonces $\vec{a}' \neq 0$ aunque $\vec{F}_R' = 0$ (figura 3.8).

Ejemplo 2

Sistema ligado a tierra. Un sistema ligado a la Tierra tampoco es inercial, porque los puntos sobre la superficie terrestre se encuentran en rotación sobre el eje terrestre, con una aceleración normal $a_n = v^2/R_T$. Esta rotación modifica el movimiento de las masas de aire y agua (corrientes marinas, desviación de los ciclones, escarpas en las márgenes de los ríos) sin que existan fuerzas newtonianas actuando.

Además, también hay que considerar la rotación de la Tierra alrededor del Sol. Sin embargo, la aceleración debida a la rotación de la Tierra es pequeña (y menor aún la originada por la rotación alrededor del Sol) y sus efectos son notables sólo cuando el suceso analizado involucra decenas o cientos de kilómetros.

Por tanto, cuando las distancias recorridas son pequeñas, un sistema ligado a la Tierra se puede considerar inercial con excelente aproximación.

Cuando las distancias no son pequeñas (cálculos astronómicos, vuelos espaciales) se toma un sistema de referencia con centro en el sol y los ejes coordenados dirigidos a las llamadas estrellas "fijas", que se encuentran tan lejos que su posición aparente no varía en cientos de años.

En realidad el sol se mueve, rotando junto

al sistema solar alrededor del centro de la galaxia, pero el movimiento es despreciable por completo en la inmensa mayoría de los casos. Se ha calculado que, para esta rotación, $a_n = 3 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$.

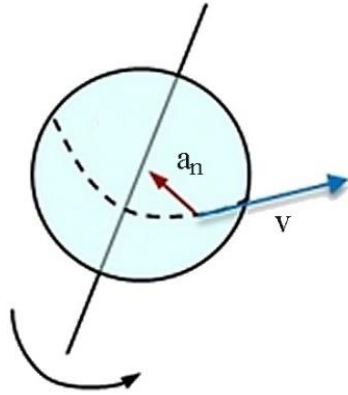


Figura 3.9. Ejemplo 2. Sistema no inercial.

Fuerza de Coriolis

La fuerza de Coriolis es una fuerza ficticia, no real, que parece actuar sobre un cuerpo cuando el observador se encuentra junto al cuerpo en un sistema de referencia no inercial en rotación.

Así, un objeto que se mueve sobre la Tierra a velocidad constante con una componente de dirección Norte-Sur, se acelera sin que se detecte fuerza alguna, como puede comprobar un observador en la Tierra. En el hemisferio norte se desvía en el sentido de las agujas del reloj, y en el hemisferio sur en el sentido opuesto.

La fuerza ficticia que se introduce para explicar esta aceleración debe su nombre al físico francés Gustave-Gaspard de Coriolis, que fue el primero en analizar matemáticamente este suceso.

La fuerza de Coriolis tiene una importancia considerable por su influencia sobre los vientos, las corrientes oceánicas o las tra-

vectorias de vuelo de los misiles de largo alcance. La aceleración correspondiente a esta fuerza se llama *aceleración de Coriolis*. Más detalles sobre esta fuerza se analizan en el capítulo de rotación.

Carácter de postulado de la 1ra Ley

La primera ley es en realidad un postulado. No es posible comprobarla mediante el experimento; para hacerlo haría falta:

1. Un sistema inercial (no existe),
2. Aislar el cuerpo por completo ($F_R = 0$), lo cual no es posible a causa de la atracción gravitatoria siempre presente.

En la práctica, la veracidad de la primera ley se comprueba a partir de los resultados que de ella se derivan en combinación con las restantes leyes de Newton.

3.6 Análisis de la 2da ley

La ecuación $\vec{F}_R = m\vec{a}$ es una ecuación vectorial. Significa que en realidad hay 3 ecuaciones independientes, una en cada eje coordenado:

$$F_{Rx} = ma_x,$$

$$F_{Ry} = ma_y,$$

$$F_{Rz} = ma_z.$$

En estas expresiones $F_{Rx} = \sum F_{xi}$ y similar para los otros ejes. Notar que en principio la primera ley podría considerarse incluida dentro de la 2da pero, como se dijo antes, no se puede comprobar mediante el experimento.

Unidades

En el SI de unidades

$$[m] = \text{kg};$$

$$[a] = \text{m/s}^2;$$

$$[F] = \text{newton (N)}$$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2.$$

Generalización de la 2da ley

La 2da ley no fue enunciada por Newton como la hemos presentado hasta ahora, sino de una forma más general, que incluye la posible variación de la masa del sistema.

Definiendo la *cantidad de movimiento* de una masa puntual como $\vec{p} = m\vec{v}$, en su forma más general la 2da ley de Newton queda como

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

que se reduce a la forma presentada antes sólo cuando m es constante. (Queda como ejercicio al lector verificar esta afirmación).

Principio clásico de la relatividad

El principio clásico de la relatividad expresa lo siguiente.

Todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros son equivalentes en Mecánica.

Significa que las leyes de la Mecánica se cumplen de igual forma en cualquiera de estos sistemas. Es decir, si un sistema es inercial, todos lo que se mueven con velocidad constante respecto a él también lo son.

Al estudiar el movimiento relativo se vio que, para una masa puntual vista desde 2 sistemas que se mueven uno con respecto al otro, se cumple la relación:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu},$$

donde:

v' : velocidad de la masa puntual respecto al sistema móvil

v : velocidad respecto al sistema fijo

μ : velocidad del sistema móvil respecto al fijo.

Si la velocidad del sistema móvil es constante, derivando s respecto al tiempo a ambos lados de la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{a}' = \vec{a}.$$

Multiplicando ambos lados por la masa de la partícula:

$$m\vec{a}' = m\vec{a};$$

y de acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_R'.$$

Los observadores en ambos sistemas medirán siempre las mismas aceleraciones y las mismas fuerzas actuando sobre la masa puntual. En esto consiste el principio de relatividad clásico y la equivalencia de ambos sistemas.

De aquí también se concluye que no es posible para un observador colocado en cualquiera de los dos sistemas llegar a conocer, mediante experimentos mecánicos, cuál sistema está en reposo y cual se mueve con velocidad constante (MRU).

3.7 Análisis de la 3ra ley

Considere el choque de una pelota contra una pared (figura 3.10). Notar que:

- Las fuerzas siempre actúan en parejas (no existen las fuerzas aisladas).

- Las dos fuerzas siempre actúan sobre cuerpos diferentes (una pareja de acción y reacción no puede actuar nunca sobre el mismo cuerpo)

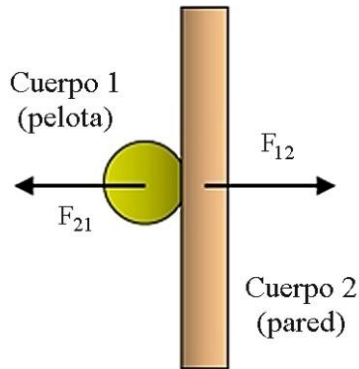


Figura 3.10. Interacción de una pelota con la pared

- Según la 3ra ley:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Y actúan a lo largo de una recta (hay excepciones cuando las partículas se mueven a velocidades cercanas a la luz).

Ejemplo 1. Bloque que se arrastra acelerado hacia la derecha (figura 3.11).

- Según la 3ra ley: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_2'$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1'$
- \vec{F}_1 y \vec{F}_2' no son pareja de acción y reacción (están aplicadas sobre el mismo cuerpo). Tampoco serán iguales en general.

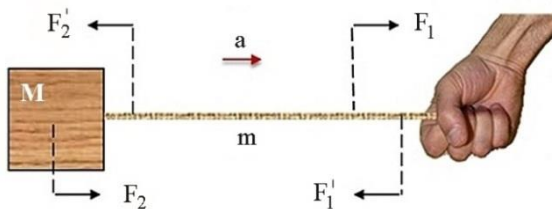


Figura 3.11. Ejemplo 1. Parejas de acción y reacción

- Si M es la masa del bloque, por la 2da ley:

$$\vec{F}_2 = M\vec{a}.$$

- Si m es la masa de la soga, por la 2da ley:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2' = m\vec{a},$$

y como el movimiento es en una dimensión,

$$a = \frac{F_1 - F_2'}{m},$$

lo que indica que las fuerzas F_1 y F_2' no pueden ser iguales si $a \neq 0$.

Ejemplo 2. Cuerpo en reposo encima de una mesa.

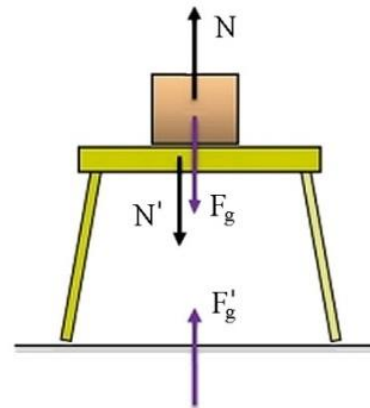


Figura 3.12. Ejemplo 2.

La fuerza F_g es la fuerza de atracción gravitatoria (figura 3.12).

- N y N' son pareja de acción y reacción (perpendiculares a la superficie de contacto)
- N y F_g no son pareja de acción y reacción (actúan sobre el mismo cuerpo). La pareja de F_g es la fuerza que el bloque ejerce sobre la tierra (F_g').

- Si m es la masa del bloque, entonces, por la segunda ley:

$$N - F_g = ma = 0 \rightarrow N = F_g.$$

3.8 Diagrama de fuerzas

También conocido como *Diagrama de Cuerpo Libre*, el diagrama de fuerzas es un método de análisis que se utiliza para aplicar la 2da ley de Newton a cualquier cuerpo. Se basa en el hecho de que la 2da ley de Newton se refiere a las *fuerzas que actúan sobre un cuerpo*, y no a las que el cuerpo ejerce sobre otros cuerpos.

El método consiste en seguir los siguientes pasos:

1. Identificar todas las fuerzas actuando sobre el cuerpo a analizar.
2. Escoger un sistema de coordenadas adecuado y separar o “aislar” el cuerpo, dibujando sólo las fuerzas que actúan sobre él (cuerpo “libre”).
3. Aplicar la 2da ley de Newton en cada eje coordenado, considerando el cuerpo como una masa puntual.

A continuación se muestran dos ejemplos de cómo aplicar el método, válido tanto en los casos estáticos como dinámicos.

Ejemplo 1. En la figura 3.13 aparece el esquema de dos pelotas descansando en el fondo de un recipiente cilíndrico. Interesa construir el diagrama de fuerzas de la pelota inferior (A). Como nos estamos refiriendo en exclusivo a la translación, es necesario considerar la pelota como una masa puntual y representar todas las fuerzas actuando en un punto (en este caso en el centro de la pelota).

1. Identificación de las fuerzas

F_g : atracción gravitatoria

N_1 : ejercida por el fondo del recipiente (perpendicular al fondo)

N_2 : ejercida por la pared izquierda del recipiente (perpendicular a la pared)

N_3 : ejercida por la pelota B (perpendicular al plano de contacto entre las dos pelotas)

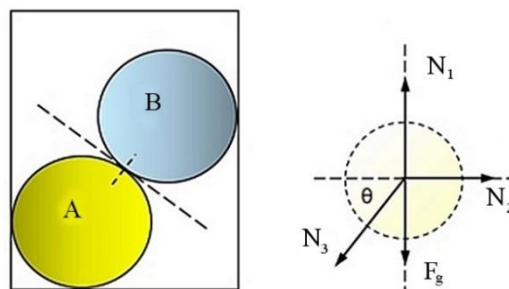


Figura 3.13. Ejemplo 1. Diagrama de fuerzas.

2. Elección del sistema de referencia.

Lo más adecuado es escoger un sistema donde la dirección de la mayor parte de las fuerzas coincida con alguno de los ejes coordenados. A la derecha se muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo A, separado de los otros cuerpos con que interacciona.

Si se deseara analizar el cuerpo B, habría que hacer otro diagrama de cuerpo libre para él.

3. Aplicación de la 2da ley de Newton

Como no hay movimiento a lo largo de ninguno de los ejes, $a_x = a_y = 0$.

$$\text{Eje } x: N_2 - N_3 \cos \theta = ma_x = 0$$

$$\text{Eje } y: N_1 - F_g - N_3 \sin \theta = ma_y = 0$$

Despejando en las ecuaciones se obtiene

$$N_2 = N_3 \cos \theta$$

$$N_1 = F_g + N_3 \text{sen}\theta;$$

sistema de dos ecuaciones y 5 parámetros a determinar (N_1 , N_2 , N_3 , F_g y θ). Si se conocieran al menos 3 cualesquiera de los parámetros, los dos restantes se podrían determinar a partir del sistema de ecuaciones. Si se conocen sólo dos o menos, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 2. Bloque que desliza por un plano inclinado sin fricción.

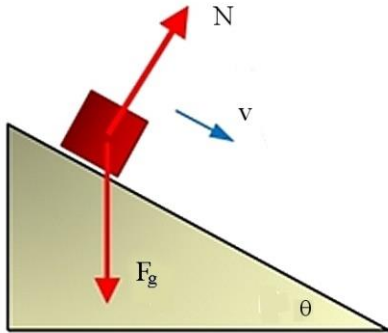


Figura 3.14. Ejemplo 2.

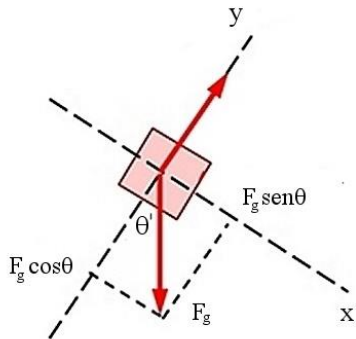


Figura 3.15. Diagrama de fuerzas, ejemplo 2.

1. Identificación de las fuerzas.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son la atracción gravitatoria F_g , siempre presente, y la perpendicular N a las superficies en contacto (normal).

2. Elección del sistema de referencia.

En los casos donde hay movimiento (o posibilidad de que lo haya), siempre resulta aconsejable escoger uno de los ejes coordenados a lo largo de la dirección del movimiento (figuras 3.14 y 3.15). Por tanto, el eje x se ha tomado a lo largo de la superficie del plano inclinado. Además, los ángulos θ y θ' son iguales, por ser ángulos agudos cuyos lados son perpendiculares dos a dos, por construcción (eje y y perpendicular al plano y F_g perpendicular a la base del plano).

3. Aplicación de la 2da ley.

Hay movimiento en el eje x y por tanto $a_x \neq 0$. En el eje y no hay movimiento, por lo que $a_y = 0$.

$$\text{Eje } x \quad F_g \text{sen}\theta = ma_x$$

$$\text{Eje } y \quad N - F_g \text{cos}\theta = ma_y = 0.$$

Despejando se obtiene un sistema de dos ecuaciones, que tendrá o no solución en dependencia del número de parámetros conocidos:

$$F_g \text{sen}\theta = ma_x$$

$$F_g \text{cos}\theta = N.$$

3.9 Fuerza gravitatoria

Las fuerzas o interacciones fundamentales en la naturaleza que se conocen hasta ahora son cuatro: *gravitatoria*, *electromagnética*, *nuclear fuerte* y *nuclear débil*. Cualquier otra fuerza (por ej., las de fricción) se reducen en realidad a uno de estas cuatro. Las fuerzas de fricción tienen su origen en la interacción electromagnética de los átomos que forman la superficie de contacto.

La *gravitatoria* es la fuerza de atracción que una porción de sustancia ejerce sobre

otra proporcional a su masa, y afecta a todos los cuerpos. Es una fuerza débil, pero de alcance infinito.

La fuerza *electromagnética* afecta a los cuerpos eléctricamente cargados y es la fuerza involucrada en las transformaciones físicas y químicas de átomos y moléculas. Es mucho más intensa que la fuerza gravitatoria y su alcance también es infinito.

La fuerza o interacción *nuclear fuerte* es la que mantiene unidos los componentes de los núcleos atómicos y actúa entre dos nucleones cualesquiera, sean protones o neutrones. Su alcance es del orden de las dimensiones nucleares (10^{-15} m), pero es aún más intensa que la fuerza electromagnética.

La fuerza o interacción *nuclear débil* es la responsable de la desintegración beta de los neutrones en el núcleo atómico; los neutrinos son solo sensibles a este tipo de interacción. Su intensidad es menor que la de la fuerza electromagnética y su alcance es aún menor que el de la interacción nuclear fuerte (10^{-18} m).

Las características fundamentales de la fuerza de atracción gravitatoria fueron establecidas en 1687 por Isaac Newton, junto con sus famosas leyes. Fue Newton quien determinó que la misma fuerza que hace los cuerpos caigan sobre la tierra es la que mantiene a los planetas unidos y girando alrededor del sol. Antes de Newton no se tenía idea de por qué los planetas rotan alrededor del sol sin chocar unos con otros ni salir al espacio exterior.

No obstante lo anterior, el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) había logrado establecer, solo partir de las observaciones astronómicas, las leyes que llevan su nom-

bre sobre el movimiento de los planetas,.

Tema avanzado. Leyes de Kepler

1. Los planetas siguen órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos. Los focos son aquellos puntos a partir de los cuales se puede generar la elipse, trazando la curva tal que $d_1 + d_2$ es una constante (f_1 y f_2 en la figura 3.16).

2. La línea imaginaria que va desde el planeta hasta el sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

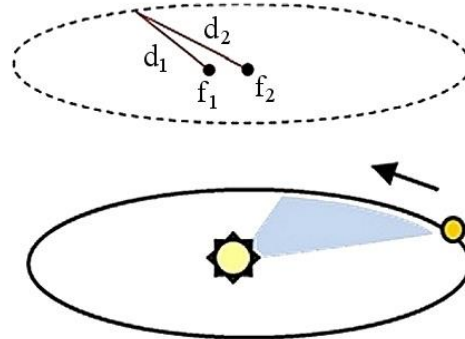


Figura 3.16. Leyes de Kepler.

3. El período de revolución (T) y la distancia al sol (R) de cada planeta cumplen la relación $T = kR^3$, donde k es una constante.

Al establecer la ley de gravitación universal, Newton fue capaz de explicar de manera satisfactoria los resultados obtenidos por Kepler a partir de la observación de los planetas que, aunque se conocían, no tenían una explicación satisfactoria.

3.10 Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal se enuncia

de la forma siguiente:

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos partículas es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, y está dirigida a lo largo de la recta que une las partículas.

En notación simbólica:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

La figura 3.17 muestra una representación de este resultado.

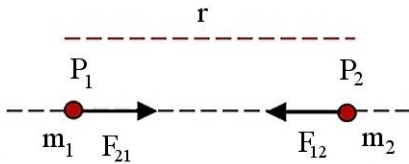


Figura 3.17. Ley de gravitación universal.

Las fuerzas F_{12} y F_{21} en 3.17 son pareja de acción y reacción, y G es una constante que depende del sistema de unidades utilizado para medir fuerzas y distancias, y debe ser determinada mediante el experimento. La primera determinación precisa de G fue hecha en 1798 por Henry Cavendish, utilizando una balanza de torsión. El valor de G aceptado hoy es: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

A partir de la ley de gravitación universal, utilizando las matemáticas adecuadas, es posible derivar las leyes de Kepler, lo que avala la validez de la ley de gravitación universal.

Aplicación a cuerpos finitos

La ley de gravitación universal se refiere a dos partículas. ¿Qué sucede cuando no podemos considerar los cuerpos que interactúan como masas puntuales? Pues hay que

considerar el cuerpo en cuestión como un sistema de partículas.

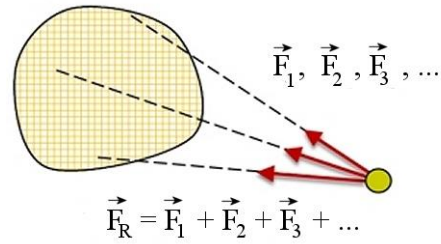


Figura 3.18. Ley de gravitación universal en un cuerpo finito.

En la figura 3.18 se ha considerado el cuerpo subdividido en porciones muy pequeñas, y se ha aplicado la ley de gravitación a cada porción. Mientras menores sean las porciones consideradas, mejor será la aproximación a la realidad que se obtiene.

En la práctica, estos cálculos resultan complejos desde el punto de vista matemático.

Caso particular; esfera con densidad uniforme

Cuando los cuerpos que interactúan son esferas homogéneas (densidad $\rho = m/V =$ constante en todos los puntos) utilizando las matemáticas adecuadas es posible demostrar de forma rigurosa que, a los efectos gravitacionales,

una esfera de densidad uniforme se comporta como si toda la masa estuviera concentrada en su centro.

Entonces, la esfera puede ser tratada como una masa puntual (figura 3.19).

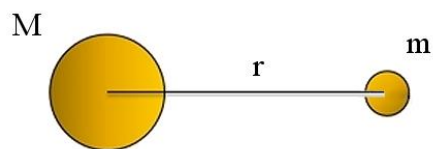


Figura 3.19. Atracción entre esferas de densidad uniforme. Se comportan como si toda la masa estuviera en su centro.

Este resultado se aplica con excelente aproximación al estudio del movimiento de los planetas y satélites, aunque los planetas ni son homogéneos ni esferas perfectas.

Masa de la Tierra

Considere un cuerpo de masa m muy cerca de la superficie de la tierra, de dimensión lo suficiente pequeña para ser considerado una masa puntual.

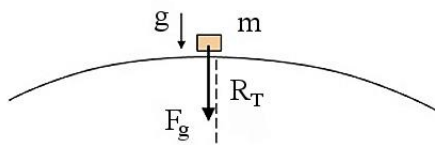


Figura 3.20. Cuerpo de masa m cerca de la superficie terrestre. R_T , radio de la Tierra.

Considerando a la Tierra como una esfera homogénea, es posible aplicar la ley de gravitación universal considerando que la masa de la tierra M_T está concentrada en su centro. Llamando R_T al radio de la tierra y tomando $r \approx R_T$ se obtiene

$$F_g = G \frac{M_T m}{R_T^2}.$$

También sabemos que si el cuerpo se deja caer, se debe cumplir la 2da ley de Newton: $F_g = mg$. Como ambas expresiones para F_g tienen que ser iguales, simplificando términos se obtiene:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}.$$

El radio de la tierra R_T se puede obtener a partir de consideraciones geométricas. Como las constantes G y g son de valor conocido, a partir de esta expresión es posible

entonces hacer un estimado de la masa de la Tierra: $M_T \approx 5983 \times 10^{24}$ kg.

Tema avanzado. Primera estimación del radio de la Tierra,

Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) fue un matemático, astrónomo, geógrafo, filósofo y poeta griego que midió la circunferencia de nuestro planeta con una precisión asombrosa para su época.

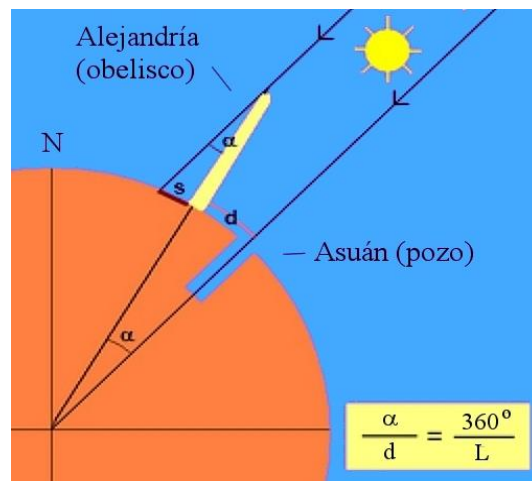


Figura 3.21. Cálculo de la circunferencia (L) y radio terrestres por Eratóstenes de Cirene.

Lo hizo conociendo la diferencia de latitud entre las ciudades de Siena o Siyene (actual Asuán) y Alejandría, en Egipto y que al mediodía en Asuán, en el solsticio de verano, los rayos del sol inciden perpendiculares sobre la tierra y, por tanto, no proyectan sombra. (Asuán está situada muy cerca del trópico de Cáncer). Eratóstenes se percató de que en Alejandría, en la misma fecha y hora, las sombras tenían un ángulo de unos 7° con respecto a la vertical. Al conocer la distancia aproximada entre Asuán y Alejandría, pudo hallar a través de cálculos trigonométricos la circunferencia de la Tierra y su radio (figura 3.21).

Variación de g con la altura

En el epígrafe anterior, considere que el cuerpo se encuentra a una altura h , no despreciable, sobre la superficie de la tierra. En este caso, al aplicar la ley de gravitación universal, habrá que considerar $r = R_T + h$. La expresión analítica para la aceleración de la gravedad queda, en este caso,

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2},$$

y se ve de inmediato que g disminuye en la medida que la altura h sobre la superficie de la tierra se hace mayor (tabla 3.1).

TABLA 3.1 VARIACIÓN DE G CON LA ALTURA	
ALTURA (km)	m/s ²
1	9.8
30	9.7
100	9.6

Concepto de peso

El *peso* no es una fuerza de la naturaleza, sino un concepto; diversos textos lo definen de forma diferente.

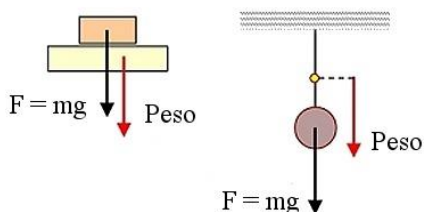


Figura 3.22. Concepto de peso.

En este texto se considera como peso la fuerza ejercida por el cuerpo contra el apoyo o sostén.

En la figura 3.22, si la superficie no está acelerada en la vertical, P y F_g coinciden. Pero esto no siempre tiene que ser así, como se muestra en el ejemplo 1.

Ejemplo 1. Diga como varía el peso de una persona de masa m que desciende en un elevador cuando éste comienza a frenar con aceleración constante (a).

Resolución.

La figura 3.23 representa un pasajero dentro del elevador, considerado como partícula. Las fuerzas N y N' son pareja de acción y reacción, y N' es el peso del cuerpo. En valor modular:

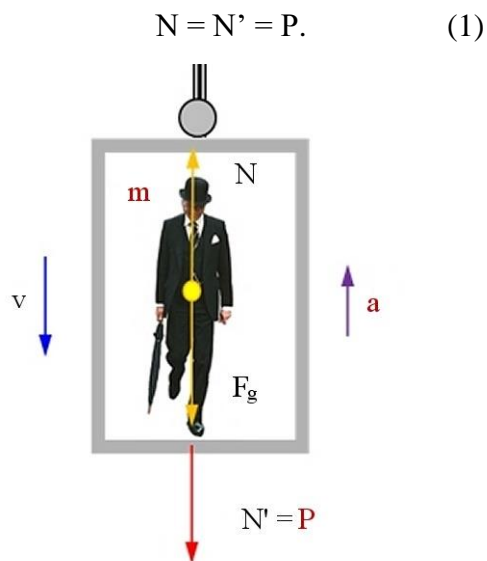


Figura 3.23. Fuerzas verticales en un elevador. El peso es la fuerza que actúa sobre el piso.

La velocidad dirigida hacia abajo indica que el elevador desciende, mientras que la aceleración en sentido contrario indica que el movimiento es retardado. Una vez establecido el sentido de cada vector, como el movimiento es en una dimensión, es posible hacer los cálculos considerando sólo los

módulos de las fuerzas. En este caso a y N serán (+), y F_g (-).

El diagrama de cuerpo libre se refiere tan solo a las fuerzas actuando sobre el pasajero. Por lo tanto,

$$N - F_g = ma$$

$$N = mg + ma$$

y sustituyendo según (1), se obtiene

$$P = mg + ma.$$

Mientras el elevador esté frenando, el peso de la persona aumentará en ma , donde a es la aceleración de frenado. Si el pasajero se sube en una balanza, ese será el peso detectado. Note que si el acelerador sube o baja con velocidad constante ($a = 0$), entonces $P = mg$, igual que si el sistema estuviera en reposo.

Ejercicio: demostrar que si el elevador sube y comienza a frenar, el peso disminuye.

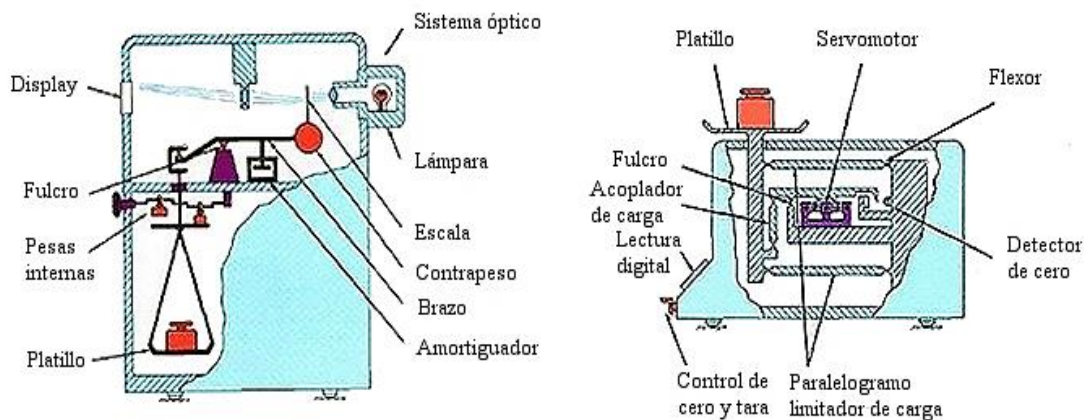


Figura 3.25. Balanzas analíticas comerciales. El fulcro es la cuchilla donde descansa el platillo y los contrapesos. El sistema de la derecha es electromagnético.

Al añadir cuerpos sobre los platillos, las fuerzas ejercidas por esos cuerpos sobre los



Figura 3.24. Balanza analítica de inicios del siglo XX.

Las balanzas de laboratorio comparan masas equilibrando pesos. La balanza de la figura 3.24 tiene brazos idénticos, de forma que se encuentra en equilibrio cuando no hay ninguna masa adicional colocada en los platillos.

platillos serán los pesos P_1 y P_2 . Si los dos pesos son iguales, $m_1g = m_2g$, y $m_1 = m_2$.

Este tipo de balanza analítica se encuentra ya obsoleta para las aplicaciones corrientes de laboratorio.

Las balanzas monoplato, mecánicas o electrónicas, comparan los pesos contra uno o más patrones que se incluyen dentro de la balanza. En ambos casos la lectura de la masa es digital (figura 3.25).

Campo gravitatorio

Cuando Newton estableció la ley de gravitación universal se consideraba posible la *acción a distancia* entre diferentes cuerpos, sin que existiera algún agente mediador. Hoy día se acepta la existencia del *campo gravitatorio* como una modificación del espacio que rodea a los cuerpos – cuya esencia aún no está esclarecida por completo – y se considera que la interacción tiene lugar entre los campos asociados a cada cuerpo.

En la actualidad se considera que la materia se puede manifestar en forma de sustancia o de campo: la primera tiene masa en reposo (cualquier sustancia que se pueda pesar en una balanza), mientras que el segundo no tiene masa en reposo (campos gravitatorio y electromagnético).

3.11 Fuerzas elásticas

Las fuerzas elásticas son fuerzas de origen electromagnético. Considere, por ejemplo, una lámina metálica. En los metales los núcleos atómicos con carga positiva se encuentran localizados en posiciones determinadas, mientras que los electrones de las capas más externas, con carga negativa, se encuentran deslocalizados en el seno del metal. Al intentar doblar el metal mediante un agente externo, la interacción de las car-

gas (+) y (-) da origen a fuerzas que se oponen a la deformación. Al retirar el agente externo, si la deformación no fue excesiva, el cuerpo regresará a su estado inicial no deformado.

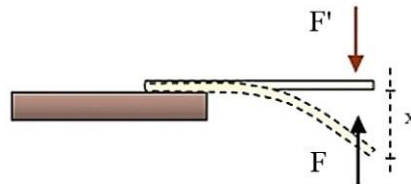


Figura 3.26. Fuerza elástica

En la figura 3.26 una regla metálica (o de plástico) está sujeta al borde de una mesa y se deforma bajo la acción de una fuerza externa F' . (La deformación está exagerada en la figura).

F' : fuerza externa

F : fuerza elástica restauradora actuando sobre el agente externo, que no aparece en la figura.

F y F' son pareja de acción y reacción (actúan sobre cuerpos diferentes, etc).

Si se hace un gráfico experimental de F vs. x se obtiene algo similar a lo que aparece en la figura 3.27. La región correspondiente a valores de x tales que $x < x_L$ es la de deformación *elástica*: una vez retirado el agente externo, el cuerpo recupera por completo su situación inicial. Cuando $x > x_L$ nos encontramos en la región de deformación *plástica*. Si el cuerpo es deformado más allá de este valor (límite de elasticidad), no recupera su situación inicial, sino que aparece una deformación permanente o *residual*.

Los aceros son muy elásticos (gran x_L), mientras que la masilla o plastilina es inelástica por completo (o plástica, $x_L \approx 0$).

Cuando $x < x_L$ la deformación sigue una relación lineal con la fuerza de restauración en la figura 3.27. Esta particularidad permite escribir la siguiente expresión:

$$F = -kx,$$

que se conoce como la *Ley de Hooke*. El signo negativo se introduce para indicar que la fuerza F y la deformación x tienen sentidos opuestos.

Se enrolla de una forma tal que permite su estiramiento por torsión a una distancia apreciable sin que se alcance el límite de elasticidad. Los resortes también cumplen la ley de Hooke, y en este caso la constante k se conoce como la *constante del resorte*. La constante k es un parámetro con dimensiones. En el SI de unidades se expresa en N/m.

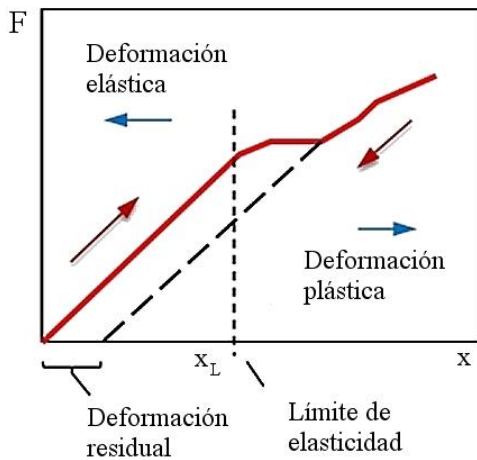


Figura 3.27. Resultados experimentales.

Un *muelle o resorte* no es más que un alambre de acero construido de una aleación adecuada (figura 3.28).

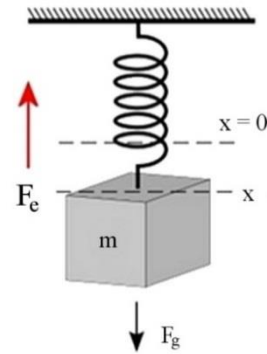


Figura 3.28. $F_e = -kx$

Tema avanzado: Resistencia de materiales. La elasticidad de diversos materiales como aceros, plásticos o fibras textiles se expresa por lo general a partir del módulo de elasticidad o *Módulo de Young*, definido por la expresión

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

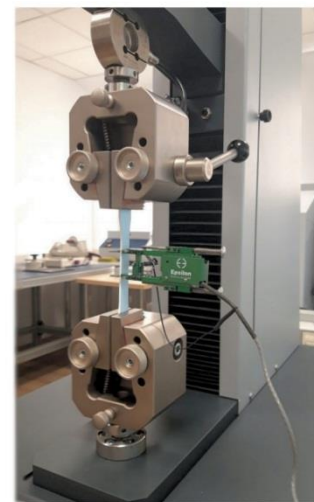
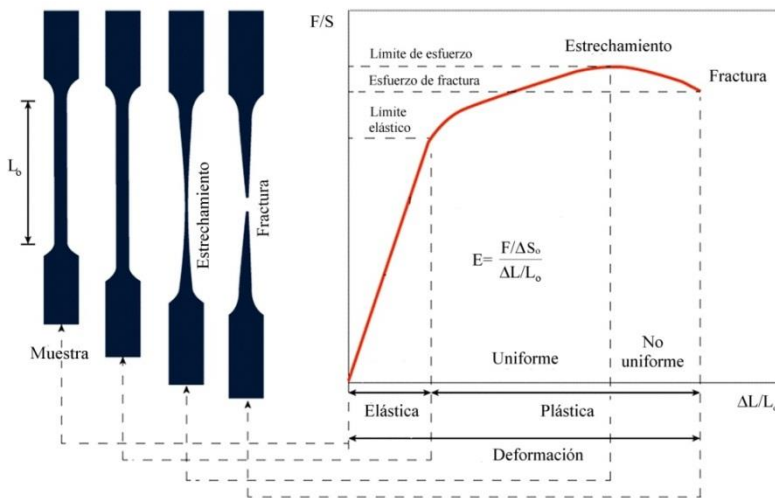


Figura 3.28a. Determinación de la curva del Módulo de Young, esfuerzo vs. deformación relativa.

Aquí $\sigma = F/S_0$ es el esfuerzo ejercido sobre la muestra respecto al área inicial S_0 y $\epsilon = \Delta L/L_0$ la deformación relativa respecto a la longitud inicial. La figura 3.28a muestra un resultado experimental para un acero al carbono. A la derecha, una foto que muestra la ubicación del sensor de medición en un equipo de ensayo comercial. Los equipos contemporáneos realizan la medición en forma automática e informatizada y proporcionan los resultados en un monitor.

Ejemplo

Calcule cuanto se estira el resorte de la figura 3.28 al colgarle un objeto de masa m ; la masa del resorte es despreciable, y su constante elástica es k .

Las únicas fuerzas actuando son la atracción gravitatoria y la fuerza elástica. El diagrama de cuerpo libre quedará según la figura 3.29. Aplicando la 2da ley:

$$F_e - F_g = ma = 0,$$

ya que al alcanzarse el equilibrio el cuerpo queda en reposo. Por tanto:

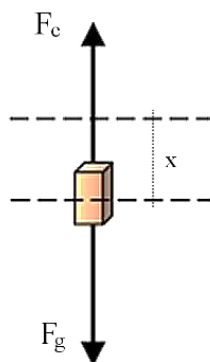


Figura 3.29. Ver texto

$$F_g = F_e$$

$$mg = k x$$

$$x = \frac{mg}{k}.$$

El signo (-) de la ley de Hooke se utiliza para indicar que F_e es opuesta a la deformación x (y también a F_g , representado en el DCL). Una vez utilizada esa información, se sigue trabajando con el módulo de la fuerza F_e . Utilizar el signo (-) en las expresiones analíticas equivaldría a introducir en la resolución del problema la misma información dos veces.

Ejercicio

Analizar qué sucede si el soporte del resorte comienza a ascender con aceleración constante (por ejemplo, si el resorte estuviera colgado del techo de un elevador que comienza a subir).

3.12 Fuerzas de fricción

Las fuerzas de fricción son de origen electromagnético; tienen que ver con la interacción de los núcleos atómicos y electrones de las capas más externas que se encuentran en la superficie de los cuerpos. La fricción en los sólidos se denomina *rozamiento* mientras que en los líquidos y gases (fluidos) la fricción es por *viscosidad*. En esta sección sólo se analizan las de rozamiento: la viscosidad será analizada en capítulos posteriores.

Resultados experimentales

Cuando interaccionan dos superficies cualesquiera, aparecen fuerzas de interacción

que tienen las siguientes propiedades:

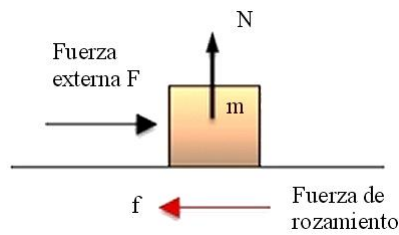


Figura 3.30. Fricción estática

- Su *dirección* es la misma que la del movimiento relativo entre las superficies (o del posible movimiento, si las superficies están en reposo)
- Su *sentido* siempre es opuesto al del movimiento (o del posible movimiento si hay reposo)
- Su *valor modular* depende de si las superficies están en reposo relativo ($v = 0$) o de si están en movimiento ($v \neq 0$).

Fricción estática

Las superficies están en reposo relativo ($v=0$) y, por tanto, $a = 0$ (figura 3.30).

De aquí que

$$F - f = ma = 0$$

$$F = f.$$

La fuerza de fricción es, en cada instante, igual a la fuerza aplicada F . Si se incrementa el valor de F , también se incrementará el valor de f . Sin embargo, llegará un momento en que la fuerza de fricción no sea suficiente para impedir el movimiento. En ese instante la fuerza de fricción estática tomará su máximo valor $f_{\text{máx}}$, y se encuentra en el experimento que:

$$f_{\text{máx}} = \mu_e N.$$

N es el valor modular de la componente de

las fuerzas normales a las superficies en contacto, y μ_e el *coeficiente de fricción estática*.

Si $f > f_{\text{máx}}$ el cuerpo comienza a moverse, y el análisis anterior deja de ser válido. Se acostumbra resumir las propiedades anteriores en una sola expresión;

$$f \leq \mu_e N.$$

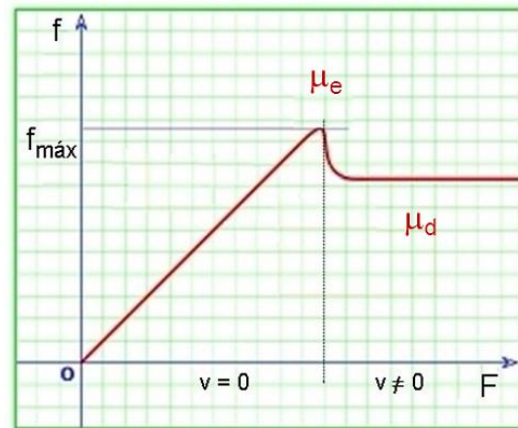


Figura 3.31. Fricción estática y dinámica.

Se hace énfasis en que $f = \mu_e N$ sólo en el caso máximo posible. En los restantes casos se cumplirá que $f = F$, donde F es la fuerza aplicada. Valores típicos de μ_e se muestran en la tabla 3.2.

Fricción dinámica

Si se hace un gráfico del coeficiente de fricción en función de la velocidad relativa de las superficies, se obtiene algo similar a lo que aparece en la figura 3.31. En cuanto comienza el deslizamiento, el valor del coeficiente de fricción disminuye en forma brusca hasta alcanzar un valor más o menos constante (el del coeficiente de fricción dinámico μ_d). En ese caso la fuerza de fricción cumple la relación constante

$$f = \mu_d N.$$

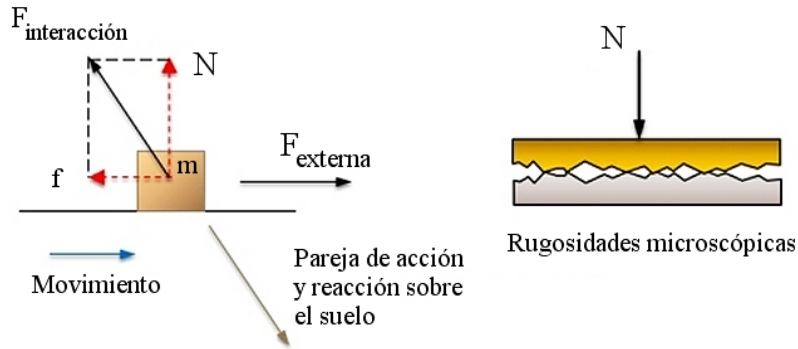


Figura 3.32. La normal y la fuerza de fricción son componentes de una única fuerza $F_{interacción}$ entre las superficies.

TABLA 3.2 COEFICIENTE DE ROZAMIENTO DE ALGUNAS SUSTANCIAS		
	μ_c	μ_d
Articulaciones humanas	0,02	0,003
Acero // Hielo	0,028	0,09
Acero // Teflón	0,04	0,04
Teflón // Teflón	0,04	0,04
Hielo // Hielo	0,1	0,03
Esquí (encerado) // Nieve	0,1	0,05
Acero // Acero	0,15	0,09
Vidrio // Madera	0,3	0,25
Caucho // Cemento (húmedo)	0,3	0,25
Madera // Cuero	0,5	0,4
Caucho // Madera	0,7	0,6
Acero // Latón	0,5	0,4
Madera // Madera	0,7	0,4
Madera // Piedra	0,7	0,3
Vidrio // Vidrio	0,9	0,4
Caucho // Cemento (seco)	1	0,8
Cobre // Hierro (fundido)	1	0,3

La fuerza de interacción entre las superficies es una sola: no hay dos fuerzas, sino dos *componentes* (figura 3.32, izq.), lo que no debe inducir a confusión. Lo que sucede es que la componente horizontal depende

del valor de la componente vertical y por esta razón se acostumbra tratar las componentes por separado.

El valor de μ_d depende de la naturaleza de las superficies en contacto (tipo de sustancia, rugosidad de las superficies) pero es independiente del área de esas superficies.

Una posible explicación de esto último es que, desde el punto de vista microscópico, las superficies no son planas en realidad, sino que presentan muchas rugosidades (figura 3.32, der). De aquí que el área microscópica de contacto y el rozamiento aumenten con la presión (con el valor de N), pero sean o no dependan de un aumento de la superficie de contacto si la presión no varía.

La figura 3.33a muestra un ejemplo de cómo funciona la fuerza de fricción estática sobre un objeto que se encuentra sobre un vehículo en movimiento sin ataduras adicionales. Note que el sentido de la fuerza de fricción se invierte si el camión, en vez de aumentar su velocidad, la reduce durante el frenado. Si la caja comienza a resbalar, la fuerza de fricción no puede aumentar; de hecho, su valor se reduce.

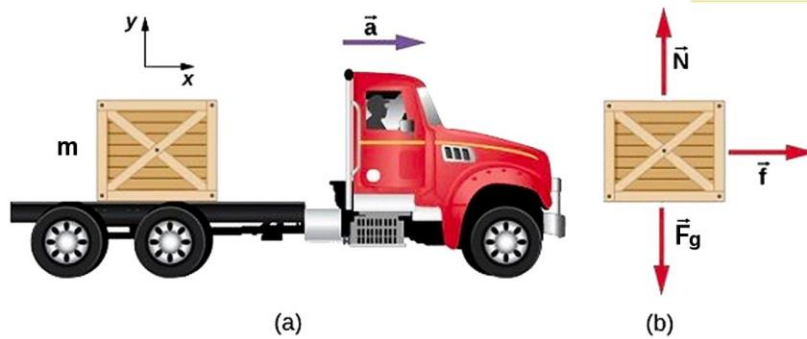


Figura 3.33a. *Ejemplo: camión acelerado.* De acuerdo a la 2da ley de Newton, la caja de masa m que está en la cama trasera en a) necesita recibir una fuerza $\vec{f} = m\vec{a}$ para poder acelerar junto al camión, de lo contrario deslizará hacia atrás. Esa fuerza la proporciona la fricción estática $f = \mu_e mg$, en el sentido que se muestra en b). Si el camión frena bruscamente o choca aparece una gran aceleración en sentido contrario al de la figura y se necesita una gran fuerza de fricción, también de sentido contrario, para que la caja no deslice. Si la fricción estática no cumple ese cometido (si mg no es lo bastante grande o si μ_e es pequeño –por ejemplo, si la superficie está húmeda y resbalosa–) la caja se deslizará hacia adelante. Una vez que comience a deslizar la fricción se hará aún menor, pues $\mu_d < \mu_e$.

Ejemplo

Calcular el ángulo $\theta_{m\acute{a}x}$ que puede tener el plano inclinado en la figura 3.33 para que el bloque no deslice.

Resolución

En el diagrama de cuerpo libre se han representado las fuerzas actuando sobre el cuerpo y se ha considerado la abscisa positiva en el posible sentido del movimiento. Los ángulos θ y θ' son iguales por ser agudos con sus lados perpendiculares dos a dos. La fuerza de fricción es contraria al movimiento y actúa en su misma dirección.

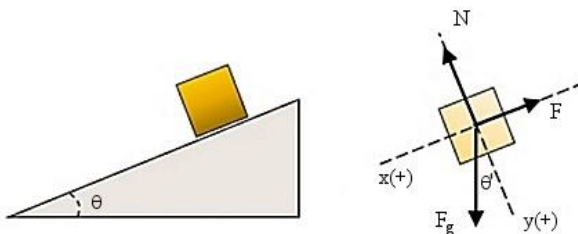


Figura 3.33. Ver texto.

Aplicando la 2da ley de Newton en cada uno de los ejes, como el bloque está en reposo:

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_g \sin\theta - f = ma_x = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow F_g \cos\theta - N = ma_y = 0,$$

de donde se obtiene un sistema de dos ecuaciones:

$$F_g \sin\theta = f$$

$$F_g \cos\theta = N.$$

Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$\tan\theta = \frac{f}{N}.$$

Como se pide el ángulo máximo $\theta_{m\acute{a}x}$, ese ángulo se alcanzará cuando f tenga su máximo valor posible, es decir, cuando $f = f_{m\acute{a}x} = \mu_e N$. Sustituyendo arriba y simplificando se obtiene $\tan(\theta_{m\acute{a}x}) = \mu_e$, por lo que:

$$\theta_{m\acute{a}x} = \arctan(\mu_e).$$

La expresión $\tan(\theta_{\text{máx}})$ proporciona una forma de medir μ_e para dos materiales específicos a partir del experimento, al medir el ángulo máximo que puede alcanzar un plano inclinado construido con uno de los materiales para que determinado cuerpo construido con el otro no deslice.

Ejercicio propuesto

¿Qué fuerza mínima sería necesario aplicar para que el bloque comience a subir por el plano?

3.13 Fuerzas centrípeta y centrífuga

La fuerza centrípeta **NO** es una fuerza real como las anteriores, asociada a alguna de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. No es más que el nombre que se le asigna a la resultante de las fuerzas que actúan en la dirección radial en un movimiento curvilíneo.

La fuerza centrípeta nunca se puede añadir en un diagrama de fuerzas, pues no representa interacción física alguna.

En notación simbólica:

$$\vec{F}_c = \sum_{\text{radial}} \vec{F}_i.$$

Como esta fuerza es la que se asocia a la *aceleración centrípeta*, que origina la variación de la dirección de la velocidad en un movimiento curvilíneo, también es posible escribir, de manera general:

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c$$

$$\sum_{\text{radial}} \vec{F}_i = m \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Ejemplo 1

Considere un bloque que gira sin fricción sobre una superficie sin fricción después que se le aplicó un impulso inicial. La tensión del hilo (interacción física) es, a la vez, la fuerza centrípeta que obliga al cuerpo a realizar un movimiento circular (figura 3.34).

De acuerdo con las expresiones anteriores

$$T_o = mv^2/R.$$

Aquí R es la longitud de la cuerda (radio de la circunferencia descrita por el cuerpo). La tensión ejercida por la cuerda es quien proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que el bloque cambie su dirección. Si se elimina esa fuerza, el bloque seguirá moviéndose en una línea recta.

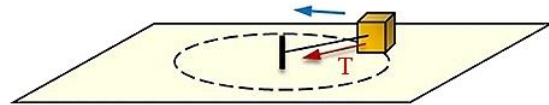


Figura 3.34. La tensión es la fuerza centrípeta, nombrada así en este caso particular.

Ejemplo 2

Angulo de peralte

La velocidad máxima con que un auto puede recorrer una curva plana en la carretera sin resbalar y salirse de la misma se puede estimar de la siguiente forma. Si R es el radio de curvatura en el punto considerado de la carretera (ver figura ejemplo 2):

$$\sum F_y = N - F_g = ma_y = 0$$

$$N = mg$$

$$\sum F_x = f = ma_x = mv^2/R.$$

Tomando $f = f_{\text{máx}} = \mu_e N$ se obtiene la má-

xima velocidad posible que puede tener el auto sin que resbale a lo largo de la dirección radial:

$$\mu_e mg = mv^2/R$$

$$v_{\text{máx}} = (\mu_e g R)^{1/2}.$$

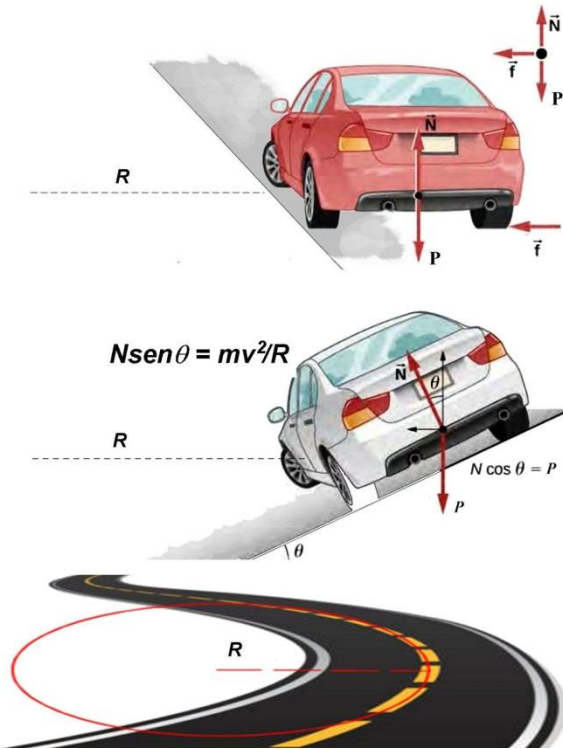


Figura ejemplo 2.

El valor de μ_e para la goma y el pavimento seco es muy alto, pero se reduce mucho cuando el pavimento está húmedo, a causa de la mezcla del agua con los residuos grasos en la carretera. En ese caso $v_{\text{máx}}$ se hace muy pequeña, y el vehículo puede patinar y despistarse con facilidad en las curvas.

Con el fin de evitar esta situación, es usual que las curvas en las carreteras y vías férreas estén *peraltadas*. El peralte es la mayor elevación que se le da a la parte exterior

de una curva en relación con la interior. Con esto se logra que sea la fuerza normal quien proporcione la componente centrípeta necesaria para girar, aunque la fricción entre las ruedas y el pavimento se haga muy pequeña.

Calculando el valor del ángulo de peralte θ para una curva de 50 m de radio de curvatura y una velocidad promedio de 60 km/h (16.7 m/s):

$$\Sigma F_x = N \text{sen} \theta = mv^2/R \rightarrow N \text{sen} \theta = mv^2/R$$

$$\Sigma F_y = N \text{cos} \theta - mg = 0 \rightarrow N \text{cos} \theta = mg$$

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$\tan \theta = v^2/Rg = 16.7^2/50 \times 10 = 0.59$$

$$\theta = \arctan(0.59) = 30.5^\circ$$

Fuerza centrífuga

A los efectos de este curso, se considerará fuerza centrífuga la pareja de acción y reacción de la centrípeta. En el ejemplo de la figura 3.34 la fuerza centrífuga sería la ejercida por el bloque sobre la cuerda. En la figura 3.35, la fuerza centrífuga la ejerce la pelota sobre la cuerda y es transmitida por ella hasta la mano. La pareja de acción y reacción de esta última es la ejercida por la mano sobre la cuerda, que también está dirigida hacia el centro.

En ocasiones algunos textos adoptan el punto de vista de que la cuerda no tiene masa, por lo que las fuerzas que actúen sobre ella ni siquiera se consideran. La presentan sólo como un medio de transmisión inextensible desde un cuerpo hasta el otro.

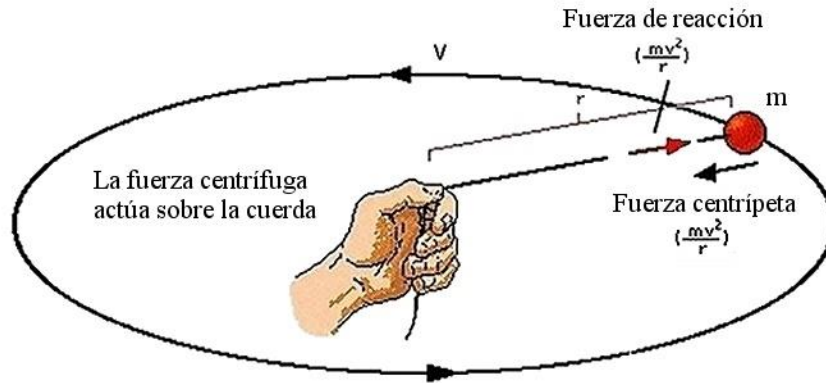


Figura 3.35. Fuerzas centrípeta y centrífuga (en la figura, fuerza de reacción)

La *fuerza centrífuga de inercia* es una fuerza ficticia que se añade en los sistemas de referencia no inerciales para explicar los efectos de la aceleración desde el punto de vista de un observador que se mueve con el sistema. Sólo la mencionamos y no se considera en esta sección. (Ver *tema avanzado 2* en el capítulo 6).

3.14 Ley del movimiento y ecuación del movimiento de una partícula

La 2da ley de Newton para una partícula cuando su masa no varía toma la forma:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}.$$

La aceleración es la derivada de la velocidad y ésta, a su vez, la derivada del vector de posición. De ahí que la aceleración se puede escribir como la segunda derivada del vector de posición:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Sustituyendo la aceleración en la 2da ley y agrupando términos, se llega a:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Esta ecuación diferencial de 2do orden se

conoce como *ecuación del movimiento*. En principio, si se conocen las fuerzas F_i actuando sobre la masa puntual y dos constantes arbitrarias en un determinado instante (posición y velocidad iniciales), esta ecuación permite conocer la posición de la partícula en cualquier instante posterior lo que se conoce como el *Problema Fundamental de la Mecánica*.

La ecuación equivale en realidad a tres ecuaciones diferenciales, correspondientes a cada uno de los ejes coordenados. Se pueden obtener sustituyendo en la ecuación anterior el vector de posición por x , y ó z , según sea el caso, y las fuerzas por sus correspondientes componentes.

La solución es la *ley del movimiento* de la partícula $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Si se conoce la ley del movimiento de la partícula, también se conocen su velocidad y aceleración en cualquier instante, por simple derivación;

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt, \quad \vec{a} = d\vec{v}/dt.$$

Si todas las \vec{F}_i son constantes, muchas veces se obtienen soluciones simples; pero si las fuerzas varían con el tiempo o la posición, la solución aparece sólo en determinados casos. Es decir, la mayor parte de las

veces se desconoce la dependencia $\vec{F} = \vec{F}(t)$ o $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Existen otros métodos y conceptos en Mecánica que permiten obtener información de los sistemas sin necesidad de conocer de forma explícita la ley del movimiento de las partículas. Tal es el caso del método energético y los conceptos de trabajo y energía, que se analizan en el próximo capítulo.

3.15 Problemas resueltos

1. En la figura, calcular la fuerza de interacción entre ambos bloques. Desprecie la fricción entre las superficies en contacto ($m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $F = 3 \text{ N}$).

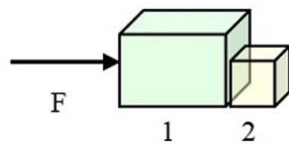


Figura problema 1

2. Se lanza un bloque hacia arriba por un

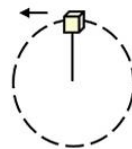
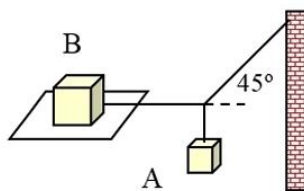
plano inclinado sin fricción, con rapidez inicial v_0 . a) ¿Cuánto asciende por el plano? b) ¿Qué tiempo tarda en hacerlo? ($\theta = 30^\circ$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$).

3. Un globo de investigación de masa M desciende verticalmente con aceleración a . ¿Cuánto lastre debe arrojarse para que el globo suba con aceleración a ? (Considere que el empuje ascendente no cambia durante el proceso).

4. En la figura, ¿cuál debe ser el peso máximo del bloque A para que el B no deslice? ($P_B = 710 \text{ N}$, $\mu_s = 0.25$).

5. Un bloque de masa m gira en un plano vertical atado al extremo de una cuerda de longitud 1 m . Encontrar la velocidad mínima posible para que la cuerda no se afloje al llegar al punto más alto.

6. Un aeroplano vuela en un círculo horizontal a 480 km/h . Si las alas están inclinadas a 45° respecto de la vertical, ¿cuál es el radio del círculo en que vuela el aeroplano?



Figuras problemas 4, 5 y 6.

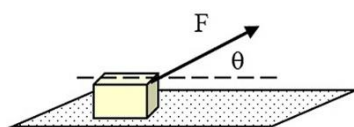


Figura problema 7

7. En la figura, $\theta = 15^\circ$, $m = 150 \text{ kg}$, $\mu_e =$

0.50 , $\mu_K = 0.35$. a) Calcule el valor mínimo de F para que el bloque comience a moverse. b) ¿Cuál será la aceleración del bloque?

Problemas propuestos

1. Un estibador aplica una fuerza horizontal

de 400 N sobre una caja de 100 kg que se encuentra en reposo sobre una superficie también horizontal, pero no logra moverla. a) ¿Cuál era el valor de la fuerza de rozamiento entre las superficies mientras que el estibador estuvo aplicando la referida fuerza?

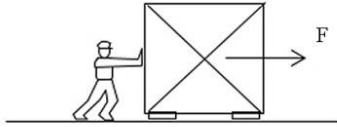


Figura problema 1

b) ¿Qué fuerza mínima debería aplicar el estibador para que la caja comience a moverse? c) ¿Cuál es la mínima fuerza que debe aplicar para que la caja no se detenga una vez que ha iniciado su movimiento? ($\mu_s = 0.5$; $\mu_k = 0.2$)

2. En la figura, el bloque 1 descansa sobre el bloque 2, que a su vez se encuentra sobre el piso de un elevador que sube con velocidad constante. Se desea analizar la fuerza de interacción F_{int} entre los bloques cuando el elevador comienza a frenar con aceleración constante

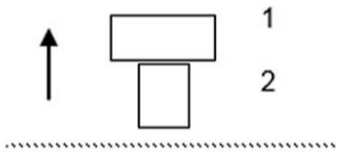


Figura problema 2

(a). a) Dibuje el (los) diagrama(s) de cuerpo libre necesarios para analizar el problema y plantee las ecuaciones correspondientes. b) ¿Qué datos mínimos es necesario conocer para calcular F_{int} ? c) ¿Hay parejas de acción y reacción entre las fuerzas que Ud. ha dibujado? ¿Cuáles son esas parejas?

3. Un bloque de masa 0.4 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30° sin fricción, con rapidez inicial $v_0 = 2$ m/s. a) ¿Qué distancia recorre a lo largo del plano? b) ¿Qué tiempo tarda en hacerlo? ($\sin 30 = 1/2$, $\cos 30 = \sqrt{3}/2$; $\tan 30 = 1/\sqrt{3}$)

4. Una caja de masa 50 kg, que en un inicio se deslizaba con lentitud hacia abajo por un plano inclinado formando un ángulo de 30° con la horizontal, es detenida por un obrero ejerciendo la mínima fuerza posible en la dirección paralela al plano (ver figura).

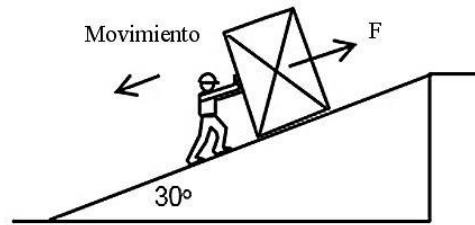


Figura problema 4

a) ¿Cuál fue ese valor mínimo de F ? b) ¿Qué fuerza mínima debería aplicar el obrero, en la misma dirección y sentido, para lograr que la caja comience de nuevo a moverse, pero ahora hacia arriba? ($\mu_k = 0.2$; $\mu_s = 0.4$)

5. Un motorista de 75 kg, en una moto de 80 kg, recorre una carretera ondulada de sección circular de radio $R = 10$ m.

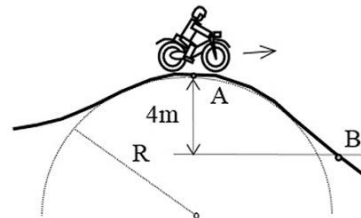


Figura problema 5

Al alcanzar la parte superior de la ondulación en A, la moto se despega del suelo y

salta de forma involuntaria. Si vuelve a tocar el suelo en B, 4 m por debajo de A, y en ese instante su rapidez es de 72 km/h; a) ¿cuál era la rapidez, en km/h, en A? b) ¿Cuál será la velocidad máxima, en km/h, con la que el motor puede pasar por A sin que se despegue del suelo? No tome en consideración la fricción del aire.

6. Un cuerpo de masa $m = 0.2$ kg, atado al extremo de una cuerda de longitud 1.6 m, gira libre en un plano vertical tras recibir un impulso inicial.

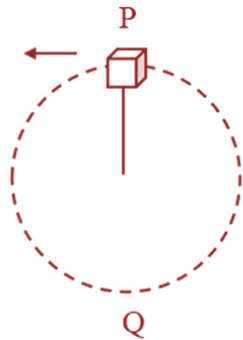


Figura problema 6

a) Si la velocidad en el extremo superior P es de 5 m/s, ¿cuál será la tensión de la cuerda cuando el bloque llegue al extremo inferior Q? b) Encontrar la rapidez mínima posible que debe tener el bloque al llegar a P para que la cuerda se mantenga estirada.

7. La estrella de un parque de diversiones, de 50 m de diámetro, da una vuelta completa cada 20 s con velocidad constante.

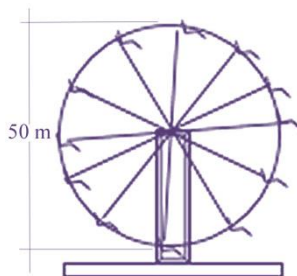


Figura problema 7

a) ¿Cuál es el peso de una persona de 80 kg cuando su asiento alcanza la altura máxima?

b) ¿Y cuando pasa por la parte más baja?

Soluciones

Problema 3.1

Cuerpo 1.

$$\text{Eje } y: N_1 - F_{g1} = ma_y = 0 \rightarrow N_1 = F_{g1}$$

$$\text{Eje } x: F - F_{21} = m_1 a_x$$

Cuerpo 2.

$$\text{Eje } y: N_2 - F_{g2} = ma_y = 0 \rightarrow N_2 = F_{g2}$$

$$\text{Eje } x: F_{12} = m_2 a_x.$$

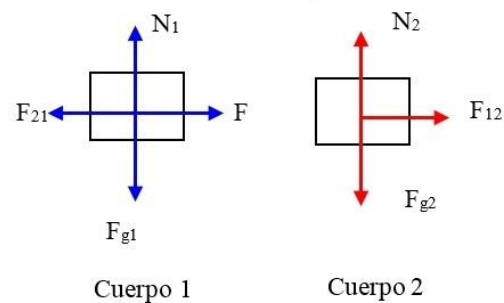


Figura solución 3.1

La aceleración a_x es la misma para los dos cuerpos y $F_{21} = F_{12}$ por la 3ra ley de Newton. Sumando las ecuaciones anteriores para eliminar F_{21} y F_{12} :

$$F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$F_{12} = m_2 a_x = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = \frac{1 \times 3}{2 + 1} = 1 \text{ N}$$

Problema 3.2

a) Datos: v_o , θ , $v_f = 0$, $x?$, $t?$

$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$$

$$\Delta x = -v_o^2 / 2a,$$

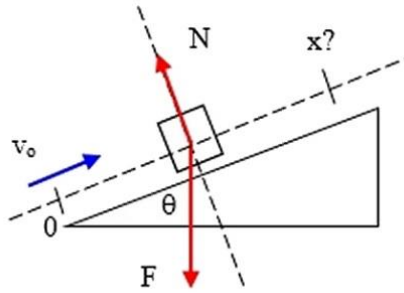


Figura solución 3.2

donde a se puede obtener a partir del diagrama de fuerzas:

Eje y : $N - F_g \cos\theta = ma_y = 0$

Eje x : $mgsen\theta = ma_x$

$$a_x = gsen\theta = 10/2 = 5 \text{ m/s}^2$$

(retardatriz; al sustituir debe hacerse con signo negativo si v_o es positivo)

$$\Delta x = \frac{-(2)^2}{2(-5)} = 0.4 \text{ m.}$$

b) $0 = v_o + at$

$$t = -v_o/a = -2/(-5) = 0.4 \text{ s}$$

Problema 3.3

Considerando el globo como masa puntual;

Bajando:

F_g y a tienen el mismo sentido:

$$E - Mg = -Ma.$$

Subiendo:

F_g y a tienen sentido contrario:

$$E - (M - m)g = (M - m)a$$

Multiplicando la 1ra ecuación por (-1) y sumando ambas ecuaciones,

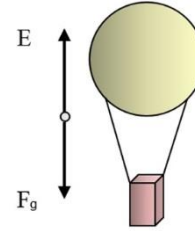


Figura solución 3.3a

$$Mg - (M - m)g = Ma + (M - m)a$$

$$mg = 2Ma - ma$$

$$m(g + a) = 2Ma$$

$$m = \frac{2Ma}{g + a}$$

Problema 3.4

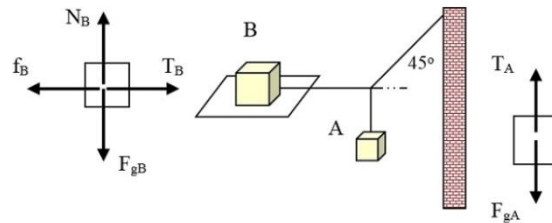


Figura solución 3.4a

Cuerpo B:

El peso será máximo cuando f_B lo sea ($\mu_s N$)

Eje x

$$T_B - f_B = ma_x = 0$$

$$T_B = \mu_s N_B. (1)$$

Eje y

$$N_B - F_{gB} = ma_y = 0$$

$$N_B = m_g B.$$

Cuerpo A:

Eje y

$$T_A - F_{gA} = ma_y = 0$$

$$T_A = m_A g. \quad (2)$$

Nudo

Por la 3ra ley de Newton se llega a la conclusión de que $T_B' = T_B$, y que $T_A' = T_A$.

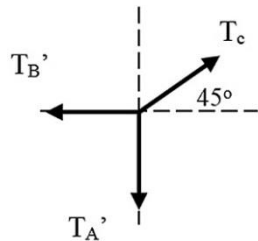


Figura solución 3.4b

Eje y

$$T_c \text{sen}45 - T_A = 0$$

$$T_A = T_c \text{sen}45$$

Eje x:

$$T_c \text{cos}45 - T_B = 0$$

$$T_B = T_c \text{cos}45$$

y por tanto,

$$T_A = T_B.$$

Igualando (1) y (2) con $P_A = m_A g$ y similar para P_B ,

$$P_A = \mu_c P_B$$

$$P_A = 0.25 \times 710 = 177.5 \text{ N.}$$

Problema 3. 5.

$$T + F_g = ma$$

$$T + mg = \frac{mv^2}{R}$$

Un instante antes de que la cuerda se afloje, $T = 0$.

En ese momento,

$$g = v^2/R$$

$$v = (Rg)^{1/2} = (1 \times 10)^{1/2} = 3.2 \text{ m/s.}$$

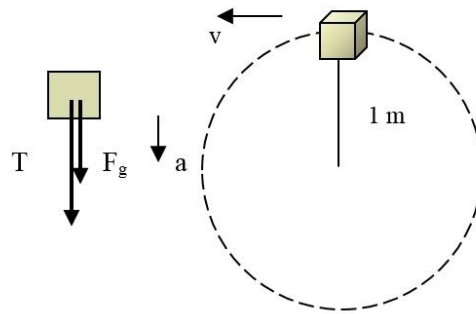


Figura solución 3.5

Problema 3. 6.

(480 km/h = 480 x 10³/3600 = 133.3 m/s).

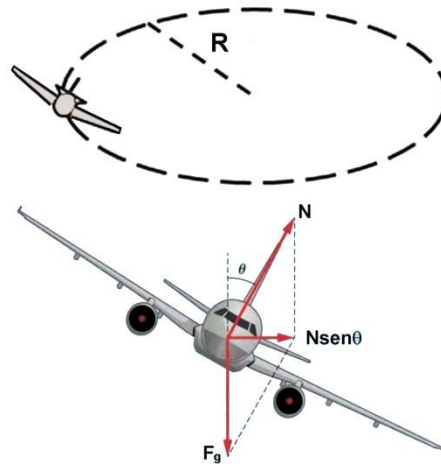


Figura solución 3.6

En un avión, la fuerza de sustentación N es perpendicular al plano que forman las alas.

Eje x:

$$N \text{sen}\theta = ma_x = mv^2/R$$

$$N \sin \theta = mv^2/R \quad (1) \quad \text{anterior}$$

Eje y:

$$N \cos \theta - mg = ma_y = 0$$

$$N \cos \theta = mg \quad (2)$$

Dividiendo las ecuaciones (1) y (2) para eliminar N, se obtiene:

$$\tan \theta = v^2/Rg,$$

$$R = v^2/g \tan \theta = (133.3)^2/(10 \times 1) = 1813.2 \text{ m} \\ \approx 1.8 \text{ km}$$

Problema 3.7

a) Como para la fuerza de fricción, $f \leq f_{\text{máx}}$, el bloque comenzará a moverse cuando

$$F \cos \theta \geq f_{\text{máx}} = \mu_e N.$$

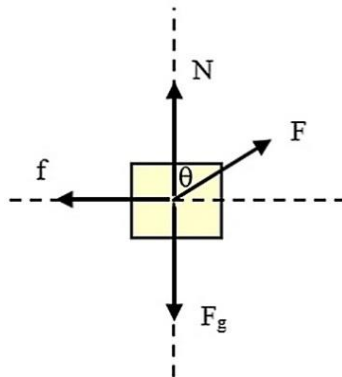


Figura solución 3.7

El valor mínimo posible de F se obtiene tomando el signo igual en la expresión

$$F \cos \theta = \mu_s N \quad (1)$$

Para hallar N, planteando la sumatoria de fuerzas en el eje y:

$$N + F \sin \theta - F_g = ma_y = 0$$

$$N = mg - F \sin \theta \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$F \cos \theta = \mu_e (mg - F \sin \theta)$$

$$F = \frac{\mu_e mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} =$$

$$= (0.5 \times 150 \times 10) / (0.96 + 0.5 \times 0.26)$$

$$= 688 \text{ N}$$

b) Después que comienza a moverse, sustituir μ_e por μ_d . La ecuación (2) no cambia.

Eje x

$$F \cos \theta - \mu_d N = ma_x$$

Eje y

$$F \sin \theta + N = mg.$$

Eliminando N se obtiene:

$$F(\cos \theta + \mu_d \sin \theta) - \mu_d mg = ma_x$$

$$a_x = \frac{F}{m} (\cos \theta + \mu_d \sin \theta) - \mu_d g$$

$$= (688/150)(0.96 + 0.35 \times 0.26) - 0.35 \times 10$$

$$= 0.994 \text{ m/s}^2.$$

CAPÍTULO 4

Trabajo y Energía

4.1 Trabajo de una fuerza

Movimiento rectilíneo y fuerza constante

Trabajo de varias fuerzas sobre un cuerpo

Trabajo positivo, negativo y nulo.

Unidades

Trabajo de una fuerza variable

Movimiento en trayectoria curva

Movimiento en una dimensión y fuerza variable

4.2 Potencia

4.3 Teorema del trabajo y la energía

4.4 Fuerzas conservativas. Energía potencial

4.5 Energía potencial elástica

4.6 Energía potencial gravitatoria

Cuerpo sobre la superficie de la tierra a una altura $h \ll r_t$

4.7 Energía mecánica

4.8 Sistemas conservativos y no conservativos

4.9 Relación inversa entre fuerza y energía potencial

4.10 Diagrama generalizado de energía potencial en sistemas conservativos (1 dimensión)

4.11 Límites de validez de la mecánica de newton

Distancias muy grandes y pequeñas

Altas velocidades

Gravitación universal

Tema avanzado. La relatividad del tiempo y del espacio

4.12 Problemas resueltos

CAPÍTULO 4

Trabajo y Energía

4.1 Trabajo de una fuerza

Movimiento rectilíneo y fuerza constante

Considere el bloque de la figura 4.1, que se mueve en la horizontal sobre una superficie, bajo la acción de la fuerza F , sin tomar en cuenta por el momento otras posibles fuerzas presentes. Se considera el bloque como una masa puntual, despreciando sus dimensiones.

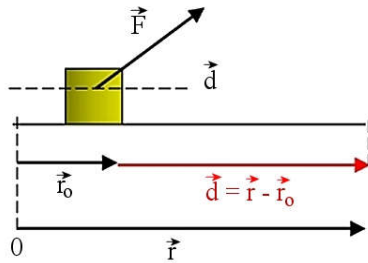


Figura 4.1. Trabajo de una fuerza.

Llamando \vec{d} al desplazamiento del cuerpo en un determinado intervalo de tiempo, se define el trabajo W realizado por la fuerza F mientras el bloque avanza desde la posición inicial \vec{r}_0 hasta la posición final, por el producto escalar

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

También, de acuerdo a la definición de producto escalar, $W = Fd\cos\theta$. Note que *el trabajo es un escalar*, no un vector.

Trabajo de varias fuerzas sobre un cuerpo

La definición de trabajo se refiere a la fuerza, no al cuerpo. Habrá tantos trabajos como fuerzas actúen sobre el cuerpo, y el trabajo

realizado por cada fuerza es independiente del realizado por las fuerzas restantes. Analicemos que sucede cuando actúan varias fuerzas sobre el cuerpo. Llamando \vec{d} al segmento AB en la figura 4.2,

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}$$

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d}.$$

Sumando ambos trabajos y agrupando términos, se obtiene:

$$W_1 + W_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{d}.$$

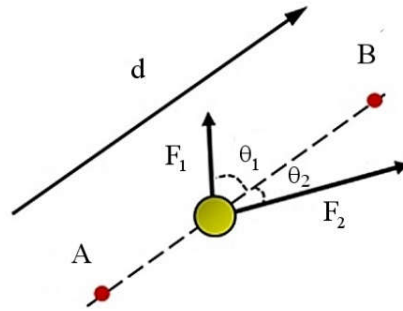


Figura 4.2. Trabajo de varias fuerzas

Pero $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ es la fuerza resultante \vec{F}_R actuando sobre la masa puntual, y $\vec{F}_R \cdot \vec{d}$ el trabajo de la fuerza resultante (W_R). Por tanto, sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene

$$W_1 + W_2 = W_R.$$

De existir más fuerzas (F_3, F_4 , etc.) el razonamiento sería idéntico al anterior, y se obtendría un resultado similar, donde la suma incluiría también los restantes trabajos. Se puede resumir este resultado en forma compacta de la siguiente forma:

$$W_R = \sum W_i.$$

Según esta expresión, la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la

suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

Si hay n fuerzas, entonces:

$$W_R = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n.$$

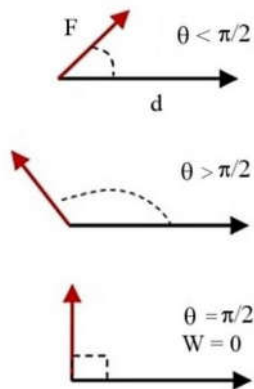


Figura 4.3. Trabajo motor (+), resistente (-) y nulo.

Trabajo positivo, negativo y nulo

Note que el trabajo $W = Fd\cos\theta$ puede ser positivo o negativo en dependencia del valor del ángulo que forman los vectores F y d .

Trabajo motor positivo. Cuando $\theta < \pi/2$ el coseno es positivo y, por tanto, W también lo será. La proyección de F sobre d tiene el mismo sentido que éste (figura 4.3).

Trabajo resistente negativo. Si $\theta > \pi/2$ el coseno es negativo, y entonces $W < 0$. La proyección de F sobre d tiene sentido contrario a éste último.

Trabajo nulo. Cuando $\theta = \pi/2$ el coseno es cero. La fuerza F no tiene componentes en la dirección del desplazamiento y $W = 0$. Ejemplos de este último caso son el trabajo nulo de la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo que se desliza horizontal por una superficie y el de la tensión de la cuerda en la figura 4.4.

Unidades

En el Sistema Internacional de unidades la unidad de fuerza es el newton (N), y la de distancia el metro (m).

$$[W] = [F][d] = \text{Nm} = \text{J (joule)}.$$

El joule es el trabajo realizado por una fuerza de 1 N al recorrer 1 m: $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$.

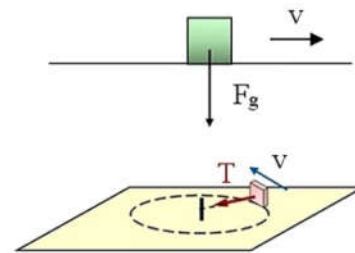


Figura 4.4. Trabajo nulo. En estos ejemplos, aunque hay movimiento, ni la fuerza gravitatoria F_g ni la tensión de la cuerda T trabajan.

Trabajo de una fuerza variable. Movimiento en trayectoria curva

Considere una masa puntual que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza F , cuya intensidad y dirección pueden variar con el transcurso del tiempo (figura 4.5).

Se desea calcular el trabajo realizado por la fuerza F cuando la masa puntual se mueve desde la posición inicial (1), correspondiente al punto (x_1, y_1, z_1) hasta la posición final (2), correspondiente a (x_2, y_2, z_2) . Si $\Delta\vec{r}$ es pequeño, se puede considerar que, mientras la masa puntual avanza ese corto desplazamiento, que la fuerza F se mantiene constante. Es posible escribir entonces

$$\delta W \cong \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

La aproximación será mejor mientras menores sean los $\Delta\vec{r}$ y δW considerados. Se ha utilizado el símbolo δW en vez del más co-

mún dW para indicar que el trabajo realizado es muy pequeño, pero que no es el diferencial de alguna función conocida.

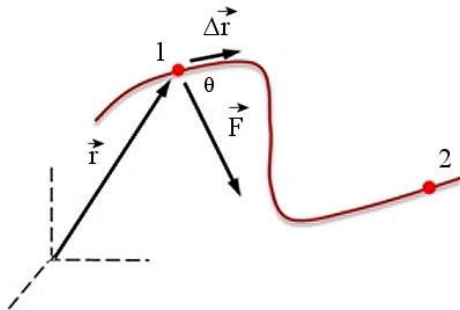


Figura 4.5. Trabajo de una fuerza variable.

El trabajo total realizado por la fuerza F mientras la masa puntual se mueve de 1 a 2 se podría entonces calcular en forma aproximada, dividiendo mentalmente la trayectoria en muchas porciones pequeñas y sumando después todos estos trabajos elementales;

$$W \approx \sum \delta W = \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}.$$

Mientras mayor sea la cantidad de divisiones de la trayectoria y menor sea el tamaño de los intervalos Δr considerados, mejor será la aproximación al verdadero trabajo realizado por la fuerza F . En el límite, cuando $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$, el valor calculado en la sumatoria será el correspondiente al trabajo realizado. Al hacerse infinita la partición de la trayectoria la sumatoria se convierte en una integral, el incremento $\Delta \vec{r}$ se convierte en un diferencial $d\vec{r}$, y la expresión anterior queda como

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Este tipo de integral de un producto escalar a lo largo de una curva se conoce como *in-*

tegral de línea. Se comprueba con facilidad que el trabajo W_{12} realizado desde el punto 1 hasta el punto 2 *dependerá de la trayectoria que se escoja para ir de un punto a otro*, aunque las fuerzas tengan el mismo origen (ejemplo: fuerzas de rozamiento).

Es ésta la razón por la cual se ha escogido el símbolo δW (y no el diferencial dW) para designar un trabajo muy pequeño. La integral de un diferencial es independiente de la trayectoria de integración, lo que no ocurre en este caso. Designando los puntos inicial y final por P_1 y P_2 , la afirmación anterior equivale a escribir que

$$W_{1 \rightarrow 2} \neq G(P_1) - G(P_2);$$

significa que *no es posible encontrar una función G que sea el integrando de $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y dependa solo de la posición inicial y la final, como ocurre en la integración ordinaria*.

Movimiento en una dimensión y fuerza variable

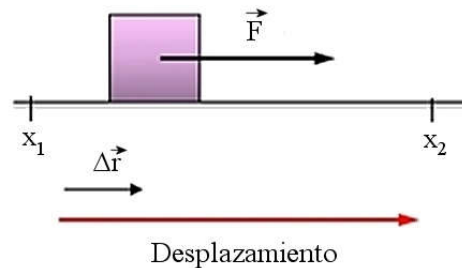


Figura 4.6. Fuerza variable en una dimensión.

Considere el caso en que la fuerza es de módulo variable, pero se mantiene paralela al desplazamiento (movimiento en una dimensión, figura 4.6). En este caso $F = F(x)$, $|d\vec{r}| = dx$, y

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F \cos(0) dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx .$$

En este caso particular es posible hacer una representación gráfica del trabajo. Al graficar $F(x)$ vs. x se ve de inmediato que $F(x)dx$ representa un área elemental, y que el trabajo realizado en el intervalo (x_1, x_2) es igual a la suma de todas esas áreas, igual al área bajo la curva de integración (figura 4.7a).

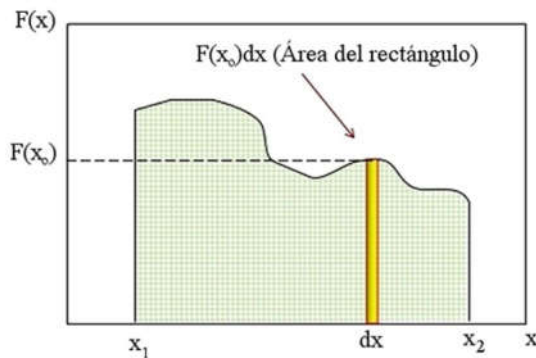


Figura 4.7a. Representación gráfica del trabajo.

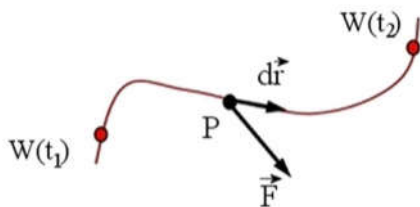


Figura 4.7b. Definición de potencia

4.2 Potencia

Considere el trabajo realizado hasta el instante t_1 por una fuerza F aplicada a una masa puntual mientras recorre una trayectoria cualquiera (figura 4.7b). Sea éste trabajo $W(t_1)$. Designando por $W(t_2)$ el trabajo realizado hasta el instante $t_2 > t_1$, la *potencia media* desarrollada por la fuerza en el intervalo (t_1, t_2) queda definida por la expresión

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

donde $\Delta W = W(t_2) - W(t_1)$ y $\Delta t = t_2 - t_1$.

Note que en este caso se está considerando al trabajo como *función del tiempo* y no de la posición, como en el ejemplo anterior.

Para obtener la *potencia instantánea*, tomando el límite del cociente cuando $\Delta t \rightarrow 0$, al final se obtiene

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

La potencia es una medida de cuán rápido se hace trabajo, lo que muchas veces resulta más útil que conocer el trabajo total realizado.

Unidades

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \text{J/s} = \text{watt (W)};$$

$$1 \text{ w} = 1 \text{ J/s}.$$

Existe otra expresión para la potencia instantánea que en ocasiones puede ser de utilidad. Se obtiene sustituyendo la potencia media en función de la fuerza aplicada y el desplazamiento, y llevando después al límite (figura 4.8).

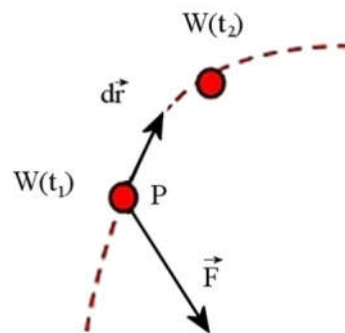


Figura 4.8. Potencia instantánea, fuerza aplicada a la masa puntual P.

Si Δt y Δr son pequeños, la fuerza aplicada

\vec{F} se puede considerar constante en el intervalo (t_1, t_2) , y

$$W(t_2) - W(t_1) \cong \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Al sustituir en la expresión de la potencia media se obtiene:

$$P_m \cong \vec{F} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

que tras tomar límite para $\Delta t \rightarrow 0$ conduce a:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

4.3 Teorema del trabajo y la energía

Considere un cuerpo de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas a lo largo del eje x . Sea F_R la resultante de todas esas fuerzas que, en general, no son constantes (figura 4.9).

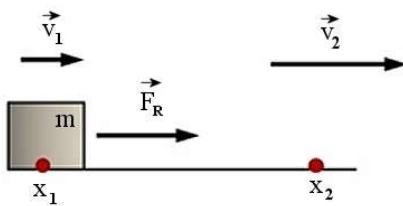


Figura 4.9. Teorema del trabajo y la energía

Como el movimiento es en una dimensión, el trabajo realizado por la fuerza resultante mientras el cuerpo se mueve desde P_1 hasta P_2 se calcula por la relación

$$W_R = \int_1^2 F_R(x) dx.$$

Sustituyendo en la expresión anterior la 2da ley de Newton $F_R = ma$, y considerando que la masa del cuerpo no varía durante el desplazamiento, se obtiene

$$W_R = m \int_1^2 a dx.$$

La sustitución $a = dv/dt$ y $dx = v dt$, tras simplificar términos, conduce a:

$$W_R = m \int_1^2 v dv$$

$$W_R = m \frac{v^2}{2} \Big|_{P_1}^{P_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades cuando el cuerpo se encuentra en los puntos P_1 y P_2 y m es la masa de la partícula.

Mientras que el trabajo W_R depende de parámetros externos a la masa puntual, la expresión $\frac{1}{2} m v^2$ se refiere sólo a propiedades de la masa puntual (su masa y su velocidad). De ahí que resulte conveniente definir la *energía cinética* de la masa puntual por la expresión

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

La energía cinética es siempre positiva, por serlo m y el cuadrado de la velocidad, y que tiene las mismas unidades que el trabajo.

El resultado anterior puede expresarse entonces como:

$$W_R = \Delta E_c,$$

y se conoce como *teorema del trabajo y la energía*:

El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una masa puntual es igual a la variación de su energía cinética.

Aunque se dedujo para un movimiento en una dimensión con el fin de simplificar los cálculos matemáticos, este resultado es general por completo. Es válido para cual-

quier tipo de movimiento en dos o tres dimensiones.

Analizando el significado de este teorema, vemos que siempre que haya un trabajo resultante actuando sobre una masa puntual, ésta debe variar su energía cinética. Y también que cualquier variación de la energía cinética de una masa puntual necesariamente debe tener asociado algún trabajo externo. Es decir:

No es posible que una masa puntual varíe su energía cinética sin que exista alguna resultante externa realizando un trabajo sobre ella.

4.4 Fuerzas conservativas. Energía potencial

Al definir el trabajo, se analizó la particularidad de que el mismo depende de la trayectoria. Diferentes trayectorias entre dos puntos proporcionarían diferentes trabajos, aunque el origen de las fuerzas sea el mismo.

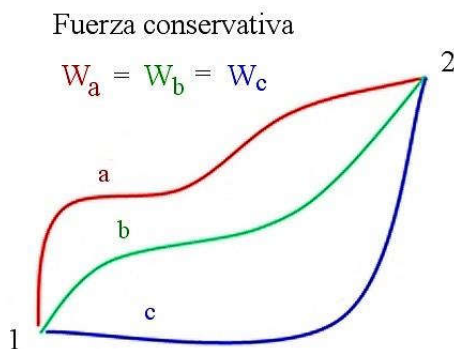


Figura 4.10. El trabajo de una fuerza conservativa no depende de la trayectoria.

Este es el caso típico de las fuerzas de fricción. Por esta razón se utilizó el símbolo δW para representar un trabajo pequeño, ya

que no podía considerarse como el diferencial dW de alguna función analítica. También se expresó que, en general, por similares razones, $W_{1 \rightarrow 2} \neq G(P_2) - G(P_1)$ y el trabajo no podía expresarse como la diferencia de alguna función primitiva evaluada en las posiciones inicial y final.

Sin embargo, existen fuerzas que hacen que la integral del trabajo sea independiente de la trayectoria. Para estas fuerzas $W_1 = W_2 = W_3$ (figura 4.10). Estas fuerzas se denominan *fuerzas conservativas*.

Fuerza conservativa: Aquella cuyo trabajo entre dos puntos cualesquiera no depende de la trayectoria recorrida.

Por tanto,

el trabajo realizado por una fuerza conservativa en cualquier trayectoria cerrada es nulo.

Esta propiedad de las fuerzas conservativas se comprueba muy fácil a partir de la mencionada figura. Si la fuerza es conservativa, entonces

$$W_{1 \rightarrow 2}(1) = W_{1 \rightarrow 2}(2)$$

y de la definición de trabajo sigue que

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - W_{2 \rightarrow 1}$$

$$W_{1 \rightarrow 2}(1) + W_{2 \rightarrow 1}(2) = 0.$$

Además, como el resultado de la integral no depende de la trayectoria, ahora sí será posible expresar el trabajo como la variación de una cierta función primitiva evaluada en las posiciones inicial y final,

$$W_{1 \rightarrow 2} = G(P_2) - G(P_1).$$

Esta función primitiva se relaciona con la *energía potencial*, como se verá a continuación.

Energía potencial

Considere una masa puntual que se mueve de P_1 a P_2 en la figura 4.11, sobre la cual actúa la fuerza conservativa F_c . Introduzcamos la fuerza aplicada F_{ap} , trabajando en contra de la fuerza F_c , de manera que en cada instante

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_c.$$

Si F_c es conservativa, F_{ap} también lo será. Por tanto, existe la posibilidad de calcular el trabajo de la fuerza aplicada según:

$$W_{ap(1 \rightarrow 2)} = \int_1^2 \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r} = G(2) - G(1) \quad (4.1)$$

Se *define* entonces la función primitiva G en esta ecuación como la energía potencial asociada a la fuerza conservativa en cuestión: por definición, $G \equiv E_p$.

Sustituyendo E_p en (4.1) e invirtiendo la ecuación:

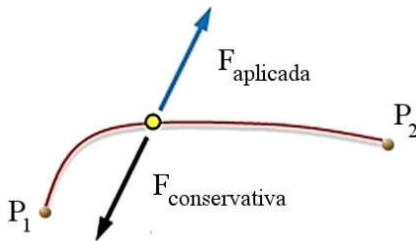


Figura 4.11. Esquema para definir la energía potencial.

$$E_p(2) - E_p(1) = \int_1^2 \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r}. \quad (4.2)$$

La expresión anterior permite calcular la variación de energía potencial para cada caso particular si se conoce la fuerza con-

servativa (figura 4.11).

La ecuación 4.2 define la *diferencia de energía potencial* entre dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 , pero no permite obtener la expresión de la función energía potencial en un punto particular. No obstante, en algunos casos específicos es posible identificar la correspondiente función energía potencial al conocer el valor de la energía en un punto particular (por ejemplo, en el infinito).

Como $W_{ap(1 \rightarrow 2)} = -W_c(1 \rightarrow 2)$, sustituyendo en (4.1) se obtiene,

$$-W_c(1 \rightarrow 2) = E_p(2) - E_p(1)$$

$$W_c = -\Delta E_p.$$

Este término se interpreta como que *el trabajo de la fuerza conservativa es igual a la variación negativa de la energía potencial*. El resultado es válido para cualquier energía potencial. Y viceversa, *cualquier variación de energía potencial siempre tendrá asociado el trabajo de su correspondiente fuerza conservativa*.

La conveniencia de esta definición, donde se ha introducido un signo negativo, quedará esclarecida más adelante.

4.5 Relación inversa entre fuerza y energía potencial

En la sección anterior se vio como obtener la energía potencial por integración si se conoce la expresión de la fuerza conservativa. La relación inversa también existe; si se conoce la función energía potencial es posible calcular la correspondiente fuerza conservativa.

Considere la definición de la energía potencial,

$$\Delta E_p = \int_1^2 \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r}.$$

En esta expresión el integrando no es más que el diferencial de la energía potencial, es decir:

$$dE_p = \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r}$$

En el caso particular de movimiento en una dimensión, $F_{ap} = -F_c$ y $dr = dx$. Sustituyendo arriba y despejando F_c ,

$$F_c = -\frac{dE_p}{dx}.$$

La derivada d/dx a lo largo de una dirección determinada se denomina *gradiente*. La expresión anterior se lee entonces como que *la fuerza conservativa es igual a menos el gradiente de la energía potencial*.

Es posible generalizar el resultado a tres dimensiones y se obtiene la expresión siguiente para el gradiente, donde el símbolo ∂ indica *derivada parcial*:

$$\vec{F}_c = -\left\{ \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right\}.$$

Utilizando el operador nabla, conocido de capítulos anteriores,

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

la expresión se escribe en forma compacta como

$$\vec{F}_c = -\nabla E_p.$$

4.6 Energía potencial elástica

Las fuerzas elásticas que cumplen la ley de Hooke, $F = -kx$, son conservativas. Para calcular la expresión de la correspondiente energía potencial es necesario aplicar la

definición analizada en la sección anterior. Consideremos para ello el ejemplo concreto de un cuerpo acoplado a un resorte, que se estira desde la posición inicial x_1 hasta la final x_2 bajo la acción de una fuerza externa F_{ap} (figura 4.12).

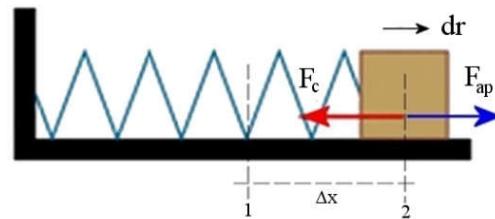


Figura 4.12. Sistema cuerpo-resorte bajo la acción de una fuerza externa F_{ap} .

Para calcular la función energía potencial, apliquemos la expresión (4.2):

$$\Delta E_p = \int_1^2 \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_{ap} \cos(0) dx$$

$$\Delta E_p = k \int_1^2 x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

$$E_p(2) - E_p(1) = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2.$$

De aquí se ve de inmediato que el gráfico de la función energía potencial elástica tiene la forma de la figura 4.13, con la correspondiente expresión analítica $E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2$.

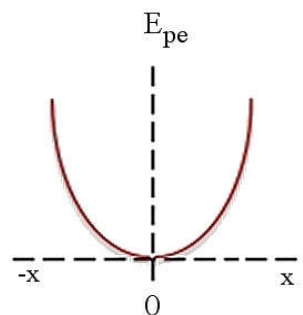


Figura 4.13. Energía potencial elástica

- Una vez calculada la energía potencial, cuando se desee obtener el trabajo realizado por una fuerza elástica no es necesario resolver de nuevo la integral. Basta utilizar la expresión $W_c = -\Delta E_p$.

- La expresión obtenida para la energía potencia es válida no sólo para el ejemplo considerado, sino para cualquier otro sistema donde actué una fuerza elástica que cumpla la ley de Hooke.

- La energía potencial elástica siempre es positiva: $E_{pe} \geq 0$, tanto si el resorte se comprime como si se estira.

- Cuando se analiza el gráfico de $E_p(x)$ vs. x se obtiene que la curva tiene la forma de una parábola del tipo $y = ax^2$, donde a es una constante.

Para $x = 0$, $E_{pe} = 0$; corresponde a la posición de equilibrio del resorte en el ejemplo considerado.

4.7 Energía potencial gravitatoria

La fuerza de atracción gravitatoria es también una fuerza conservativa.

Para deducir la expresión de la energía potencial en este caso particular, consideremos una partícula de masa m que interacciona con una esfera homogénea de masa M (figura 4.14).

Para simplificar los cálculos se asume un movimiento en línea recta desde la posición inicial (1) hasta la final (2).

Aplicando la definición de energía potencial

$$\Delta E_p = \int_1^2 \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_{ap} \cos 0^\circ dr$$

$$F_{ap} = F_g = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\Delta E_p = GMm \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$E_p(2) - E_p(1) = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1}$$

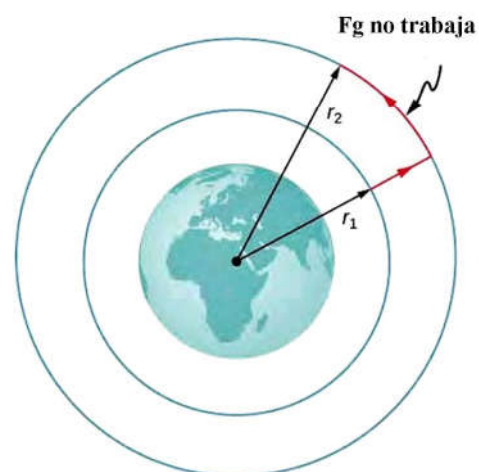
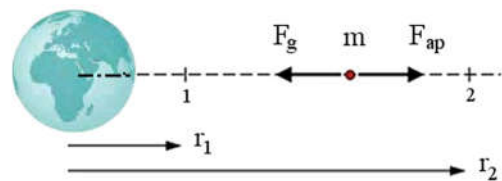


Figura 4.14. Energía potencial gravitatoria

Se demuestra con facilidad que el resultado será válido cualquiera que sea la trayectoria seguida desde 1 a 2. En la figura 4.14, abajo, note que F_g no trabaja en los tramos perpendiculares a r_1 y el producto escalar no contribuye a la integral. Cualquier trayectoria se puede descomponer mentalmente en tramos paralelos y perpendiculares, lo que equivale a considerar solo los desplazamientos paralelos al vector de posición.

Comparando miembro a miembro la expresi-

sión anterior en (1) y (2), se comprueba que la energía potencial gravitatoria toma la forma

$$E_{pg} = -\frac{GMm}{r}. \quad (4.3)$$

Esta es la energía potencial gravitatoria de la partícula de masa m que se mueve en el campo de fuerzas asociado al cuerpo de masa M . (Y también la del cuerpo de masa M en el campo de fuerzas de la partícula de masa m). En realidad, la energía potencial gravitatoria es una propiedad asociada a ambos cuerpos y no a uno solo de ellos.

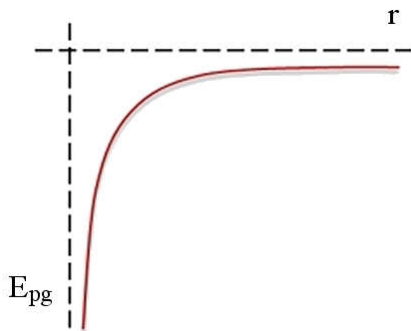


Figura 4.15. Energía potencial gravitatoria

El gráfico de esta función aparece en la figura 4.15. Como r es siempre positiva, al igual que las masas, la energía potencial gravitatoria tendrá valor negativo. Note que E_{pg} es cero sólo cuando $r \rightarrow \infty$ (cuando ambos cuerpos se encuentran alejados infinitamente uno del otro). Para $r \rightarrow 0$, $E_{pg} \rightarrow -\infty$.

Cuerpo sobre la superficie de la Tierra a una altura $h \ll R_T$

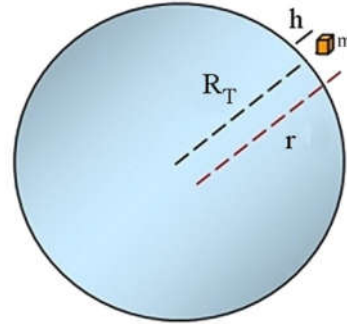


Figura 4.16. Aproximación para pequeñas alturas.

Se trata de encontrar una expresión para la energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m que se encuentra cerca de la superficie de la Tierra, a una altura h mucho menor que el radio de la Tierra R_T . Según (4.3) la energía potencial tendrá la forma

$$E_{pg} = -\frac{GM_T m}{R_T + h},$$

donde M_T es la masa de la Tierra, suponiéndola concentrada en su centro bajo la aproximación de la esfera homogénea, como se vio en un capítulo anterior (figura 4.16).

Agrupemos el denominador de esta expresión de la forma siguiente:

$$\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{R_T} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)}.$$

A partir de un desarrollo en serie de Taylor, es posible demostrar que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

y haciendo $x = h/R_T$,

$$\frac{1}{R_T} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)} \cong$$

$$\cong \frac{1}{R_T} \left\{ 1 - \frac{h}{R_T} + \left(\frac{h}{R_T} \right)^2 - \left(\frac{h}{R_T} \right)^3 + \dots \right\}$$

Como $h \ll R_T$ y la fracción que se obtiene es muy pequeña, es posible considerar solo el primer término dentro de la llave y despreciar los términos cuadrático, cúbico y de orden superior.

Sustituyendo en la energía potencial,

$$\begin{aligned} E_{pg} &= -\frac{GM_T m}{R_T + h} \cong -\frac{GM_T m}{R_T} \left\{ 1 - \frac{h}{R_T} \right\} \\ &= -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{GM_T m h}{R_T^2}. \end{aligned}$$

En un capítulo anterior se obtuvo que

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

Sustituyendo en las expresiones de más arriba se llega a:

$$E_{pg} = -mgR_T + mgh.$$

Por regla general sólo interesan las variaciones ΔE_{pg} y no el valor absoluto E_{pg} de la energía potencial en un punto. Como al calcular las variaciones de energía el término constante mgR_T siempre se anula, es posible redefinir la energía potencial gravitatoria de forma tal que sea cero en la superficie de la tierra ($E_{pg} = 0$ cuando $h = 0$). Así, la función energía potencial puede simplificarse a la expresión siguiente:

$$E_{pg} = mgh.$$

Esta expresión sólo es válida para cuerpos que se encuentran cercanos a la superficie de la Tierra y será más exacta mientras menor sea la altura h del cuerpo sobre la superficie.

4.8. Energía mecánica

La figura 4.17 representa una partícula de masa m que se mueve de la posición 1 a la 2 bajo la acción de diferentes fuerzas, tanto conservativas como no conservativas. Puede haber una o más fuerzas de cada tipo actuando sobre la masa puntual. Incluso, puede ser que alguna de ellas no realice trabajo.

Fuerzas no conservativas son todas aquellas que no están asociadas a una energía potencial (fricción y fuerzas externas de origen desconocido).

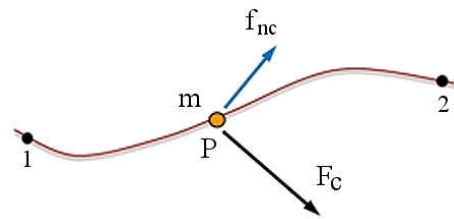


Figura 4.17. Fuerzas no conservativas (f_{nc}).

Según el teorema del trabajo y la energía

$$W_R = \Delta E_c,$$

y como el trabajo resultante es la suma de los trabajos individuales,

$$W_c + W_{nc} = \Delta E_c.$$

Sustituyendo $W_c = -\Delta E_p$ y agrupando, se obtiene

$$W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$W_{nc} = E_{c2} - E_{c1} + E_{p2} - E_{p1}$$

$$W_{nc} = E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1})$$

Si se define la energía mecánica E como la suma de las energías cinética y potenciales de la masa puntual, $E = E_c + E_p$, es posible escribir la ecuación anterior como

$$W_{nc} = E_2 - E_1$$

$$W_{nc(1 \rightarrow 2)} = \Delta E.$$

Esta es la ecuación fundamental para el análisis y la resolución de problemas por el método energético.

La energía potencial E_p representa la suma de energía potencial elástica + gravitatoria + cualquier otro tipo de energía potencial que pudiera haber presente (por ej., electrostática):

$$E = E_c + E_{pe} + E_{pg} + \text{otros tipos de } E_{\text{potencial}}$$

4.9 Sistemas conservativos y no conservativos.

Sistemas conservativos

Considere una masa puntual sobre la cual solo trabajan fuerzas conservativas. (Puede haber fuerzas no conservativas actuando sobre la masa puntual, pero sin realizar trabajo). En ese caso $W_{nc} = 0$, por tanto

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0$$

$$E_2 = E_1 = \text{constante}$$

$$E_c + E_p = \text{constante.}$$

Es decir, la energía mecánica de la masa puntual se mantiene constante (*la energía mecánica 'se conserva'*).

En un sistema conservativo puede haber intercambios de energía cinética en potencial y viceversa, pero esas variaciones ocurren de manera tal que la suma de todas las energías asociadas a la masa puntual se mantiene constante al transcurrir el tiempo.

Sistemas no conservativos

En los sistemas no conservativos la energía mecánica no se mantiene constante, ya que

$$W_{nc} = \Delta E \neq 0$$

$$E_2 \neq E_1.$$

Y es posible tanto que aparezca energía mecánica como que desaparezca.

La acción de las fuerzas de fricción conduce a la pérdida o disipación de energía mecánica, que aparece en forma de energía térmica en las superficies en contacto. La energía térmica está asociada al aumento de la energía de traslación, rotación y vibración de átomos y moléculas a nivel microscópico, lo que se traduce en el incremento de la temperatura de las superficies.

No se debe confundir la energía térmica con el *calor*. El concepto de calor indica el tránsito de energía de un sistema a otro en forma microscópica y desordenada.

4.10 Acerca de la definición de energía y su significado

La física trabaja exclusivamente con magnitudes. Es por eso que, aunque en los libros de texto es usual encontrar diferentes definiciones para "fuerza", cualquier ambigüedad desaparece cuando se especifica cómo se mide esta magnitud (utilizando un dinamómetro, etc). De igual forma es posible obtener una definición precisa para la energía sobre la base de la relación inversa entre fuerza y energía analizada antes.

Combinando las definiciones vistas más arriba para la energía cinética y la potencial, como $p = mv$ y $E = \frac{1}{2}mv^2$,

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ donde } p = \sqrt{2mE_c} ;$$

$$\vec{F}_c = -\nabla E_p.$$

En el primer caso la fuerza está asociada a la variación temporal de la energía; en el segundo, a la espacial. La segunda expresión indica que no sólo las fuerzas variables

en el tiempo son una medida de la energía de un sistema, también lo son las estáticas. Expresando en palabras estos resultados analíticos tendremos:

Energía. Capacidad o habilidad de un cuerpo o sistema para ejercer fuerzas sobre otros cuerpos o sistemas o entre sus propios subsistemas.

Note que tratar de encontrar una definición de energía ajena al concepto de fuerza – lo que es posible encontrar en algunos lugares – es algo así como tratar de definir la aceleración sin mencionar la velocidad: un flagrante error, que sólo tiende a oscurecer o tergiversar su significado. Aún más, la energía NO es una de las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de Unidades; hay que definirla sobre la base de magnitudes conocidas del Sistema Internacional.

TABLA 4.1 TIPOS O CLASES DE ENERGÍAS FÍSICAS		
Energía	Expresión analítica	Magnitud a medir
Cinética	$\frac{1}{2} mv^2$	Masa, velocidad
Potencial gravitatoria	$G M m / r$	Masa, longitud
Potencial elástica	$\frac{1}{2} kx^2$	Elongación
Potencial electrostática	kq_1q_2/r	Carga eléctrica, longitud
Campo eléctrico por unidad de volumen	$\frac{1}{2} \epsilon E^2$	Permitividad, intensidad campo eléctrico

Campo magnético por unidad de volumen	$\frac{1}{2} \mu H^2$	Permeabilidad, intensidad campo magnético
Energía en reposo E_0	mc^2	Masa, velocidad de la luz
Fotón	$h\nu$	Frecuencia

Conservación de la energía. La experiencia muestra que siempre que aparece o desaparece energía mecánica en un sistema, es posible encontrar, en algún otro sistema, otra magnitud con dimensiones de energía (J) que disminuye o aumenta de forma tal que compensa en forma exacta la variación detectada (energía térmica, química, electromagnética, nuclear, etc.).

El resultado anterior se conoce como *principio de conservación de la energía* y por lo general se enuncia expresando que ‘la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma.

Este principio NO es un criterio filosófico como a veces algunos consideran, sino el resultado de la acumulación de evidencia experimental durante varios siglos. Tampoco es un criterio cualitativo, sino, como todas las leyes, es también cuantitativo.

Los hechos que marcaron pauta en el principio de conservación de la energía fueron los siguientes;

- *Imposibilidad de crear un móvil perpetuo de primera especie;* i.e., un dispositivo que fuera capaz de entregar energía mecánica sin consumir otro tipo de energía; (Academia Francesa de Ciencias, 1775).
- *Determinación del equivalente mecánico*

del calor: 1 caloría = 4.1868 joule; (James Prescott Joule, 1840).

- *Principio de conservación de la energía o 1ra Ley de la Termodinámica*; (Julius von Mayer, 1842).

Otro aspecto a considerar es que cualquier energía debe poseer valores numéricos. No hay instrumentos para medir ‘energía’ por vía directa como los hay para medir el tiempo; sin embargo, sus valores numéricos se pueden obtener de manera indirecta o por comparación con otras energías (tabla 4.1).

En adición, el término energía se emplea con otros dos significados diferentes, lo que muchas veces induce a confusión.

Uno de ellos es el que se emplea para indicar de donde provienen o se almacenan determinadas energías reales. Estos términos no tienen asociados valores numéricos y por tanto no son energías físicas reales; son sólo nombres alternativos (tabla 4.2).

TABLA 4.2 NOMBRES USADOS PARA INDICAR CÓMO O DONDE SE ALMACENAN LA ENERGÍAS FÍSICAS	
Nombre	Energía real medible
Energía eólica	Cinética del viento.
Energía solar	Radiación electromagnética, fotones.
Energía nuclear	Energías de enlace, defecto de masa, mc^2 , etc.
Energía química	Energías de enlace.
Energía térmica	Cinética, de vibración y rotación microscópicas y

desordenadas.

El segundo significado es el uso popular del término en lenguaje figurado para indicar cierto estado físico o volitivo de las personas. Ejemplo: ‘Me quedé sin energías’ para indicar cansancio, agotamiento o falta de voluntad. Esa “energía” es algo inexistente que no se puede medir, porque no ha sido definido con precisión ni asociado a otras energías, ni puede cumplir el principio universal de conservación de la energía. Es una acepción muy usada en las propuestas pseudocientíficas, pues permite el uso de un lenguaje que aparenta ser científico, sin serlo.

Ejemplo

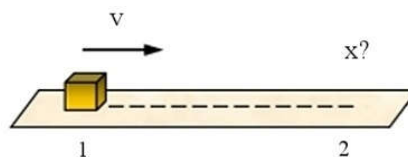


Figura 4.18. Ver texto.

Considere un bloque que se lanza con velocidad inicial v_0 sobre una superficie horizontal (figura 4.18). El coeficiente de fricción dinámico entre las superficies es μ_k . ¿Qué distancia x avanza el bloque antes de detenerse?

Resolución

Datos: v_0, μ_k

Diagrama de fuerzas:

La única fuerza que trabaja es la fuerza de fricción (figura 4.19).

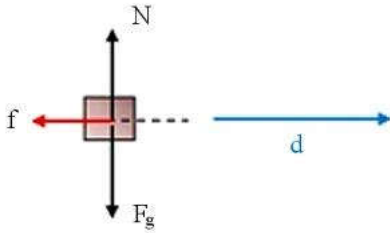


Figura 4.19. Ver texto

Las fuerzas N y F_g no hay que tomarlas en cuenta por ser perpendiculares a la dirección del movimiento. Escribiendo la ecuación fundamental para el análisis por el método energético,

$$W_{nc} = \Delta E$$

$$W_{nc} = \vec{f} \cdot \vec{d} = fx \underbrace{\cos(180)}_{-1} = -fx = E_2 - E_1.$$

Pero E_2 es cero, porque el bloque se detiene en (2) y no hay que considerar variación de energía potencial de algún tipo: $E_2 = E_{c2} + E_{p2} = 0$. Además $E_{p1} = 0$, y el valor de f puede escribirse como $f = \mu_d N$.

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$-\mu_d N x = -\frac{1}{2} m v_1^2.$$

Se puede lograr una mayor simplificación si notamos que, en el diagrama de fuerzas,

$$N = F_g = mg.$$

Simplificando y despejando, con $v_1 \equiv v_o$, se obtiene

$$x = \frac{v_o^2}{2\mu_k g}.$$

Note que al inicio, $E = E_c = \frac{1}{2} m v_o^2$, y que al final $E = 0$. Ha desaparecido energía mecánica, que aparece en forma de energía térmica en las superficies en contacto.

Desde el punto de vista microscópico, lo

que ocurre es que la energía *ordenada* de las moléculas o átomos en bloque (todas los átomos se movían al unísono, en una misma dirección) se ha *desordenado* en forma de movimientos aleatorios de vibración de átomos y moléculas en las superficies en contacto. El tránsito del orden al desorden tiene que ver con el incremento de *entropía*, magnitud similar a la energía potencial en que no depende de la trayectoria, sino sólo del estado final y el inicial. La entropía se estudia en los cursos de Termodinámica.

4.10 Diagrama generalizado de energía potencial en sistemas conservativos

En ocasiones es posible obtener información de un sistema a partir del análisis gráfico de su energía potencial y de la relación que existe con la energía mecánica. El gráfico de la figura 4.20 representa la energía potencial de una masa puntual en un campo de fuerzas conservativo en una dimensión. Se ha dibujado una dependencia ficticia con el fin de analizar los diferentes casos posibles a presentarse. $E_o, E_1, E_2 \dots$ representan diferentes energías mecánicas que pudiera tener la masa puntual.

Como el sistema es conservativo, cada energía mecánica se mantiene constante para todo x y está representada por una recta paralela al eje. En cada uno de estos casos se cumplirá la relación $E = E_c + E_p$.

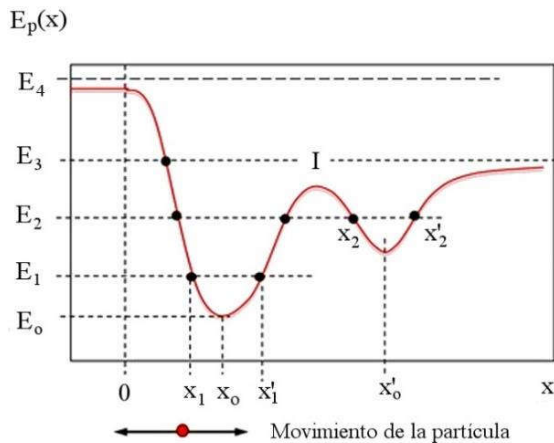


Figura 4.20. Diagrama de energía potencial de una masa puntual que se mueve en el eje x .

a) $E = E_0$

La energía mecánica coincide con el mínimo de la función $E_p(x)$: $E = E_p(x_0)$ (ver figura). Luego: $E_c = E_0 - E_p(x_0) = 0$. No puede haber energía cinética, y la velocidad de la masa puntual es nula. La masa puntual se encuentra en x_0 y no tiene energía suficiente para modificar su posición.

b) $E = E_1$

En este caso existe un conjunto de valores $E_p(x)$ accesibles: todos los comprendidos en el intervalo (x_1, x_1') tales que $E_p(x) < E_1$. En ese intervalo,

$$E_c = E_1 - E_p(x) > 0.$$

Los puntos x_1 y x_1' son *puntos de retorno*. En esos puntos la energía potencial se hace igual a la energía mecánica, y por tanto $E_c = 0$ y $v = 0$. Si al inicio se movía a la derecha, la masa puntual se detiene en x_1' y regresa. No confundir el movimiento de la masa puntual en el eje x con la curva bidimensional que representa la energía potencial.

El punto x_0 es un *punto de equilibrio estable*, asociado al valor mínimo de la

energía potencial. Esta afirmación se puede demostrar a partir de la siguiente consideración: la fuerza se deriva de la energía potencial a partir de la expresión conocida

$$F_c = -dE_p/dx.$$

Según la condición de extremo relativo, cuando la derivada se evalúa en x_0 tendremos $dE_p/dx = F_c = 0$ (condición de mínimo). Significa que la fuerza conservativa no actúa sobre la masa puntual cuando ésta se encuentra en x_0 .

Si la masa puntual se separa un poco a la derecha de x_0 ($dx > 0$) entonces $dE_p > 0$ (ver gráfico $E_p(x)$), y la ecuación anterior nos dice que la fuerza estará orientada a la izquierda ($F_c < 0$). Si la separación es hacia la izquierda ($dx < 0$ y $dE_p > 0$), la fuerza estará dirigida a la derecha ($F_c > 0$). En ambos casos la fuerza es tal que tiende a restaurar la posición de equilibrio de la masa puntual, y esta es precisamente la definición de punto de equilibrio estable.

c) $E = E_2$

Cuando la energía mecánica toma el valor E_2 , hay 4 puntos de retorno en el gráfico (x_1, x_1', x_2, x_2'). El punto x_0' es un punto de equilibrio *metaestable*. Si la masa puntual logra “saltar” la barrera de potencial representada por I (gracias a la acción de algún impulso adicional externo) quedará oscilando alrededor de la nueva posición de equilibrio.

El punto correspondiente a I es un *punto de equilibrio inestable*, asociado a un máximo de la función $E_p(x)$, donde $F_c = 0$. Es inestable porque para una pequeña separación dx de la posición de equilibrio,

la fuerza calculada a partir de (4.10.1) es tal que tiende a alejar aún más la masa puntual de esa posición.

d) $E = E_3$

Cuando la energía mecánica es igual a E_3 sólo hay un punto de retorno. El movimiento hacia la derecha es ilimitado, ya que $E_3 > E_p$ siempre, y no hay posibilidad de que la energía cinética y la velocidad de la masa puntual se hagan cero. Si al inicio la masa puntual se movía hacia la izquierda, se detendrá al alcanzar el punto de retorno, y después se moverá de forma indefinida hacia la derecha.

e) $E = E_4$

No hay puntos de retorno, ni a la derecha ni a la izquierda. En la región del gráfico que se encuentra a la izquierda de cero el equilibrio es *indiferente*, pues $F = -dE_p/dx = 0$ para todo x . No hay fuerzas que tiendan a alejar o restaurar la posición de la masa puntual cuando se separa un poco de su posición inicial.

4.11 Límites de validez de la mecánica de Newton

a) Distancias muy grandes

Las leyes de Newton no son válidas a distancias del orden galáctico.

Las investigaciones astronómicas más recientes han encontrado serias discrepancias con las leyes de Newton; en específico, el incremento de velocidad de alejamiento de las galaxias con el aumento de la distancia, lo que por el momento no tiene explicación. Tampoco la tiene la observación de las propiedades anómalas de rotación de muchas galaxias, ya que la velocidad de rotación en

sus bordes es mucho mayor que la prevista por la teoría (figura 4.21).

Los modelos cosmológicos más reconocidos introducen el concepto de ‘energía oscura’ y ‘materia oscura’ para tratar de dar una explicación a ese comportamiento (‘oscura’ no porque tenga color, sino porque no se tiene idea de cuál es su origen). Los estimados más recientes consideran que alrededor del 70% del contenido de masa-energía del universo corresponde a la energía oscura.

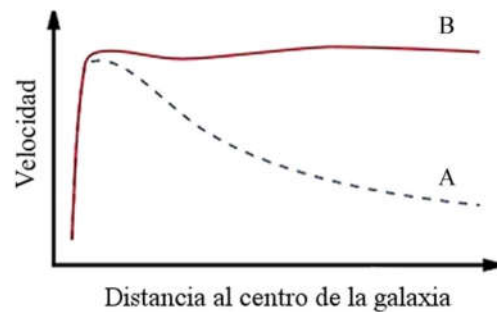


Figura 4.21. Velocidad de rotación de la galaxia. A: Curva teórica newtoniana. B: curva experimental.

Para que las ecuaciones teóricas, similares a la de los planetas alrededor del Sol, se puedan ajustar a los datos observados, las galaxias espirales necesitarían una masa mucho mayor que la existente. Al no haber hoy evidencias observables de esa masa *invisible* se le denominó *materia oscura*. Los cálculos muestran que debería tener entre un 50% y un 90% de la masa total de la galaxia.

b) Distancias muy pequeñas

Las leyes de Newton no son válidas en el micromundo.

La mecánica de Newton no es válida cuando las distancias son del orden atómico o menores. Para ver esto último en de-

talle, consideremos lo siguiente. Es posible, por ejemplo, utilizar la mecánica de Newton para describir las oscilaciones de una molécula de CO_2 .

Esta molécula es lineal, y en química se representa de la siguiente forma:



Un modelo utilizado para describir las oscilaciones microscópicas de la molécula consiste en sustituir mentalmente los enlaces covalentes por resortes de constante k , y los átomos por pequeñas esferas sólidas (figura 4.22). Esta suposición proporciona resultados teóricos que en muchos casos coinciden con la evidencia experimental.

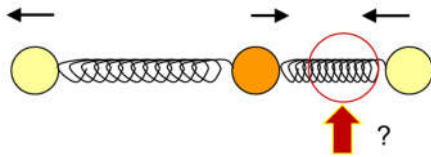


Figura 4.22. Modelo clásico de la molécula de CO_2 . No es válido para analizar el enlace químico.

Sin embargo, cuando se desea analizar lo que ocurre dentro del enlace, los resultados que proporciona la mecánica de Newton no coinciden con la realidad. Igual sucede cuando se desea analizar el movimiento de los electrones en el átomo, la formación de todo tipo de enlaces químicos en las moléculas y muchos otros fenómenos relacionados con el micromundo. En general, cuando las distancias consideradas son del orden atómico, la mecánica de Newton deja de ser una herramienta adecuada para describir y analizar los fenómenos.

Fue necesario inventar (o descubrir) otra mecánica para analizar el micromundo: la Mecánica Cuántica. Esta disciplina se basa

en la mecánica de Newton, pero sus leyes y postulados básicos difieren de manera radical de los postulados por Newton.

c) Altas velocidades. Teoría especial de la relatividad.

Cuando la velocidad de la masa puntual se acerca al orden de la velocidad de la luz ($c \approx 300\,000\text{ km/s}$) aparecen los llamados “efectos relativistas”, y la mecánica de Newton ya no es adecuada para describir de forma correcta el movimiento de las partículas. Para describir el movimiento hay que utilizar la teoría especial de la relatividad, elaborada por Einstein en 1905 y años posteriores.

Las leyes de Newton no son válidas a velocidades cercanas a la luz.

- Las dimensiones de los objetos y el tiempo de duración de los eventos pasan a depender del sistema de referencia considerado.
- Aunque una masa puntual esté en reposo ($v = 0$) tiene asociada una energía $E_0 = mc^2$, donde m es la masa newtoniana de la partícula.

d) Gravitación universal. Teoría general de la relatividad

La ley de gravitación universal de Newton no explica por completo, de forma satisfactoria, todos los fenómenos gravitatorios que se presentan en el universo. Por ejemplo, se sabía que el perihelio de Mercurio (el punto de su órbita que se encuentra más próximo al Sol) gira en torno al Sol una vez cada tres millones de años, y ese movimiento no podía explicarse con las teorías clásicas.

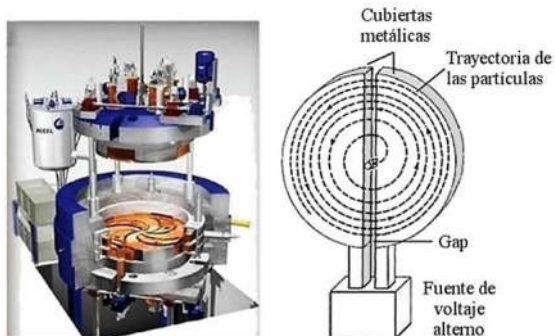


Figura 4.23. Ciclotrón comercial para aplicaciones médicas. A medida que la velocidad de las partículas se acerca a la de la luz, son necesarias correcciones relativistas para que funcione.

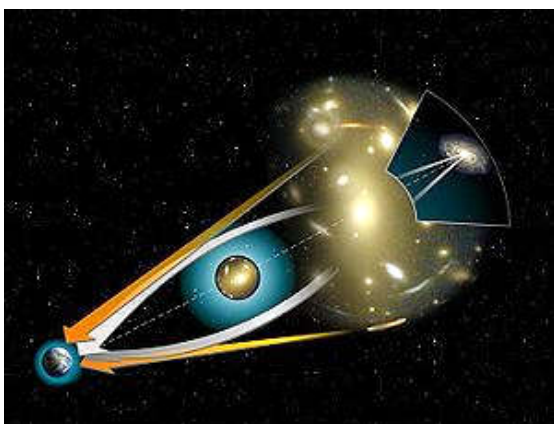


Figura 4.24. Interacción de la luz con los objetos masivos (lente gravitacional).

En cambio, la Teoría General de la Relatividad predice todos los aspectos del movimiento. Las mediciones efectuadas con radar han confirmado la coincidencia con la teoría, con una precisión de un 0.5%. La teoría general también predice que un rayo de luz se curvará en las proximidades de un objeto masivo como el Sol, lo que también ha sido comprobado en forma repetida. Estrellas que deberían quedar ocultas por el sol son visibles durante los eclipses solares (figura 4.24). Hay muchos otros efectos astronómicos de este tipo.

Albert Einstein (1879-1955). Se considera como uno de los científicos más importantes de todos los tiempos. Tres artículos suyos publicados en 1905 fueron trascendentales para el desarrollo de la física e influyeron en el pensamiento de toda la comunidad científica. Los artículos trataban de la naturaleza de la luz, describían el movimiento molecular e introducían la teoría de la relatividad restringida o especial. Einstein es famoso por replantearse suposiciones científicas conocidas de antaño y sacar de ellas conclusiones sencillas a las que nadie había llegado antes.

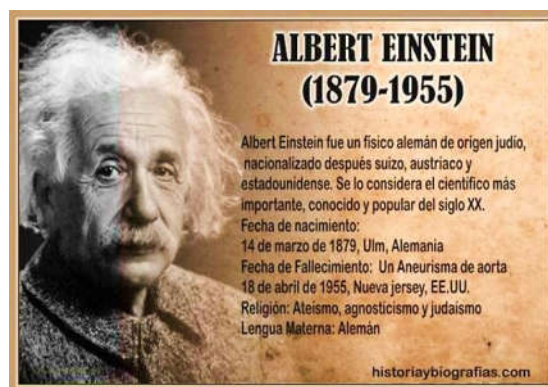


Figura 4.25. Albert Einstein

4.11. Tema avanzado. La relatividad del tiempo y el espacio

1. Antecedentes

De entre los muchos resultados que pudieran considerarse como antecedentes de la Teoría de la Relatividad, hay dos que se destacan, ambos asociados a la *Teoría Dinámica del Campo Electromagnético*, publicada en 1865 por el inglés James Clerk Maxwell, que resumía los conocimientos existentes hasta el momento acerca de las propiedades eléctricas y magnéticas de las sustancias al introducir los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, agrupando los campos eléctricos y magnéticos

en un solo concepto: el campo electromagnético. Asimismo, logró identificar la luz como una onda electromagnética y unificar la óptica con el electromagnetismo.

Sin embargo, dejaba pendiente un asunto importante: si bien las ecuaciones de Maxwell eran capaces de resumir con éxito la evidencia experimental acumulada hasta el momento, no cumplían la *transformación de Galileo*, transformación que debe cumplir cualquier ley física para que sus expresiones matemáticas sean válidas en todos los sistemas inerciales, tal como se analizó en la sección 3.6. En un sistema $x'y'z'$ que se mueve con velocidad constante en relación a otro sistema inercial xyz según la figura 4.26, las relaciones entre las coordenadas de un punto cualquiera deben ser tales que:

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t.\end{aligned}$$

Otro aspecto controvertido del problema era la creencia general entre físicos y filósofos que las ondas electromagnéticas se transmitían a través de un sistema de referencia privilegiado (hipótesis del *éter*, figura 4.27).

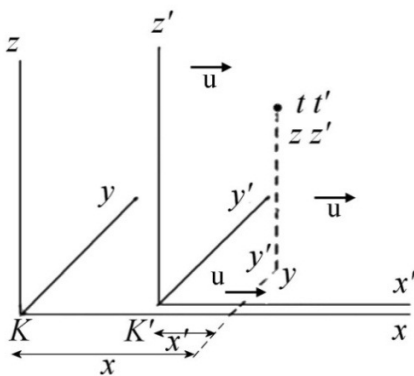


Figura 4.26. Transformación de Galileo.

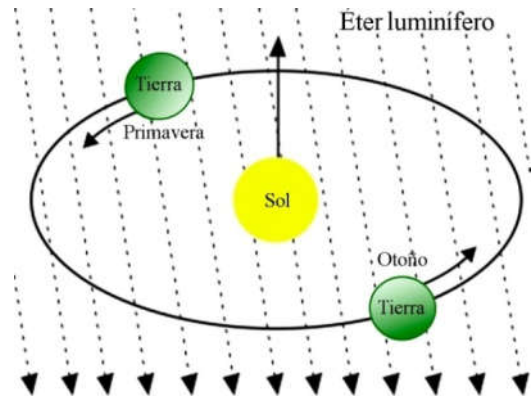


Figura 4.27. Éter luminoso. La Tierra se movía a través del éter, medio de transmisión de la luz.

Era ésta una sustancia ligera en extremo, que se creía ocupaba todo el espacio como un fluido, idea que venía evolucionando desde la antigua Grecia con diversas variantes. En las antiguas creencias griegas el éter era algo brillante que respiraban los dioses, no el pesado aire que respiran los mortales; en el siglo XIX las ideas habían evolucionado, y se pensaba que el éter debería tener una densidad ínfima y un gran coeficiente de elasticidad. Hoy se sabe que tal sustancia no existe, pero su existencia real se valoró con seriedad hasta finales de ese siglo.

El experimento de Michelson y Morley

En 1887 el polaco nacionalizado estadounidense Albert Abraham Michelson y su colega Edward Morley construyeron lo que hoy se conoce como interferómetro de Michelson Morley, con la finalidad de medir la velocidad en el éter. El instrumento se compone de un espejo semiplatado que divide un haz de luz monocromática en dos rayos perpendiculares de igual longitud (figura 4.28). Los dos rayos recorren igual distancia si el instrumento está en reposo – no así se mueve respecto al éter – hasta formar un

patrón de interferencia que dependería de la diferencia de las distancias recorridas por los rayos. El interferómetro es capaz de detectar con gran precisión esa diferencia a partir del corrimiento de las franjas de interferencia.

En la figura 4.28(1) se muestra la trayectoria de los rayos que salen de la fuente s cuando el sistema está en reposo. En (2), lo que ocurriría si la Tierra se mueve a la derecha respecto al éter en reposo.

Una parte del rayo sa va hasta (b) , se refleja y regresa al espejo (que ha avanzado una distancia aa_1) según ba_1 , donde de nuevo se divide; una fracción sigue recta hasta el ocular y la otra va al espejo c , se refleja y regresa según ca_1 , donde de nuevo se refleja hacia (f) , a la par que ba_1 . Si el interferómetro se rota 90° la diferencia del camino recorrido por los rayos divididos es el doble en un caso que en el otro, lo que debería alterar el patrón de interferencia; sin embargo, a pesar de múltiples intentos, nunca se logró apreciar algún cambio más allá de la incertidumbre experimental.

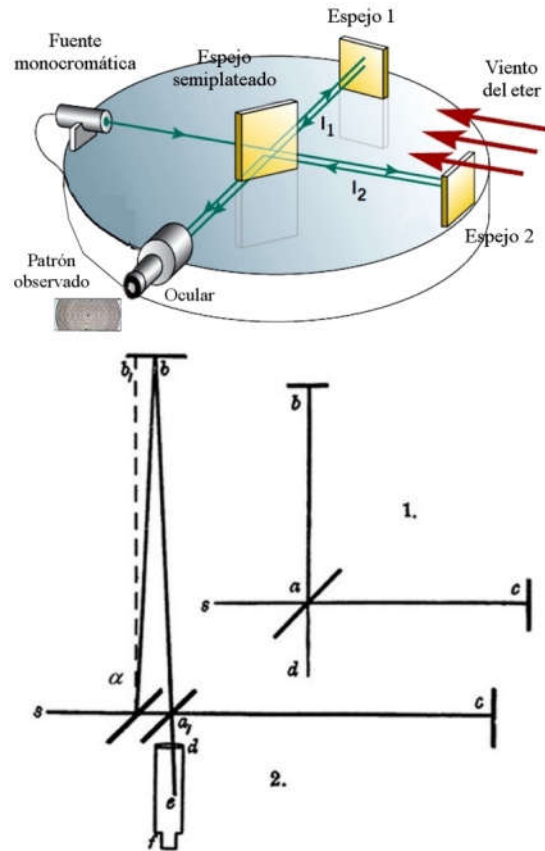


Figura 4.28. Interferómetro de Michelson. Abajo, la distancia entre el espejo semiplataado (a) y los espejos (b) y (c) es la misma. La base era un bloque de piedra montado en mercurio para evitar vibraciones. (La figura inferior se tomó del original, “On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether”, *The American J. of Science*, 203, Noviembre 1887, <https://history.aip.org/exhibits/gap/PDF/michelson.pdf>)

Considerando la velocidad de la tierra en su órbita alrededor del Sol, cuando el interferómetro se orienta en una dirección determinada, digamos, paralela al viento del éter, se obtendría un determinado patrón de interferencia en el ocular, que por sí solo no puede ofrecer información acerca de la velocidad. Pero si el instrumento se gira 90 grados y se repite la medición, los rayos cambiarían de orientación respecto al éter,

así como el tiempo de recorrido de cada uno.

Los cálculos muestran que debería aparecer un corrimiento de 0.4 franjas en el ocular, lo que nunca se pudo observar. En el artículo original los autores concluyeron que “de lo precedente, parece razonable suponer que, de existir algún movimiento relativo entre la Tierra y el éter luminífero, debe ser pequeño, muy pequeño”.

La Transformación de Lorentz

En el año 1900, desarrollando lo que hoy se conoce como ‘ingeniería inversa’, el holandés Hendrik Antoon Lorentz introdujo en el año 1900 una transformación de ejes que permitía se cumplieran las ecuaciones de Maxwell; se conoce en la actualidad como *transformación de Lorentz* y tiene la forma:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

El parámetro $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ se conoce co-

mo *factor de Lorentz*, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Esta transformación se reduce a la de Galileo si la velocidad de luz es infinita, pero tenía un problema, al aplicarla a otros objetos aparece que los cuerpos se contraen en la dirección del movimiento y que el tiempo

no es el mismo en todos los sistemas de referencia, lo que no era compatible con los conocimientos existentes hasta el momento.

La Teoría de la Relatividad

En 1905 Albert Einstein publicó un artículo en la revista *Annalen der Physik* (Berna) 17: pp. 891-921, (*accesible en http://www.prophysik.de:80/Phy/pdfs/ger_890_921.pdf*) donde presentó las bases de la teoría especial de la relatividad, sobre la base de los siguientes postulados:

Primer postulado. Principio especial de relatividad: Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. En otras palabras, no existe un sistema inercial de referencia privilegiado que se pueda considerar como absoluto.

Segundo postulado. Invariancia de c : La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal (c) que no depende del movimiento relativo de la fuente de luz.

Tomados en conjunto, los postulados implican que cualquier ley física debe ser invariante respecto a una transformación de Lorentz; trae consecuencias tales como que el tiempo transcurrido entre dos eventos depende del sistema de referencia donde se mida, y que los objetos se contraen en la dirección del movimiento.

Relatividad del tiempo

La figura 4.29 muestra un ejemplo ilustrativo de cómo se afectan los intervalos de tiempo medidos por observadores en sistemas de referencia que se mueven con velocidad relativa u si la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas de referencia, tal como postula la teoría de la relatividad.

Un observador en el tren (A) observa que el rayo se mueve en línea recta. Al medir con su reloj el tiempo τ que el rayo tarda en ir al espejo y regresar obtiene un valor $\tau = 2L/c$, donde c es la velocidad de la luz. El observador en tierra (B) ve una trayectoria diferente, representada a la derecha de B. Su reloj marca un tiempo

$$t = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{ut}{2}\right)^2}}{c}$$

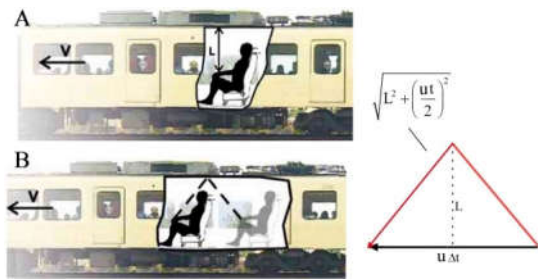


Figura 4.29. Movimiento de un rayo de luz reflejado en un espejo, colocado a una distancia L en el techo de un tren que se mueve a velocidad constante v en dirección perpendicular, visto por un observador en el tren y otro en tierra.

Despejando t en esta ecuación, y comparando con $\tau = 2L/c$ se obtiene un valor mayor que τ (el denominador es menor que 1):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Significa que la misma velocidad de la luz en todos los sistemas trae por consecuencia la existencia de un *tiempo propio* en cada sistema; los observadores asociados a sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro medirán intervalos de tiempo diferentes para los mismos eventos.

Mediante un razonamiento similar no es difícil comprobar que los objetos se con-

traen en la dirección del movimiento (contracción de Lorentz), de manera que

$$L = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (a)$$

donde L_0 es la longitud para un observador que se mueve junto con el objeto y L la longitud que ve el observador 'en reposo', en el sistema de referencia respecto al cual se mide la velocidad v .

Suma relativista de velocidades

Considere la figura 4.30, que representa un vagón que se mueve con hacia la derecha con velocidad u respecto a un observador en reposo.

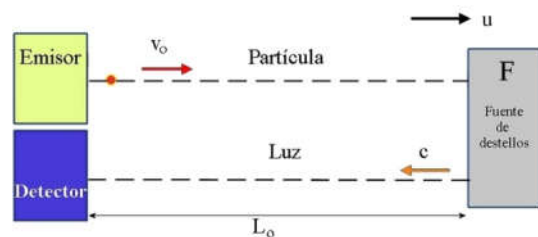


Figura 4.30. Movimiento de una masa puntual respecto a dos sistemas de referencia que se mueven con velocidad relativa u , uno respecto al otro.

Un emisor de partículas emite una masa puntual con velocidad v_0 en un instante determinado, que excita a la fuente de destellos a una distancia L_0 , la cual emite un rayo de luz con velocidad c hacia el detector, que se encuentra a la misma distancia L_0 . Un observador en el sistema en movimiento medirá un intervalo de tiempo total Δt_0 para los dos eventos, dado por

$$\Delta t_0 = L_0/v_0 + L_0/c.$$

Sea Δt_1 el tiempo que mide un observador en tierra para que la partícula llegue hasta la fuente F. De acuerdo a la ec. (a) la longitud L_0 se debe contraer a una longitud L . Sin

embargo F se va alejando de la partícula, que recorre un espacio adicional $u\Delta t_1$ en ese mismo intervalo. Para la velocidad c es lo contrario, una vez emitido el rayo de luz, el detector se va acercando y el espacio a recorrer se reduce. Si se toma Δt_2 como el tiempo que tarda en llegar el destello al detector, entonces:

$$v\Delta t_1 = L + u\Delta t_1$$

$$c\Delta t_2 = L - u\Delta t_2.$$

Despejando Δt_1 y Δt_2 para formar el intervalo total $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ y sustituyendo L según (a), con

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

de acuerdo a la expresión del tiempo propio obtenida más arriba, se llega a:

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + \frac{v_0 u}{c^2}}$$

donde v es la velocidad respecto al observador fijo y v_0 la representada en la fig. 4.30. Esta ecuación se puede generalizar a situaciones donde la velocidad tiene componentes en otras direcciones

Momento lineal de una partícula. Masa y energía.

Las demostraciones siguientes son algo elaboradas y no se presentan. La cantidad de movimiento de una masa puntual relativista tiene la forma

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mientras que la masa de la partícula es:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula. Al final, la energía de una partícula en movimiento con una velocidad v toma la forma

$$E = mc^2,$$

donde m viene dada por la expresión anterior. Si la velocidad de la masa puntual es cero, entonces se llega a

$$E_0 = m_0 c^2 \text{ (energía en reposo),}$$

que es la energía asociada a la partícula por el solo hecho de su existencia, sin análogo en la mecánica clásica. *La demostración de estas expresiones se puede consultar, por ejemplo, en Halliday, Resnick y Crane, Física, Vol I. Tomo II, 4ta. Ed. pp. 537-538.*

Existen múltiples evidencias experimentales que avalan todo lo anterior. En los modernos aceleradores de partículas, las partículas aceleradas hasta llegar a velocidades muy cercanas a la velocidad de la luz aumentan su tiempo de vida de acuerdo a lo que predice la teoría especial de la relatividad con gran precisión. Otros experimentos han permitido comprobar la existencia de un tiempo propio mediante relojes atómicos de gran exactitud.

Un ejemplo que ilustra mejor la necesidad de tomar en cuenta los efectos relativistas es el siguiente.

El sistema GPS (Global Positional System) consta de 24 satélites repartidos en seis órbitas diferentes a una altitud de 20 mil 200 km, que para uso civil transmiten y reciben información a la frecuencia de 1575.42

MHz. Cada satélite emite un código propio de 50 bits a esa frecuencia, enviando información sobre la hora y su posición cada 30 segundos. El receptor GPS en tierra está programado para distinguir la señal particular de cada uno de ellos, determinar su posición y el retraso de la señal recibida. Con esta información, tomada de tres satélites diferentes, el receptor puede determinar su localización con gran exactitud.

Ahora bien, para trabajar de forma correcta, los relojes atómicos de los satélites deben estar sincronizados con los de tierra. Y hay dos efectos relativistas a tomar en cuenta para mantener la sincronización: la dilatación del tiempo y el cambio de frecuencia gravitacional. Son efectos muy pequeños, pero las velocidades de los satélites son lo bastante grandes para que sea forzoso tomarlos en cuenta.

Si v es la velocidad del satélite (≈ 4 km/s) la teoría especial de la relatividad predice que la frecuencia de los relojes atómicos se hace más lenta en un factor de $v^2/2c^2 \approx 10^{-10}$, que equivale a un retraso de siete μ s (microsegundos) diarios.

Por otra parte la teoría general de la relatividad (relacionada con la atracción gravitatoria, no estudiada en este libro) predice que un reloj cercano a un objeto masivo se retrasa respecto a un objeto más alejado. Como los receptores GPS están mucho más cercanos a la tierra que los satélites, los cálculos muestran que el receptor se ralentiza, alrededor de 45.9 μ s diarios. Los efectos combinados dan por resultado una diferencia entre ambos relojes de unos 38 μ s por día lo que, de no ser tomado en cuenta, daría lugar a un error de posición de unos diez

kilómetros, imposibilitando el uso del sistema tal como se conoce hoy, cuya imprecisión es solo de unos pocos metros.

Tema avanzado

Demostración de que, a los efectos gravitatorios, una esfera homogénea de radio R se comporta como si su masa estuviera concentrada en el centro.

1. Contribución de un anillo de espesor $Rd\phi$.

Para demostrarlo es necesario hacer un análisis por partes. En primer lugar, considere la interacción entre una masa puntual m con un anillo de espesor $Rd\phi$ sobre un cascarón esférico delgado de masa M , centrado en la línea que va del centro de la esfera hasta el punto P (figura 4.31).

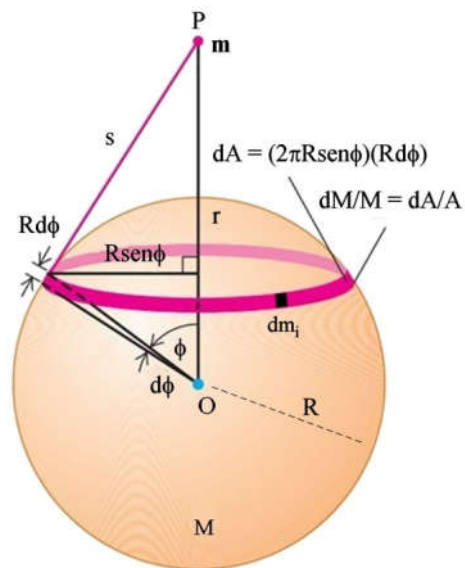


Figura 4.31. Cálculo de la E_{pg} de una masa puntual m y un anillo en la superficie de un cascarón esférico de radio R . En la figura, M es la masa del cascarón y dM la de uno de sus anillos de espesor infinitesimal.

Es posible considerar el anillo formado por pequeños elementos de masa dm_i , de manera que la contribución infinitesimal de cada uno a la energía potencial de interacción con la masa puntual m tiene la forma

$$dE_p(i) = -G \frac{m \cdot dm_i}{s}$$

Como la energía potencial de un cuerpo en un sistema de partículas es aditiva y s es la misma para todos los puntos del anillo,

$$dE_p = -\frac{Gm}{s} \oint_{\text{anillo}} dm_i$$

$$dE_p = -G \frac{mdM}{s} \quad (\text{Ec.1})$$

donde se ha designado la masa del anillo como dM .

2. Cálculo de la masa M del cascarón.

Si R es el radio del cascarón esférico, el radio del anillo será $R \sin \phi$, su perímetro $2\pi R \sin \phi$ y su ancho $R d\phi$ (ver figura). La superficie dA del anillo es su longitud (perímetro $2\pi R \sin \phi$) por su ancho $R d\phi$; es decir:

$$dA = 2\pi R^2 \sin \phi d\phi$$

Si la esfera es homogénea, el área y su masa son proporcionales, o sea:

$$dA/A = dM/M,$$

donde M es la masa total del cascarón esférico. Como el área de la superficie de la esfera es $4\pi R^2$,

$$\frac{dM}{M} = \frac{2\pi R^2 \sin \phi d\phi}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} \sin \phi d\phi$$

Despejando dM y sustituyendo en la Ec.1 se obtiene:

$$dE_{pg} = -G \frac{M m \sin \phi d\phi}{2s}$$

3. Energía potencial gravitatoria del cascarón.

Para hallar la energía potencial de interacción de la masa puntual m con *todo* el cascarón hay que integrar a ambos lados de la ecuación:

$$E_{pg}|_{\text{cascarón}} = -GMm \int_0^\pi \frac{\sin \phi d\phi}{2s}, \quad (\text{Ec.2})$$

para lo cual resulta necesario expresar s en función de ϕ . De la figura A2, aplicando Pitágoras

$$s^2 = (r - R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2$$

$$= r^2 - 2rR \cos \phi + R^2$$

Luego:

$$2s ds = 2rR \sin \phi d\phi$$

$$\sin \phi d\phi = \frac{s ds}{rR}$$

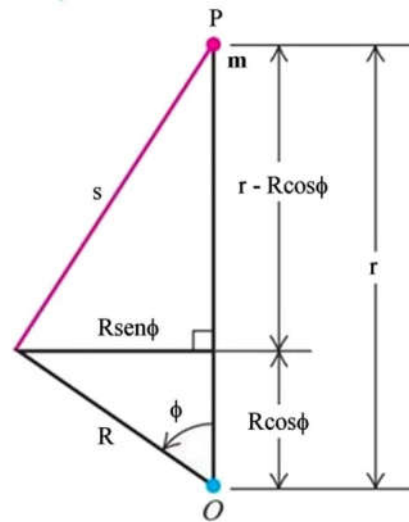


Figura 4.32. Relación entre s , R , r y ϕ .

Se ve de inmediato que la integral se simplifica si se toma s como variable, con los límites de integración entre $r-R$ y $r+R$ (ver figura A1). Sustituyendo en la Ec.2 y simplificando, queda

$$E_{pg}|_{\text{casarón}} = -\frac{GMm}{2rR} \int_{r-R}^{r+R} ds.$$

$$E_{pg}|_{\text{casarón}} = -G \frac{Mm}{2rR} [(r+R) - (r-R)]$$

El término de la derecha es igual a $2R$, y finalmente se llega a:

$$E_{pg}|_{\text{casarón}} = -G \frac{Mm}{r}.$$

Es decir, la energía potencial de interacción entre el cascarón y la masa puntual m es exactamente la misma que la de dos cargas puntuales de masas M y m situadas a una distancia r .

4. Energía potencial gravitatoria de la esfera.

Como el resultado anterior es válido para cualquier cascarón, también lo es para cualquier conjunto de cascarones concéntricos, e igualmente para su suma, que proporciona la masa total M de la esfera. Es decir,

$$E_{pg} = -G \frac{Mm}{r}.$$

Este resultado no depende de si la esfera es hueca o maciza.

Este resultado es igualmente válido para la fuerza resultante, ya que $\vec{F} = -\nabla E_p$ y la fuerza total es la suma vectorial.

Note que las fuerzas de interacción entre la esfera y la masa puntual forman una pareja de acción y reacción en todos sus puntos. La

fuerza que el cuerpo de masa m ejerce sobre la esfera de masa M es la misma que si éste fuera puntual a una distancia r . Si se sustituye el cuerpo m por una esfera homogénea con centro en su posición, la fuerza que actúa sobre la otra esfera M es idéntica a la anterior. Por tanto, las dos esferas entre sí actúan como cargas puntuales, que es lo que se quería demostrar.

4.12 Problemas resueltos

1. Un bloque de masa 3.5 kg. se arrastra mediante una cuerda una distancia de 4 m a velocidad constante. Si la tensión de la cuerda es de 7.7 N y forma 15° con la horizontal, calcule: a) trabajo total sobre el bloque; b) trabajo hecho por la tensión; c) trabajo de la fricción; d) coeficiente de fricción.



Figura problema 1

2. Un jugador de béisbol lanza la pelota hacia el plato a 20 m/s. El receptor atrapa la bola a la misma altura que fue lanzada, a una velocidad de 13 m/s. Si la masa de una pelota de béisbol es de 260 g. ¿Qué trabajo se hizo para vencer la resistencia del aire?

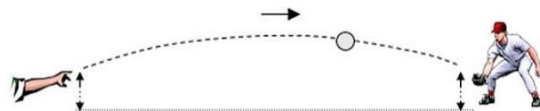


Figura problema 2

3. Una mujer que pesa 570 N sube por una escalera hasta una altura de 3 m, y tarda 4 s en hacerlo. ¿Qué potencia mínima promedio debe desarrollar?
4. Una locomotora de 1.5 Mw acelera de

manera uniforme un tren desde una rapidez de 10 m/s hasta otra de 25 m/s en 6 minutos. Despreciando las pérdidas por fricción, a) calcular la masa del tren; b) determinar la rapidez del tren en función del tiempo en ese intervalo; c) determinar la fuerza en función del tiempo.

5. Un auto de 2 toneladas sube una loma a velocidad constante. La loma se eleva 4 m por cada 100 de recorrido. Halle la potencia media que debe desarrollar el motor para recorrer 1 km en 2 minutos. ($\mu_k = 0.08$).

6. En la figura, el carro de la montaña rusa parte de A con rapidez v_A . Desprecie la fricción. Diga: a) Velocidad en los puntos B y C. b) Aceleración constante que se debe aplicar en D para que se detenga en E, a una distancia L sobre la horizontal.

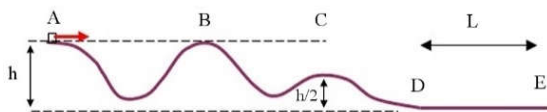


Figura problema 6

7. Una masa puntual resbala por un carril a partir del reposo en (1) según muestra la figura, donde $L = 2\text{m}$. Sólo hay fricción en la parte plana, donde $\mu_k = 0.2$. Si $h = 1\text{ m}$, diga donde se detiene la partícula.

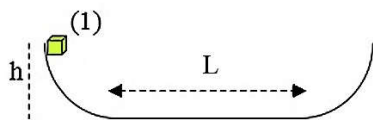


Figura problema 7

8. Cuando un objeto sujeto a un resorte vertical se lleva con lentitud a su posición de equilibrio, se encuentra que el resorte se estira una distancia d. ¿Cuál será la distancia máxima cuando el cuerpo se deja caer en vez de llevarlo con lentitud a su posición

de equilibrio?

9. Un resorte de $k = 20\text{ N/m}$ colocado horizontal, unido a una pared, se comprime 0.4 m al recibir el impacto de un bloque de masa 1 kg, ¿cuál era la velocidad del bloque inmediatamente antes de tocar el resorte? El coeficiente de fricción dinámico entre las superficies es 0.25.

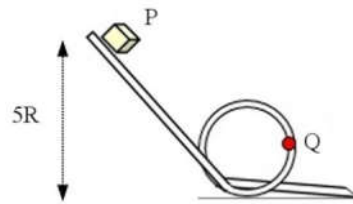
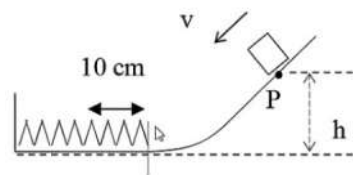


Figura problema 10

10. Un cuerpo de masa m resbala por un riel sin fricción en forma de rizo de radio R según la figura, donde $h = 5R$. Si parte del reposo en P, calcule la fuerza resultante actuando sobre él en Q.

Problemas propuestos

1. El bloque de masa 1 kg pasa por el punto P, a una altura $h = 0.2\text{ m}$ por encima del resorte de constante 1000 N/m con una cierta velocidad v_0 .



Problema propuesto 1

Se detiene después de comprimir el resorte 10 cm. La fricción entre las superficies es despreciable. a) ¿Cuál era la velocidad v_0 del bloque en el punto P? b) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas conservativas que actúan durante el proce-

so.

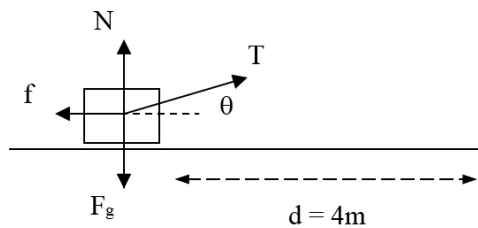
2. Un vagón de ferrocarril vacío de 10 ton, que rueda por inercia a 1 m/s a lo largo de una vía horizontal, choca con otro vagón cargado de 30 ton, al inicio en reposo con los frenos sueltos. Si los vagones quedan acoplados después de chocar; a) Halle la velocidad después del choque. b) ¿Que parte de la energía inicial se disipó en otras formas de energía? c) ¿Con qué velocidad debería rodar al inicio el vagón cargado para que ambos vagones queden en reposo después del choque? ¿Cómo sería la transformación de energía en este caso? Explique.

Soluciones

Problema 4.1

a) $W_R = \Delta E_c = 0$ ($v = \text{constante}$)

b) $W_T = Td \cos \theta = 7.7 \times 4 \times \cos 15 = 29.7 \text{ J}$



Solución problema 1.

c) $W_R = W_T + W_f = 0$

$$W_f = -W_T = -29.7 \text{ J}$$

d) $W_f = \vec{f} \cdot \vec{d} = fd \cos 180^\circ = -fd = -\mu_d Nd$

$$W_f = -\mu_d Nd.$$

Para calcular el valor de N:

eje y:

$$N + T \sin 15 - F_g = 0$$

$$N = mg - T \sin 15$$

$$N = 3.5 \times 10 - 7.7 \times 0.26 = 15 \text{ N}$$

$$\mu_k = \frac{W_f}{-Nd} = \frac{-29.7}{-15 \times 4} = 0.495$$

Problema 4.2

La altura no varía:

$$W_{Fg} = -\Delta E_p = -mg\Delta h = 0.$$

El trabajo realizado por la gravedad es nulo (la parte negativa cuando sube se cancela con la negativa cuando baja). El único otro trabajo que queda actuando *sobre la pelota* es el de la fricción del aire (fricción por viscosidad). Por tanto,

$$\begin{aligned} W_f = W_R = \Delta E_c &= E_{c2} - E_{c1} \\ &= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \\ &= \frac{1}{2} \times 0.26 (13^2 - 20^2) \\ &= -30 \text{ J.} \end{aligned}$$

Pero si el aire ejerce una fuerza de fricción sobre la pelota ésta, a su vez, ejerce fuerzas sobre el aire para ir apartándolo de su trayectoria (de igual magnitud y sentido contrario a la fricción, según la 3ra ley de Newton). Por tanto, para vencer la resistencia del aire hay que hacer un trabajo *sobre el aire* de: + 30 J.

Problema 4.3

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

Mediante la fuerza muscular de sus piernas, la mujer logra que la fuerza normal sea algo

mayor que la atracción gravitatoria, de manera que $N \geq F_g$. Si $N > F_g$ entonces

$$N - F_g = ma.$$

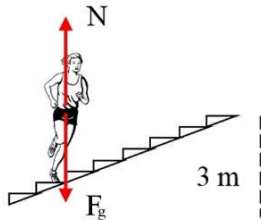


Figura solución 4.3

La potencia mínima se obtendrá cuando N es mínima (cuando ella sube con velocidad constante y $N = F_g$ en todo momento). En ese caso, $W_N = -W_{F_g}$.

$$\Delta W = W_N = -W_{F_g} = -(-\Delta E_{pg})$$

$$\Delta W = \Delta E_{pg} = mg\Delta h$$

$$P_m = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{570 \times 3}{4} = 427.5 \text{ W}$$

Problema 4.4.

Datos:

$$1.5 \text{ MW} = 1.5 \times 10^6 \text{ W}$$

a)

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

La única fuerza actuando en el intervalo Δt la ejerce las ruedas del tren sobre los raíles y hace avanzar la locomotora. Luego, por el teorema del W y la E ,

$$\Delta W = W_T = W_R = \Delta E_c$$

$$P_m \Delta t = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$m = \frac{2P\Delta t}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^6 \times 360}{25^2 - 10^2}$$

$$= 2.06 \times 10^6 \text{ kg} = 2060 \text{ ton}$$

b)

$$v = v(t) \rightarrow v = v_0 + at, \text{ donde } v_0 = 10 \text{ m/s.}$$

Para determinar a:

$$a = (v - v_0)/t = (25 - 10)/360 = 0.042 \text{ m/s}^2$$

Por tanto:

$$v(t) = 10 + 0.042t \text{ (m/s)}$$

c)

$$F_R = ma = \text{constante.}$$

$$F_R = 2.06 \times 10^6 \times 0.042 = 8.65 \times 10^4 \text{ N}$$

Problema 4.5

$$\text{sen}\theta = 4/100 = 0.04 \rightarrow \theta = 2.3^\circ$$

$$P_m = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

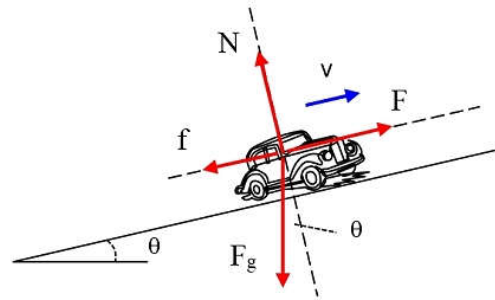


Figura solución 4.5

Como F y v son paralelos, entonces $P = Fv$.

$$v = \Delta x/\Delta t = 1000/120 = 8.33 \text{ m/s}$$

Para calcular F , a partir del diagrama de fuerzas:

eje x:

$$F - F_g \text{sen}\theta - f = ma_x = 0$$

$$F = F_g \sin\theta + f$$

eje y:

$$N - F_g \cos\theta = ma_y = 0$$

$$N = F_g \cos\theta$$

como $f = \mu_d N = \mu_d F_g \cos\theta$, y también $F_g = mg$, sustituyendo en la primera ecuación se obtiene:

$$F = mg(\sin\theta + \mu_d \cos\theta).$$

Cuando los ángulos son muy pequeños, $\cos\theta \approx 1$ y se puede escribir

$$F = 2 \times 10^3 \times 10(0.04 + 0.08 \times 1) = 2400 \text{ N}$$

$$P = 2400 \times 8.33 = 19\,992 \text{ W} \approx 20 \text{ kW}$$

1 horse power (HP) es igual a 760 W. Expresado en HP quedaría: $P = 20 \times 10^3 / 760 = 26 \text{ HP}$

Problema 4.6

El sistema es conservativo.

a)

$$E_A = E_B \rightarrow E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

pero la altura es la misma en A y B (ver figura solución 4.6);

$$mgh_A = mgh_B$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_A = v_B.$$

En el punto C:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh/2$$

$$v_A^2 + gh = v_B^2$$

$$v_B = (v_A^2 + gh)^{1/2}.$$

b)

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x,$$

como la velocidad final es cero

$$0 = v_D^2 + 2aL$$

$$a = -\frac{v_D^2}{2L},$$

y la velocidad en D se puede obtener a partir de los datos iniciales:

$$E_A = E_D$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_D^2$$

$$v_A^2 + 2gh = v_D^2.$$

Sustituyendo en la expresión anterior,

$$a = -\frac{v_A^2 + 2gh}{2L}.$$

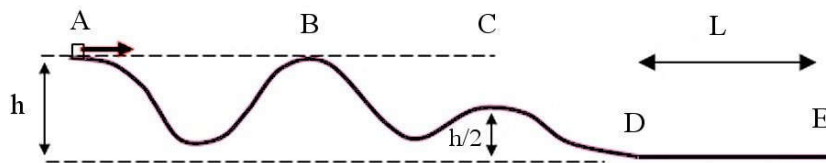


Figura solución 4.6

Problema 4.7

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1.$$

¿Dónde poner la posición final? (Justamente, eso es lo que pide el problema). Significa que hay que suponer las dos posibilida-

des y ver cual se ajusta a la realidad.

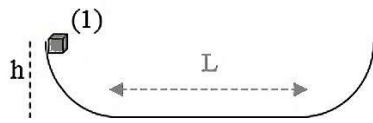


Figura solución 4.7

- a) Se detiene en la parte plana
- b) Se detiene después de pasar la parte plana y subir hasta una altura y
- a) Asumiendo se detiene en la parte plana a una distancia x:

$$-fx = 0 - mgh$$

$$-\mu_d mgx = -mgh$$

$$x = \frac{h}{\mu_d} = 1/0.2 = 5 \text{ m}$$

Este resultado carece de sentido o significado, pues la mayor longitud posible a recorrer en la parte plana es de sólo 2 m. Por tanto, no puede detenerse en la parte plana. Pasando a la otra posibilidad:

- b)

$$-\mu_d mgL = mgy - mgh$$

$$\mu_d L = h - y$$

$$y = h - \mu_d L = 1 - 0.2 \times 2 = 0.6 \text{ m}$$

Esta solución sí está acorde a las posibilidades del problema: sube por la pendiente contraria hasta una altura de 0.6 m (la máxima altura posible era de 1 m).

Problema 4.8.

1. Al estirar el resorte con lentitud, en el equilibrio:

$$F_e = F_g$$

$$kd = mg \tag{1}$$

2. Cuando el cuerpo se deja caer, como el sistema es conservativo:

$$E_1 = E_2$$

$$mgy_1 + \frac{1}{2} ky_1^2 = mgy_2 + \frac{1}{2} ky_2^2.$$

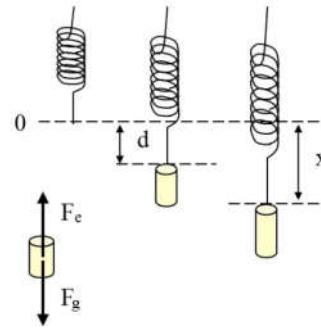


Figura solución 4.8

Es conveniente tomar el mismo cero de referencia para la energía potencial gravitatoria y para la elástica (ver figura). En este caso, $y_1 = 0$, $y_2 = -x$. La ecuación anterior queda:

$$0 = -mgx + \frac{1}{2} kx^2$$

$$2mg = kx$$

y sustituyendo mg según la ecuación (1)

$$x = 2d.$$

Problema 4.9.

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1.$$

Como posición inicial se escoge cuando el bloque toca al resorte (v_0). La posición final es cuando se detiene ($v = 0$).

$$-fx = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

En el eje y: $N = F_g = mg$

$$f = \mu_d N = \mu_d mg$$

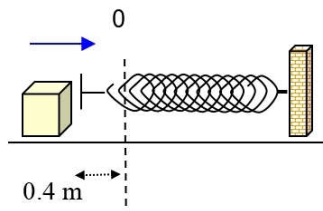


Figura solución 4.9

$$-\mu_d mg = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} mv_o^2$$

$$v_o^2 = \frac{k}{m} x^2 + 2\mu_k gx$$

$$v_o^2 = (20/1) \times 0.16 + 2 \times 0.25 \times 10 \times 0.4$$

$$v_o^2 = 5.2;$$

$$v_o = 2.35 \text{ m/s}$$

$$\vec{F}_R = \vec{N} + \vec{F}_g$$

$$F_R = \sqrt{N^2 + F_g^2}$$

$$\tan\theta = F_g/N$$

$$F_g = mg$$

$$N = ma_c = mv^2/R \quad (1)$$

La velocidad se obtiene a partir de consideraciones energéticas. Sistema conservativo:

$$E_P = E_Q.$$

$$E_{cP} + E_{pP} = E_{cQ} + E_{pQ}$$

$$0 + mg5R = \frac{1}{2} mv^2 + mgR$$

$$4gR = v^2/2$$

$$v^2 = 8gR$$

Problema 4.10

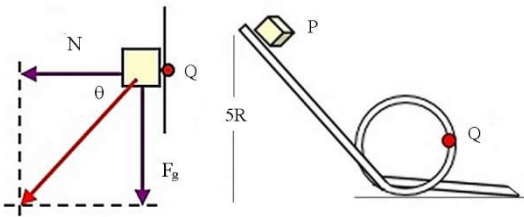


Figura solución 4.10

Sustituyendo en (1):

$$N = m8gR/R = 8mg$$

$$F_R = \sqrt{64(mg)^2 + (mg)^2} = mg\sqrt{65} = 8.06 mg$$

$$\tan\theta = mg/8mg = 1/8 = 0.125$$

$$\theta = 7.12^\circ.$$

CAPITULO 5

Sistemas de partículas

5.1 Centro de masa.

Centro de masa de dos partículas.

N partículas ubicadas sobre una recta.

N partículas en tres dimensiones.

Cuerpo continuo.

Sólidos regulares homogéneos.

5.2 cantidad de movimiento de un sistema de partículas.

5.3 2da ley de Newton en un sistema de partículas.

5.4 Teorema de conservación del momento lineal.

5.5 Teorema del trabajo y la energía en los sistemas de partículas.

5.6 Fuerzas impulsivas.

Impulso de una fuerza.

2da ley de Newton en función del impulso.

5.7 Choques.

Choque elástico en una dimensión.

Choque perfectamente inelástico en dos dimensiones.

Las leyes de conservación en el micromundo.

5.8 Problemas resueltos.

CAPITULO 5

Sistemas de partículas

En este capítulo se generalizan los resultados de los capítulos anteriores a sistemas que están compuestos por más de una partícula o masa puntual.

Cualquier gas, líquido o sólido macroscópico, en realidad formado por átomos y moléculas, se puede considerar un sistema de partículas microscópicas. En principio, es posible estudiar tales sistemas analizando el movimiento de cada masa puntual por separado y sus interacciones. Sin embargo, este análisis resultaría complejo en exceso, a causa del gran número de partículas asociadas a cualquier sistema macroscópico, aún en el caso de sistemas muy simples.

Por fortuna, existen propiedades generales, válidas para cualquier sistema de partículas, que simplifican mucho el estudio y comprensión de las propiedades de los cuerpos macroscópicos.

5.1 Centro de Masa

Centro de masa de dos partículas

En la figura 5.1, las partículas de masa m_1 y m_2 se encuentran a una distancia x_1 y x_2 del origen de un sistema de referencia arbitrario.

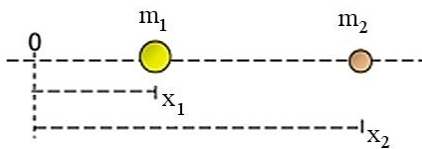


Figura 5.1. Centro de masa de 2 partículas.

El centro de masa de las dos partículas se define como el “promedio pesado” de las posiciones de las partículas;

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (5.1)$$

Es posible demostrar que cuando se toma otro origen de coordenadas, la posición del centro de masa así definido no cambia con relación a la posición de las partículas.



Figura 5.2. Ver texto.

Expresado de otra forma:

La posición del centro de masa no depende del sistema de referencia considerado.

Note que la posición del centro de masa por lo general no coincide con la posición de ninguna de las dos partículas. Por ejemplo, si $m_1 = m_2$, de la expresión anterior se ve de inmediato que el CM se encuentra en el punto medio de ambas partículas (figura 5.2). Haciendo $m_1 = m_2$ en la definición anterior,

$$x_{\text{cm}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Solo en el caso de que la masa de una de las partículas sea mucho mayor que la otra, el CM coincidirá prácticamente con la posición de la masa puntual. Así, considerando $m_1 \gg m_2$ en la definición, dividiendo por m_1 y aplicando límites ($m_2/m_1 \approx 0$):

$$x_{\text{cm}} = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \approx x_1$$

Centro de masa de N partículas sobre una recta

La expresión para N partículas de masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$, ordenadas a lo largo de una recta en las posiciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, se obtiene generalizando la definición (5.1):

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N},$$

que también puede expresarse como

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i;$$

$M = \sum_{i=1}^N m_i$ es la masa total del sistema.

Centro de masa de N partículas en tres dimensiones

Cuando las partículas están ubicadas en cualquier posición del espacio, la definición del centro de masa del sistema de partículas queda como:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ es el vector de posición de la masa puntual i (figura 5.3), y el vector de posición del CM tiene la forma

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \vec{i} + y_{cm} \vec{j} + z_{cm} \vec{k}.$$

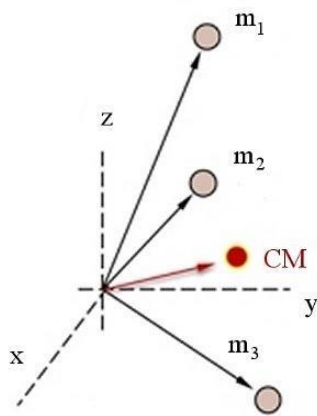


Figura 5.3. Centro de masa de un sistema de partículas.

Sustituyendo los vectores correspondientes en (5.1) y agrupando términos, se llega a tres ecuaciones independientes, una por cada eje coordenado:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i,$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i,$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i.$$

De manera similar a como ocurre en una dimensión, también es posible demostrar que en el caso tridimensional la posición del CM no depende del origen ni del sistema de referencia considerado, sino sólo de la posición relativa de las partículas.

Centro de masa de un cuerpo continuo

Cualquier cuerpo continuo siempre se puede subdividir en la mente en cubículos o celdas tan pequeñas como se desee, y considerar cada una de esas celdillas como una masa puntual de masa Δm_i .

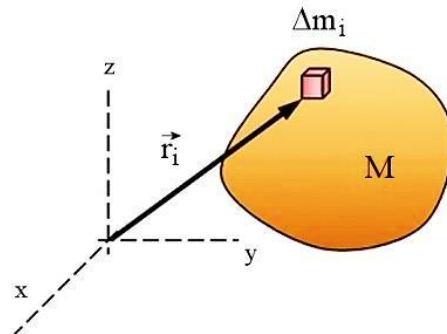


Figura 5.4. Centro de masa de un cuerpo continuo.

En la figura 5.4, $M = \sum \Delta m_i$ es la masa total del cuerpo. Para calcular la posición del CM habría que aplicar (5.1), sumando para todas las porciones de masa Δm_i ;

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i$$

Aquí \vec{r}_i representa el vector de posición de cada celdilla. Note que este vector no representa un solo punto, sino un conjunto de puntos dentro de la celda. De aquí que la aproximación se acercará más a la realidad en la medida que las celdas sean cada vez menores. En el límite, cuando $\Delta m_i \rightarrow 0$, el número de celdas en que se ha dividido el cuerpo tiende a infinito, Δm_i se convierte en un diferencial dm y la sumatoria pasa a ser una integral:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm.$$

Esta integral vectorial equivale a tres integrales en cada uno de los ejes x , y , z ;

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int x dm,$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int y dm,$$

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int z dm.$$

Las integrales se resuelven con facilidad para cuerpos regulares que posean una alta simetría. A continuación se muestran algunos resultados donde ni siquiera hace falta llevar a cabo la integración para calcular la posición del CM.

Centro de masa de sólidos regulares homogéneos

Barra de longitud L

Si se considera a la barra dividida en pequeños segmentos de igual masa, simétricos con respecto a su centro, el centro de

masa de cada pareja de segmentos situados a la misma distancia del centro estaría en el punto medio de la barra, tal como se dedujo al analizar la posición del CM de dos partículas de igual masa.

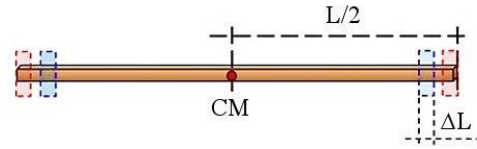


Figura 5.5. Centro de masa de una barra homogénea

De aquí que el CM de la barra completa tendrá por necesidad que estar en su punto medio (figura 5.5).

Placa rectangular homogénea

Es posible imaginarse a la placa rectangular como formada por un conjunto de barras homogéneas. El CM tendrá que estar sobre la recta que une sus centros. Si se considera ahora que las barras están en dirección perpendicular a la anterior, se llega con facilidad a la conclusión de que el CM debe estar en la intersección de las rectas que, en cada caso, dividen la placa a la mitad (figura 5.6).

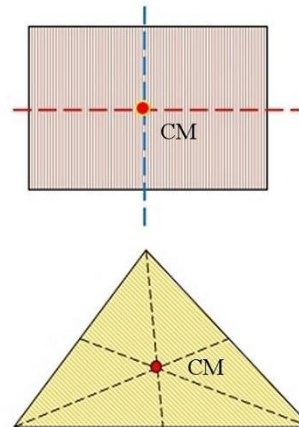


Figura 5.6. Centro de masa de sólidos regulares.

Placa triangular homogénea

Mediante el mismo razonamiento que el caso anterior es posible comprobar que el CM se encontrará en la intersección de las medianas (las rectas que van desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto). En este caso las barras se toman en sucesivo paralelas a cada lado del triángulo.

Empleando razonamientos similares se comprueba que el centro de masa de una esfera está en su centro geométrico, y que el de un cubo se encuentra en la intersección de las perpendiculares a cada cara y que pasan por el centro (figura 5.7). En este último caso se puede pensar que el cubo está formado por un conjunto de placas rectangulares apiladas, iguales a la descrita en b). De manera similar se obtiene la posición del CM para un cilindro o un anillo homogéneos.

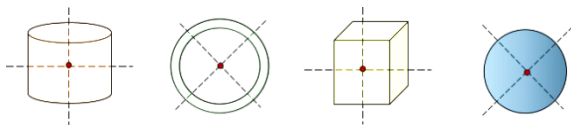


Figura 5.7. Centro de masa de cuerpos homogéneos; cilindro, anillo, ortoedro, esfera.

Ejemplo

Hallar la posición del CM del sistema de partículas de la figura 5.8, donde las partículas se encuentran en las posiciones (1,1), (4,5) y (5,2), y tienen masas de 5, 2 y 1 g, respectivamente.

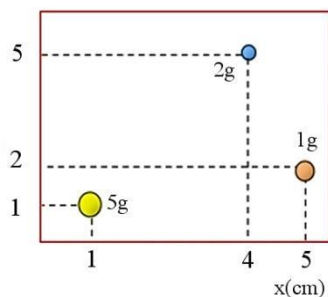


Figura 5.8. Problema ejemplo

$$M = \sum m_i = 5 + 2 + 1 = 8 \text{ g}$$

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i = (1/8)(5 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 1)$$

$$= 9/4 \text{ cm}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i = (1/8)(1 \times 5 + 2 \times 1 + 5 \times 2)$$

$$= 17/8 \text{ cm}$$

$$x_{\text{cm}} = 9/4 = 2.25 \text{ cm}$$

$$y_{\text{cm}} = 17/8 = 2.125 \text{ cm}$$

5.2 Cantidad de movimiento de un sistema de partículas

Considere un sistema de partículas que no están en reposo, cuyas posiciones varían con el transcurso del tiempo. Ese sistema de partículas puede ser continuo o discreto, es decir, puede ser un sólido, un líquido o un gas. En el sólido todas las partículas se mueven al unísono, en una misma dirección (figura 5.9), o guardan cierta relación fija como, por ej., en las rotaciones. En el gas o el líquido cada partícula se mueve independiente de las demás.

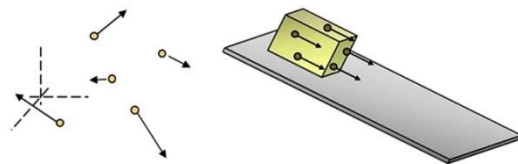


Figura 5.9. Sistema de partículas en un gas (izq.) y en un sólido (der).

En lo que sigue se considera que los sólidos no se deforman (*aproximación del sólido rígido*), aunque en la realidad todos los sólidos sufren deformaciones más o menos significativas cuando interactúan entre sí.

La *cantidad de movimiento o momento li-*

neal de una masa puntual se designa por $\vec{p} = m\vec{v}$, donde m es la masa y el vector \vec{v} representa la velocidad de la partícula. Se define entonces la cantidad de movimiento del sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimiento de todas las partículas del sistema, y se designará por el vector \vec{P} .

Si en el sistema hay N partículas:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N ;$$

o, en notación compacta:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i . \quad (5.2)$$

Se puede relacionar esta definición con la definición de CM del epígrafe anterior. Despejando en (5.2) es posible escribir

$$M\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i .$$

Si las partículas están en movimiento, los vectores que determinan la posición de las partículas y del CM serán funciones del tiempo del tipo $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ y \vec{r}_{CM} . Por tanto, si suponemos que la masa de las partículas no varía con el tiempo, derivando a ambos lados de la ecuación anterior, recordando que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ y que la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} M\vec{v}_{cm} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P} \\ \vec{P} &= M\vec{v}_{cm} . \end{aligned} \quad (5.3)$$

De ahí que la cantidad de movimiento de cualquier sistema de partículas, continuo o discreto, también se puede calcular como la masa total del sistema multiplicada por la

velocidad de su centro de masa.

5.3 2da ley de Newton en un sistema de partículas

Puede suceder que la velocidad de las partículas también varíe con el tiempo. En este caso tendremos, para cada partícula

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \neq 0 .$$

La cantidad de movimiento del SP

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i ,$$

también variará con el tiempo. Derivando con respecto al tiempo en esta expresión y aplicando la 2da ley de Newton generalizada $\vec{F}_R = d\vec{p}/dt$ a cada una de las partículas;

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Ri} .$$

En la expresión \vec{F}_{Ri} representa la resultante de todas las fuerzas actuando sobre la partícula i . Pero como la sumatoria indica sumar sobre todas las partículas, es posible sustituir esa sumatoria por esta otra:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{Ri} = \sum_k \vec{F}_k ,$$

donde la suma en k se refiere a la suma de todas las fuerzas actuando sobre todas las partículas. Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k .$$

Consideremos ahora lo siguiente.

- Las fuerzas actuando sobre cada masa puntual pueden ser internas (ejercidas por el resto de las partículas) y externas (ejer-

cidas por agentes fuera del sistema considerado).

- Las fuerzas internas deben cumplir la 3ra ley de Newton: por cada fuerza actuando sobre una partícula, existirá otra de igual magnitud y sentido contrario actuando sobre otra partícula del sistema (figura 5.10).

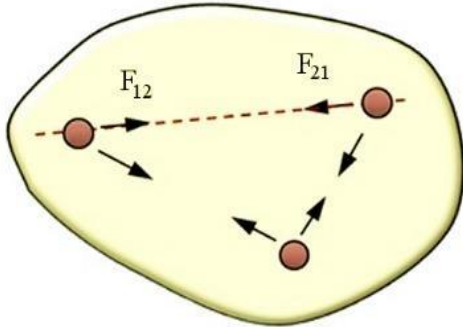


Figura 5.10. Fuerzas internas en un sistema de partículas

- De aquí que al sumar vectorialmente en la expresión anterior, todas las fuerzas internas se anularán unas con otras, permaneciendo en la sumatoria solo las FUERZAS externas.

Invirtiendo la expresión anterior y eliminando las fuerzas internas, se obtiene:

$$\sum_{\text{ext}} \vec{F}_k = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{F}_{R, \text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (5.4)$$

Esta es la 2da ley de Newton generalizada a un sistema de partículas.

Se enfatiza que las partículas que componen al sistema las escoge el observador según su conveniencia, en dependencia de cuáles son los aspectos que le interesa analizar. Y que, de acuerdo a la elección del observador, una determinada fuerza particu-

lar puede hacer tanto el papel de fuerza interna como de fuerza externa.

Si la masa total del sistema no varía, la ecuación 5.3 nos dice que

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior y derivando, con $d\vec{v}_{\text{cm}}/dt = \vec{a}_{\text{cm}}$, se obtiene:

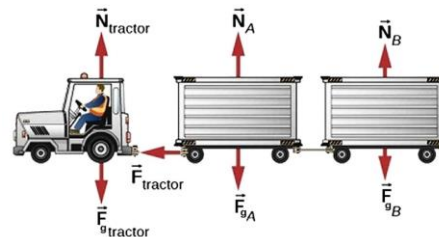
$$\vec{F}_{R, \text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}.$$

Note que existe una analogía con la 2da ley de Newton para una masa puntual:

$$\vec{F}_{R, \text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \Leftrightarrow \vec{F}_R = m\vec{a}.$$

Ejemplo

La figura muestra un tren de equipajes con un tractor que arrastra dos carros idénticos desde el avión hasta la terminal. La masa del tractor es m_t , mientras que la del carro A es m_A y la del B m_B . En el momento del arranque, la fuerza inicial que el tractor ejerce sobre los carros es F_t y la fricción en sus ruedas y el pavimento tiene un valor f en cada carro, por lo que el tren de equipajes comienza a moverse aceleradamente.



- ¿Cuál es la fuerza de interacción F_{AB} que actúa sobre los carros A y B en ese instante?
- ¿Qué fuerza F_m ejerce el motor sobre el tractor? Desprecie la fricción de las rue-

das del tractor.

a) En el momento del arranque, $v_o = 0$. Como no hay movimiento en eje y , en cada caso $F_g = N$. Las fuerzas *externas* actuando sobre los carros en el eje x son las que ejercen el tractor y las ruedas, por lo que los dos carros se pueden considerar un sistema de partículas, de manera que $\vec{F}_{R_{ext}} = M\vec{a}$.

Por tanto: $F_t - 2f = (m_a + m_b)a$, y

$$a = \frac{F_t - 2f}{m_a + m_b}.$$

Esta es la aceleración con que se mueve todo el tren. Para que el 2do carro se mueva con esa aceleración, debe cumplir la 2da ley de Newton para una partícula; $F_{AB} = m_b \vec{a}$;

$$F_{AB} = m_b \left(\frac{F_t - 2f}{m_a + m_b} \right)$$

b) Por la 3ra ley de Newton, si F_t es la fuerza sobre los carros, éstos ejercen una fuerza igual y contraria $-F_t$ sobre el tractor. El diagrama de fuerzas para el tractor será:



$$F_m - F_t = m_t a,$$

$$F_m = F_t + m_t \left(\frac{F_t - 2f}{m_a + m_b} \right).$$

La ecuación

$$\vec{F}_{R_{ext}} = M\vec{a}_{cm}$$

es una relación muy importante en mecánica, que nos dice lo siguiente:

- Para analizar el movimiento de traslación del CM de cualquier cuerpo rígido sólo es necesario analizar las fuerzas externas, sin tomar en cuenta las internas.
- El efecto sobre el CM es independiente del punto de aplicación de las fuerzas en el cuerpo. El resultado neto es como si todas las fuerzas estuvieran aplicadas sobre el CM, que se comporta como si concentrara toda la masa del cuerpo.

Al analizar la traslación siempre es posible considerar un cuerpo rígido como partícula, con tal que se identifique la aceleración del cuerpo con la de su CM y la fuerza resultante con la resultante de las fuerzas *externas* (figura 5.11).

De hecho, eso es lo que hemos venido haciendo desde el inicio del curso al considerar bloques y otros cuerpos individuales como partículas, sin preocuparnos del punto de aplicación de las fuerzas, considerándolas aplicadas en algún punto interior del cuerpo y analizando solo la traslación del cuerpo. El resultado anterior justifica esta forma de actuar.

Por ejemplo, la fuerza de atracción gravitatoria (fuerza externa) actúa sobre todos y cada uno de los átomos que componen un sólido. Sin embargo, para analizar el movimiento del cuerpo bajo la acción de la gravedad podemos considerar una sola fuerza actuando sobre el centro de masa, que será la suma vectorial de todas las anteriores, como se muestra en la figura 5.11 (izq.).

En el bloque que se desliza por el plano a la derecha, para analizar la traslación no se

toma en cuenta la tendencia a rotar a causa del distinto punto de apoyo de las fuerzas.

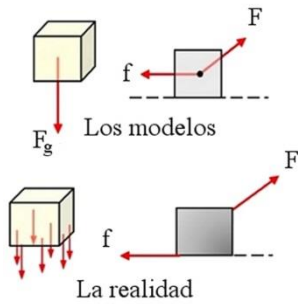


Figura 5.11. Realidad y modelos físicos acorde al concepto de centro de masa.

5.7 Teorema de conservación del momento lineal

El teorema se puede enunciar de la forma siguiente:

Si la resultante de las fuerzas externas actuando sobre un sistema de partículas (SP) es nula, la cantidad de movimiento del SP se mantiene constante.

En lenguaje simbólico podemos escribir el teorema como:

$$\vec{F}_{R\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{constante}.$$

La demostración es inmediata a partir de la 2da ley de Newton generalizada para el SP en la ecuación 5.4:

$$\vec{F}_{R\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Si la fuerza resultante externa en esta expresión es cero, entonces la derivada también lo es y, por tanto

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = \text{constante}.$$

Este teorema resulta de gran importancia, al menos por dos razones.

- Las magnitudes físicas que en determinadas condiciones se mantienen constantes, permiten predecir el resultado final de un proceso a partir de su estado inicial, sin necesidad de conocer lo que ocurrió en los pasos intermedios. El ejemplo más ilustrativo es el de los sistemas conservativos y el principio de conservación de la energía.
- Otro aspecto no menos importante es que, a pesar de que las leyes de Newton no son válidas en el micromundo, muchos de los principios de conservación derivados a partir de ellas sí lo son, lo que permite obtener información muy valiosa de múltiples procesos microscópicos, que de otra forma no podrían ser analizados.

Ejemplo 1

Analizar el movimiento de los fragmentos de un proyectil que explota en el aire.

Antes de explotar:

$$\vec{F}_{R\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}},$$

$$\vec{F}_{R\text{ext}} = \vec{F}_g ; M = m$$

por tanto, $\vec{F}_g = m\vec{a}_{\text{cm}} = m\vec{g}$ y se obtiene la relación característica del movimiento de un proyectil, sometido solo a la acción de la fuerza gravitatoria (figura 5.12).

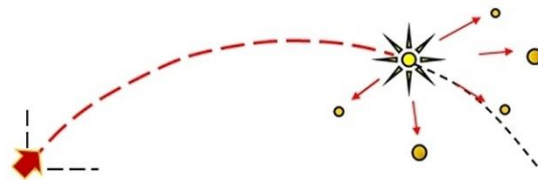


Figura 5.12. Proyectil que explota en el aire.

Después de explotar:

Como las fuerzas causadas por la explosión son fuerzas internas, la ecuación anterior no varía. A los efectos del movimiento del CM, la fuerza que actúa sigue siendo sólo la fuerza de gravedad. Por tanto, *el CM del SP seguirá moviéndose de la misma forma que lo iba haciendo antes*, siguiendo la trayectoria parabólica de la figura 5.12. Los fragmentos se dispersan de manera tal que su CM se encontrará en cada instante sobre la parábola. (Si aparecen otras fuerzas externas como la fricción del aire, o si algún fragmento choca con el suelo, entonces el CM ya no seguirá la trayectoria parabólica).

Ejemplo 2

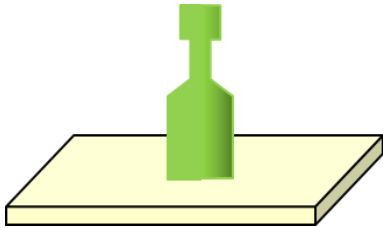


Figura 5.13. Botella en reposo.

Una botella que estaba en reposo sobre una superficie explota, rompiéndose en tres pedazos (figura 5.13). Dos de ellos, de igual masa, salen en direcciones perpendiculares, paralelas a la superficie, con igual velocidad de 30 m/s. Si el 3er pedazo tiene una masa triple de la de los otros, ¿cuál fue su velocidad después de la explosión?

Datos

$$m_1 = m_2$$

$$v_1 = v_2 = 30 \text{ m/s}$$

$$m_3 = 3m_1$$

$$\theta = 45^\circ \text{ (dato oculto, figura 5.14)}$$

Resolución

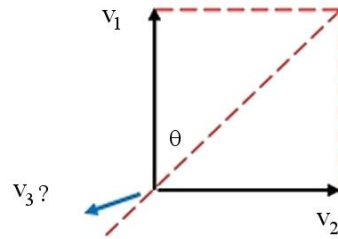


Figura 5.14. Interpretación del enunciado (vista en planta).

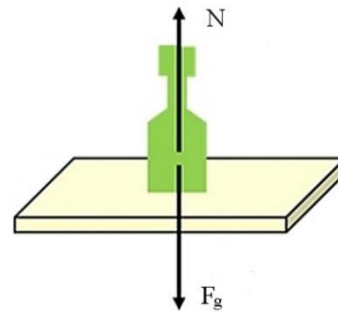


Figura 5.15. Fuerzas externas al inicio.

Como las únicas fuerzas que actúan N y F_g , están en equilibrio (figura 5.15), $\vec{F}_{\text{Rext}} = 0$ y, por tanto, $\vec{P} = \text{constante}$. Significa que la cantidad de movimiento debe ser la misma antes (\vec{P}_0) que después (\vec{P}) de la explosión:

$$\vec{P} = \vec{P}_0.$$

Pero la botella estaba en reposo al inicio:

$$\vec{P}_0 = M\vec{v}_0 = 0.$$

Como la botella explota en tres pedazos, entonces:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

Pero $m_1 = m_2 = m$, y $m_3 = 3m$ por datos.

Sustituyendo:

$$m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3) = 0$$

$$\vec{v}_3 = -\frac{1}{3}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$v_3 = (1/3)\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = (v_1/3)\sqrt{2}$$

$$v_3 = 10\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Note que si los pedazos 1 y 2 salieron en direcciones paralelas a la superficie de la mesa, el pedazo 3 también salió en una dirección paralela a la mesa, porque los tres vectores tienen que estar en un mismo plano, pues no hay componentes en los otros ejes.

Además del valor modular, como la velocidad es un vector, también es necesario especificar la dirección calculando alguno de los ángulos. En este caso, $\tan\theta = v_2/v_1 = 1$ y $\theta = 45^\circ$, lo que significa que el 3er pedazo salió formando un ángulo de $90 + 45 = 135^\circ$ con las direcciones seguidas por los otros dos pedazos (justo en sentido contrario por la diagonal en la figura 5.14).

Ejemplo 3

Una persona se encuentra parada sobre el extremo de un bote que flota sobre aguas tranquilas. En estas condiciones la fricción por viscosidad con el agua es despreciable. Analizar cómo se desplaza el bote cuando la persona camina hasta el otro extremo.

Datos: m , m_b

Resolución:

El sistema está en reposo al inicio;

$$\vec{F}_{R, \text{ext}} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}} = 0.$$

Por el teorema de conservación del momento angular, como no hay fuerzas externas, la cantidad de movimiento del sistema

se conserva. Si v_{cm} al inicio, así se mantendrá en todo momento;

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{\text{CM}} = \text{constante}.$$

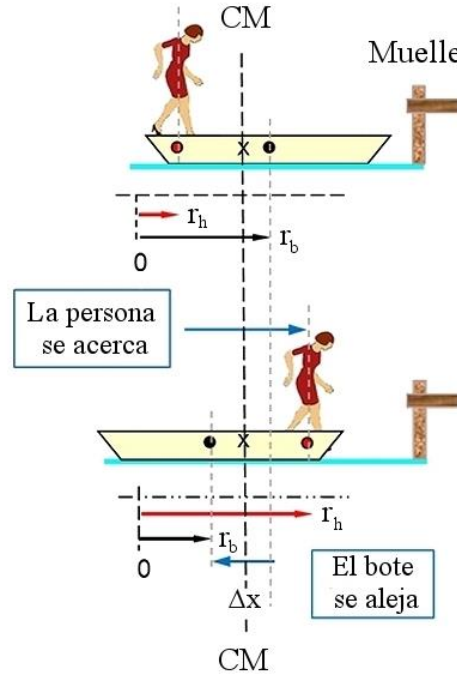


Figura 5.16. Si no hay F externa, la posición del CM no puede variar.

En la figura 5.16, la proyección de los centros de masa de la persona y del bote sobre el eje x se representan con puntos gruesos, mientras que el centro de masa del sistema (persona + bote) se representa por una cruz.

El sistema de referencia está unido a tierra, y al inicio el bote (b) y la persona (h) están en reposo respecto al sistema de referencia. Pero si la posición del centro de masa no varía, entonces

$$|\vec{r}_{\text{cm}}| = \frac{1}{m_h + m_b} (m_h r_h + m_b r_b) = \text{constante}$$

De aquí que si r_h aumenta, r_b debe dismi-

nuir. Para que esto ocurra, el bote debe avanzar en sentido contrario a la persona. De acuerdo a las propiedades del CM, el resultado no depende del sistema de referencia considerado.

Para lograr alcanzar el muelle, ¿será mejor correr, caminar rápido o caminar lento? ¿En cuál caso quedará más cerca del muelle? *Sugerencia: analice las propiedades de la fricción por viscosidad.*

Ejemplo 4

Retroceso de un fusil al efectuar un disparo horizontal.

Sobre el fusil actúan la fuerza de gravedad F_g y la que ejerce el tirador a lo largo de la vertical (F) en contra de la gravedad, para mantener el fusil en posición (figura 5.17).

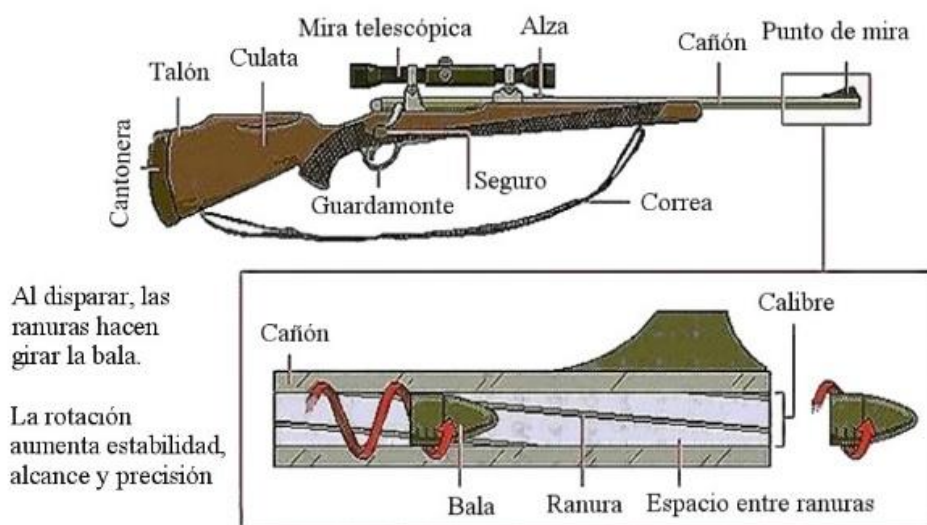


Figura 5.17. La cantidad de movimiento del sistema fusil+bala se conserva durante el disparo.

Cuando el fusil se encuentre equilibrado,

$$\vec{F} = -\vec{F}_g.$$

Durante la explosión del cartucho las fuerzas que actúan son internas; de aquí que mientras transcurre la explosión

$$\vec{F}_{R, \text{ext}} = 0,$$

y por tanto $\vec{P} = \text{constante}$. Entonces,

$$\vec{P} = \vec{P}_o.$$

La notación vectorial puede omitirse, pues

el movimiento es a lo largo del eje x . Llamando v_b a la velocidad de salida de la bala y v_f la velocidad del fusil después del disparo:

$$m_b v_b + m_f v_f = 0.$$

$$v_f = -\frac{m_b}{m_f} v_b.$$

Como $m_b \ll m_f$, la velocidad de retroceso del fusil será mucho menor que la de salida de la bala. Sin embargo, note que de acuerdo a la 3ra ley de Newton la fuerza media

ejercida por los gases de la explosión sobre la bala y sobre el fusil es la misma. Esta última fuerza es la que actúa sobre el hombro del tirador, quien detiene el retroceso del arma durante el disparo.

¿Qué tipo de transformación de energía tiene lugar en este proceso?

5.5 Teorema del trabajo y la energía en los sistemas de partículas

Considere un sistema de partículas cualquiera, discreto o continuo, formado por N partículas. Si aplicamos el teorema del trabajo y la energía a la partícula i , se obtiene:

$$W_{Ri} = \Delta E_{ci}$$

$$W_{Ri} = E_{ci} - E_{ci}^o$$

donde E_{ci}^o representa la energía cinética inicial de la masa puntual. Si se suman las expresiones para todas las partículas del sistema 1, 2, 3,... etc. y se agrupan los términos positivos y negativos, se obtiene (5.5):

$$W_{R1} + W_{R2} + \dots + W_{RN} = E_{c1} + E_{c2} + \dots + E_{cN} - (E_{c1}^o + E_{c2}^o + \dots + E_{cN}^o).$$

La *energía cinética del sistema de partículas* se define como la suma de las energías cinéticas de todas las partículas,

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + E_{c3} + \dots + E_{cN} = \sum_{i=1}^N E_{ci}.$$

Designando la suma de los trabajos resultantes realizados sobre todas las partículas como el trabajo total resultante W_R (tanto por fuerzas externas como internas del sistema),

$$W_R = W_{R1} + W_{R2} + W_{R3} + \dots + W_{RN} = \sum_{i=1}^N W_{Ri},$$

es posible escribir la ecuación (5.5) en for-

ma compacta:

$$W_R = E_c - E_c^o$$

$$W_R = \Delta E_c.$$

Es decir, se ha obtenido una expresión idéntica a la del teorema del trabajo y la energía para una partícula, pero el significado de cada término es ahora diferente.

W_R es el trabajo de la resultante de todas las fuerzas actuando sobre todas las partículas y E_c es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas del sistema.

Es importante resaltar que el resultado anterior se refiere tanto a las fuerzas externas como a las internas. Para recordar que las fuerzas internas también pueden contribuir a la variación de energía cinética, resulta adecuado escribir esta particularidad en forma explícita:

$$W_{R_{ext}} + W_{R_{int}} = \Delta E_C.$$

TABLA 5.1	
EXPRESIONES DE LA ENERGÍA PARA LA PARTÍCULA Y LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS	
MECÁNICA DE LA PARTÍCULA	
Teorema del trabajo y la energía	$W_R = \Delta E_C$
Trabajo de una fuerza conservativa	$W_c = -\Delta E_P$
Trabajo no conservativo	$W_{nc} = \Delta E_M$
MECÁNICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS	
Teorema del trabajo y la energía	$W_{R_{ext}} + W_{R_{int}} = \Delta E_C$

En la tabla 5.1 se resumen las diferentes expresiones obtenidas para el trabajo y la

energía de la masa puntual y de los sistemas de partículas, con el fin de facilitar al lector la comparación y fijación de los conceptos. Un sistema de partículas puede ser discontinuo o discreto (como, por ej., el conjunto de las moléculas de un gas), pero también puede ser continuo.

Ejemplos de este último caso pueden ser un trozo de metal, un planeta o una persona.

Energía cinética de un sistema de partículas referida al centro de masa

Es posible demostrar que la energía cinética E_c de cualquier sistema de partículas se puede expresar como

$$E_c = E_c(\text{CM}) + E_c',$$

donde

$E_c(\text{CM}) \rightarrow$ energía cinética del CM del sistema

$E_c' \rightarrow$ energía cinética de las partículas referidas al CM del sistema,

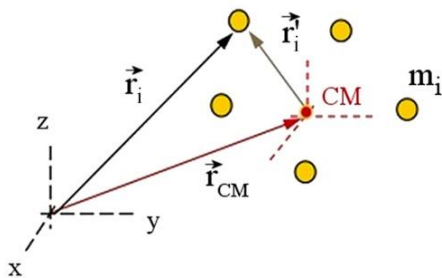


Figura 5.18. CM de un SP.

La demostración aparece ilustrada en la figura 5.18. Tomando la posición de una partícula i cualquiera respecto a un origen:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_i'$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_{\text{CM}} - \vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} v_i'^2 &= \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i' = (\vec{v}_{\text{CM}} - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} - \vec{v}_i) \\ &= v_{\text{CM}}^2 + v_i^2 - 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}_i \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}m_i$ y sumando para todas las partículas,

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} v_{\text{CM}}^2 \sum_i m_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \vec{v}_{\text{CM}} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$E_c' \qquad E_c(\text{CM}) \qquad M$

$$E_c' = E_c(\text{CM}) + E_c - \vec{v}_{\text{CM}} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (1)$$

Para demostrar que el último término es igual a $2E_c(\text{CM})$ se considera la definición de CM:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_{\text{CM}}$$

Derivando respecto al tiempo y aplicando el producto escalar con \vec{v}_{CM} a ambos lados:

$$\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} \cdot M \vec{v}_{\text{CM}} = M v_{\text{CM}}^2 = 2E_c(\text{CM})$$

Al sustituir en (1) y simplificar se obtiene el resultado deseado:

$$E_c = E_c(\text{CM}) + E_c'$$

5.6 Fuerzas impulsivas

Las fuerzas impulsivas se caracterizan por dos propiedades esenciales: a) son muy intensas; b) actúan durante un período de tiempo muy corto (martillazo, golpes, choques).

Por ejemplo, el tiempo de contacto de una pelota con una pared en el momento de un choque es del orden de 10^{-2} a 10^{-3} s. El va-

lor máximo de la fuerza de interacción puede llegar a ser muy intenso, del orden de miles de newton.

Impulso de una fuerza

Si se representa en un gráfico la acción de una fuerza impulsiva en función del tiempo, se obtiene algo similar a lo mostrado en la figura 5.19, donde la escala del eje x es del orden de milisegundos, mientras que la del eje y es de miles de newton. Se define el *impulso* de la fuerza $F(t)$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ por la expresión

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

El impulso tiene un valor numérico igual al área bajo la curva en el gráfico $F(t)$ vs. t . *Note que el impulso es una magnitud vectorial.*

2da ley de Newton en función del impulso

La 2da ley de Newton para una masa puntual establece que

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

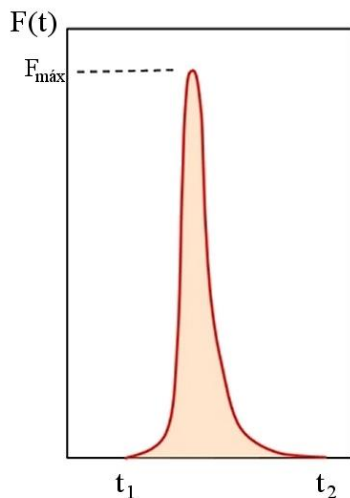


Figura 5.19. Fuerza impulsiva

Para un pequeño intervalo de tiempo (dt), la variación correspondiente de la cantidad de movimiento de la masa puntual será:

$$d\vec{p} = \vec{F}_R dt.$$

Integrando a ambos lados de esta expresión para un intervalo de tiempo finito, y expresando la resultante como la suma de las fuerzas individuales actuando sobre la masa puntual, se llega a:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) dt$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_1^2 \vec{F}_1 dt + \int_1^2 \vec{F}_2 dt + \int_1^2 \vec{F}_3 dt + \dots$$

Pero cada una de las integrales a la derecha es el impulso asociado a la fuerza correspondiente, por tanto,

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \dots$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}_R.$$

La variación de la cantidad de movimiento de una masa puntual es igual al impulso resultante.

Este resultado es una forma alternativa de expresar la 2da ley de Newton para una masa puntual.

5.7 Choques

Se puede definir un choque como la interacción que tiene lugar entre dos cuerpos cuando sus trayectorias coinciden en una determinada región del espacio en el mismo instante.

Los choques pueden ser a) por contacto directo y b) por interacción electromagnética (entre partículas cargadas con carga de igual signo, figura 5.20). Sin embargo, tanto en un caso como en el otro se cumplirán

las mismas propiedades. Analicemos el choque entre dos *esferas homogéneas*, representado en la figura 5.21.

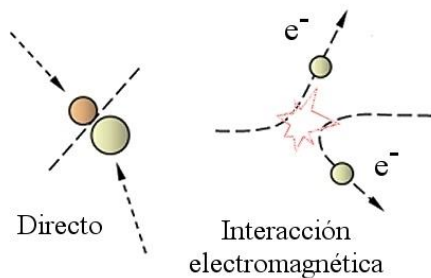


Figura 5.20. Choques

Si consideramos el movimiento de los centros de masa, es posible analizar las esferas como si fueran partículas, suponiendo toda la masa concentrada en su centro.

Las fuerzas F_{12} y F_{21} actuando sobre cada esfera durante el choque son fuerzas internas del sistema formado por las dos partículas. Además son fuerzas impulsivas, y también son pareja de acción y reacción. Al ocurrir el choque, sobre cada una de las esferas también actuará la fuerza de atracción gravitatoria F_g , siempre presente.

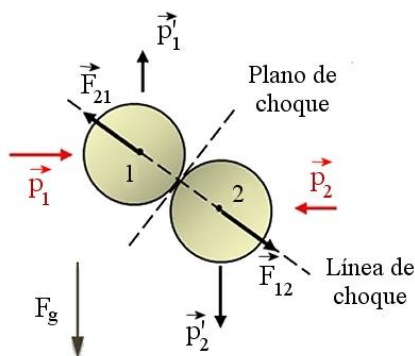


Figura 5.21. Choque en dos dimensiones

Para analizar cómo varía la cantidad de movimiento de las esferas durante el choque, considere la ecuación del impulso aplicada a la esfera 1.

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}_R = \int \vec{F}_R dt.$$

Sustituyendo $\vec{F}_R = \vec{F}_{12} + \vec{F}_g$ y separando las integrales:

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F}_{12} dt + \int \vec{F}_g dt$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}_{12} + \vec{I}_g.$$

A diferencia del impulso de la fuerza de choque F_{12} , que es un impulso interno, el impulso de F_g es externo y hay que tomarlo en cuenta. Sin embargo, al comparar las áreas bajo la curva en la figura 5.22, se comprueba de inmediato que en el intervalo (t_1, t_2) considerado, $I_{12} \gg I_g$.

De aquí que durante el choque sea posible despreciar el impulso de la fuerza de atracción gravitatoria y considerar solo las fuerzas de interacción internas, de manera que

$$\vec{F}_{R, ext} \cong 0.$$

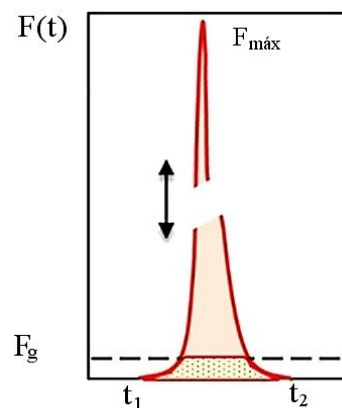


Figura 5.22. El valor relativo de F_g está muy aumentado para hacer visible el área bajo la recta.

Según lo establecido por el teorema de conservación del momento lineal, para el sistema formado por las dos partículas el momento lineal del sistema se mantiene constante.

Si \vec{P}_0 es la cantidad de movimiento antes del choque, y \vec{P} la cantidad de movimiento después del choque, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{P}_0 &= \vec{P} \\ \vec{p}_2^0 + \vec{p}_1^0 &= \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \\ m_1 \vec{v}_1^0 + m_2 \vec{v}_2^0 &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.\end{aligned}$$

Esta es la relación a cumplirse en cualquier tipo de choque entre dos partículas.

- Si la energía cinética de traslación de las partículas se conserva durante el choque, el choque será *elástico*.
- En caso contrario, el choque se denomina *inelástico*.
- Dentro de los choques inelásticos, un caso particular importante es el de los choques *perfectamente inelásticos*, cuando los cuerpos quedan unidos después del choque. A continuación se analizan algunos casos particulares.

Choque elástico en una dimensión

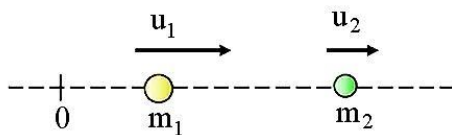


Figura 5.23. Choque elástico

En el esquema de la figura 5.23, u_1 y u_2 representan las velocidades de las partículas antes del choque, y v_1 , v_2 las velocidades después del choque. La notación vectorial se ha omitido, y se mantiene el mismo convenio de signos utilizado en capítulos anteriores para el movimiento en una dimensión.

De acuerdo a la conservación de la cantidad de movimiento y a la conservación de la

energía cinética del sistema (choque elástico), las siguientes ecuaciones se deben cumplir a la vez:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (2)$$

Este es un sistema no lineal de ecuaciones que se puede resolver para v_1 y v_2 en función de m_1 , m_2 , u_1 y u_2 . Agrupando términos en (1),

$$m_1 (u_1 - v_1) + m_2 (u_2 - v_2) = 0$$

$$m_1 (u_1 - v_1) = -m_2 (u_2 - v_2) \quad (3)$$

De la ecuación (2),

$$m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2) = 0$$

y sustituyendo según (3)

$$\begin{aligned}-m_2 (u_2 - v_2) (u_1 + v_1) + \\ m_2 (u_2 - v_2) (u_2 + v_2) = 0\end{aligned}$$

$$(u_1 + v_1) = (u_2 + v_2)$$

$$u_1 + v_1 - v_2 = u_2. \quad (4)$$

Suponiendo m_1 , m_2 , u_1 y u_2 conocidas, las ecuaciones (4) y (1) forman un sistema lineal de 2 ecuaciones con dos incógnitas (v_1 y v_2), a resolver por métodos conocidos.

La solución general tiene la forma

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2.\end{aligned} \quad (5)$$

Caso 1: $m_1 = m_2$.

Si se hace $m_1 = m_2$ en las ecuaciones ante-

riores y se cancelan términos iguales, se llega a:

$$v_1 = u_2$$

$$v_2 = u_1$$

Las partículas intercambian velocidades (figura 5.24).

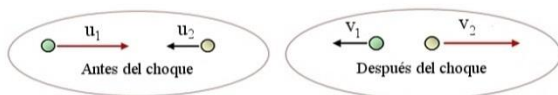


Figura 5.24. Choque elástico con $m_1 = m_2$. Intercambio de velocidades.

La velocidad final de la masa puntual 1 se hace igual a la inicial de la masa puntual 2, y la final de la masa puntual 2 es igual a la inicial de la masa puntual 1. En el caso que una de las dos partículas esté en reposo al inicio (por ej., $u_2 = 0$), se obtiene:

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = u_1.$$

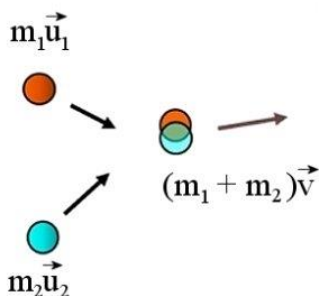


Figura 5.25. Choque plástico

Significa que la masa puntual 1 se detiene, y la masa puntual 2, en reposo al inicio, sale disparada con la velocidad que tenía la masa puntual 1. Los jugadores de billar y los niños que juegan “a las bolas” conocen esta propiedad. Golpeando una bola con otra por el centro es posible lograr que la bola que golpea se quede en el lugar, mientras la otra sale a gran velocidad.

Caso 2: $m_2 \gg m_1$ y $u_2 = 0$.

Uno de las partículas está en reposo y su masa es mucho mayor que la de la otra. En este caso, dividiendo el numerador y denominador de las ecuaciones (5) por m_2 y haciendo después $m_1/m_2 \approx 0$, se obtiene:

$$v_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} u_1 \approx -u_1$$

$$v_2 = \frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} u_1 \approx 0.$$

El cuerpo 1 rebota, y el cuerpo 2, que al inicio estaba en reposo, no se mueve en la práctica (este es el caso, por ej., del choque de una pelota contra una pared).

Choque plástico en 2 dimensiones

En un choque perfectamente inelástico los cuerpos quedan unidos después del choque (figura 5.25). La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento $\vec{P}_0 = \vec{P}$ queda en este caso como en la figura 5.25,

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

Nada se puede afirmar de antemano acerca de la pérdida de energía, excepto que la energía cinética no se mantendrá constante durante el choque. Cada caso particular hay que analizarlo de forma individual.

En la figura 5.25 también se muestran los efectos del choque plástico de un meteorito con la Tierra (cráter de Arizona) ocurrido hace unos 20 000 años. El cráter tiene un diámetro de 1.2 km y unos 200 m de profundidad. Una parte importante de la energía se gastó en fragmentar el meteorito.

Ejemplo

Demostrar que cuando un cuerpo choca en forma perfectamente inelástica con otro de igual masa en reposo, se pierde la mitad de la energía cinética del sistema (figura 5.26).

La ecuación a analizar es:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

Pero $m_1 = m_2 = m$, y $u_2 = 0$. Por tanto, sustituyendo y simplificando para obtener la velocidad final,

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}_1}{2}.$$

La velocidad final es colineal con v_1 , y de valor $u_1/2$. Calculando la variación de energía cinética en el sistema:

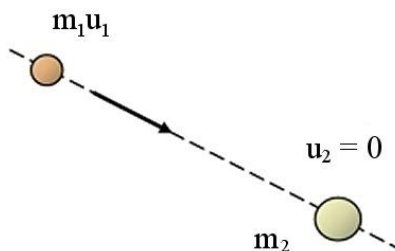


Figura 5.26. Masas iguales, una en reposo.

Antes del choque:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

Después del choque:

$$E_c = \frac{1}{2} (2m) v^2 = m \left(\frac{u_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} m u_1^2.$$

Por lo tanto,

$$E_c = \frac{1}{2} E_{c1}.$$

¿Qué le sucede a la energía cinética que desaparece?

Las leyes de conservación en el micromundo.

A pesar de la que la mecánica de Newton no es aplicable en el micromundo, en las interacciones entre partículas elementales las leyes de conservación se mantienen vigentes. Al tomar en cuenta la conservación de la energía y la cantidad de movimiento, junto a otras leyes de conservación específicas del micromundo, los aceleradores y detectores de partículas proporcionan a los físicos información sobre las partículas subatómicas y la constitución de la materia.



Figura 5.27. Detector de partículas elementales.

Los aceleradores son capaces de generar

partículas con grandes energías y hacerlas colisionar. Estudiando los resultados de los choques es posible conocer como están constituidas las partículas, cómo se transforman unas en otras y los valores de sus energías. Así se ha demostrado la existencia y propiedades de numerosas partículas elementales.

La figura 5.27 muestra el detector de partículas SLD, donde se miden y registran las propiedades de las partículas generadas en las colisiones. Este detector forma parte del acelerador lineal de 3.2 km del Centro del Acelerador Lineal de Stanford, en California (EE.UU.).

El círculo grande en la vista aérea de la figura 5.28 marca la situación del gran colisionador de electrones-positrones (LEP) del CERN, el laboratorio europeo de física de partículas situado en la frontera entre Francia y Suiza. El túnel en el que se aceleran las partículas está situado a 100 m de profundidad y tiene una circunferencia de 27 km. A mayor diámetro, mayor tiempo en el proceso de aceleración, más energía y mayor posibilidad de lograr la ruptura de las partículas para poder estudiar su constitución. El círculo pequeño corresponde al colisionador de protones-antiprotones.



Figura 5.28. Acelerador europeo CERN.

5.8 Problemas resueltos

5.1. Un hombre y una mujer están en un lago sobre los extremos de una canoa simétrica de masa 30 kg y 3 m de longitud. La mujer se encuentra junto a un tronco que flota en el agua. Al intercambiar posiciones, el hombre nota que la canoa se alejó 0.40 m del tronco flotante. Si la masa del hombre es de 80 kg, ¿Cuál es la masa de la mujer?

5.2. Dos bloques se mantienen unidos con un resorte comprimido entre ellos. La masa

de uno es el doble de la del otro. La energía almacenada en el resorte es de 60 J. ¿Cuál es la energía cinética de cada bloque después de que ambos bloques se liberen al unísono? Desprecie la fricción y la masa del resorte.

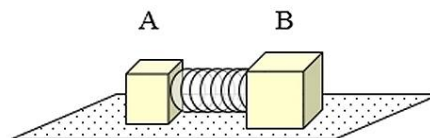


Figura problema 5.2

5.3. Un vagón de ferrocarril de 32 toneladas se mueve a 1.5 m/s y alcanza a otro de 24 ton que iba a 1 m/s en el mismo sentido. Si los vagones quedan enganchados; a) ¿Cuál es la velocidad final después de topar? b) ¿Cuál es la pérdida de energía cinética? ¿Adónde va esta energía?

5.4. Una bala de masa 4.5×10^{-3} se incrusta horizontal en un bloque de madera de masa 1.8 kg y lo desplaza 0.4 m. Si $\mu_k = 0.2$ y el bloque estaba al inicio en reposo, ¿cuál era la velocidad de la bala?

5.5. Dos pesas de igual masa (500 g) se conectan por medio de una cuerda ligera que pasa por una polea ligera y sin fricción, de diámetro 5 cm, y se colocan al mismo nivel. a) Localice su centro de masas. b) Se transfieren 20 g de un cuerpo al otro y se impide que los cuerpos se muevan. Localizar el CM. c) A continuación se sueltan los dos cuerpos. Describir el movimiento del centro de masas y determinar su aceleración.

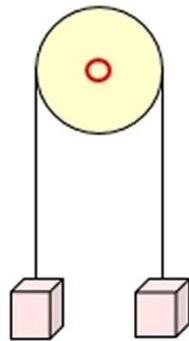


Figura problema 5.5

5.6. Calcule que fuerza promedio ejerce un fusil sobre el hombro de un tirador al efectuar un disparo, si el fusil apoyado en el hombro retrocede 1.5 cm. El fusil tiene una masa $M = 5$ kg. La masa de la bala es de $m = 10$ g y abandona el fusil con una veloci-

dad inicial de 500 m/s.

5.7. Se deja caer un pedazo de masilla de masa $m = 100$ g desde una altura $h = 0.2$ m sobre un platillo de masa $M = 400$ g que cuelga de un resorte de constante $k = 50$ N/m y masa despreciable. Si la bola se queda pegada al platillo, hallar cuánto se estira el resorte. (Tome $g = 10$ m/s²)

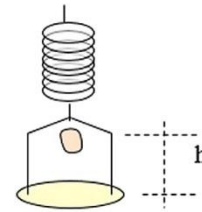


Figura problema 5.7

Soluciones

Problema 5.1

Las fuerzas que actúan en el eje x son todas internas, por tanto, $P = Mv_{CM} = \text{constante} = 0$, ya que al inicio todo está en reposo;

h: hombre;

m: mujer

$$v_{CM} = 0 \Rightarrow x_{CM} = \text{constante.}$$

La posición del CM respecto a un sistema ligado a tierra no variará.

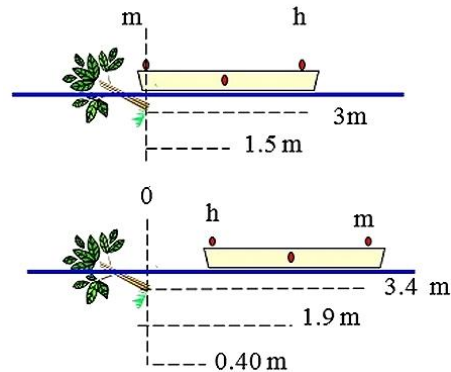


Figura solución 5.1

Antes de intercambiar:

$$x_{CM} = \frac{m_m x_m + m_c x_c + m_h x_h}{m_m + m_c + m_h}$$

$$x_{CM} = (m_m \times 0.0 + 30 \times 1.5 + 80 \times 3) / (m_m + 30 + 80)$$

$$x_{CM} = 285 / (m_m + 110)$$

Después de intercambiar:

$$x_{CM} = (80 \times 0.4 + 30 \times 1.9 + m_m \times 3.4) / (m_m + 30 + 80)$$

Como el centro de masa no varía, igualando ambas expresiones, y simplificando el denominador común:

$$285 = 89 + 3.4 m_m$$

$$m_m = 196 / 3.4 \approx 58 \text{ kg.}$$

Problema 5.2.

Según el teorema del W y la E para un SP:

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_c.$$

En este caso $W_{ext} = 0$, pero $W_{int} = -\Delta E_{pe}$, de manera que

$$\Delta E_{pe} + \Delta E_c = 0$$

$$0 - E_{pe}^o + E_c - 0 = 0$$

$$E_{pe} = E_{cA} + E_{cB}$$

donde se ha hecho uso de que, para un SP,

$E_c = \sum E_{ci}$. Por tanto,

$$E_{cA} + E_{cB} = 60.$$

Como las fuerzas externas F_g y N se cancelan, $\sum F_{ext} = 0$ y $\vec{P} = \text{constante}$. Como sólo hay movimiento en el eje x:

$$P_o = P$$

$$0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$0 = m_A v_A + 2m_B v_B$$

$$v_A = -2v_B$$

El signo (-) indica que ambas velocidades están en sentidos opuestos.

$$E_{cB} = \frac{1}{2} (2m_A)(v_A/2)^2 = \frac{1}{2} (m_A v_A^2 / 2) = \frac{1}{2} E_{cA}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$E_{cA} + \frac{1}{2} E_{cA} = 60$$

$$E_{cA} = 2 \times 60 / 3 = 40 \text{ J}$$

$$E_{cB} = 60 - 40 = 20 \text{ J}$$

Problema 5.3.

a) Choque perfectamente inelástico (1 dimensión): $P_o = P$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$= (32 \times 1.5 + 24 \times 1) / (32 + 24) = 1.28 \text{ m/s}$$

$$b) E_c^o = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times 32 \times 10^3 \times 1.5^2 + \frac{1}{2} \times 24 \times 10^3 \times 1^2$$

$$= 48 \times 10^3 \text{ J.}$$

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (32 + 24) \times 10^3 \times (1.28)^2$$

$$= 45.875 \times 10^3 \text{ J.}$$

$$E_c - E_c^o = (48 - 45.875) \times 10^3$$

$$= 2.125 \times 10^3 \text{ J}$$

Esta energía se convierte en energías de otro tipo: incremento de la temperatura de las partes en contacto (energía térmica), pequeñas deformaciones o rozaduras, ruido (ondas sonoras), etc.

Problema 5.4.

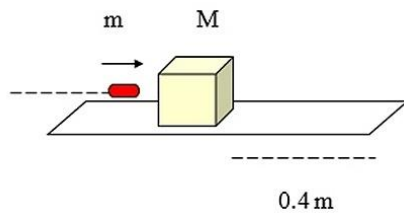


Figura solución 5.4a

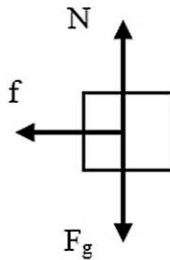


Figura solución 5.4b

Choque perfectamente inelástico

$$P_o = P$$

$$mv_b = (m + M)v$$

$$v_b = \frac{(m+M)}{m} v. \quad (1)$$

No se conoce la velocidad v del bloque después del choque, pero se puede calcular a partir de criterios de W y E.

$$W_{nc} = \Delta E$$

$$-fx = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$\mu_k gx = \frac{1}{2}v^2$$

$$v = (2\mu_k gx)^{1/2} = (2 \times 0.2 \times 10 \times 0.4)^{1/2}$$

$$= 1.26 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en (1)

$$v_b = \frac{4.5 \times 10^{-3} + 1.8}{4.5 \times 10^{-3}} \times 1.26 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Problema 5.5

$$m_1 = 520 \text{ g}$$

$$m_2 = 480 \text{ g}$$

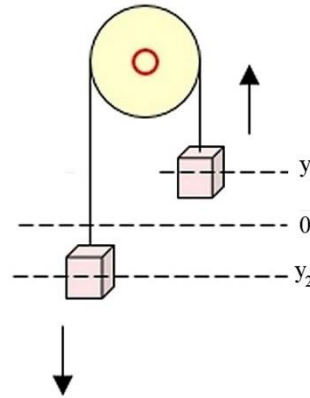


Figura solución 5.5a

a) En el punto medio de la recta que une las pesas.

b) Tomando el origen en la masa izquierda con $m_1 = 520 \text{ g}$, $m_2 = 480 \text{ g}$:

$$x_{CM} = \frac{0 + 480 \times 5}{1000} = 2.4 \text{ cm}.$$

c) En el eje x no hay movimiento. Por tanto, el resultado anterior sigue siendo válido, y $x_{CM} = 2.4 \times 10^{-2} \text{ m}$ (medidos a partir de la pesa izquierda). Si la cuerda es inextensible, lo que baja la pesa de mayor masa con relación a la posición inicial es igual a lo que sube la de menor masa ($y_1 = y_2 = y$). Por tanto, para la componente y_{CM} :

$$y_{CM} = \frac{-520y + 480y}{1000} = -0.04y \text{ (cm)}$$

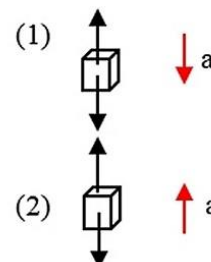


Figura solución 5.5b

El centro de masa se desplaza hacia abajo. Para calcular la aceleración, derivando respecto al tiempo en la expresión anterior, tomando valor modular

$$v_{CM} = 0.04 v \text{ (cm/s)}$$

$$a_{CM} = 0.04 a \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

El valor de a se puede calcular a partir del diagrama de fuerzas. Como la aceleración a es la misma en valor modular para los dos cuerpos, pues están unidos por una cuerda:

cuerpo 1 (baja)

$$m_1 g - T = m_1 a$$

cuerpo 2 (sube)

$$T - m_2 g = m_2 a$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_2 + m_1)} g = 0.04g = 39.2 \text{ cm/s}^2$$

Sustituyendo en $a_{CM} = 0.04a$

$$a_{CM} = 0.0016 \times 39.2 = 0.63 \text{ m/s}^2$$

Problema 5.6

Las fuerzas externas actuando durante el disparo son F_g y la normal que ejerce el tirador en sentido contrario para sostener el fusil, de forma que $F_g - N = 0$. Por tanto, $\Sigma F_{ext} = 0$ y $P = \text{constante}$ (teorema de conservación) y $P_o = P$.

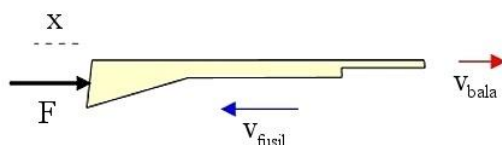


Figura problema 5.6

$$0 = mv_b + Mv_f$$

$$v_f = \frac{m}{M} v_b.$$

De inmediato después del disparo, la única fuerza que actúa sobre el fusil en el eje x la ejerce el hombro del tirador (su pareja de acción y reacción es la fuerza buscada). Aplicando el teorema del W y la E :

$$W_R = \Delta E_c = 0 - E_c$$

$$W_R = -\frac{1}{2} M v_f^2$$

$$-F x = -\frac{m^2 v_b^2}{2M}$$

$$F = \frac{m^2 v_b^2}{2M x} = 0.01^2 \times 500^2 / 2 \times 5 \times 0.015 = 166$$

N

Problema 5.7

Al soltar la masilla, antes que llegue al platillo el sistema es conservativo

$$E_1 = E_2,$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = \sqrt{2gh} = (2 \times 10 \times 0.2)^{1/2} = 2 \text{ m/s}$$

El choque con el platillo es perfectamente inelástico (no conservativo):

$$P_o = P$$

$$mv = (m + M)V$$

$$V = \frac{m}{m + M} v = \frac{100}{100 + 400} 2.0 = 0.4 \text{ m/s}.$$

Después del choque, el sistema es de nuevo conservativo. Tomando un origen común para el cero de la energía potencial elástica y el de la energía potencial gravitatoria y expresando los negativos de forma explícita:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{c1} = E_{pe2} + E_{pg2}$$

$$\frac{1}{2} (M + m)V^2 = \frac{1}{2} ky^2 - (m+M)gy$$

$$0.04 = 25y^2 - 5y$$

$$25y^2 - 5y - 0.04 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{50} = \frac{5 \pm 5.38}{50}$$

$$y_1 = 0.21 \text{ m};$$

$y_2 = < 0$ no tiene sentido físico.

CAPÍTULO 6

Rotación

6.1 Conceptos básicos

Plano de rotación

Definición de ángulo

Dimensiones

6.2 Velocidad angular

6.3 Aceleración angular

6.4 Análisis de casos particulares

Caso en que $\alpha = 0$: movimiento circular uniforme.

Caso en que $\alpha = \text{constante}$, (MCUV).

6.5 Relación entre las variables del movimiento lineal y el angular

6.6 Torque

Resultados experimentales

Definición de torque

Unidades

Propiedades

6.7 Energía cinética de rotación

6.8 Movimiento combinado de rotación + traslación

6.9 Cálculo de momentos de inercia

Sistemas discretos. Sistemas continuos (cuerpo rígido).

6.10 Segunda ley de Newton en la rotación

6.11 Momento angular

Momento angular de una partícula y de un sistema de partículas

Momento angular de un cuerpo rígido

6.12 Teorema de conservación del momento angular

Giróscopo

Precesión

6.13 Tema avanzado 1. Aceleración de Coriolis y fuerzas de inercia

6.14 Tema avanzado 2. Los períodos glaciales y la rotación de la Tierra.

6.15 Problemas resueltos

CAPÍTULO 6

Rotación

6.1 Conceptos básicos

Además de trasladarse, los cuerpos pueden rotar. En el capítulo anterior se examinó como era posible describir el movimiento de traslación de un cuerpo finito a partir del análisis de las propiedades de su centro de masa. Interesa ahora estudiar la rotación de los cuerpos.

En la figura 6.1, una pelota lanzada al aire con un impulso inicial, rota a la vez que se traslada en una trayectoria parabólica. El CM de la pelota se comporta como si la atracción gravitatoria actuara directamente sobre él; por tanto, el CM no puede participar de la rotación (no podría seguir entonces la trayectoria parabólica, sino algo parecido a un tirabuzón). Se concluye entonces que el CM por fuerza debe coincidir con el eje de rotación de la pelota. *La pelota rota alrededor de un eje que pasa por el CM.*

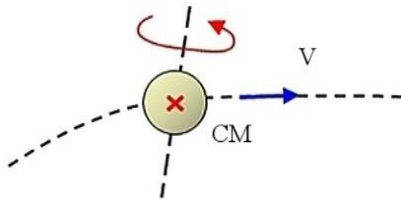


Figura 6.1. Movimiento compuesto rotación + traslación

Plano de rotación

La figura 6.2 representa un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo, perpendicular al plano del papel. Cualquier plano perpendicular al eje de rotación se denomina *plano de rotación*. En la figura 6.2, el

plano de rotación coincide con el plano del papel y el cuerpo rota de derecha a izquierda. El cuerpo es tridimensional, pero por lo general sólo se representa una sección transversal del mismo, como se ve en el dibujo.

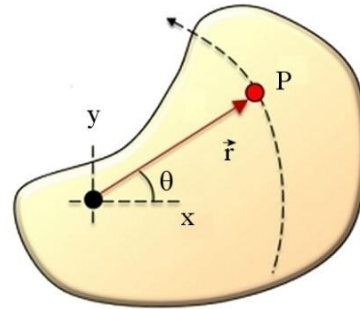


Figura 6.2. Variables de rotación

Es posible considerar el cuerpo como un sistema de partículas cuya distancia relativa no varía con el transcurso del tiempo (*cuerpo rígido*).

La condición de cuerpo rígido significa que ni la posición relativa de las partículas entre sí, ni la distancia de cada partícula al eje de rotación, varía con el transcurso del tiempo. En estas condiciones, la trayectoria descrita por cualquiera de las partículas será siempre una circunferencia. Para describir la rotación de la partícula en el punto P, se asocia un sistema de coordenadas al eje de rotación, de forma de poder especificar el punto mediante su vector de posición \vec{r}_i . Como la trayectoria es una circunferencia, $r_i = R = \text{constante}$.

Además de especificar la posición de la masa puntual mediante el vector de posición, es posible hacerlo dando los valores del par (x,y) , ya que $\vec{r}_i = x\vec{i} + y\vec{j}$. Una tercera posibilidad es expresar el módulo del

vector (R) y el valor de θ , ya que $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$. En las rotaciones se escoge esta última posibilidad, pues R no varía con el tiempo. Si se desea describir la variación temporal del punto P , sólo hay que investigar como varía θ con el tiempo, o sea, la forma de la función $\theta = \theta(t)$.

Definición de ángulo

Las familias de circunferencias con un origen común tienen la propiedad de que la relación entre la longitud de los arcos definidos por dos radios cualesquiera y la longitud del radio correspondiente es constante (figura 6.3):

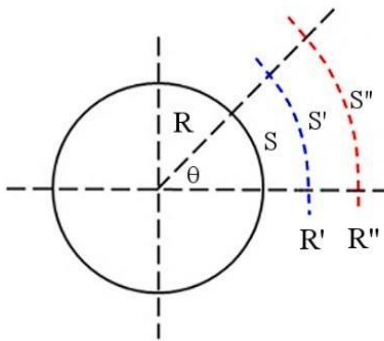


Figura 6.3. Definición de ángulo.

$$\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'} = \frac{S''}{R''} = \text{constante}.$$

De aquí que se defina el ángulo subtendido por los dos radios por la relación

$$\theta = \frac{S}{R}.$$

Dimensiones

$[\theta] = [S]/[R] = m/m = \text{adimensional}$. No obstante, cuando el ángulo se mide como un cociente de longitudes se acostumbra expresar su magnitud en *radianes*, para diferenciar este método de otros métodos

utilizados para medir ángulos.

$$S = R \Rightarrow \theta = 1 \text{ radián};$$

$$S = 2\pi R \Rightarrow \theta = 2\pi R/R = 2\pi \text{ radianes} \\ = \text{ángulo de una vuelta, } \approx 6.28 \text{ radianes}.$$

Otra unidad muy utilizada para medir ángulos es el *grado sexagesimal*, con la circunferencia dividida en 360 partes iguales. Considerando el ángulo de una vuelta, 360° equivalen a 2π radianes, y es posible escribir la siguiente proporción:

$$\theta_{\text{grad}}/\theta_{\text{rad}} = 360/2\pi,$$

de donde se obtiene la relación de conversión de radianes a grados, y viceversa:

$$\theta_{\text{grad}} = (180/\pi)\theta_{\text{rad}}.$$

Si no se especifica lo contrario, en lo que sigue todas las unidades de ángulo se suponen expresadas en radianes.

6.2 Velocidad angular

Considere una masa puntual que gira alrededor del eje fijo que pasa por O y se mueve del punto P_1 al P_2 en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Durante ese intervalo, el vector de posición de la partícula avanza un ángulo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ (figura 6.4).

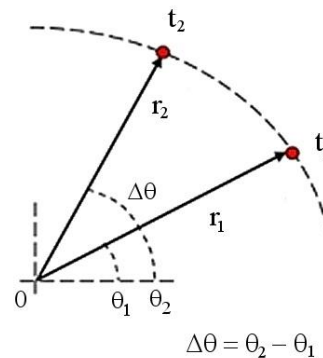


Figura 6.4. Definición de velocidad angular.

La *velocidad angular media* de la partícula en el intervalo de tiempo Δt se define por la relación:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

y la *velocidad angular instantánea* tomando el límite de la velocidad angular media cuando Δt tiende a cero:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Dimensiones

$[\omega] = [\theta]/[t] = \text{rad/s}$. Como el radián es en realidad adimensional, también se acostumbra expresar la velocidad angular como $[\omega] = \text{s}^{-1}$.

Si la masa puntual en P forma parte de un cuerpo rígido, la velocidad angular será la misma para todas las partículas, ya que el radio de cada partícula barrerá ángulos iguales en el mismo intervalo de tiempo.

Carácter vectorial de la velocidad angular

Note que la velocidad angular posee un determinado valor (módulo), una dirección en el espacio, y que para cada dirección existen dos posibles sentidos de rotación. Por tanto, es una magnitud vectorial.

El vector velocidad angular se define *perpendicular al plano de rotación*. Su sentido es tal que sigue la regla de la mano derecha: colocando los dedos de esa mano en la dirección del movimiento, el pulgar indicará la dirección del vector (figura 6.5).

6.3. Aceleración angular

Si la velocidad angular varía un $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, la

aceleración angular media se define por la expresión

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

La aceleración angular instantánea se define tomando el límite para $\Delta t \rightarrow 0$, lo que conduce a:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Unidades

$[\alpha] = [\omega]/[t] = \text{rad/s}^2$, o también $[\alpha] = \text{s}^{-2}$.

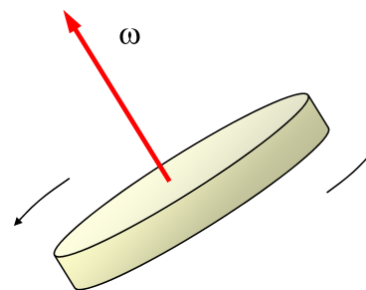


Figura 6.5. Vector velocidad angular

La aceleración angular también tiene propiedades vectoriales, e igual es perpendicular al plano de rotación. Cuando el vector α tiene el mismo sentido que ω el movimiento es acelerado. Cuando α y ω tienen sentido contrario, el movimiento es retardado. En este capítulo se considera que el eje de rotación se mantiene fijo en una dirección y, por tanto, los vectores ω y α siempre son colineales.

6.4 Análisis de casos particulares

Caso en que $\alpha = 0$: Movimiento circular uniforme

Si $\alpha = d\omega/dt = 0$, entonces $\omega = \text{constante}$, y se llega al *movimiento circular uniforme*. En este caso,

$$\omega = \omega_m = \Delta\theta/\Delta t$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (1)$$

Note que esta expresión es análoga a la fórmula de la velocidad en el movimiento rectilíneo y uniforme MRU, $v = \Delta x/\Delta t$, con tal que se sustituya x por θ y v por ω .

Si el cuerpo considerado tarda t segundos en dar n vueltas completas, para dar una sola vuelta tardará un número de segundos dado por

$$T = \frac{t}{n},$$

lo que se conoce como el *período* del movimiento.

TABLA 6.1 EQUIVALENCIA DE VARIABLES MRU Y MCU	
MRU	MCU
x	θ
v	ω
a	α

El inverso del período, el número de vueltas realizadas en la unidad de tiempo (n/t), es la *frecuencia* del movimiento:

$$f = \frac{1}{T}.$$

En un MCU es posible expresar la velocidad angular en función del período (o de la frecuencia). Cuando $\Delta t = T$, el cuerpo da una vuelta completa y $\Delta\theta = 2\pi$ (ángulo de una vuelta). Sustituyendo en (6.1) se obtiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ejemplo

¿Qué potencia mínima debe desarrollar una máquina de amolar si la rueda es de 10 cm de diámetro y la herramienta que se afila se aprieta contra la piedra con una fuerza de 200 N? La rueda gira a una frecuencia $\nu = 2.5$ rev/s y el coeficiente de fricción dinámico entre la piedra y el acero de la herramienta es de 0.32.

Datos:

$$R = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$A = 200 \text{ N}$$

$$\nu = 2.5 \text{ rev/s}$$

$$\mu_k = 0.32.$$

Resolución:

La potencia desarrollada por la máquina que mueve el eje (no mostrada en la figura 6.6) debe ser suficiente para vencer la fricción, la otra única fuerza que hace trabajo cuando la piedra se desliza sobre la herramienta. Esta potencia debe ser, como mínimo, igual a la potencia disipada por la fricción con signo contrario: $P_{\text{máquina}} = -P_{\text{fricción}}$. La potencia disipada por la fricción se puede calcular a partir de los datos.

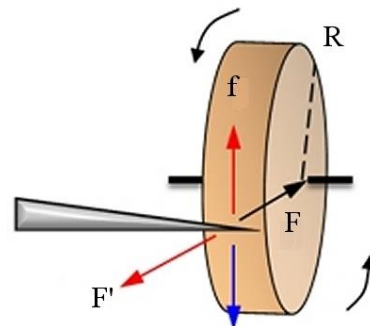


Figura 6.6. Ver texto

En principio, $W = f d \cos \theta$, donde d sería la distancia recorrida por la piedra al girar. No obstante, resulta más simple calcular el trabajo de la fricción aplicando la expresión alternativa $W = \vec{f} \cdot \vec{v}$, donde en este caso el vector v representa la velocidad de desplazamiento de las superficies (velocidad tangencial de la piedra de amolar).

La fuerza F es normal a la superficie, porque cualquier componente que no pase por el eje de rotación tendería a hacer rotar la piedra, y no a comprimir la herramienta contra ella. F y F' son pareja de acción y reacción, paralelas al radio y normales a las superficies en contacto. Por tanto, para la fuerza de fricción, que es contraria al movimiento y paralela a la velocidad se cumplirá $f = \mu_k F$ (ver figura 6.6).

Por otra parte, la velocidad tangencial puede escribirse en función de los datos: $v = \omega R = 2\pi v R$. Sustituyendo en la expresión de la potencia se obtiene:

$$P_f = f v \cos(180^\circ) = -fv$$

$$P_f = -\mu_k F \cdot 2\pi v R$$

$$P_f = -0.32 \times 200 \times 6.28 \times 2.5 \times 0.1$$

$$P_f \approx -100.5 \text{ w}$$

La potencia entregada por la máquina será entonces, como mínimo, de + 100.5 w.

Caso en que $\alpha = \text{constante}$ (movimiento circular uniformemente variado)

Cuando la aceleración angular es constante nos encontramos en el caso del *movimiento circular uniformemente variado*. Note la completa analogía que existe entre la expresión $\alpha = d\omega/dt$, donde α es constante, y la

correspondiente expresión para el movimiento rectilíneo uniformemente variado, $a = dx/dt$, donde la aceleración a es constante.

Significa que cualquier derivación que realicemos a partir de esta expresión nos conducirá a fórmulas similares a las del MRUV, con tal que efectuemos las sustituciones

$$x \rightarrow \theta, v \rightarrow \omega, a \rightarrow \alpha.$$

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$, donde θ_0 es el ángulo inicial y ω_0 la velocidad angular inicial.

TABLA 6.2 EQUIVALENCIA FÓRMULAS MCU Y MCUV	
MRUV	MCUV
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\Delta \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta \theta$

6.5 Relación entre las variables del movimiento lineal y el angular

El movimiento de rotación de una masa puntual alrededor de un eje fijo se puede describir de diferentes formas.

1. Respecto a un sistema de referencia fijo en el eje de rotación, especificando el vector de posición $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y obteniendo de ahí la velocidad y aceleración de la masa puntual:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt ; \vec{a} = d\vec{v}/dt .$$

2. Respecto a un sistema de referencia móvil ligado a la masa puntual. En este caso se obtienen las componentes normal y tangencial de la aceleración:

$$\vec{a} = a_t \vec{T} + a_n \vec{N}$$

$$a_t = dv/dt$$

$$a_n = v^2/R.$$

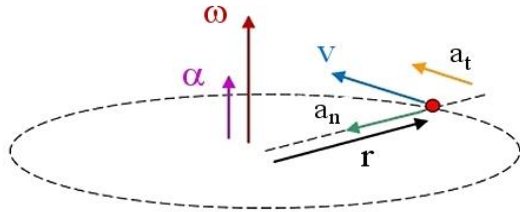


Figura 6.7. Propiedades vectoriales en un movimiento circular.

3. Respecto a un sistema fijo en el eje de rotación, pero ahora en función de las coordenadas polares R y θ . Como R es constante en un movimiento circular, solo es necesario especificar $\theta = \theta(t)$. Si se conoce $\theta(t)$, entonces:

$$\omega = d\theta/dt$$

$$\alpha = d\omega/dt.$$

Si las diferentes ecuaciones describen el mismo movimiento, deben existir relaciones entre ellas. Interesa encontrar estas relaciones. Para ello, partiendo de la definición de ángulo:

$$S = R\theta$$

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}.$$

La derivada del arco dS/dt es la rapidez v de la partícula, luego

$$v = \omega R. \quad (1)$$

Derivando otra vez respecto al tiempo en esta expresión:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$$

$$a_t = \alpha R. \quad (2)$$

Para la componente normal de la aceleración:

$$a_n = v^2/R = \omega^2 R^2/R,$$

$$a_n = \omega^2 R. \quad (3)$$

Es posible demostrar que las ecuaciones 1 a la 3 son, en realidad, ecuaciones vectoriales. Los vectores se representan en la figura 6.7:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

6.6 Torque

Resultados experimentales

Cuando se aplican fuerzas a un cuerpo que tiene un eje fijo de rotación, se encuentran los siguientes resultados experimentales:

- La aceleración angular α depende del punto de aplicación de la fuerza. Será mayor mientras más lejos se encuentre la fuerza F del eje de rotación (figura 6.12, arriba).

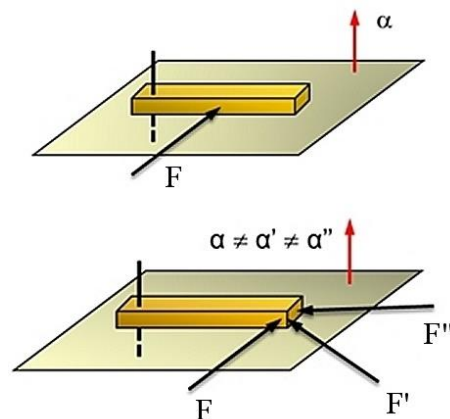


Figura 6.12. Efecto del punto de aplicación y dirección de las fuerzas sobre la rotación.

- Dado un punto de aplicación, α depende de la dirección de aplicación de F . En la figura 6.12, las fuerzas F , F' y F'' , aunque iguales en módulo y aplicadas en el mismo punto, ejercen efectos diferentes sobre el

cuerpo. En particular, la fuerza F'' , cuya prolongación pasa por el eje de rotación, no produce aceleración alguna.

- La aceleración α depende de la distribución de masa alrededor del eje de rotación (figura 6.13). Aunque el punto de aplicación está a la misma distancia del eje de rotación y el ángulo de la fuerza también es el mismo, al invertir el cuerpo se cambia la distribución de masa respecto al eje de rotación, y también varía el efecto de F y la correspondiente aceleración angular.

El concepto de *torque* se introduce con el fin de describir de manera correcta el efecto de las fuerzas sobre cuerpos que tienen la posibilidad de rotar.

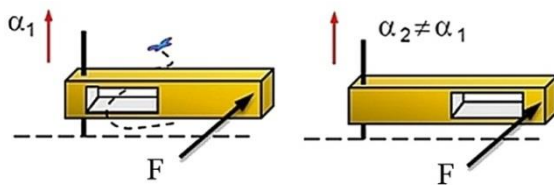


Figura 6.13. La aceleración angular depende de la distribución de masa alrededor del eje de rotación.

Definición de torque

Considere un cuerpo rígido capaz de rotar alrededor de un eje fijo, y una fuerza paralela al plano de rotación, aplicada a un punto del cuerpo (figura 6.14).

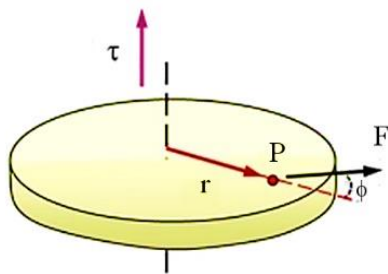


Figura 6.14. Torque

Como el cuerpo es rígido, el efecto de la fuerza aplicada en el punto se transmitirá a todo el cuerpo. Si \vec{r} es el vector de posición de la masa puntual, cuyo módulo coincide con el radio R de la trayectoria circular de la masa puntual, el torque $\vec{\tau}$ causado por la fuerza F al aplicarse en el punto F se define como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Según la definición de producto vectorial, el vector τ es perpendicular al plano de rotación y sigue la regla de la mano derecha.

Su valor modular viene dado por

$$\tau = rF \sin \phi. \quad (6.1)$$

Si el eje de rotación está fijo, las componentes de F que no son paralelas al plano de rotación no ejercen torque sobre el cuerpo, por lo que no es necesario tomarlas en cuenta.

Unidades

$$[\tau] = [F][L] = \text{Nm},$$

que coincide con las unidades de la energía, pero *no es* una energía, y se expresa como Nm (y no en joule).

Propiedades del torque

- Si r y F son colineales, el torque de F es cero, lo que se ve de inmediato sustituyendo en la expresión de arriba: Si son colineales $\phi = 0$ o 180° y, por tanto,

$$\sin(0^\circ) = \sin(180^\circ) = 0$$

- La suma de torques es vectorial; En particular, si hay N torques $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3, \dots, \vec{\tau}_N$ actuando sobre el cuerpo en el plano de rotación, el torque resultante vendrá dado por la suma vectorial de los N torques:

$$\vec{\tau}_R = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N.$$

- c) La componente de F paralela a r no contribuye al torque

En la figura 6.15, el eje de rotación se encuentra perpendicular al plano del papel, y $F_{\perp} = F \sin \phi$ es la componente de F perpendicular al vector de posición. El valor modular del torque en (6.1) se puede expresar entonces como:

$$\tau = rF_{\perp},$$

y la componente paralela al vector de posición F_{\parallel} no contribuye al valor del torque.

Note de la misma figura que $b = r \sin \phi$, donde el brazo b es la perpendicular que va desde el eje de rotación hasta la prolongación de la fuerza. De aquí que el torque también puede ser interpretado como el producto del brazo por la fuerza. Sustituyendo en la ecuación (6.1) se obtiene que

$$\tau = bF.$$

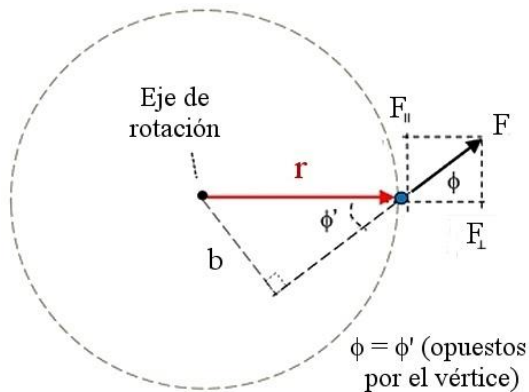


Figura 6.15. El torque es igual al brazo por la fuerza.

6.7 Energía cinética de rotación

Cualquier cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo se puede considerar formado por rebanadas o discos de espesor despreciable (figura 6.16).

ciable (figura 6.16).

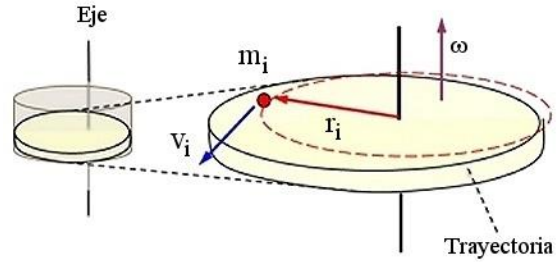


Figura 6.16. Ver texto.

En lo que sigue solo se analizará una de estas rebanadas o discos. Las propiedades derivadas para un disco son extensibles con facilidad a todo el cuerpo, con tal que las distancias consideradas sean siempre las distancias desde cada punto hasta el eje de rotación.

Note que el eje de rotación no coincidirá, en general, con el centro geométrico del disco. La línea punteada indica la trayectoria seguida por el punto de masa m_i . De acuerdo a lo analizado antes, la energía cinética de rotación del sistema de N partículas que forman el cuerpo vendrá dada por

$$E_{cr} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Sustituyendo en esta expresión $v_i = \omega r_i$, donde ω es la misma para todos los puntos,

$$E_{cr} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

El *momento de inercia* (I) se define por la expresión

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

donde la suma es para todas las partículas que componen el cuerpo. Como se dijo antes, r_i es la distancia de la masa puntual al

eje de rotación. Por tanto, expresando la energía cinética en función del momento de inercia se obtiene como resultado:

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Esta expresión es análoga a la energía cinética de traslación $\frac{1}{2} mv^2$, donde ω hace el papel de v y el momento de inercia I hace el papel de la masa m . De aquí se concluye que el momento de inercia es una medida numérica de la inercia rotacional; es decir, de la propiedad que tienen los cuerpos para resistirse a cambiar su estado de reposo o movimiento circular uniforme mientras sobre ellos no actúen torques externos.

Unidades

La energía de rotación tiene las mismas unidades que cualquier otra energía. Para el momento de inercia: $[I] = [m][L]^2 = \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Esta unidad no tiene asignado un nombre específico.

6.8 Movimiento combinado de rotación + traslación

Con anterioridad se demostró que la energía cinética de cualquier sistema de partículas de masa total M se puede expresar como

$$E_c = E_{c(\text{CM})} + E_c',$$

donde $E_{c(\text{CM})}$ es la energía cinética del CM respecto a un sistema inercial cualquiera y E_c' la energía cinética de las partículas referidas a un sistema de referencia en el centro de masa.

En la figura 6.17, tomando como sistema de referencia inercial el fijo a tierra,

$$E_{c(\text{CM})} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2.$$

E_c' se obtendría tomando la suma de las

energías cinéticas de las partículas, con las velocidades calculadas respecto a un origen ubicado en el CM del sistema.

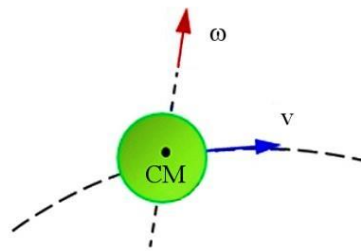


Figura 6.17. Energía cinética de rotación

Considere el ejemplo, analizado al inicio del capítulo, de la pelota lanzada al aire con un impulso inicial de forma que rota a la vez que se traslada. La pelota rota alrededor de un eje que pasa por el CM, de manera que se cumplen las condiciones del teorema anterior. Aplicando el teorema a la pelota en rotación:

$$E_c = E_{c(\text{CM})} + E_c(\text{rot})$$

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

En esta expresión I representa el momento de inercia de la pelota calculado respecto al eje de rotación que pasa por su centro de masa.

6.9 Cálculo de momentos de inercia

Sistemas discretos

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

Ejemplo. En la figura 6.18, $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

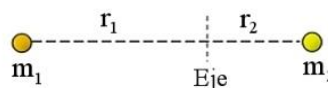


Figura 6.18. Momento de inercia de 2 partículas.

El valor del momento de inercia depende del eje de rotación considerado. Si el eje se acerca o se aleja de las partículas cambiarán las distancias r_1 y r_2 y, por tanto, también cambiará el valor de la sumatoria. En particular, si el eje de rotación coincide con la posición de la partícula 2, entonces $r_2 = 0$, y quedaría para el momento de inercia $I = m_1 r_1^2$.

Sistemas continuos (cuerpo rígido)

Suponiendo el cuerpo subdividido en celdillas de masa Δm_i , la suma $M = \sum \Delta m_i$ es la masa del cuerpo (figura 6.19). El momento de inercia se puede escribir como una aproximación de la forma siguiente:

$$I \cong \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i .$$

El valor exacto se obtiene tomando el límite para $\Delta m_i \rightarrow 0$.

En ese caso el número de celdillas tiende a infinito y la sumatoria se convierte en una integral de volumen:

$$I = \iiint_V r^2 dm .$$

Esta integral se resuelve de forma simple en el caso de cuerpos que poseen alta simetría. En la tabla 6.3 se muestran algunos ejemplos.

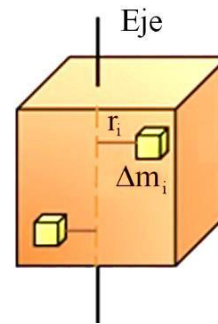


Figura 6.19. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo continuo.

Teorema de los ejes paralelos (sin demostración, ver figura 6.20).

Sea:

I_0 : valor del momento de inercia respecto a un eje que pasa por el CM de un cuerpo,

I' : el valor respecto a un eje de rotación paralelo al anterior a una distancia h del mismo.

Entonces se cumple que:

$$I' = I_0 + Mh^2,$$

donde M es la masa del cuerpo.

TABLA 6.3. MOMENTOS DE INERCIA EN CUERPOS SIMÉTRICOS		
Cilindro hueco respecto a un eje central	$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$	
Disco plano respecto a un eje central	Haciendo $R_1 = 0$ en el caso anterior; $I = \frac{1}{2} MR^2$	
Anillo respecto a un eje central	Haciendo $R_1 \approx R_2 \approx R$ en el caso anterior; $I = mR^2$	

Ejemplo

El momento de inercia de un anillo respecto a su centro, según la tabla 6.3, es $I_0 = MR^2$. Para calcular el momento de inercia respec-

to a un eje que pasa por el borde del anillo a una distancia h , aplicando el teorema:

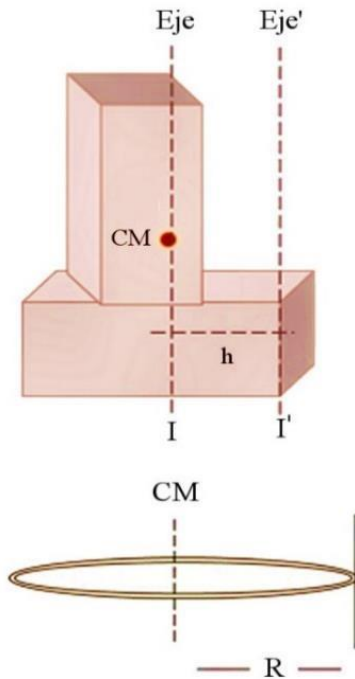


Figura 6.20. Teorema de los ejes paralelos: $I' = I_0 + Mh^2$.

$$\begin{aligned} I' &= I_0 + Mh^2 \\ &= MR^2 + MR^2 \\ &= 2MR^2. \end{aligned}$$

6.10 Segunda ley de Newton en la rotación

En la figura 6.21, el cuerpo rota alrededor de un eje fijo perpendicular al plano del papel, con aceleración angular α . Aparecen dibujados el eje normal (N) y tangencial (T). La fuerza F_{Ri} es la resultante de todas las fuerzas actuando sobre la partícula i en el plano del papel, por tanto:

$$\vec{F}_{Ri} = m_i \vec{a}_i.$$

La componente normal de \vec{F}_{Ri} ($F_{\parallel} = F_{Ri} \cos\phi$) no contribuye al movimiento, pues su

prolongación pasa por el eje de rotación. La componente tangencial cumple la siguiente relación:

$$F_{Ri} \sin\phi = m_i a_t = m_i \alpha r_i.$$

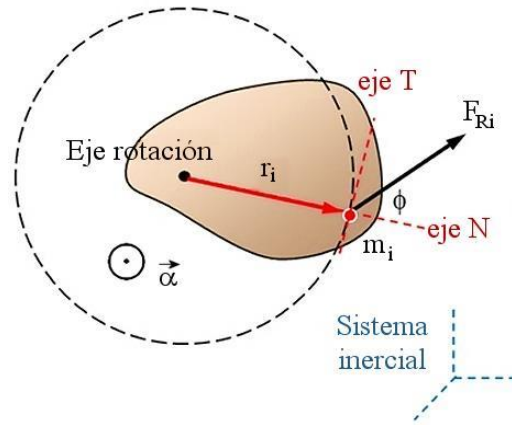


Figura 6.21. 2da ley de Newton en la rotación

Multiplicando por r_i a ambos lados de la expresión se obtiene:

$$r_i F_i \sin\phi = m_i \alpha r_i^2.$$

El término de la izquierda es el torque ejercido por la fuerza F_{Ri} . Sustituyendo y ordenando los términos:

$$\tau_{Ri} = m_i r_i^2 \alpha.$$

Sumando para todas las partículas del cuerpo y agrupando los torques causados por fuerzas externas e internas del sistema, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\text{ext}} \vec{\tau}_{Ri} + \sum_{\text{int}} \vec{\tau}_{Ri} &= \alpha \sum m_i r_i^2 \\ \vec{\tau}_{R, \text{ext}} + \vec{\tau}_{R, \text{int}} &= I \vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Se demuestra a continuación que la sumatoria de los torques internos para todas las partículas se anula.

Demostración

Considere dos partículas cualesquiera de un sistema de partículas. Sean F_{12} y F_{21} fuerzas internas actuando sobre las partículas, y también parejas de acción y reacción (figura 6.22).

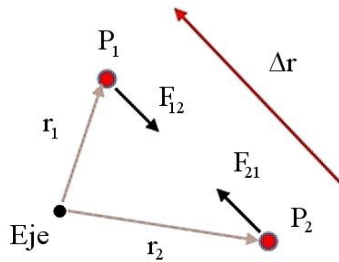


Figura 6.22. Ver texto.

Supongamos un eje de rotación en un punto arbitrario y sumemos los torques actuando sobre las dos partículas:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21})$$

sustituyendo $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ y agrupando términos

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \Delta\vec{r} \times \vec{F}_{12} = 0,$$

por ser los vectores $\Delta\vec{r}$ y F_{12} colineales, $\phi = 0^\circ$ o 180° y $\Delta r F_{12} \sin\phi = 0$. Significa que todos los torques internos se anulan por parejas al efectuar la sumatoria y, por tanto, $\tau_{Rint} = 0$. Al final se obtiene

$$\vec{\tau}_{Rext} = I\vec{\alpha}.$$

Los vectores τ y α son colineales y perpendiculares al plano de rotación, por lo que la expresión vectorial mantiene la validez.

Esta expresión es análoga a la 2da ley de Newton $\vec{F}_R = m\vec{a}$, con τ en el papel de F , el momento de inercia I sustituyendo a la masa m , y la aceleración angular α sustituyendo a la aceleración a .

yendo a la aceleración a .

Ejemplo 1

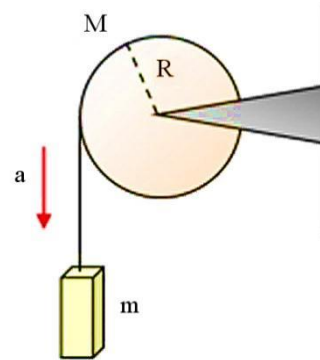


Figura 6.23. Cuerpo que cuelga libre de una polea.

Un cuerpo de masa 0.5 kg cuelga de una polea de masa 1 kg y radio 10 cm según la figura 6.23. Si el cuerpo se suelta, ¿Cuál es su aceleración? Desprecie la fricción en la polea (para un disco plano, $I = \frac{1}{2} MR^2$).

Datos

$$m = 0.5 \text{ kg}$$

$$M = 1 \text{ kg}$$

$$R = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

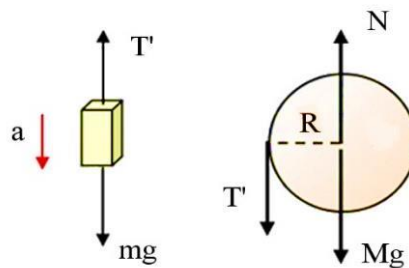


Figura 6.24

Diagrama de fuerzas del cuerpo (figura 6.24):

$$T - mg = -ma \tag{1}$$

Diagrama de fuerzas del disco

Traslación: $\vec{F}_R = m\vec{a}$

$$N - Mg + T' = ma_y = 0 \quad (2)$$

Rotación: $\tau_R = I\alpha$:

$$RT' = \frac{1}{2} MR^2\alpha \quad (3)$$

La masa de la cuerda es m_c se considera despreciable, $T - T' = m_c a = 0$.

$$T = T'. \quad (4)$$

La cuerda sólo se comporta como un agente de transmisión de la tensión. La ecuación (2) no proporciona información alguna sobre la aceleración buscada (el disco rota, pero no se traslada) y no se toma en cuenta.

Despejando en las ecuaciones (1) y (3) con $T = T'$:

$$T = mg - ma$$

$$T = \frac{1}{2} MR\alpha.$$

Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas: T , a , α . Una tercera ecuación se obtiene considerando la relación entre α y la aceleración tangencial:

$$a = \alpha R.$$

Sustituyendo esta última en la expresión anterior, se obtiene $T = \frac{1}{2} Ma$. Eliminado T en las ecuaciones y despejando la aceleración se obtiene:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} = \frac{0.5 \times 10}{0.5 + \frac{1}{2}} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Ejemplo 2

Analizar la energía de una rueda de masa

M que gira libre sin deslizar con velocidad de traslación v en una superficie horizontal según la figura 6.25. (Considere el momento de inercia de un disco con respecto a su centro geométrico, $I = \frac{1}{2} MR^2$).

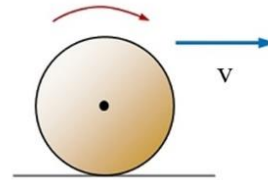


Figura 6.25

Resolución

El punto O es un eje instantáneo de rotación, que cambia de manera continua mientras la rueda va rotando (figura 6.26).

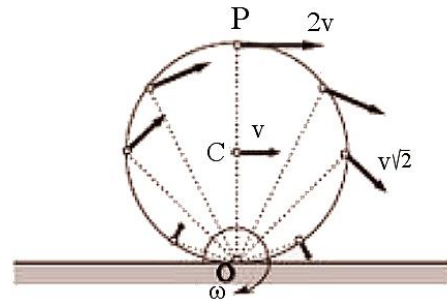


Figura 6.26

Diagrama de fuerzas

Eje y : F_g y N no aportan nada en el eje x . No se consideran.

Eje x : Actúa la fricción estática entre la rueda y el suelo, oponiéndose al movimiento relativo de las superficies, pero no hace trabajo y no contribuye a la energía. Solo impide que la rueda resbale (fricción estática).

La energía cinética de rotación se puede calcular de acuerdo con lo obtenido en la sección 6.8:

$$E_c = E_{c(CM)} + E_{c(rot)}.$$

Para la energía del CM,

$$E_{c(\text{CM})} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2.$$

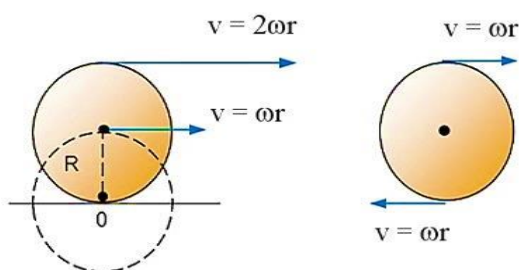


Figura 6.27. Velocidades medidas por el observador en tierra (izq.) y por un observador en el CM (eje) de la rueda (der.)

Para calcular la energía cinética de rotación respecto al centro de masa, note que un observador parado en el punto O verá una velocidad angular instantánea de rotación alrededor de O dada por $\omega = \frac{v_{\text{CM}}}{R}$ (figura 6.27).

Pero esta misma velocidad angular es la que ve un observador que se mueve junto al CM, pues la rueda gira alrededor de él con esa velocidad angular. (El observador en tierra ve pasar el CM con la misma velocidad que el observador en el centro de masa ve pasar el punto O en tierra en sentido contrario). Tomando el momento de inercia respecto al eje que pasa por el CM,

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2,$$

y sustituyendo $\omega = v_{\text{CM}}/R$ y la correspondiente expresión para el momento de inercia, simplificando y agrupando:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{4} M v_{\text{CM}}^2 = \frac{3}{4} M v_{\text{CM}}^2.$$

6.11 Momento angular

Momento angular de una masa puntual

En la figura 6.28, la partícula de masa m_i , ligada a un cuerpo rígido, rota alrededor de un eje fijo a una distancia r del eje. Si $\vec{p} = m\vec{v}$ es el momento lineal, se define el momento angular de la partícula con respecto al eje de rotación considerado por la expresión

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

Note que \vec{L}_i es perpendicular al plano de rotación, colineal con la velocidad angular. Tomando el valor modular del momento angular, como en este caso v es tangente a la trayectoria y perpendicular a r , $\phi = \pi/2$ y $\cos\phi = 1$. Entonces, $L_i = r_i m_i v_i$.

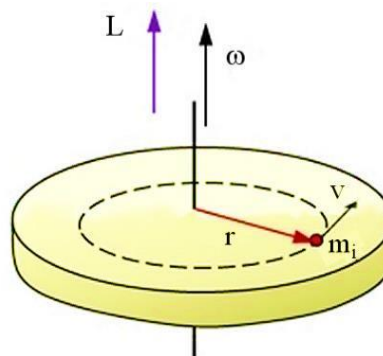


Figura 6.28. Momento angular

Supongamos ahora que la velocidad no es constante, sino que varía con el tiempo. Como la componente tangencial de la aceleración cumple la relación $dv/dt = a_t$, derivar la expresión anterior con respecto al tiempo produce la siguiente expresión:

$$\frac{dL_i}{dt} = r_i m_i a_t = r_i F_{\perp},$$

donde $F_{\perp} = m a_t$ se usó en la sección 6 para representar la componente de F tangente a la trayectoria, perpendicular al radio. En

esa misma sección se demostró que el torque actuando sobre una partícula τ_i se podía expresar por el producto $r_i F_{\perp}$, de aquí que

$$\bar{\tau}_{Ri} = \frac{dL_i}{dt}.$$

Esta expresión se ha derivado para el caso particular de una masa puntual en un cuerpo rígido. No obstante, es posible demostrar que es general por completo, y también que los vectores τ y dL/dt son colineales. De aquí que resulte válido escribir la expresión anterior utilizando vectores. Es decir, para cualquier masa puntual con respecto a un eje de rotación arbitrario,

$$\bar{\tau}_R = \frac{d\bar{L}}{dt}.$$

Se llega así a una expresión similar a la generalización de la 2da ley de Newton,

$$F_R = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

donde el torque τ hace el papel de la fuerza F y el momento angular L sustituye al momento lineal p .

Momento angular de un sistema de partículas

Considere ahora el conjunto de todas las partículas que conforman el cuerpo rígido del ejemplo anterior. Para cada partícula existirá una ecuación similar a la anterior.

Sumando miembro todas las ecuaciones, si hay N partículas:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{R1} + \bar{\tau}_{R2} + \bar{\tau}_{R3} + \dots + \bar{\tau}_{RN} &= \\ &= \frac{d\bar{L}_1}{dt} + \frac{d\bar{L}_2}{dt} + \frac{d\bar{L}_3}{dt} + \dots + \frac{d\bar{L}_N}{dt} \end{aligned}$$

$$\sum_{\text{ext}} \bar{\tau}_k + \sum_{\text{int}} \bar{\tau}_k = \frac{d}{dt} (\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots + \bar{L}_N).$$

Antes se vio que, al sumar todos los torques actuando sobre todas las partículas,

$$\sum_{\text{int}} \bar{\tau}_k = 0.$$

Por tanto, si se define el momento angular del sistema de partículas por la expresión

$$\bar{L} = (\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 + \dots + \bar{L}_N),$$

se llega a:

$$\sum_{\text{ext}} \bar{\tau}_k = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

$$\bar{\tau}_R = \frac{d\bar{L}}{dt}.$$

Note que esta expresión es análoga a la 2da ley de Newton generalizada para un sistema de partículas $\bar{F}_R = \frac{d\bar{P}}{dt}$, donde el momento angular L es el análogo del momento P y el torque τ el análogo de F .

Momento angular de un cuerpo rígido

Según se vio antes, $L_i = r_i m_i v_i$. Para calcular el momento angular del cuerpo, según la definición, es necesario sumar los L_i para todas las partículas. En el cuerpo rígido todos los L_i son colineales, perpendiculares al plano de rotación y es posible sumar los módulos:

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N r_i m_i v_i.$$

Sustituyendo $v_i = \omega r_i$ y sacando el factor común ω fuera de la sumatoria:

$$L = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

En esta expresión se ha añadido de nuevo el símbolo de vector para indicar el hecho de que el momento angular L y la velocidad angular ω son colineales.

Note que esta expresión es análoga a la expresión de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$, donde el momento angular L sustituye al momento lineal P del SP y la velocidad angular ω a la velocidad del centro de masa v_{CM} .

6.12 Teorema de conservación del momento angular

El teorema se puede enunciar de la forma siguiente:

En ausencia de torques externos, el momento angular de un sistema de partículas se mantiene constante

La demostración es inmediata a partir de la relación demostrada antes:

$$\vec{\tau}_{R, ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Si en esta expresión $\vec{\tau}_{R, ext} = 0$ entonces \vec{L} constante, pues para que la derivada respecto al tiempo sea cero, el vector momento angular debe mantenerse constante (en módulo, dirección y sentido). También significa que $\vec{L} = I\vec{\omega}$ se mantendrá constante, así como la suma de los momentos angulares de todas las partículas,

$$\vec{L} = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_N).$$

Ejemplo

La figura 6.29 representa un cuerpo atado a una cuerda que gira en la horizontal. La cuerda pasa por un tubo hueco y es sostenida en su parte inferior de forma que puede halarse o estirarse, variando así el radio de giro del cuerpo. Analizar qué sucede cuando el radio varía desde el valor r_1 hasta el r_2 .

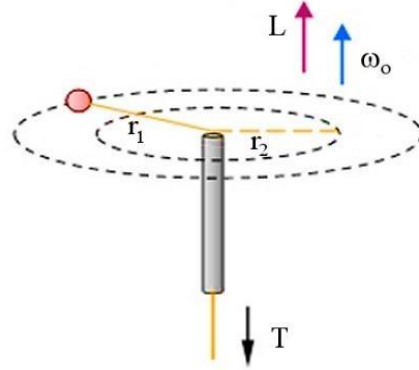


Figura 6.29. Ver texto.

La gravedad ejerce un torque \perp al plano de rotación, y no afecta la rotación en el plano xy . La tensión del hilo es colineal con r y tampoco contribuye al torque:

$$\vec{r} \times \vec{T} = rT \text{sen}(180^\circ) = 0.$$

Por tanto, no hay torques externos y el momento angular del sistema se mantiene constante durante el movimiento; $L = \text{constante}$. Significa que L debe tener el mismo valor antes y después de tirar de la cuerda:

$$L = L_0$$

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1$$

El valor de I se puede calcular a partir de la definición. Como es una sola masa puntual, $I_1 = \sum m_i r_i^2 = m r_1^2$. El momento de inercia final será $I_2 = m r_2^2$. Sustituyendo en la expresión anterior:

$$m r_2^2 \omega_2 = m r_1^2 \omega_1$$

$$\omega_2 = \omega_1 (r_1/r_2)^2.$$

Y si r_2 disminuye, como ocurre en la figura 6.29, la velocidad angular ω_2 debe ser mayor. Al reducir el radio de giro, la velocidad angular aumenta. Note que la tensión no produce torque, pero *sí* hace un trabajo $T\Delta r$ sobre el cuerpo. Considerando, $T \approx$ constante, según el teorema del trabajo y la energía, ese trabajo debe ser igual a la variación de la energía cinética de rotación:

$$T(r_1 - r_2) = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2.$$



Figura 6.30. Clavadista

Cuando un clavadista realiza giros al saltar del trampolín, hace variar su momento de inercia estirando o encogiendo todo el cuerpo (figura 6.30).

De esta forma puede controlar su velocidad de rotación. Igual ocurre con los bailarines de ballet. Extendiendo o cerrando brazos y piernas pueden controlar su velocidad de giro. La energía cinética de rotación varía a costa del trabajo interno que se realiza al extender y encoger las extremidades.

Los saltos de trampolín exigen un control total de los movimientos por parte del sal-

tador. Se tiene una señal inequívoca de que un saltador ha realizado un buen salto cuando, al efectuar la entrada, salpica poca cantidad de agua.

Giróscopo

También llamado *giroscopio*, es cualquier cuerpo en rotación que presenta dos propiedades fundamentales: la inercia rotacional giroscópica y la precesión, que es la inclinación del eje en ángulo recto ante cualquier fuerza que tienda a cambiar el plano de rotación. Estas propiedades son inherentes a todos los cuerpos en rotación.

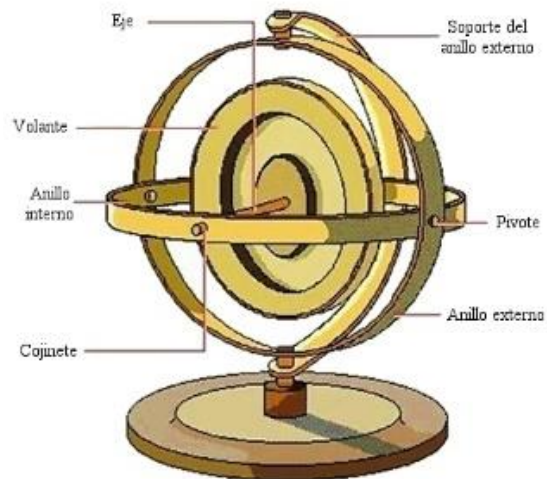


Figura 6.31. Giróscopo.

Para sus aplicaciones prácticas los giróscopos se montan en un soporte que les permite girar con libertad en cualquier dirección (figura 6.31). En ausencia de torques externos, el giróscopo que rota tiende a mantener su posición inalterable en el espacio, proporcionando una dirección de referencia. Se usan con amplitud en la aviación y los vuelos espaciales. Así, el piloto automático detecta las variaciones con respecto al plan de vuelo y envía señales correctoras a los servomotores que controlan las super-

ficies de control del avión: alerones, elevadores y timón de cola.

Un girocompás es un giróscopo que hace funciones de brújula. Gira a alta velocidad controlado por medios electrónicos. Se usa mucho en los barcos, porque posee la ventaja de que apunta directo al norte geográfico, no al magnético como la brújula, por lo que no necesita de correcciones ni ser afectado el por casco metálico del buque, como ocurre con las brújulas.

Precesión

Considere un trompo de juguete que rota en dirección contraria a las agujas del reloj, con su eje de rotación coincidiendo con la vertical, como muestra la figura 6.31a.

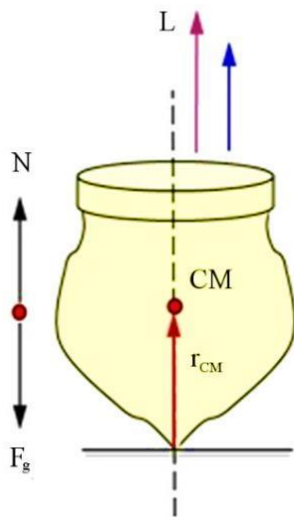


Figura 6.31a. Trompo.

Las únicas fuerzas externas en el sistema (la atracción gravitatoria y la normal) actúan sobre el CM, son colineales con el eje de rotación y no producen torque. Por tanto, se cumplen las condiciones del teorema de conservación del momento angular y \vec{L} permanece constante.

Como $\vec{L} = I\vec{\omega}$ y el momento de inercia no varía, la velocidad angular también se mantiene constante. El hecho de que las relaciones sean vectoriales significa que L y ω no varían *en módulo ni en dirección*. La dirección de L y ω en el espacio no varía.

En la práctica, la pequeña fricción del trompo con el aire y en el punto de apoyo hace que éste vaya perdiendo energía de manera continua y que disminuya su velocidad angular, hasta que llega un momento que el trompo comienza a realizar giros adicionales alrededor de la vertical. Este movimiento se conoce como *precesión*.

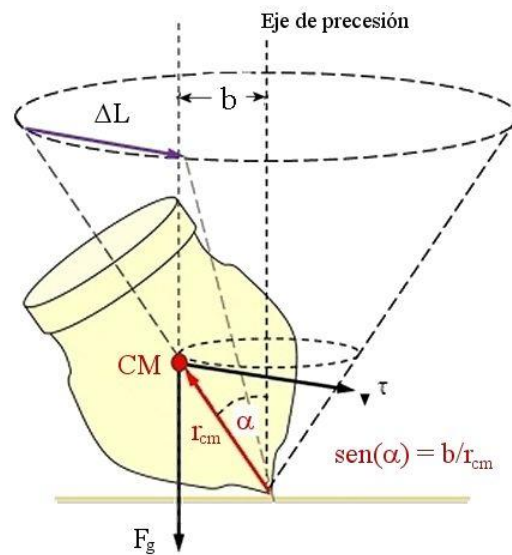


Figura 6.32. Precesión.

La precesión se explica de la siguiente forma. Al inclinarse el trompo, la normal sigue pasando por el eje de rotación y no contribuye el torque total. La única fuerza externa actuando será la gravitatoria, que ejerce un torque

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_g$$

perpendicular al plano formado por los vec-

tores r_{cm} y F_g en cada instante (figura 6.32).

El torque τ es colineal con $\Delta\vec{L}$, lo que ve de inmediato a partir de la relación

$$\vec{\tau}_{R_{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cong \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}.$$

Como Δt es un escalar, los vectores τ y ΔL son colineales. Es posible entonces omitir la notación vectorial en la ecuación anterior, y escribir

$$\Delta L = \tau_{R_{ext}} \Delta t. \quad (1)$$

Llamando α al ángulo que forma el vector de posición del CM con la vertical y expresando el torque como brazo por fuerza, se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau_{R_{ext}} &= bF \\ &= r_{cm} \text{sen} \alpha F_g \\ &= mgr_{cm} \text{sen} \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

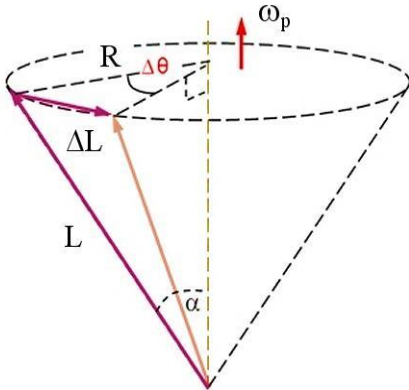


Figura 6.33. Relaciones espaciales entre los vectores momento angular.

Por otra parte, en la figura 6.33 el vector L es colineal con r_{cm} en todo momento y forma el mismo ángulo α con la vertical. Tiene componentes $L_v = L \cos(\alpha)$ (no mostrada en la figura) y $L_h = L \text{sen}(\alpha)$.

Para un Δt pequeño, se ve en la figura que

$$\Delta\theta \cong \frac{\Delta L}{L_h},$$

pues en ese caso ΔL casi coincide con la longitud del arco, y coincide mejor mientras más pequeño sea Δt . Haciendo uso de las ecuaciones (1) y (2), se ve en la misma figura que

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\cong \frac{\Delta L}{L_h} = \frac{\tau_{R_{ext}} \Delta t}{L_h} = \frac{mgr_{cm} \text{sen}(\alpha) \Delta t}{L \text{sen}(\alpha)} \\ \Delta\theta &\cong \frac{mgr_{cm} \Delta t}{L}. \end{aligned}$$

La frecuencia angular de precesión del trompo se define por el límite por la relación

$$\omega_p \cong \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

por lo que según la expresión anterior, haciendo $L = I\omega$:

$$\omega_p = \frac{mgr_{cm}}{I\omega}.$$

Entre otras cosas, esta expresión nos dice que

- ω_p no depende del ángulo de inclinación α con la vertical
- Si ω aumenta, ω_p disminuye

Esto último expresa que cuando un trompo gira a gran velocidad no puede precesar.

La Tierra tiene un movimiento de precesión en su órbita causado por la atracción de la Luna, con un período aproximado $T_p = 2\pi/\omega_p$ de 26 000 años (figura 6.34). A la precesión se suma la nutación, que consiste en variaciones periódicas del ángulo de precesión entre 22.1° y 24.5° .

6.13 Tema avanzado 1. Aceleración de Coriolis y fuerzas de inercia.

Teorema de Coriolis

Considere un sistema de referencia inercial S y otro no inercial S' en rotación, con velocidad angular ω constante respecto al primero (figura 6.8). Para una masa puntual P que se mueve con velocidad v' respecto al sistema en rotación, se cumple la siguiente relación:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}',$$

donde

a = aceleración respecto al sistema inercial.

a' = aceleración respecto al sistema en rotación.

a_n = aceleración normal o centrípeta;

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

a_{cor} = aceleración de Coriolis;

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

La demostración no es inmediata y no será analizada.

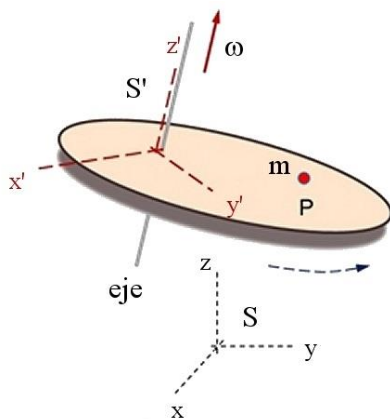


Figura 6.34. Teorema de Coriolis.

Note que v' se refiere a la velocidad respecto al sistema en rotación, mientras que la velocidad v y la velocidad angular ω se refieren al sistema inercial.

Si el sistema en rotación está acelerado, hay que añadir el término

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}.$$

Fuerzas de inercia

Considere ahora un observador situado sobre la Tierra. Si se multiplica la ecuación anterior por la masa de la partícula, se sustituye $F_R = ma$ de acuerdo a la 2da ley de Newton y se despeja el término en a' , se obtiene:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_R - m\vec{a}_n - m\vec{a}_{cor}.$$

Este resultado quiere decir que para aplicar las leyes de Newton, un observador moviéndose junto con el sistema en rotación, debe introducir dos 'fuerzas' no newtonianas adicionales, las denominadas *fuerzas ficticias* o *fuerzas de inercia*; la centrífuga f_{cen} y la de Coriolis, f_{cor} :

$$f_{cen} = -ma_n$$

$$f_{cor} = -ma_{cor}.$$

Ejemplo

Considere un observador sentado en el centro de una plataforma (por ejemplo, un tiovivo) que gira con velocidad angular constante ω (figura 6.35, izq.). Una pequeña esfera de masa m se mueve por un carril radial desde el centro hasta el borde de la plataforma, con velocidad también constante v' .

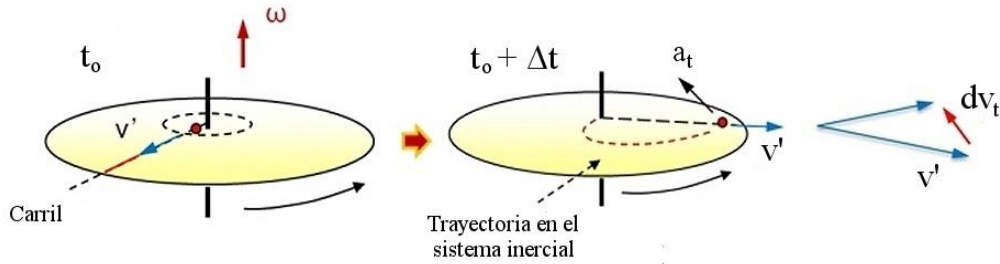


Figura 6.35. Ejemplo de aceleración de Coriolis.

El observador en la plataforma verá alejarse la bola en línea recta por el carril, pero un observador en tierra verá que la bola sigue una trayectoria curva. Tanto v' como ω son constantes, pero como la dirección de v' cambia de manera continua, aparece una aceleración tangencial (muy real para el observador en el sistema fijo en tierra)

$$a_T = \frac{dv_T}{dt}.$$

Esta aceleración es la aceleración de Coriolis, y tiene su origen en la fuerza ejercida por el carril sobre la bola,

$$a_T = 2\omega v.$$

La correspondiente fuerza ficticia $F_{\text{cor}} = ma_c$ es la fuerza de Coriolis.

Si la esfera no estuviera en un carril y fuera capaz de deslizarse sin fricción en la superficie de la plataforma, el observador en tierra vería la bola viajar en línea recta, y el plano rotando por debajo de ella sin interaccionar. Pero un observador girando sobre la plataforma, vería la bola retrasarse en su movimiento (figura 6.10) y una aceleración ficticia $\vec{a}_{\text{cor}} = -\vec{a}_T$ en sentido contrario al de rotación.

Es importante especificar que, a pesar de haber mostrado un ejemplo donde la direc-

ción del movimiento es radial, el resultado anterior es general. La aceleración de Coriolis aparece siempre que existe una velocidad diferente de cero en cualquier dirección. A causa de la rotación de nuestro planeta, esa aceleración es tal que, en el hemisferio norte, tiende a desviar los objetos en movimiento hacia la derecha, y hacia la izquierda en el hemisferio sur. Su valor es muy pequeño, y sólo se detecta en fenómenos donde intervienen grandes distancias.

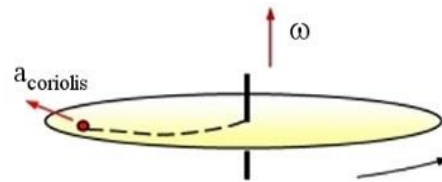


Figura 6.36. Observador en la plataforma sin carril.

En los ríos la acción de las corrientes y el correspondiente desgaste es siempre más pronunciado en una de las riberas a causa de la aceleración de Coriolis. Algo similar sucede en las líneas de ferrocarril, donde uno de los raíles siempre se desgasta más que el otro.

La trayectoria de un cohete de prospección geológica, lanzado desde el polo norte hacia el ecuador a gran altura, se afectaría de manera notable.

Cuando el viento sopla de una región de alta presión a otra de baja presión gira a la derecha, lo que causa su circulación alrededor del centro de baja presión (figura 6.11, izquierda). Además, la diferencia de presión actuando hacia el centro es justo la suficiente para compensar la fuerza de Coriolis que haría que los vientos siguieran desviándose a la derecha y se alejaran del centro de baja presión.

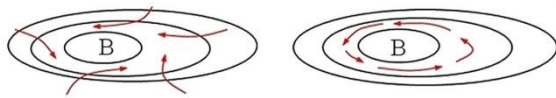


Figura 6.37. Circulación de los vientos alrededor de las regiones de baja presión en el hemisferio norte. En el sur es al contrario. Las curvas sólidas son las isobaras, regiones de igual presión atmosférica. Abajo: Circulación de los vientos en el huracán Fran de la temporada de 1996. Como es un centro de baja presión en el hemisferio norte, la circulación es contraria a las agujas del reloj.

El resultado final es un equilibrio entre la diferencia de presión y la fuerza de Coriolis, por lo que los vientos son ‘atrapados’ por el centro de baja presión y se mantienen circulando a su alrededor (figura 6.37, derecha). En los centros de alta presión el sentido de circulación de los vientos es a

favor de las manecillas del reloj, y lo contrario en el hemisferio sur.

La deflexión de Coriolis depende tanto del movimiento del objeto como de la latitud. Es un efecto a tomar en cuenta en todas las ciencias de la Tierra, en especial en la meteorología y oceanografía, ya que afecta de manera notable la dirección de los vientos, la rotación de las tormentas y las corrientes oceánicas. Esta fuerza es fundamental para analizar el movimiento de las grandes masas de aire. Es la principal responsable de que los tornados y ciclones en el hemisferio norte roten en contra de las manecillas del reloj (y a favor de las manecillas en el sur).

Para el observador en tierra a menudo resulta más fácil describir los movimientos de los cuerpos introduciendo de estas fuerzas ficticias que hacerlo refiriéndose a un sistema inercial colocado en el exterior del planeta.

6.14 Tema avanzado 2. Los períodos glaciales y la rotación de la Tierra.

Los *periodos glaciales* son grandes etapas en las que tuvo lugar un enfriamiento extenso y significativo de la atmósfera y del océano terrestre, comenzando millones de años atrás.

El último período glacial comenzó hace 80 000 años y terminó hace unos 10 000 años, cuando el hielo se retiró de América y Europa, pero algunos especialistas consideran que el período glacial cuaternario no ha concluido todavía. Aunque la causa de estos períodos sigue siendo tema de controversias, una explicación basada en observaciones astronómicas ha ganado cierta credibili-

dad en los últimos años.

La Tierra y el sistema solar están situados de forma asimétrica en uno de los brazos de la Vía Láctea. La galaxia rota cada 300 millones de años y lleva al sistema solar a través de regiones más o menos densas de polvo interestelar, con campos gravitatorios y magnéticos variables. Cada 150 millones de años se produce un cambio muy ligero en el entorno galáctico, con posibilidad de causar variaciones importantes en el clima del planeta.

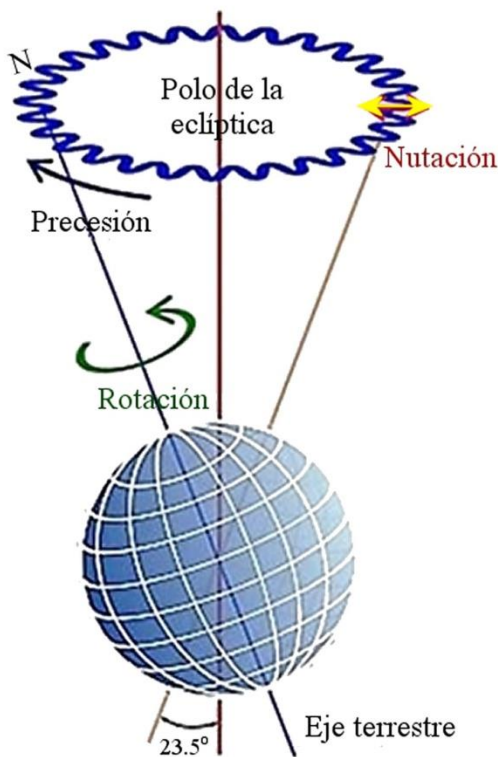


Figura 6.38. Precesión y nutación de la Tierra.

Además, hay al menos otros 4 procesos que afectan el clima del planeta dentro de cada periodo glacial e interglacial en mayor o menor grado. En orden aproximado de importancia son los siguientes:

1. *Oscilación del plano de la eclíptica* (figu-

ra 6.38), con un período de unos 100 000 años, causado por las perturbaciones del planeta Júpiter en la órbita terrestre. Se le atribuye un efecto predominante en las edades de hielo.

2. *El ciclo de excentricidad*, de 93 408 años de duración, es causado por la variación de la órbita de su trayectoria casi circular a otra más elíptica, a causa de la interacción con los planetas restantes. Esta variación afecta a la velocidad de rotación del sistema Tierra-Luna, que aumenta cuando ambas están más cerca del Sol. Cuanto más lento sea este giro, más fuerte será el campo magnético terrestre, que a su vez tiende a proteger la Tierra de las partículas de alta energía del Sol y, por tanto, el clima se enfría.

3. *La precesión* de 25 920 años. En la actualidad, el eje terrestre apunta hacia la Estrella Polar, y el hemisferio norte está más próximo al Sol en invierno. Esto origina veranos e inviernos relativamente suaves. Sin embargo, hace unos 11 000 años el eje estaba dirigido de tal manera que en el hemisferio norte los inviernos eran más fríos y los veranos más calientes.

4. *La variación en la inclinación del plano ecuatorial de la Tierra con respecto a su plano orbital*, con un periodo medio de 41 000 años (oblicuidad de la eclíptica, figura 6.39)). Se le atribuye casi el 25% de las diferencias entre las temperaturas interglaciales a esta variación.

Se han propuesto modelos que sugieren la confluencia apropiada de estos 4 ciclos como la causa de los periodos glaciales, aunque esas hipótesis no han sido demostradas de forma satisfactoria.



Figura 6.39. Inclinación variable del plano ecuatorial con el de la eclíptica con un período de 41 000 años.

6.15 Problemas resueltos

6.1. Las ruedas A y C están acopladas mediante una banda o cinta B. Si la rueda A parte del reposo con aceleración angular de $\pi/2 \text{ rad/s}^2$, determinar cuánto tarda la rueda C en alcanzar 100 rev/min. ($r_A = 10 \text{ cm}$, $r_B = 25 \text{ cm}$).

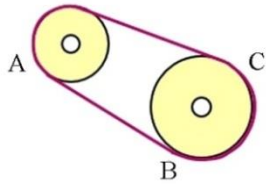
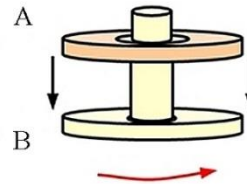


Figura problema 1

6.2. Calcular la velocidad del CM de una esfera de masa M y radio R al llegar a la base de un plano inclinado de altura H , si rueda sin deslizar desde la parte superior del plano a partir del reposo. (Para una esfera, $I = 2/5 MR^2$ respecto a un eje que pasa por su centro).

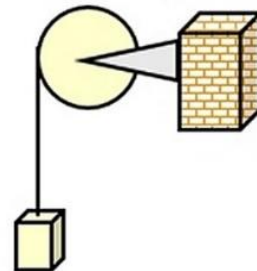
6.3. Un aro de 0.3 m de radio y 15 kg de masa rueda sobre un piso horizontal desplazándose 0.15 m cada segundo. ¿Qué trabajo hay que realizar para detenerlo? (Para un aro, $I = MR^2$ respecto a un eje que pasa por su centro).

6.4. Una rueda (A) gira libre unida a un eje central, a 800 rev/min. Otra rueda (B), en reposo al inicio, se acopla al mismo eje de forma repentina. Si la inercia rotacional de la 2da rueda tiene doble valor que la de la primera: a) ¿Cuál es la nueva frecuencia de rotación? b) ¿Cómo varía la energía del sistema? No tome en cuenta la masa del eje central.

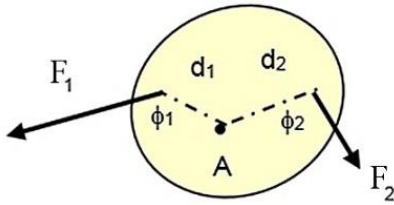


Problema 4

6.5. En la figura del problema, el bloque de masa m cuelga de una polea de masa M y radio R . No hay fricción. Calcular la aceleración del bloque y la tensión en la cuerda. (Para la polea, $I = 1/2 MR^2$ respecto al eje que pasa por su centro).



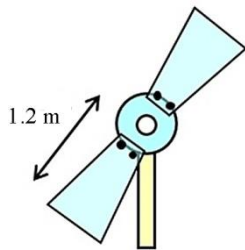
Problema 5



Problema 6

6.6. En la figura, el cuerpo rota a partir del reposo alrededor de un eje fijo perpendicular al plano del papel y que pasa por A. Si al iniciarse el movimiento $F_1 = 15 \text{ N}$, $F_2 = 6 \text{ N}$, $d_1 = 2 \text{ cm}$, $d_2 = 3 \text{ cm}$, $\phi_1 = 150^\circ$, $\phi_2 = 90^\circ$ y la aceleración angular es de 0.2 rad/s^2 ; a) ¿Hacia dónde está rotando el cuerpo, a la derecha o a la izquierda? b) ¿Cuál es el valor de su momento de inercia?

6.7. Los puntos extremos de las paletas de un molino de viento giran con velocidad tangencial de 6 m/s . Si cada paleta tiene una longitud de 1.2 m y una masa de 2 kg . Determine: a) la frecuencia de rotación, b) la fuerza radial que ejerce cada paleta sobre los tornillos de sujeción, colocados a 20 cm del eje.

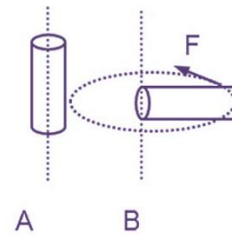


Problema 7

Problemas propuestos

1. Considere los dos cilindros idénticos de la figura, de 10 cm de altura y 4 cm de diámetro, rotando alrededor de los ejes dibujados.

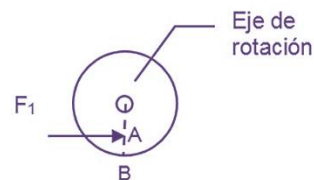
dos. a) ¿Su momento de inercia será el mismo en ambos casos? Si no, cuál es mayor? Justifique su respuesta sobre la base de expresiones conocidas. b) Si una fuerza resultante F de 15 N actuando en el extremo del cilindro B y perpendicular al mismo en su plano de rotación origina una aceleración de 2 rad/s^2 , ¿cuál será el valor del momento de inercia?



Problema propuesto 1

2. Sobre una rueda de 0.5 m de longitud que puede rotar sin fricción alrededor de un eje perpendicular al papel se aplica una fuerza $F_1 = 20 \text{ N}$ a una distancia de 0.4 m del eje en A (ver figura). Esa fuerza da origen a una aceleración angular instantánea de 0.8 s^{-2} .

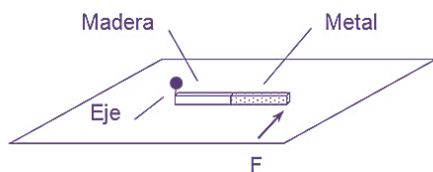
a) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda? b) Si el punto de aplicación de F_1 se traslada al punto B en el borde de la rueda, ¿qué le sucede a la aceleración angular? (¿aumenta, disminuye o se queda igual?) Justifique su respuesta sobre la base de leyes conocidas de la física. c) ¿Se cumplirá el teorema de conservación del momento angular en los incisos anteriores? ¿Por qué?



Problema propuesto 2

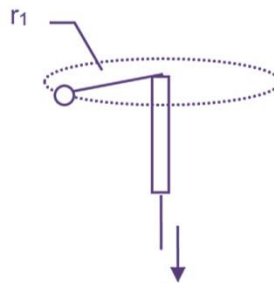
3. En la figura se muestra una barra compuesta de madera ($\rho = 3.8 \text{ g/cm}^3$) y metal ($\rho = 7.2 \text{ g/cm}^3$) de 0.5 m de longitud que puede rotar alrededor de un eje fijo en un plano sin fricción. Cuando $F = 20\text{N}$ y está aplicada perpendicular a la barra se encuentra que la aceleración es de 0.8 rad/s^2 .

a) ¿Cuál es el momento de inercia de la barra respecto al eje considerado? b) Si se aplica la misma fuerza F pero se invierte la colocación de la barra, de manera que la parte de metal queda unida al eje de rotación, ¿qué sucede con la aceleración? ¿se hace mayor, menor o se queda igual que en caso anterior? Justifique su respuesta a partir de leyes conocidas de la física.



Problema propuesto 3

4. Una esfera de masa $m = 0,1 \text{ kg}$ está sujeta a un hilo que pasa por un tubo hueco según la figura, girando con velocidad angular de 2 rad/s , a una distancia del tubo $r_1 = 0,6 \text{ m}$. Se tira entonces de la cuerda hasta que el radio se reduce a la mitad. a) ¿Cuál es la nueva velocidad angular? b) ¿Hay variación de energía en este proceso?



Problema propuesto 4

Calcúlela en caso afirmativo o justifique por qué no en caso negativo. c) ¿La tensión variable de la cuerda hace trabajo durante el proceso de reducción de r ? Si la respuesta es NO, explique por qué; si la respuesta es SÍ, ¿cuánto vale ese trabajo?

Soluciones

Problema 6.1

Ante todo, es necesario hallar la relación de giro de ambas ruedas a partir de consideraciones geométricas:

Cuando $\theta_A = 2\pi$, la banda B avanza $2\pi r_A$, y el ángulo barrido por C será

$$\theta_C = S_C/r_C = 2\pi r_A/r_C$$

Por tanto:

$$\theta_C/\theta_A = 2\pi r_A/2\pi r_C$$

$$\theta_C/\theta_A = r_A/r_C = 10/25 = 0.4$$

$$\theta_C = 0.4 \theta_A$$

Cuando el ángulo varíe con el tiempo, la relación anterior se mantiene. Por tanto, derivando respecto al tiempo a ambos lados de la ecuación:

$$\omega_C = 0.4 \omega_A$$

$$\alpha_C = 0.4 \alpha_A$$

$$\alpha_C = 0.4 \times \pi/2 = 0.2\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \omega/\alpha = 2\pi f/a$$

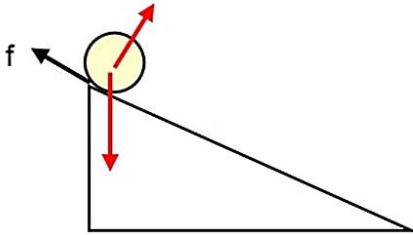
$$= 2\pi \times (100/60)/0.2\pi$$

$$= 16.7 \text{ s}$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Esta velocidad es algo menor que la alcanzaría la esfera si se deslizara sin rotar. Parte de la energía potencial gravitatoria se emplea en hacer rotar la esfera.

Problema 6.2



Solución 2

La fricción no hace trabajo, porque no hay deslizamiento de las superficies. Hay un eje instantáneo de rotación en el contacto de la esfera con el plano, que cambia de posición de manera continua ($v_{CM} = \omega R$, donde ω es la velocidad de rotación, que no es constante). Un observador parado en el centro de la esfera ve rotar a ésta con la misma velocidad angular ω , pero en sentido contrario.

La única fuerza que trabaja es F_g . Por tanto, el sistema es conservativo. Tomando el cero de la energía potencial gravitatoria en la base del plano:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{p1} = E_{c2}$$

$$mgH = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$gH = \frac{v_{CM}^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2\right) \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

$$gH = v_{CM}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

Problema 6.3

Para un sistema de partículas

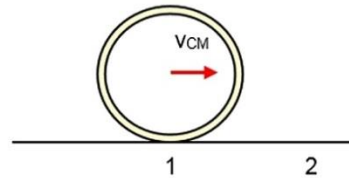
$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_c$$

En este caso $W_{int} = 0$ y $W_{ext} = W_c + W_{nc}$.

Como $W_c = -\Delta E_p$, se obtiene:

$$W_{nc} = \Delta E.$$

Es decir, se cumple una relación análoga a la expresión del trabajo no conservativo para una masa puntual.



Solución 3

Cuando se detiene $v_{CM} = 0$, por tanto:

$$W_{nc} = -E_1.$$

$$W_{nc} = -\frac{1}{2} m v_{CM}^2 - \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Aplicando un razonamiento similar al expuesto en el problema (2), $\omega = v_{CM}/R$

$$W_{nc} = -\frac{1}{2} m v_{CM}^2 - \frac{1}{2} (MR^2) (v_{CM}/R)^2$$

$$W_{nc} = -M v_{CM}^2$$

$$= -15 \times (0.15)^2$$

$$= -0.3375 \text{ J.}$$

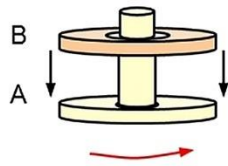
Note que el resultado no depende del radio del aro. Este trabajo es el doble del que

haría falta si el aro deslizara sin rotar, a causa de la energía cinética de rotación acumulada.

Problema 6.4

a) La única fuerza externa que actúa es F_g , y no tiene componentes en el plano de rotación. Por tanto, $\sum \tau_{ext} = 0$ y $L = \text{constante}$.

a) Analizando la definición de momento de inercia, se llega fácil a la conclusión de que al unirse las dos ruedas, $I_R = I_A + I_B$.



Solución 4

Luego:

$$L_o = L$$

$$I_A \omega_o = (I_A + I_B) \omega = 3 I_A \omega$$

$$\omega_o = 3 \omega$$

$$\omega = \frac{1}{3} \omega_o.$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi f$:

$$f = \frac{1}{3} f_o = \frac{1}{3} \times 800 = 267 \text{ rev/min}$$

b) $E_o = \frac{1}{2} I_A \omega_o^2$

$$E = \frac{1}{2} (3 I_A) \left(\frac{1}{3} \omega_o\right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} I_A \omega_o^2\right) = \frac{1}{3} E_o$$

Se pierden 2/3 de la E_c inicial.

¿Adónde va esa energía? Analice los posibles mecanismos de pérdida. En particular, ¿es posible un movimiento donde la velocidad pasa instantáneamente de cero a un valor determinado?

Problema 6.5

Bloque (ver esquema)

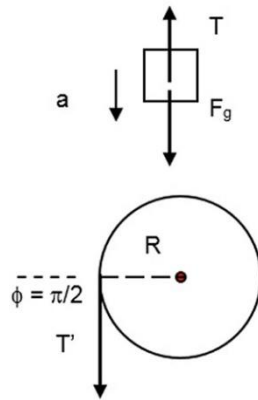
$$\sum F_y = m a_y$$

$$T - mg = - m a \tag{1}$$

Polea

Como la polea no se traslada, no es necesario analizar el diagrama de fuerzas de la traslación.

El diagrama de fuerzas para la rotación queda como:



Solución 5. DCL para el bloque y la polea.

$$\sum \tau_{ext} = I \alpha$$

$$T' R \text{sen} \phi = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

$$T' = \frac{1}{2} M R \alpha. \tag{2}$$

Si la cuerda es inextensible y sin masa, entonces $T = T'$. Se llega así a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas (a, α, T):

$$mg - T = m a \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2} M R \alpha. \tag{2}$$

La 3ra ecuación se obtiene a partir de la relación entre las variables lineales y angulares del movimiento, ya que $a = a_t = \alpha R$:

$$A = \alpha R. \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$T = \frac{1}{2} Ma \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1)

$$mg - \frac{1}{2} Ma = ma$$

$$a = \frac{2m}{2m+M} g.$$

La tensión se obtiene sustituyendo este valor en (4):

$$T = \frac{Mmg}{2m+M}.$$

$$= 0.03 \times 6 \times \text{sen}90 = 0.18 \text{ Nm (der)}$$

El cuerpo rota hacia la derecha.

b) Considerando (+) a la derecha:

$$\tau_R = I\alpha$$

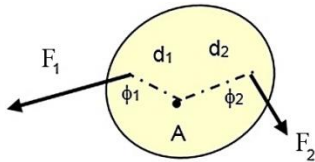
$$- \tau_1 + \tau_2 = I\alpha$$

$$I = (\tau_2 - \tau_1)/\alpha$$

$$= (0.18 - 0.15)/0.2$$

$$= 0.15 \text{ kgm}^2$$

Problema 6.6



Solución 6

a)

$$\tau_1 = r_1 F_1 \text{sen}(180 - \phi_1)$$

$$= 0.02 \times 15 \times \text{sen}30 = 0.15 \text{ Nm (izq.)}$$

$$\tau_2 = r_2 F_2 \text{sen}(180 - \phi_2)$$

Problema 6.7

a)

$$v_t = 2\pi fR$$

$$f = v_t/2\pi R$$

$$= 6/(2 \times 3.14 \times 1.2)$$

$$\approx 0.8 \text{ rev/s}$$

b)

$$F_{\text{radial}} = F_c$$

$$= mv^2/R = m\omega^2 R = m4\pi^2 f^2 R$$

$$= 2 \times 4 \times 9.86 \times 0.64 \times 0.2 = 10.1 \text{ N}$$

CAPÍTULO 7

Mecánica de los fluidos

7.1 Conceptos Básicos

Densidad de un fluido

Presión. Unidades

Principio de Pascal

Prensa hidráulica

7.2 Ecuación fundamental de la hidrostática

7.3 Principio de Arquímedes

7.4 Presión atmosférica

Barómetro

Unidades

Manómetro

7.5 Fluidos en movimiento

Conceptos básicos

Línea de corriente y tubo de flujo

7.6 Ecuación de continuidad

7.8 Ecuación de Bernoulli

7.9 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

Relación entre la presión y la velocidad de un fluido

Teorema de Torricelli

Medidor de Venturi

7.10 Viscosidad

Conceptos básicos.

Unidades.

Ley de Poiseuille

Flujo laminar y turbulento

Número de Reynolds

7.11 Problemas resueltos

CAPÍTULO 7

Mecánica de los fluidos

7.1 Conceptos básicos

Densidad

Un fluido es cualquier sustancia capaz de fluir, de chorrear, derramarse, y de adaptarse a la forma del recipiente que la contiene. La definición comprende líquidos y gases; los sólidos no fluyen, pero existen algunos semi-sólidos como las resinas que pueden fluir, aunque muy lento. En lo que sigue este tipo de sólidos no se consideran.

Si m es la masa de un cuerpo o de una porción cualquiera de sustancia y V es el volumen que ocupa, la densidad absoluta ρ del cuerpo se define por la relación

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

En lo que sigue se consideran los fluidos como *homogéneos*. Significa que su densidad (y también su composición) tiene el mismo valor en todos los puntos.

Tabla 7.1 Densidad de algunas sustancias	
Sustancia	ρ (g/cm ³)
etanol	0.81
agua destilada	1.00
agua de mar	1.03
mercurio (Hg)	13.6
hielo	0.92
hierro	7.6
oro	19.3
corcho	0.24

Los líquidos y los gases se diferencian en que los gases son muy *compresibles*, y su

densidad varía mucho con la temperatura y la presión; es decir, $\rho = \rho(T, p)$. Los líquidos, por su parte, dependen muy poco de T y de p , y son prácticamente *incompresibles*. Por tanto, en lo que sigue supondremos que para los líquidos la densidad se mantiene constante, siempre que no se especifique lo contrario.

En la tabla 7.1 aparecen algunos valores típicos de la densidad en sólidos y líquidos. La flotabilidad de un cuerpo está asociada a su densidad. El hierro flota en el mercurio; no así el oro, etc.

Presión

Considere una superficie S cualquiera, de área A , sobre la cual actúan componentes F_i en dirección perpendicular. La presión media o promedio actuando sobre la superficie S se define por la expresión:

$$p_m = \frac{\sum F_i}{A}.$$

La presión en un punto se define tomando el límite para una porción ΔA que tiende a cero (figura 7.1):

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{F_i}{\Delta A}.$$

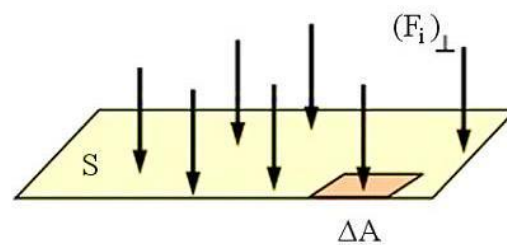


Figura 7.1. Definición de presión

Unidades

$$[p] = [F]/[S] = \text{N/m}^2 = \text{Pascal (Pa)}$$

Principio de Pascal

El principio de Pascal es producto de la evidencia experimental. Fue enunciado en el siglo XVII por Blaise Pascal (figura 7.2) y dice lo siguiente:

La presión aplicada a cualquier región de un fluido se transmite de forma íntegra a todos los puntos del mismo y a las paredes del recipiente que lo contiene.

Blaise Pascal (1623-1662), filósofo, matemático y físico francés. En 1642 inventó una de las primeras máquinas mecánicas de calcular. En 1648 demostró mediante el experimento que el nivel de la columna de mercurio de un barómetro lo determina el aumento o disminución de la presión atmosférica circundante.



Figura 7.2. Blaise Pascal

Junto con el matemático francés Pierre de Fermat, formuló la teoría matemática de la probabilidad, que ha llegado a ser de gran importancia en estadísticas financieras, matemáticas y sociales, así como un elemento fundamental en

los cálculos de la física teórica moderna. También fue el creador del primer sistema público de transporte, mediante coches tirados por caballos, recorriendo vías pre-establecidas y paradas fijas.

Ejemplo.

A modo de ejemplo considere el émbolo de una jeringuilla de inyecciones a la que se la tapa la salida del líquido (figura 7.3).

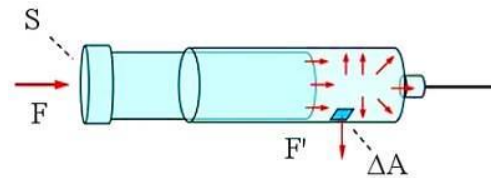


Figura 7.3. Ver texto.

Si F es la fuerza aplicada sobre el pistón de sección transversal S , entonces

$$p = F/S.$$

Esa presión se transmite a todos los puntos donde el fluido está en contacto. Para cada segmento de área ΔA habrá una componente perpendicular actuando, de valor $F' = p\Delta A$.

Prensa hidráulica

Se basa en el principio de Pascal. Un esquema de su funcionamiento aparece en la figura 7.4. Si p es la presión sobre el líquido, supuesto incompresible, como la presión es la misma en todos los puntos; $p_1 = p_2$.

Por tanto $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$, y agrupando términos:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Si $A_1 \gg A_2$ como se ve en la figura, entonces $F_1 \gg F_2$. El sistema de frenado de los automóviles funciona sobre principios similares (figura 7.4.a)

Note que el principio de conservación de la energía no se infringe. El trabajo realizado es el mismo en ambos casos: $F_1 \Delta x_1 =$

$F_2 \Delta x_2$, donde Δx es lo que avanza cada pistón.

En las prensas los sistemas de presión tienen válvulas que permiten ir añadiendo líquido al sistema e impiden su retorno al pistón de menor área.

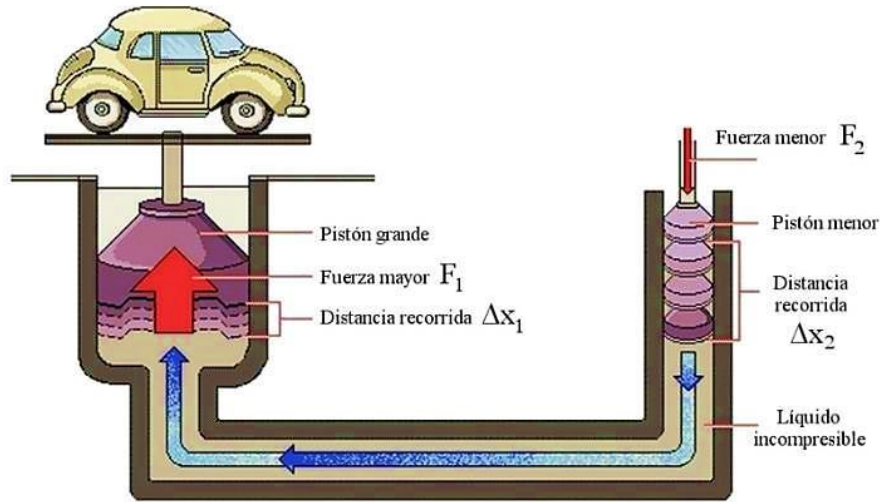


Figura 7.4. Elevador hidráulico. El trabajo realizado en cada caso es el mismo; $F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2$.

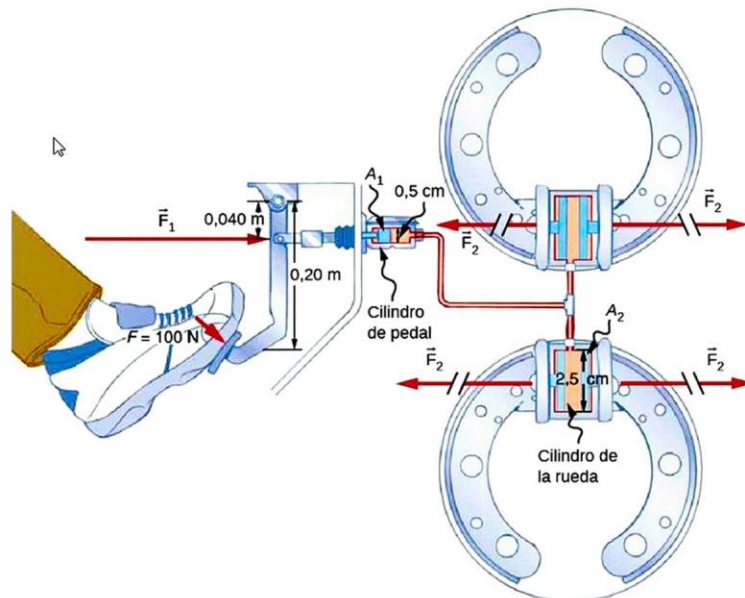


Figura 7.4a. El sistema de freno hidráulico de los automóviles funciona sobre la base del principio de Pascal. La fuerza F_1 aplicada al pistón del freno de área A_1 se transmite a todos los puntos del líquido incompresible y ejerce una fuerza $F_2 > F_1$ sobre cada uno de los cilindros en las ruedas, ya que $A_2 > A_1$, y como la presión es la misma en todos los puntos, $F_2/F_1 = A_2/A_1$.

7.2 Ecuación fundamental de la hidrostática

Al igual que en los sólidos, sobre los gases y los líquidos también actúa la atracción gravitatoria, y por tanto también tienen peso. Cuando un líquido se encuentra en equilibrio en un recipiente, cada capa de líquido debe soportar el peso de todas las que están por encima. Esa fuerza aumenta a medida que se gana en profundidad y aumenta el número de capas por encima del punto considerado. Es por eso que en la superficie la fuerza ejercida (y la presión) es nula, mientras que en el fondo del recipiente la presión es máxima (figura 7.5).

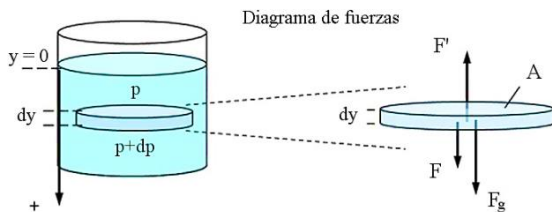


Figura 7.5. Fuerzas actuando sobre una capa de líquido de espesor dy en un recipiente: atracción gravitatoria F_g , peso de las capas superiores F y reacción del apoyo de las capas inferiores F' . En el equilibrio, $F' - F - F_g = ma_y = 0$.

Para calcular la forma en que varía la presión desde la superficie del líquido hasta el fondo del recipiente, considere una porción de líquido en forma de disco a cierta profundidad por debajo de la superficie, de espesor infinitesimal en la figura 7.5. Las fuerzas que actúan sobre esa porción de líquido a lo largo del eje y son las siguientes:

- a) atracción gravitatoria;

$$F_g = mg = \rho Vg = \rho Agdy,$$

- b) peso de las capas líquidas superiores;

$$F = pA, \text{ y}$$

c) fuerza equilibrante ejercida por las capas inferiores de líquido (de lo contrario la capa se hundiría);

$$F' = (p + dp)A.$$

Cuando la capa esté en equilibrio, se debe cumplir la relación

$$F' - F - F_g = ma_y = 0$$

$$(p + dp)A - pA - \rho Agdy = 0.$$

Simplificando y ordenando esta expresión se llega a la siguiente expresión:

$$dp = \rho g dy.$$

Para hallar la diferencia de presión entre dos puntos ubicados a diferentes profundidades y_1, y_2 debemos integrar a ambos lados de la expresión anterior:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

$$\Delta p = \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy. \quad (1)$$

Esta expresión es válida para líquidos y gases. En los gases hay que tomar en cuenta la dependencia de la densidad ρ con la altura; $\rho = \rho(y)$. Como los líquidos son casi incompresibles, la densidad ρ se puede considerar constante y extraerla fuera de la integral.

Líquidos

Considerando $\rho = \text{constante}$ en (1):

$$\Delta p = \rho g \int_{y_1}^{y_2} dy = \rho g(y_2 - y_1).$$

Tomando $y_2 - y_1 = h$ (profundidad a partir del punto 1) y $\Delta p = p_2 - p_1$, sustituyendo y

arreglando términos en esta expresión, se llega a:

$$p_2 = p_1 + \rho gh. \quad (2)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación*

fundamental de la hidrostática. En particular, si el punto 1 se toma en la superficie del líquido, p_1 representa la presión en la superficie, y h la profundidad a partir de la superficie.

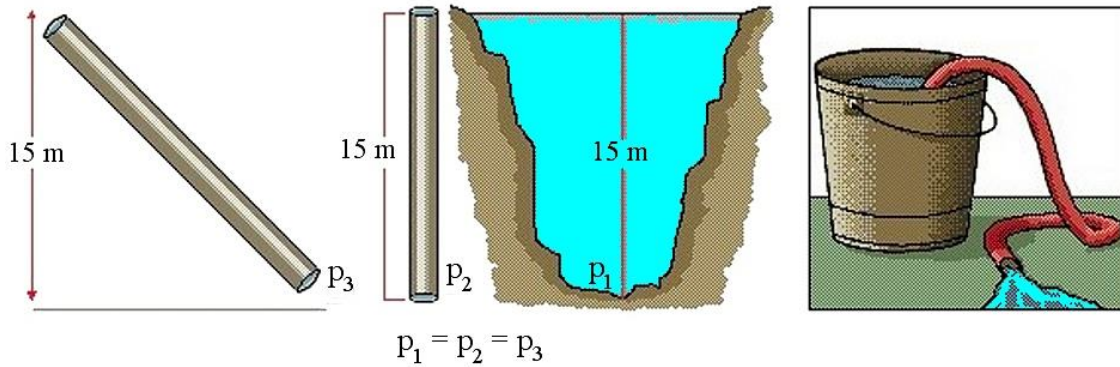


Figura 7.6. La presión estática depende solo de la profundidad.

Ejemplos de aplicación

Las leyes de la mecánica de fluidos pueden observarse en muchas situaciones cotidianas. Por ejemplo, en la figura 7.6 la presión ejercida por el agua en el fondo de un estanque es igual que la ejercida por el agua en el fondo de un tubo estrecho, siempre que la profundidad sea la misma. Si se inclina un tubo más largo lleno de agua de forma que su altura máxima sea de 15 m, la presión en el fondo será la misma que en los otros casos. En el sifón a la derecha, la fuerza hidrostática hace que el agua fluya hacia arriba por encima del borde, hasta que se vacíe el cubo o se interrumpa la succión en la manguera.

profundidad, por lo que las componentes verticales de las fuerzas ejercidas sobre la parte inferior del volumen considerado serán superiores a las ejercidas sobre la parte superior.

7.3 Principio de Arquímedes

Considere una porción cualquiera de líquido en el seno de un fluido, con un volumen V_s (volumen sumergido) como se ve en la figura 7.7.

La ecuación fundamental de la hidrostática (2) nos dice que la presión aumenta con la

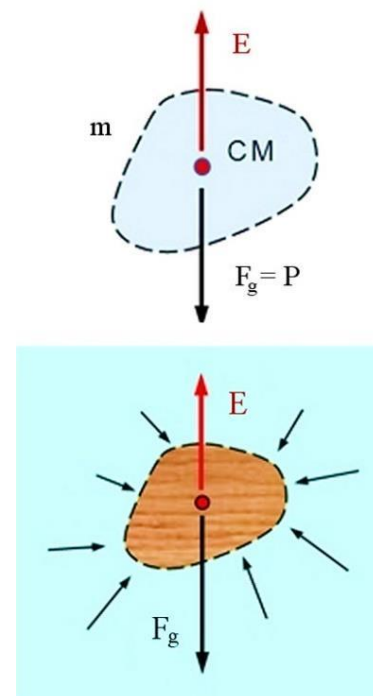


Figura 7.7. Principio de Arquímedes.

La diferencia de presiones origina una fuerza neta E actuando hacia la superficie que se conoce como “*empuje de Arquímedes*”. En la figura, la porción de líquido analizada se comporta como si todas las fuerzas externas estuvieran actuando sobre su CM. En el equilibrio las componentes horizontales se compensan, mientras que en la vertical, $E = F_g$.

Si el sistema no está acelerado, F_g es también igual al peso del volumen de líquido considerado. Por tanto, el empuje de Arquímedes será igual al peso del volumen de líquido considerado. Como $F_g = mg = \rho_L V_s g$, es posible expresar el empuje como

$$E = \rho_L V_s g. \quad (3)$$

Suponga ahora que el volumen de líquido V_s se sustituye por otro idéntico de algún material sólido de diferente densidad ρ_s , por ej., por madera. F_g no será la misma, ya que la densidad de la madera diferirá, en general, de la del líquido, $\rho_{\text{sólido}} \neq \rho_{\text{líquido}}$, y

$$F_g' = m'g = \rho_s V_s g \neq \rho_L V_s g.$$

Sin embargo, el empuje calculado en la ecuación (3) no variará, puesto que depende de las fuerzas ejercidas por el resto del líquido y no de la porción de líquido sustituida por el sólido.

Note que si el sólido se sumergiera en el líquido, desplazaría de su lugar un volumen de líquido igual al suyo, y el resultado del análisis sobre el empuje sería igual al que acabamos de realizar. Es posible resumir estos resultados de la forma siguiente:

Todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido recibe un empuje ascendente igual al peso del fluido desalojado

El enunciado anterior se conoce como “principio de Arquímedes” y es conocido desde la antigüedad.

Arquímedes (287-212 a.C.), matemático e inventor griego. Escribió importantes obras sobre geometría plana y del espacio, aritmética y mecánica (figura 7.8).

Nació en Siracusa, Sicilia, y se educó en Alejandría, Egipto. En el campo de las matemáticas se anticipó a muchos de los descubrimientos de la ciencia moderna, como el cálculo integral, con sus estudios de áreas y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas. En mecánica, Arquímedes definió la ley de la palanca y se le reconoce como el inventor de la polea compuesta y del *tornillo sin fin* para elevar el agua de nivel. Se dice que descubrió el principio que lleva su nombre mientras se bañaba en una tina, al notar cómo tendía a flotar y el agua se desbordaba cuando se sumergía.

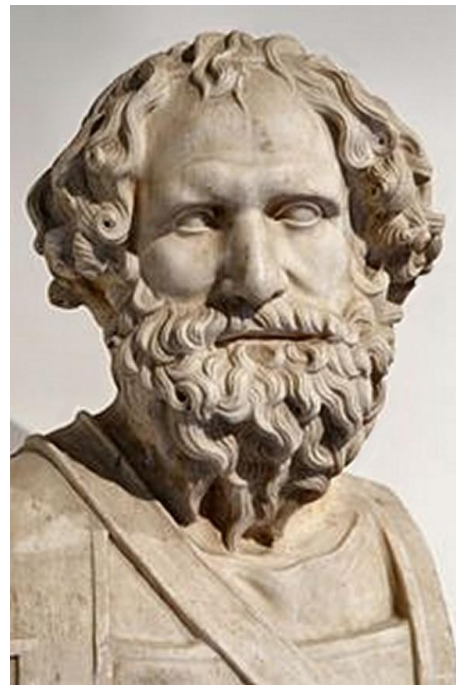


Figura 7.8. Arquímedes.

7.4 Presión atmosférica

La atmósfera también se puede considerar formada por capas sucesivas de aire que descansan unas sobre otras. Por tanto, el análisis de la sección 2 también es válido en este caso, y la ecuación (1), que expresa la diferencia de presiones a diferentes alturas es válida:

$$\Delta p = \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy .$$

Pero ahora no es posible considerar la densidad del aire constante, pues varía en forma apreciable con la altura. Para grandes alturas también habría que tomar en cuenta la variación de g . Las determinaciones experimentales de la presión muestran que la presión atmosférica varía con la altura según la siguiente expresión:

$$p_{\text{atm}} = p_0 e^{\alpha y} .$$

Esta es la *ecuación barométrica*, donde y representa la altura sobre el nivel del mar; p_0 es la presión a la altura y_0 . La constante α es igual a 0.116 km^{-1} .

Barómetro

La presión atmosférica se mide utilizando el *barómetro de mercurio*, inventado por Torricelli en 1643.

Si un tubo de vidrio se llena de mercurio por completo, se invierte sin dejar que penetre aire y se sumerge en una cubeta que contiene el mismo líquido, se encuentra que la altura de la columna se estabiliza alrededor de los 760 mm (figura 7.9). La presión residual dentro del tubo (p_{res}) está originada en lo esencial por vapores de mercurio y tiene un valor muy pequeño. Al estabilizarse la columna de mercurio, la fuerza ejerci-

da por la presión atmosférica sobre la superficie del mercurio en la cubeta se equilibra con la fuerza ejercida por la columna en el fondo del recipiente.

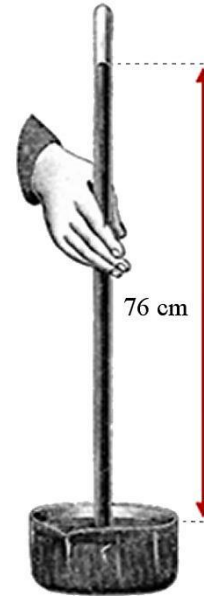


Figura 7.9. Barómetro

En la figura 7.10, las fuerzas ejercidas por encima y por debajo de la sección transversal del tubo, de área A , deben ser iguales en el equilibrio. Si ρ_{Hg} es la densidad del mercurio, aplicando la condición de equilibrio y la ecuación fundamental de la hidrostática,

$$F_1 = F_2$$

$$p_1 A = p_2 A$$

$$p_{\text{res}} + \rho_{\text{Hg}} g (h + L) = p_a + \rho_{\text{Hg}} g L .$$

Simplificando términos, considerando $p_{\text{res}} = 0$ e invirtiendo la ecuación, se llega a

$$p_a = \rho_{\text{Hg}} g h .$$

De aquí que el valor de la presión atmosférica en pascal puede obtenerse midiendo la altura h de la columna a partir de la superficie del mercurio en el recipiente.

Unidades

1 atmósfera normal = 760 mm de Hg = 760 Torr. En el SI de unidades: 1 atmósfera normal = 101 325 Pa. También se acostumbra utilizar el hectopascal (hPa).

$$1 \text{ atm} = 1013.25 \text{ hPa};$$

$$1 \text{ milibar} \equiv 1 \text{ hectopascal.}$$

En algunos textos se utiliza el *bar*: 1 bar = 750 mm de Hg.

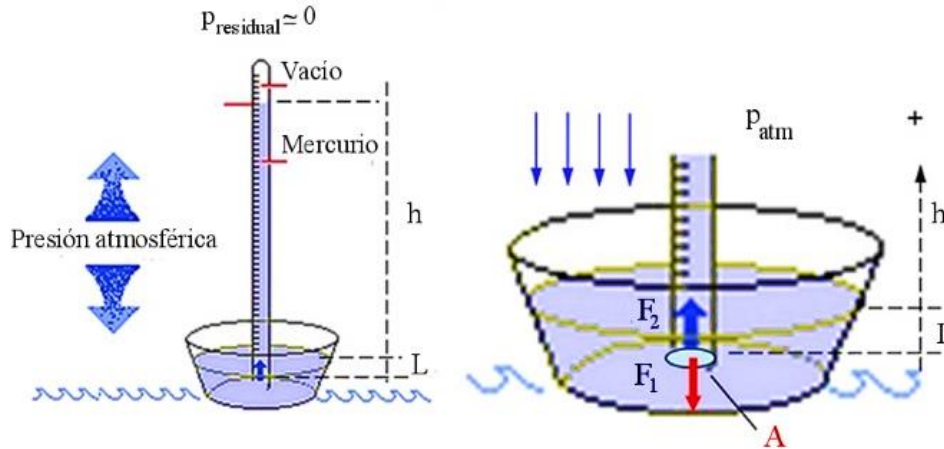


Figura 7.10. Fuerzas actuando sobre el mercurio del barómetro.

Barómetro aneroide

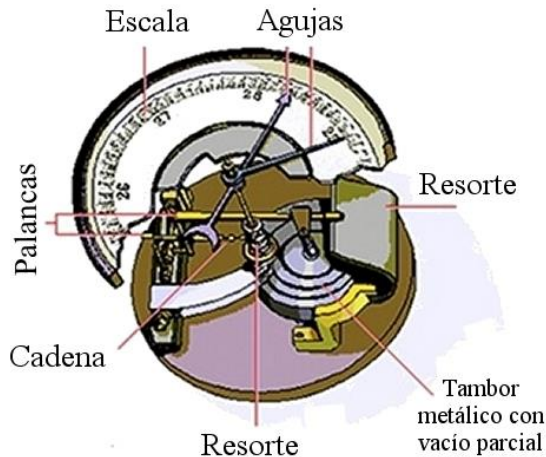


Figura 7.11. Barómetro aneroide.

Mediante un barómetro de mercurio es posible calibrar la deformación de una membrana metálica hueca a la que se le ha hecho vacío. Cuando esta membrana se acopla a una aguja que indica variaciones en una escala, indicará los cambios de la presión

atmosférica, pues la membrana se dilata o contrae con los cambios de la presión (figura 7.11). Este es el principio de funcionamiento de los barómetros *aneroide*s (sin líquido).

7.5 Manómetro

El manómetro es un instrumento utilizado para medir la presión en recipientes cerrados. Hay manómetros de líquido cerrados y abiertos; los cerrados se usan para medir presiones pequeñas, del orden de varios mm de Hg. También hay manómetros de aguja, similares en su funcionamiento al barómetro aneroide.

A título de ejemplo consideremos el funcionamiento del manómetro abierto, que se utiliza en el laboratorio para medir presiones cercanas a la presión atmosférica. Consiste en un tubo en forma de U, abierto por ambos extremos y relleno parcialmente de

un líquido adecuado que puede ser agua, aceite, mercurio o alguna otra sustancia. Uno de los extremos del tubo se conecta al recipiente cuya presión se desea medir, mientras que el otro extremo queda abierto a la atmósfera (figura 7.12).

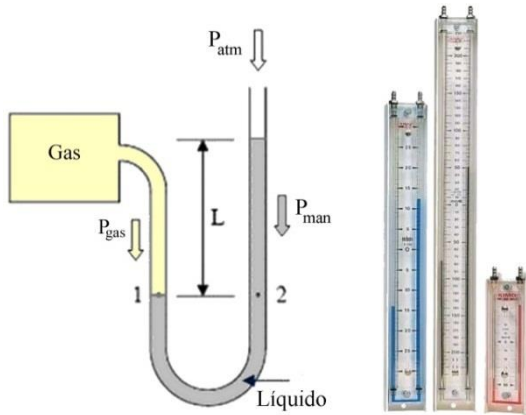


Figura 7.12. Manómetro abierto

En el equilibrio, en el extremo inferior del tubo las fuerzas ejercidas por las columnas deben ser iguales, al igual que las fuerzas en los puntos 1 y 2; es decir, $F_1 = F_2$, y como el área es la misma,

$$p_1 = p_2$$

$$p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \rho gh_2.$$

Pero p_1 es la presión p_{gas} dentro del recipiente y p_2 la presión atmosférica. De ahí que:

$$p - p_a = \rho g(h_2 - h_1).$$

La resta $p - p_a$ es la *presión manométrica*.

Para obtener la presión absoluta a partir de la medición de las alturas, siempre hay que sumar o restar el valor $\rho g\Delta h$ a la presión atmosférica. Note que en el ejemplo considerado $p > p_a$. En el caso contrario sería $h_1 > h_2$, y el término $\rho g\Delta h$ en la expresión anterior sería negativo.

Cuando la presión es menor que la atmosférica dentro del recipiente, para medir la presión se usan manómetros cerrados, donde en la rama cerrada se hace vacío y el líquido manométrico es por lo general mercurio.

Otros tipos de manómetros aparecen en la figura 7.13.



Figura 7.13. Izq. Manómetro aneroide; funciona similar al barómetro aneroide. Der. Manómetro de Bourdon. Usa un tubo enrollado en espiral acoplado a la aguja.

Ejemplo

¿Cuál será la presión absoluta en el recipiente de la figura 7.12, expresada en pascal, si el líquido es mercurio, y la superficie del líquido en la rama 2 se encuentra 10 mm por encima de la superficie de la rama 1 del manómetro?

$$p = p_a + \rho g(h_2 - h_1)$$

$$p = 760 + 10 = 770 \text{ mm Hg} = 770 \text{ Torr}$$

$$\frac{760}{770} = \frac{101325}{x}$$

$$x = 101325 \times 770/760 = 102658 \text{ Pa}$$

$$x = 1026.58 \text{ hPa.}$$

7.6 Fluidos en movimiento

Conceptos básicos

Para analizar los fluidos en movimiento, por el momento consideraremos sólo aquellos flujos que cumplen las condiciones de ser *estables*, *irrotacionales*, *no viscosos* e *incompresibles*.

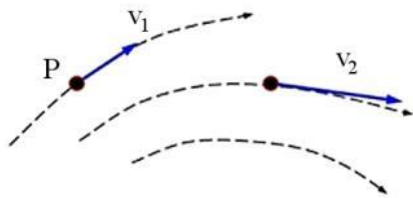


Figura 7.14. Régimen estable.

Estable. Significa que la velocidad de las partículas es constante en cada punto del fluido (aunque la velocidad varíe de un punto a otro). En la figura 7.14, $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ pero ni una ni la otra varían con el transcurso del tiempo y el régimen es estable. Cuando la velocidad en cada punto varía con el transcurso del tiempo, el flujo es de *régimen variable*.

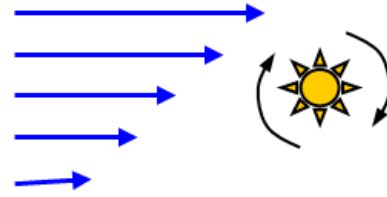


Figura 7.15. Ejemplo de régimen rotacional.

Irrotacional. Un flujo es irrotacional cuando no es posible encontrar en las partículas que lo forman alguna componente de velocidad angular neta. Un ejemplo de flujo *rotacional* es el representado en la figura 7.15, donde los vectores representan las velocidades en diferentes puntos del fluido. Note que un cilindro con paletas colocado bajo la acción del flujo tendería a rotar en la dirección indicada, señalando con claridad la componente rotacional.

No viscoso. No hay fricción entre las diferentes capas del líquido ni tampoco del líquido contra las paredes del recipiente. No hay disipación de energía mecánica.

Incompresible. Significa que la densidad ρ es constante. Esta condición es válida para los líquidos, pero no para los gases. De aquí que en lo que sigue se consideren sólo líquidos mientras no se especifique lo contrario.

Línea de corriente y tubo de flujo

La trayectoria de una partícula en el seno de un fluido se denomina *línea de corriente*. Las líneas de corriente tienen la particularidad de que no se cortan jamás.

La velocidad siempre es tangente a la trayectoria. Si dos líneas de corriente se cortasen, en el punto de cruce la velocidad de la masa puntual tendría que tener dos direcciones diferentes a la vez, lo cual es absurdo (figura 7.16).

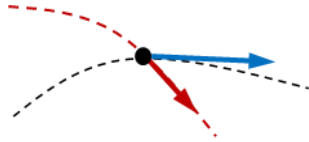


Figura 7.16. Las líneas de corriente no se pueden cortar. La masa puntual tendría dos velocidades diferentes a la vez.

Como las líneas de corriente no se pueden cortar, es posible imaginar la existencia de un tubo de flujo en el seno del líquido, formado de líneas de corriente. El tubo de flujo se comporta a todos los efectos como un tubo real, ya que las líneas de corriente que entran por un extremo tienen que salir por el otro, pues no pueden cortar las líneas que forman la “pared” del tubo.

En la figura 7.17, la masa puntual que entre por A, debe por fuerza salir por B. El concepto de tubo de flujo permite extender el análisis no sólo al flujo de líquidos por tuberías, sino también al movimiento de una porción de líquido dentro de otra mayor; por ejemplo, una corriente en un río.

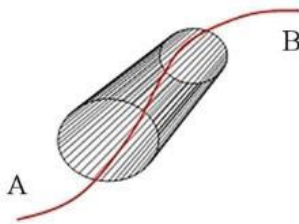


Figura 7.17. Tubo de flujo

7.7 Ecuación de continuidad

La figura 7.18 representa un tubo de flujo de sección transversal variable, donde hay un flujo establecido de izquierda a derecha que cumple las condiciones de estabilidad, no rotacional, no viscoso e incompresible. Considere un pequeño intervalo de tiempo Δt .

Igualando los volúmenes y sustituyendo en función de las áreas y de la velocidad:

$$V_1 = V_2$$

$$A_1 x_1 = A_2 x_2$$

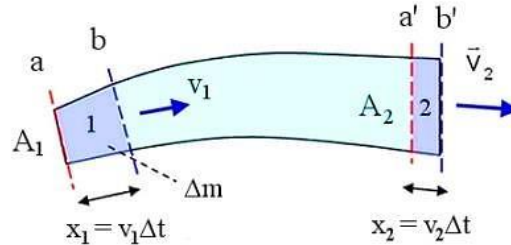


Figura 7.18. Ecuación de continuidad

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Como los puntos 1 y 2 son arbitrarios; en cualquier punto del tubo de flujo el producto Av se debe mantener constante. Esta ecuación se denomina *ecuación de continuidad*, y es válida solo bajo las condiciones establecidas antes para el fluido. También se acostumbra expresar la ecuación de continuidad por su expresión equivalente:

$$Av = \text{constante.}$$

Gasto

El *gasto* (G) en una tubería se define como el volumen que sale por la tubería en la unidad de tiempo:

$$G = \frac{V}{t}.$$

Expresando el volumen saliente de líquido en un intervalo de tiempo t como $V = Ax$ y considerando que $x/t = v$, el gasto también se puede expresar como

$$G = Av.$$

Unidades. En el SI de unidades, $[G] =$

$$[V]/[t] = m^3/s.$$

Ejemplo

Estrechamiento en una tubería.

Según la ecuación de continuidad,

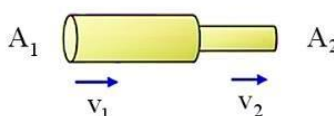
$$A_1 v_1 = A_2 v_2;$$


Figura 7.19. Estrechamiento en una tubería

por tanto: $v_2 = (A_1/A_2)v_1$, y como según la figura 7.19 $A_1/A_2 > 1$, se llega a la conclusión de que $v_2 > v_1$. La velocidad del flujo *aumenta* en el estrechamiento.

7.8 Ecuación de Bernoulli

En la figura 7.20 la porción de líquido comprendida entre A y A' avanza de izquierda a derecha. La fuerza F_1 sobre la sección transversal A_1 la ejerce el líquido que viene detrás. La fuerza F_2 es ejercida por el líquido que va delante. Se desea analizar la variación de energía de esa porción de líquido cuando avanza hasta BB'.

Cuando la sección transversal A avance hasta B, la sección transversal A' lo hará hasta B'. La porción de líquido que se encuentra entre B y A' no varía su energía durante el movimiento, y el resultado neto que se obtiene durante este proceso es similar al que se obtendría si el volumen de líquido comprendido entre las secciones A y B se trasladara íntegramente hasta A'B'.

Ya que el CM se comporta como si todas las fuerzas obraran sobre él, sólo será necesario analizar la variación de energía del

CM de la porción de líquido trasladada. Las fuerzas de interacción líquido-tubería son normales y no trabajan, por lo que no se consideran.

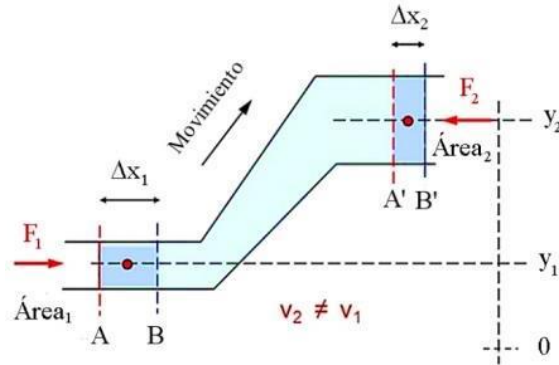


Figura 7.20. Ecuación de Bernoulli

Aplicando el teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas a la porción de líquido considerada:

$$W_{\text{Rext}} = \Delta E_c$$

$$F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 + W_{\text{Fg}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (4)$$

Pero:

$$W_{\text{Fg}} = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}) = -mgy_2 + mgy_1$$

$$F \Delta x = p A \Delta x = pV = p(m/\rho).$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en 7.4:

$$p_1(m/\rho) - p_2(m/\rho) - mgy_2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Tras simplificar y agrupar términos se llega a:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

Como los puntos 1 y 2 son puntos arbitrarios en el líquido, se llega con facilidad a la conclusión de que en todos los puntos,

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{constante.}$$

Esta es la *ecuación de Bernoulli*, formulada en 1738 por el matemático y físico suizo Daniel Bernoulli.

El parámetro p se denomina *presión absoluta*. La suma $p + \rho gy$ es la *presión estática* (también hidráulica, en algunos textos) y el término $\frac{1}{2} \rho v^2$ es la *presión dinámica*.

7.9 Aplicaciones

Relación entre la presión y la velocidad de un fluido

Al analizar la ecuación de continuidad, se vio que la velocidad aumenta en la parte más estrecha de la tubería, y $v_2 > v_1$ en la figura 7.19. Como los puntos 1 y 2 están a la misma altura, haciendo $y_1 = y_2$ en la ecuación de Bernoulli, se obtiene:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) > 0$$

$$p_1 > p_2,$$

y la presión es menor en la sección más estrecha de la tubería. Este es un resultado general, y significa que en cualquier región donde el fluido tenga mayor velocidad la presión será menor.

Ejemplo

Fuerza de sustentación

Se comprueba con facilidad que al soplar con suavidad en el borde de una tira de papel asida por el extremo más cercano a los labios, es posible lograr que ésta se levante cuando se sopla en la horizontal por encima del papel (figura 7.21). La diferencia de presiones Δp encima y debajo de la hoja hace aparecer una fuerza de sustentación $F = A\Delta p$, donde A es el área de la superficie

en contacto con el aire que se mueve a mayor velocidad.

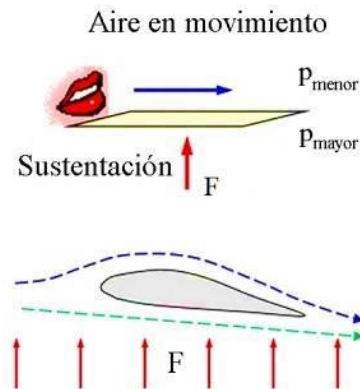


Figura 7.21. Fuerza de sustentación.

En muchos textos de física se menciona como ejemplo de aplicación de la ecuación de Bernoulli la fuerza de sustentación en las alas de los aviones, ya que la presión es menor allí donde la velocidad del fluido es mayor. Se alega que el perfil del ala de un avión se construye de forma tal que el aire debe recorrer una distancia mayor en igual tiempo cuando pasa por encima de la misma que por debajo. En este caso quien se mueve es el avión, pero la velocidad relativa del aire con relación a la superficie del ala es mayor por la parte superior del ala que por la inferior, y por tanto la presión es menor (figura 7.21). Sin embargo, esto no es exactamente así, pues en el proceso también intervienen otros factores.

TEMA AVANZADO

¿Cómo surge la fuerza de sustentación en los aviones?

Los aviones son capaces de volar largos tramos de forma invertida sin perder altura, incluso si sus alas son planas (figura 7.22),

lo que contradice la explicación de la sustentación a partir de la ecuación de Bernoulli.

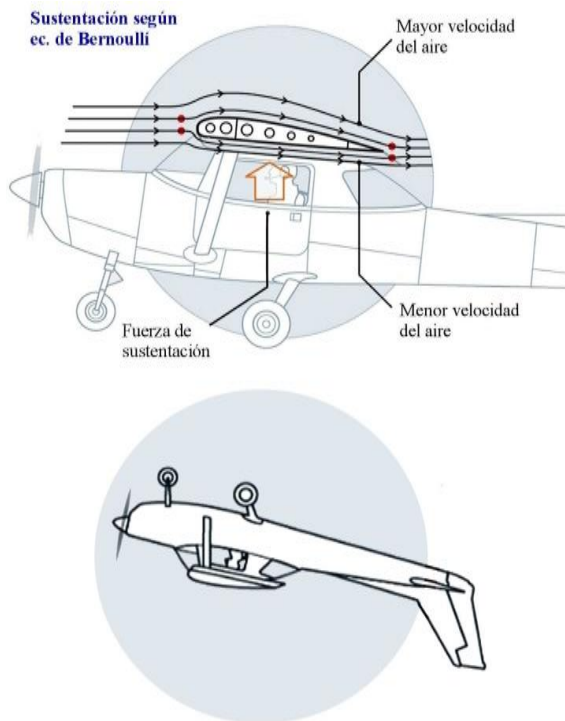


Figura 7.22. Los aviones son capaces de volar largos tramos de forma invertida.

Una explicación alternativa es que, gracias al ángulo de ataque del ala, la variación de la cantidad de movimiento del viento crea la fuerza de sustentación, de acuerdo a las segunda y tercera ley de Newton, $\vec{F}_R = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, $\vec{F}_R' = -\vec{F}_R$. La situación es similar a la elevación de una cometa, donde la cuerda que sostiene la cometa es sustituida por la fuerza que ejerce el motor del avión (figura 7.23).

Muchos consideran que la explicación correcta es una combinación de ambos efectos, pero aún quedan algunas cuestiones importantes por explicar; una de ellas es que el aire que pasa por encima del ala no tarda lo mismo en llegar a la parte trasera

del ala que al pasar por debajo, lo que es básico para la explicación a partir de Bernoulli; en realidad, llega algo retrasado. Por tanto, aún está por aparecer una clara explicación de cómo surge la región de baja presión encima del ala.

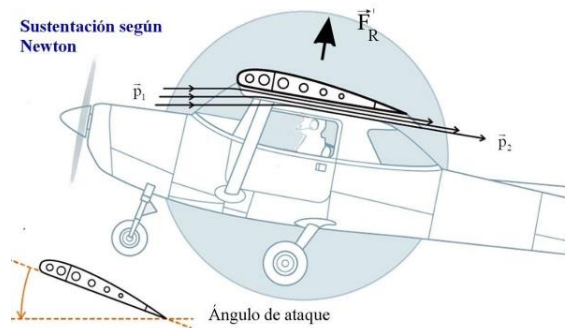


Figura 7.23. La fuerza de sustentación a partir de la reacción sobre el ala cuando ésta desvía el aire hacia abajo, según establecen las leyes de Newton.

Más información en

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/VirtualAero/BottleRocket/airplane/guided.htm>) y [No One Can Explain Why Planes Stay in the Air | Scientific American](https://www.scientificamerican.com/video/no-one-can-explain-why-planes-stay-in-the-air/), <https://www.scientificamerican.com/video/no-one-can-explain-why-planes-stay-in-the-air/>.

Efecto Magnus

Una pelota que se lanza rotando arrastra las capas más cercanas de aire durante su rotación y crea un remolino de aire. En un lado de la pelota el remolino es contrario al flujo de aire, reduce su velocidad y la presión aumenta. En el lado contrario la velocidad del aire se incrementa y la presión se reduce. El resultado es una fuerza neta hacia el lado donde la presión es menor (figura 7.22).

Este es un efecto muy usado en el béisbol para lograr lanzamientos curvos. También en el fútbol, para centrar en portería desde

la esquina o burlar la barrera cuando hay penales.

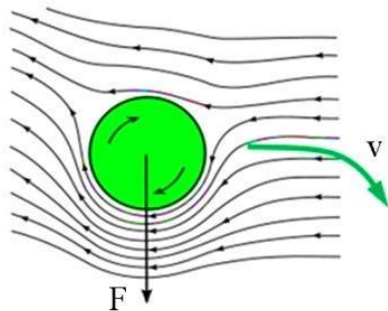


Figura 7.24. Efecto Magnus

Teorema de Torricelli

El teorema se refiere a la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio. Establece que, en las condiciones de la figura 7.25, donde $A_1 \gg A_2$, la velocidad de salida del líquido es la misma que la de un cuerpo que cae libre desde una altura h : $v = \sqrt{2gh}$.

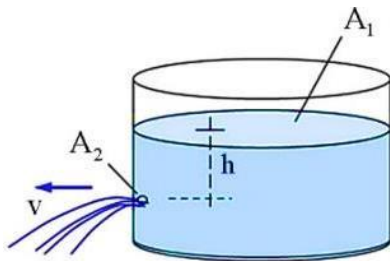


Figura 7.25. Teorema de Torricelli

Demostración

Aplicando la ecuación de Bernoulli,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2,$$

$$p_1 = p_2 = p_{\text{atm}},$$

pues ambas, la superficie del líquido y la del orificio, están en contacto con la atmósfera. Como $A_1 \gg A_2$, la velocidad de descenso del nivel del líquido será muy pequeña, y con excelente aproximación puede considerarse que $v_1 = 0$.

Sustituyendo y simplificando en la expresión anterior, se obtiene:

$$\rho g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Medidor de Venturi

Es un instrumento usado para medir el gasto en una tubería. Está formado por una sección de tubería con un estrechamiento y dos manómetros, como muestra la figura 7.26. Al inicio de la sección 7.9 se vio que, para una tubería con estrechamiento,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2). \quad (5)$$

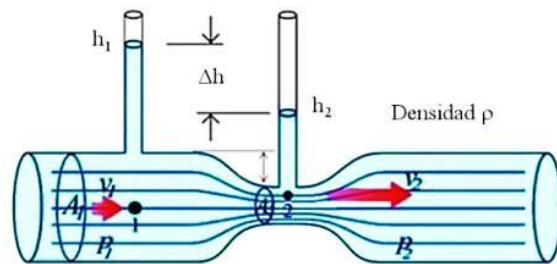


Figura 7.26. Medidor de Venturi

Por otra parte, considerando la altura de las columnas de líquido en la figura 7.26 con respecto al centro del tubo,

$$p_1 = p_a + \rho g h_1$$

$$p_2 = p_a + \rho g h_2. \quad (6)$$

A partir de la ecuación de continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$ es posible escribir:

$$v_2^2 = (A_1/A_2)^2 v_1^2. \quad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5), agrupando términos y simplificando con $G = Av$, se llega a:

$$G = \left(\frac{2g(h_1 - h_2)}{1/A_2^2 - 1/A_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si se conocen las áreas A_1 y A_2 , midiendo

la diferencia de alturas es posible conocer el gasto en la tubería.

7.10 Viscosidad

Conceptos básicos

Resulta útil definir la viscosidad de un fluido a partir del análisis del siguiente experimento.

Suponga que el dispositivo de la figura 7.25 está compuesto por dos cilindros concéntricos. El externo es hueco y el interno es sólido. Ambos están sumergidos por completo en el seno de un fluido, y el cilindro interno, de superficie S , rota con velocidad angular ω , mientras que el cilindro externo, situado a distancia ℓ del interno, se mantiene fijo.

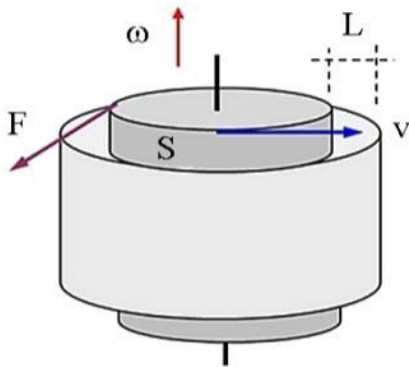


Figura 7.27. Definición de viscosidad

Es posible entonces verificar los siguientes resultados experimentales:

- Para que el cilindro interior gire con velocidad constante v , es necesario aplicar una fuerza F sobre él. De ahí se deduce que debe haber una fuerza de fricción f , ejercida por el líquido, con un valor tal que

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a} = 0,$$

por lo que $\vec{f} = -\vec{F}$ en todo momento. La fuerza \vec{f} se conoce como *fricción por viscosidad*.

- El módulo de f cumple la siguiente propiedad:

$$\frac{f}{S} = \eta \frac{v}{L},$$

donde S es el área del cilindro, v la velocidad tangencial, L la separación entre las superficies y η el *coeficiente de viscosidad*, que depende de la naturaleza del fluido considerado y de la temperatura. Este resultado es válido solo cuando L es pequeño y el flujo sigue un régimen laminar, donde las capas de fluido no se mezclan.

Cuando se analiza la velocidad de las partículas microscópicas que componen el fluido (figura 7.28), se encuentra que las moléculas de líquido cercanas a las superficies se adhieren a las mismas y viajan junto con ellas. Las moléculas adyacentes al cilindro móvil tendrán velocidad máxima (la velocidad tangencial del cilindro) mientras que las que están junto al cilindro externo estarán en reposo.

De ahí que exista un gradiente de velocidades desde el cilindro interno al externo (y que el flujo laminar no sea irrotacional).

Se concluye de lo anterior que la viscosidad se relaciona con el deslizamiento relativo de las capas de fluido entre sí, y no con la interacción entre el fluido y las paredes del recipiente. Esto nos permite afirmar que *la viscosidad no depende de la naturaleza de la superficie sólida, sino sólo de las características del líquido o gas que se encuentra entre las superficies*.

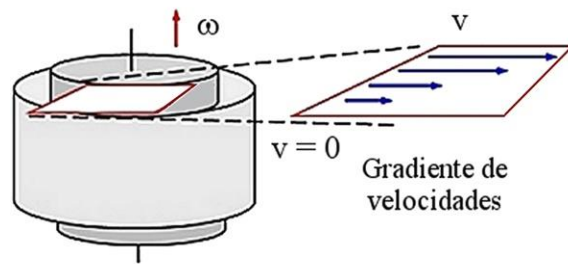


Figura 7.28. Análisis de la velocidad del líquido. A la derecha, viscosímetro de rotación comercial.

Unidades

En el SI de unidades: $[\eta] = [F][L]/[S][v] = \text{Ns/m}^2$. Sin embargo, en vez de esta unidad se acostumbra utilizar el *poise* (ps), definido sobre la base del sistema cgs de unidades. La relación de conversión con el SI de unidades es:

$$1 \text{ ps} = 0.1 \text{ Ns/m}^2.$$

En la tabla 7.2 aparecen algunos valores típicos del coeficiente de viscosidad. Para tener una idea del significado de los diferentes valores de η , recuerde que la fricción por viscosidad es proporcional a la *velocidad*. Por ejemplo, es fácil aplaudir en el aire (181 μps) pero muy difícil hacerlo en el agua (1.0 cps).

Por otra parte, *no confundir la viscosidad con la densidad*. El aceite de ricino es menos denso que el agua (0.96 g/cm^3) y flota en ella; sin embargo, su viscosidad es casi mil veces mayor que la del agua a la temperatura ambiente.

TABLA 7.2		
COEFICIENTE DE VISCOSIDAD		
Sustancia	η (20°C)	η (60°C)
aire	181 μps	200 μps
agua	1.0 cps	0.47 cps
aceite de ricino	9.86 ps	0.30 ps

Ley de Poiseuille

La ley de Poiseuille se refiere al gasto de un líquido viscoso que fluye por una tubería de sección uniforme y radio R. A causa de la viscosidad, la velocidad del líquido es diferente en las paredes y en el centro del tubo, y la expresión $G = Av$ ya no será válida.

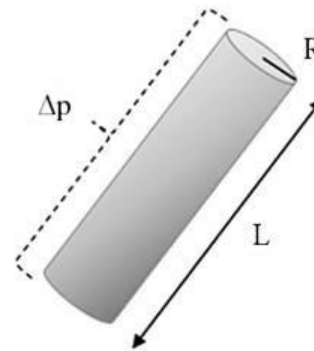


Figura 7.29. Ver texto

En este caso, es posible demostrar que el gasto puede expresarse como:

$$G = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta L},$$

donde Δp es la diferencia de presión en los extremos y L la longitud de la tubería (figura 7.29).

La ley de Poiseuille, además de las aplicaciones relacionadas a la ingeniería y a todo lo que se transmite por tuberías a grandes distancias, también tiene aplicaciones bio-

lógicas. Se usa en el estudio de la dinámica de la sangre en las venas, arterias y capilares (hemodinámica) y al análisis del aire que llega a los alveolos pulmonares. Si el radio de los conductos respiratorios se reduce a la mitad, el flujo de aire que alcanza los alveolos se reduce 16 veces, como indica la dependencia de R^4 .

Flujo laminar y turbulento. Número de Reynolds

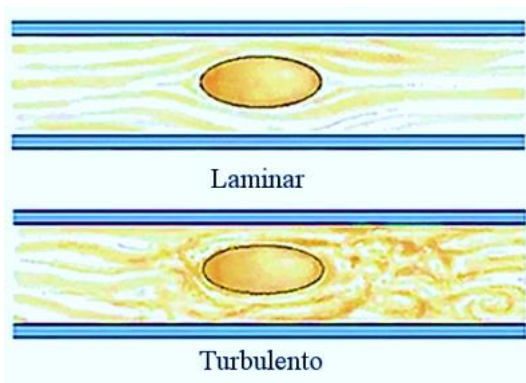


Figura 7.30 Régimen laminar y turbulento.

A bajas velocidades los fluidos fluyen en

régimen laminar, que puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, deducidas a mediados del siglo XIX. A velocidades altas, el movimiento de los fluidos se hace turbulento. En los fluidos que fluyen por tubos, la transición del movimiento laminar al turbulento depende del diámetro del tubo D , de su velocidad media v_m , de la densidad ρ y de la viscosidad η del fluido (figura 7.30). Cuanto mayores son el diámetro D , la velocidad media v_m y la densidad ρ , y cuanto menor es la viscosidad η , más probable es que el flujo sea turbulento.

La combinación empírica de estos 4 parámetros da origen al número adimensional de Reynolds:

$$N_R = \frac{\rho v_m D}{\eta}$$

Cuando $N_R < 2000$ el flujo es laminar. Si $N_R > 3000$ el flujo será turbulento. Cuando $2000 < N_R < 3000$, el flujo es inestable; puede variar de uno a otro tipo de régimen.

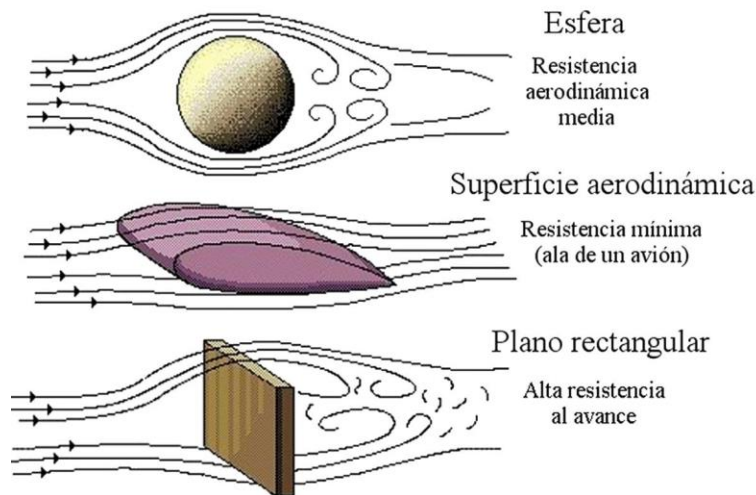


Figura 7.31. Resistencia aerodinámica

Ejemplo

¿Cuál es la máxima velocidad media con que puede circular agua en un tubo de 1 cm de diámetro en régimen laminar, a 20 °C?

Para que haya régimen laminar,

$$N_R = \frac{\rho v_m D}{\eta} < 2000.$$

Despejando, $v_m < 2000\eta/\rho D = 0.2$ m/s.

Resistencia aerodinámica

El aire ejerce gran oposición a los cuerpos que se desplazan en su seno a alta velocidad, y esa resistencia varía en gran medida en dependencia de la forma del cuerpo. Por ejemplo, una esfera (figura 7.31) y, sobre todo, una superficie cuadrangular (*abajo*), obligan al aire a cambiar de dirección, causando turbulencias y una fuerza de frenado notable. Por otra parte, el ala de un avión, a pesar de ser el origen de un empuje ascendente, apenas perturba el aire, por lo que sufre poca resistencia al avance.

Las formas aerodinámicas son importantes no sólo en los aviones, sino también en vehículos terrestres o marítimos que se mueven a gran velocidad o que tienen gran tamaño (autos de carrera, trenes, rastras).

7.11 Problemas resueltos

7.1. La densidad del agua es de aproximadamente $\rho_a = 1$ g/cm³. La del hielo, $\rho_h = 0.92$ g/cm³. Calcule qué fracción de un pedazo de hielo sumergido en agua queda por encima de la superficie.

7.2. Un objeto cúbico de 50 cm de arista y 200 kg de masa está colgado de una cuerda

y sumergido en un líquido de densidad 1.2 g/cm³, a una distancia de la superficie igual a la mitad de su arista.

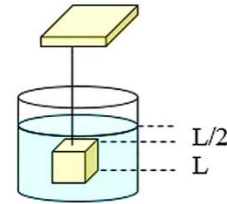


Figura problema 2

a) Encontrar la fuerza ejercida por el líquido sobre la cara superior del bloque. b) Sobre la cara inferior. c) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

7.3. Un bloque de madera (M) flota en el agua ($\rho_a \approx 1$ g/cm³) con 2/3 de su volumen sumergido. En aceite flota con 0.9 de su volumen sumergido. Encontrar la densidad de a) la madera, b) el aceite.

7.4. Desde un sótano inundado se bombea agua con rapidez de 5 m/s, a través de una manguera de 2 cm de diámetro interno. La superficie del líquido está a 3 m por debajo de la puerta de salida del agua. ¿Cuánta potencia suministra la bomba?

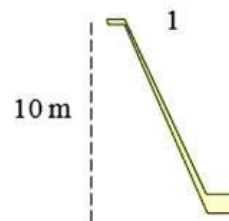


Figura problema 5

7.5. En la sección de tubería de la figura, $A_1 = 4$ cm², $A_2 = 8$ cm², $v_1 = 5$ m/s y la presión en (1) es de 1.5×10^5 Pa. ¿Cuál es la presión en el punto (2), a 10 m por debajo del (1)?

7.6. Una esfera de madera de 20 cm de diámetro y densidad $\rho_m = 0.85 \text{ g/cm}^3$ se encuentra sujeta por un hilo al fondo de un recipiente de agua (densidad $\rho_a = 1 \text{ g/cm}^3$) como muestra la figura.

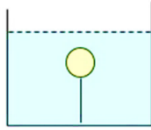


Figura problema 6

Calcule la tensión del hilo. (Volumen de la esfera: $(4/3)\pi R^3$).

7.7. Un tubo de vidrio en forma de U contiene mercurio. Cuando se vierten 11.2 cm de agua en la rama derecha, ¿a qué altura se elevará el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial? ($\rho_{\text{mercurio}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$)

7.8. El agua embalsada en una presa tiene una profundidad de 15.2 m. La cortina es atravesada por un tubo horizontal de 4.3 cm de diámetro, que tiene un tapón a la salida a una distancia de 6.15 m bajo la superficie del agua.

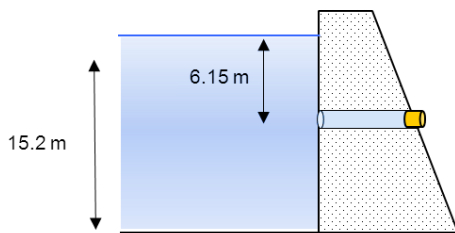


Figura problema 8

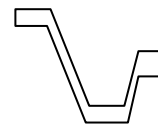
a) Halle la fuerza de fricción entre el tapón y las paredes del tubo. b) Si se quita el tapón, ¿qué volumen de agua saldrá por el tubo en 3 horas?

Problemas propuestos

1. Dos esferas de igual radio, una de madera M ($\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$) y otra de cobre C ($\rho = 8.5 \text{ gr/cm}^3$) se encuentran en un recipiente con agua destilada ($\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$) como se muestra. a) ¿Serán iguales las fuerzas de empuje actuando sobre cada esfera? Si no son iguales, ¿cuál es mayor? Justifique su respuesta sobre la base de leyes conocidas de la física. b) ¿Cuál debería ser la densidad del líquido para que la esfera de madera flote con un 10% de su volumen por encima de la superficie ($V(\text{fuera})/V(\text{total}) = 0.1$)?

2. Considere el caso de un cubo de madera de densidad $\rho_M = 0.80 \text{ g/cm}^3$ flotando en una disolución salina de densidad $\rho_s = 1.2 \text{ g/cm}^3$. a) Haga un esquema y plantee el diagrama de cuerpo libre, expresando cada una de las fuerzas representadas en función de la densidad y el volumen correspondientes (volumen total V_T , sumergido V_s ; fuera del agua V_F). b) Calcule la relación numérica V_F/V_T para el bloque de madera en estas condiciones.

3. En la sección de tubería de agua ($\rho = 1 \text{ ton/m}^3$) de la figura, $A_1 = 4 \text{ cm}^2$, $A_2 = 8 \text{ cm}^2$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$ y la presión en (1) es de $1.5 \times 10^5 \text{ Pa}$. ¿Cuál es la presión en el punto (2), a 10 m por debajo del (1)? No tome en cuenta la viscosidad del agua.

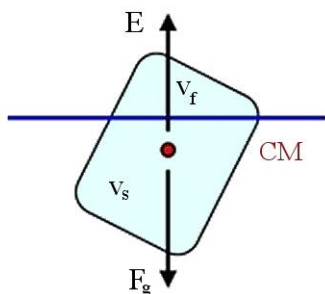


Problema propuesto 3

Soluciones

Problema 7.1.

V_F/V_T ?



Solución 2b

Problema resuelto 1. Interpretación: V_F : vol. Fuera, V_S : vol. Sumergido, V_T : $V_S + V_F$.

$$\sum F_y = E - F_g = ma_y = 0 \rightarrow E = F_g$$

$$\rho_a g V_s = m_h g$$

$$\rho_a V_s = \rho_h V_T$$

$$V_F/V_T = (V_T - V_S)/V_T = 1 - V_S/V_T$$

$$V_F/V_T = 1 - \rho_h/\rho_a = 1 - 0.92/1 = 0.08 \text{ (8\%)}$$

$$\begin{aligned} F &= 101\,325 \times 0.5^2 + \\ &+ 1.2 \times 10^3 \times 10 \times 0.5^3 / 2 \\ &= 25331 + 750 \\ F &= 26081 \text{ N} \end{aligned}$$

b) El razonamiento es idéntico al del inciso anterior, utilizando $h = 3L/2$:

$$\begin{aligned} F &= p_{\text{atm}} L^2 + 3\rho g L^3/2 \\ F &= 25331 + 2250 \\ F &= 27581 \text{ N} \end{aligned}$$

c) $\sum F_y = ma_y = 0$ en el equilibrio:

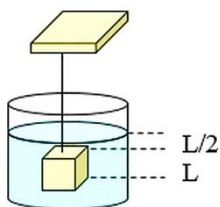
$$T + E - F_g = 0$$

$$T = F_g - E$$

$$T = mg - \rho V_{sg}$$

$$\begin{aligned} T &= 200 \times 10 - 1.2 \times 10^3 \times 0.5^3 \times 10 \\ &= 2000 - 1500 \\ T &= 500 \text{ N.} \end{aligned}$$

Problema 7.2.



Solución 2a

a) Sobre la cara superior, $p = p_{\text{atm}} + \rho gh$;

$$F = pA$$

$$F = (p_{\text{atm}} + \rho g L/2)L^2$$

$$F = p_{\text{atm}} L^2 + \rho g L^3/2$$

$$(g/\text{cm}^3 = \text{ton}/\text{m}^3 = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3)$$

Problema 7.3.

a) Cuando flota en agua, $V_s = \frac{2}{3} V_T$. En el equilibrio,

$$F_g = E.$$

$$m_M g = \rho_{\text{agua}} V_{sg}$$

$$m_M = \rho_{\text{agua}} V_S = V_T$$

$$m_M/V_T = \rho_{\text{agua}} \frac{2}{3} = \rho_M$$

$$\rho_M = \frac{2}{3} \rho_{\text{agua}} = 0.67 \text{ g/cm}^3$$

b) Igualmente, $F_g = E$ en el equilibrio.

$$m_M g = \rho_{\text{aceite}} V_s g$$

$$m_M = \rho_{\text{aceite}} \times 0.9 V_T$$

$$m_M/V_T = 0.9 \rho_{\text{aceite}} = \rho_M$$

$$\rho_{\text{aceite}} = \rho_M/0.9 = 0.67/0.9$$

$$\approx 0.74 \text{ g/cm}^3$$

Problema 7.4.

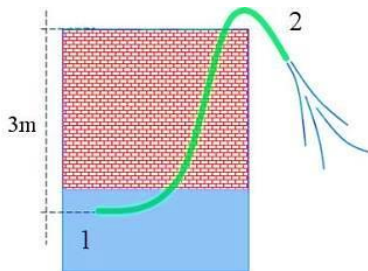
$P = \Delta W/\Delta t$. El trabajo W_B realizado por la bomba de agua sobre cada porción de masa m debe ser, como mínimo, igual al realizado por la gravedad con signo contrario:

$$W_B = -W_{F_g} = -(-\Delta E_p) = mg(h_2 - h_1)$$

$$W_B = mgh$$

$$P = \Delta W/\Delta t = W_B/t = mgh_2/t.$$

Calculando la masa de agua que pasa por la tubería en la unidad de tiempo,



Solución 7.4

$$m/t = \rho_a V/t = \rho_a G = \rho_a A v$$

$$m/t = \rho_a \pi \frac{D^2}{4} v$$

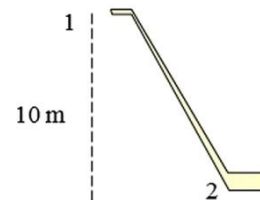
$$P = gh_2 \rho_a \pi \frac{D^2}{4} v$$

$$P = 10 \times 3 \times 10^3 \times \pi \times 0.02^2 \times 5 / 4$$

$$= 15\pi$$

$$P = 47 \text{ w}$$

Problema 7.5.



Solución 7.5

Tomando el cero del sistema de referencia en el punto más bajo ($y_2 = 0$)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2) + \rho g y_1$$

La velocidad v_2 se determina a partir del gasto: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$v_2 = (A_1 v_1 / A_2)$$

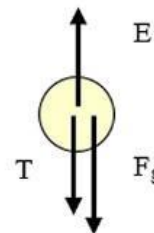
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 (1 - (A_1/A_2)^2) + \rho g y_1$$

$$p_2 = 1.5 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5^2 (1 - 0.5^2) + 10^3 \times 10 \times 10$$

$$p_2 = 1.5 \times 10^5 + 0.09375 \times 10^5$$

$$p_2 = 2.59 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Problema 7.6.



Solución 7.6

$$(g/cm^3 = ton/m^3 = 10^3 kg/m^3)$$

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$E - F_g - T = 0$$

$$T = E - F_g$$

$$T = \rho_a V_m g - \rho_m V_m g$$

$$= (\rho_a - \rho_m) V_m g$$

$$T = (\rho_a - \rho_m) \frac{4}{3} \pi R^3 = (1 - 0.85) \times 10^3 \times \frac{4}{3} \times 0.2^3 = 0.2 \text{ N}$$

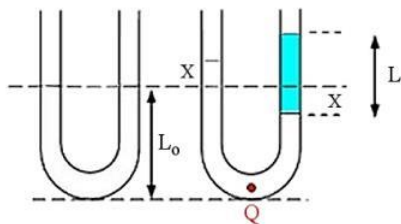
Problema 7.7.

$$L = 11.2 \text{ cm} = 0.112 \text{ m}$$

$$\rho_{\text{mercurio}} = 13.6 \text{ g/cm}^3 = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Cuando la superficie del mercurio desciende x en la rama derecha, debe aumentar lo mismo en la rama izquierda.



Solución 7.7

Cuando se llega al equilibrio, la presión en Q calculada a partir de ambas ramas por la ecuación fundamental de la hidrostática debe ser la misma. En el punto Q:

$$p_{\text{izq}} = p_{\text{der}}$$

$$p_{\text{atm}} + \rho_m g(L_0 + x) = p_{\text{atm}} + \rho_a gL + \rho_m g(L_0 - x)$$

Simplificando,

$$2\rho_m gx = \rho_a gL$$

$$x = \frac{\rho_a L}{2\rho_m} = \frac{1.0 \times 11.2}{2 \times 13.6} = 0.41 \text{ cm}$$

R: Se elevará 0.41 cm.

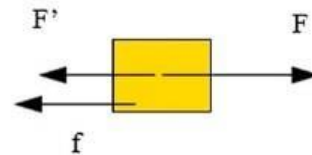
Problema 7.8

$$D = 4.3 \text{ cm} = 0.043 \text{ m}$$

$$t = 3h = 3 \times 60 \times 60 = 10800 \text{ s}$$

a) Diagrama de fuerzas

Aplicando el principio de Pascal y la ecuación fundamental de la hidrostática:



Solución 7.8. Fuerzas sobre el tapón.

F: fuerza ejercida por la presión interna.

$$F = pA = (p_{\text{atm}} + \rho_{\text{agua}}gh)A$$

F': fuerza ejercida por la presión externa.

$$F' = p'A = p_{\text{atm}}A$$

$$F' + f - F = ma = 0$$

$$f = F - F' = \rho_{\text{agua}}ghA = \rho_{\text{agua}}gh\pi D^2/4$$

$$f = 10^3 \times 9.8 \times 6.15 \times 3.1416 \times 0.043^2/4$$

$$f = 87.5 \text{ N}$$

b) La tubería es corta y la viscosidad despreciable en el tramo. Para el gasto, $G = V/t$. Por tanto,

$$V = Gt = Avt$$

La situación del problema cumple las condiciones del teorema de Torricelli (la altura del agua no varía) y $v = \sqrt{2gh}$. De aquí que,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \pi D^2 t \sqrt{2gh} = \\ &= \frac{3.1416}{4} 0.043^2 \cdot 10800 \cdot \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.15} \end{aligned}$$

$$V = 172.2 \text{ m}^3.$$

CAPÍTULO 8

Oscilaciones y ondas mecánicas

8.1 Conceptos Básicos

Movimiento periódico.

Movimiento armónico.

8.2 Movimiento armónico simple (MAS)

Análisis de la función seno

8.3 Sistema cuerpo-resorte

Velocidad y aceleración en el MAS

8.4 Energía en el MAS

8.5 Movimiento armónico amortiguado

8.6 Energía en el movimiento subamortiguado

8.7 Movimiento armónico forzado.

Relación entre τ y $\Delta\omega$

8.8 Ondas mecánicas transversales

8.9 Propagación de un MAS

8.10 Interferencia

8.11 Ondas longitudinales

Sonido

Número de Mach

Pulsación

8.12 Infrasonido y ultrasonido

8.13 Ondas sísmicas

8.14 Efecto Doppler

8.15 Problemas resueltos

CAPÍTULO 8

Oscilaciones y ondas mecánicas

8.1 Conceptos básicos

Movimiento periódico

Es cualquier movimiento que se repite a intervalos regulares de tiempo. Por ejemplo, las vibraciones de las cuerdas de una guitarra, las contracciones del corazón, el movimiento de un péndulo, las mareas.

Movimiento armónico

Corresponde al caso particular en que el movimiento periódico se puede representar como un desarrollo en serie de senos y cosenos (serie de Fourier). Para el movimiento en una dimensión:

$$x = f(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots$$

Los términos ω , 2ω , 3ω ... se denominan: 1er armónico, 2do armónico, 3er armónico, etc. De todos los posibles movimientos armónicos que existen, el más sencillo es el que puede ser descrito por una sola función seno o coseno, el *movimiento armónico simple*, que en lo adelante se designará por las siglas MAS.

8.2 Movimiento armónico simple

Existen muchas formas de obtener un MAS. Una de ellas es la siguiente: considere que en la figura el extremo del vector \vec{A} rota de derecha a izquierda con velocidad angular constante ω . El punto P es la proyección del extremo del vector sobre el eje de las x.

En el instante inicial $t = t_0$, la posición de P vendrá dada por $x_0 = A \cos \delta$. En un instante posterior, cuando el vector ha rotado un ángulo θ , la posición del punto P es:

$$x = A \cos(\theta + \delta).$$

Pero si el vector está rotando con velocidad angular $\omega = \text{constante}$, entonces $\theta = \omega t$, y al final se obtiene

$$x = A \cos(\omega t + \delta).$$

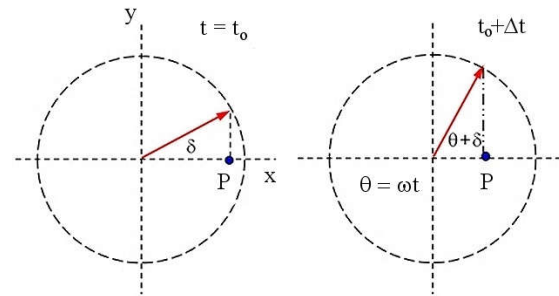


Figura 8.1 Generación de un movimiento armónico simple

Así, el punto P realiza un MAS sobre el eje x. Si en vez de analizar la proyección sobre el eje x se analiza la proyección sobre el eje y, se obtiene una expresión similar, ahora en función del seno del ángulo:

$$y = A \sin(\omega t + \delta).$$

Como $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$, el resultado anterior significa que es posible utilizar tanto seno como coseno para representar un MAS en una dimensión, ya que $\pi/2$ se puede sumar o restar del ángulo δ sin que la dependencia funcional se altere. Cada parámetro incluido en la expresión $x = A \sin(\omega t + \delta)$ se designa de una forma específica:

x: elongación

A: amplitud

ω : frecuencia angular

δ : fase inicial

$(\omega t + \delta)$: fase

La frecuencia angular cumple la relación $\omega = 2\pi f$, donde f es la *frecuencia* de la oscilación (número de veces que el movimiento se repite en la unidad de tiempo). También se acostumbra expresar la ecuación anterior en función de la frecuencia como

$$x = A \sin(2\pi ft + \delta).$$

Asimismo, es posible expresar la frecuencia angular en función del período T como $\omega = 2\pi/T$ (tiempo que tarda el punto P en dar una oscilación completa). En los movimientos oscilatorios se acostumbra expresar la frecuencia en *Hertz* (Hz), en honor del físico alemán Heinrich Hertz.

Heinrich Hertz, (1857-1894, figura 8.2). Fue profesor de física en la Universidad de Bonn, Alemania.



Figura 8.2. Heinrich Hertz

Hertz profundizó y extendió la teoría electromagnética de la luz, formulada por el físico británico James Clerk Maxwell en 1884. Demostró que la electricidad puede transmitirse en forma de ondas electromagnéticas, las cuales se

propagan a la velocidad de la luz y tienen, además, muchas de las propiedades de las ondas mecánicas. Sus experimentos con estas ondas le condujeron al descubrimiento del telégrafo inalámbrico y la radio. Durante mucho tiempo se utilizó el sinónimo de “ondas hertzianas” para designar a las ondas electromagnéticas.

Análisis de la función seno

Cuando se grafica la función $y = \sin(\theta)$ se obtiene algo similar a lo que aparece en la figura 8.3. En el gráfico se cumple que:

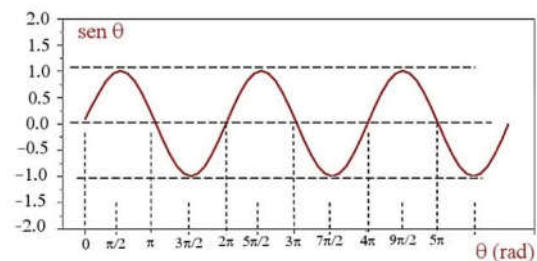


Figura 8.3. $y = \sin(\theta)$

$\sin(\theta) = 0$ cuando $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$

$\sin(\theta) = \pm 1$ cuando $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots, (2n-1)\pi/2$.

Por tanto, la función $x = A \sin(\omega t + \delta)$ debe tener forma similar a la del gráfico cuando se expresa en función de $\theta = \omega t$, tomando en cuenta que cuando $x = 0$, $\rightarrow \omega t + \delta = 0 \rightarrow \omega t = -\delta$. El gráfico que se obtiene es muy parecido (figura 8.4), pero desplazado o corrido hacia la izquierda un ángulo δ (*desfasado* en δ respecto al gráfico anterior).

Por tanto, la función $x = A \sin(\omega t + \delta)$ debe tener forma similar a la del gráfico cuando se expresa en función de $\theta = \omega t$, tomando en cuenta que cuando $x = 0$, $\rightarrow \omega t + \delta = 0 \rightarrow \omega t = -\delta$. El gráfico que se obtiene es

muy parecido (figura 8.4), pero desplazado o corrido hacia la izquierda un ángulo δ (*desfasado* en δ respecto al gráfico anterior).

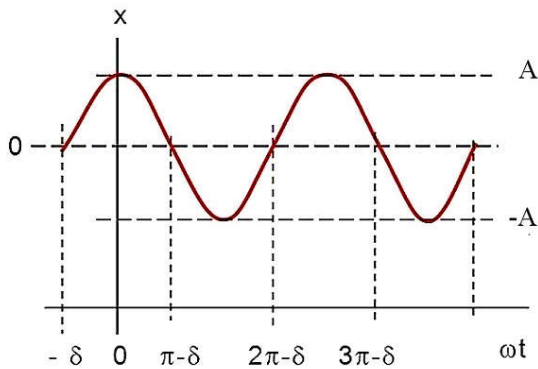


Figura 8.4. $x = A \cos(\omega t + \delta)$

8.3 Sistema cuerpo-resorte

La figura 8.5 representa un cuerpo de dimensiones despreciables, y masa m , atado a un resorte de masa también despreciable. Se supone que no hay fricción entre las superficies en contacto, de forma que la única fuerza actuando en el eje x es la fuerza elástica $F_e = -kx$.

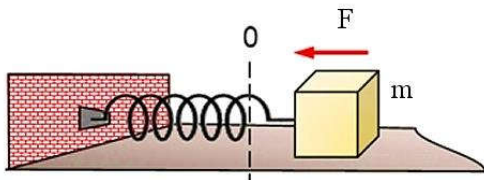


Figura 8.5. Sistema cuerpo-resorte

Las fuerzas actuando en el eje y se anulan: $N - F_g = 0$.

En el eje x la 2da ley de Newton proporciona una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes, que tiene por solución la ley del movimiento de la partícula, $x = f(t)$.

$$F_{Rx} = ma_x$$

$$-kx = mdv/dt = md^2x/dt^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Se demuestra que la solución de esta ecuación diferencial tiene la forma de un MAS:

$$x = A \cos(\omega t + \delta),$$

pero sólo cuando la frecuencia angular ω cumple la relación

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para demostrarlo, considere lo siguiente:

$$dx/dt = -A \sin(\omega t + \delta) \cdot \omega$$

$$d^2x/dt^2 = -A \cos(\omega t + \delta) \cdot \omega^2.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$-A \omega^2 \cos(\omega t + \delta) + (k/m) A \cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$-\omega^2 + (k/m) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Luego, la solución tiene que cumplir la relación anterior de forma obligada.

Como toda ecuación diferencial de 2do orden, en la solución aparecen dos constantes arbitrarias, que deben ser evaluadas después a partir de datos iniciales conocidos. En este caso, las constantes arbitrarias son la amplitud A y el ángulo de fase δ . La frecuencia angular $\omega = (k/m)^{1/2}$ recibe el nombre de *frecuencia de oscilación propia* del sistema.

Algo similar sucede cuando se cuelga un cuerpo de un resorte en la vertical y se le aplica un impulso inicial (figura 8.6). La diferencia con el caso anterior radica en que, a causa de la acción de la gravedad, la

posición de equilibrio alrededor de la cual oscila el resorte no se corresponde con la posición de equilibrio del resorte. La nueva posición de equilibrio se encuentra desplazada hacia abajo una distancia x_0 que debe cumplir la relación $kx_0 = mg$.

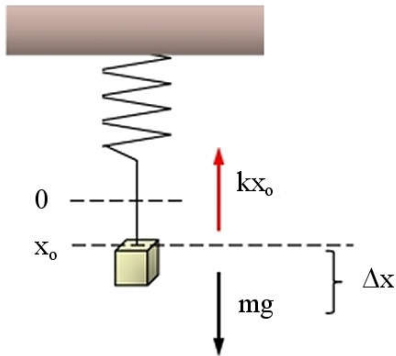


Figura 8.6. Efecto de la gravedad en la oscilación.

La ecuación diferencial queda ahora como

$$-k(x_0 + \Delta x) + mg = m \frac{d^2(\Delta x)}{dt^2}.$$

Haciendo $\Delta x \equiv x'$ se obtiene una ecuación idéntica a la primera, indicando que la partícula oscila alrededor de x_0 con un MAS:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k}{m}x' = 0.$$

Velocidad y aceleración en el MAS

Para un MAS;

$$x = A \sin(\omega t + \delta) \quad (1)$$

$$v = dx/dt = A \cos(\omega t + \delta) \cdot \omega$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \delta).$$

Para cualquier ángulo θ se cumple la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\cos \theta = \sin(\theta + \pi/2).$$

Por tanto,

$$v = \omega A \sin(\omega t + \delta + \pi/2). \quad (2)$$

Difiere en fase de la elongación en $\pi/2$.

$$a = dv/dt = \omega A \cos(\omega t + \delta + \pi/2) \cdot \omega.$$

Al aplicar de nuevo la relación trigonométrica y agrupar, se llega a

$$a = \omega^2 A \sin(\omega t + \delta + \pi). \quad (3)$$

La fase difiere en π de la elongación, además del término ω^2 que aparece.

Haciendo uso de $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$,

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -\omega^2 x.$$

Note que la aceleración *no es* constante. Por tanto,

las fórmulas deducidas antes para el MRUV en una dimensión no son válidas para este tipo de movimiento.

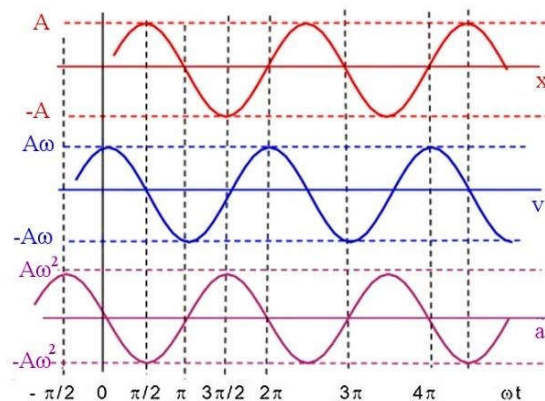


Figura 8.7. Desfasaje entre la elongación, velocidad y aceleración en un MAS

Las expresiones (1) a (3) muestran que la elongación, la velocidad y la aceleración están desfasadas en $\pi/2$ una respecto a la otra. Para analizar el significado del desfasaje, es conveniente representar en una gráfica cómo se comporta la partícula que oscila en diferentes instantes (figura 8.7). En el gráfico, para simplificar, se ha considerado

$\delta = 0$.

En el instante inicial, $t = 0$ ($\omega t = 0$) la elongación es cero; sin embargo, la velocidad es máxima positiva y la aceleración es cero. A

continuación se resumen los valores de x , v y a en algunos instantes notables. Note que la situación inicial se repite para $\omega t = 2\pi$, y así en lo sucesivo.

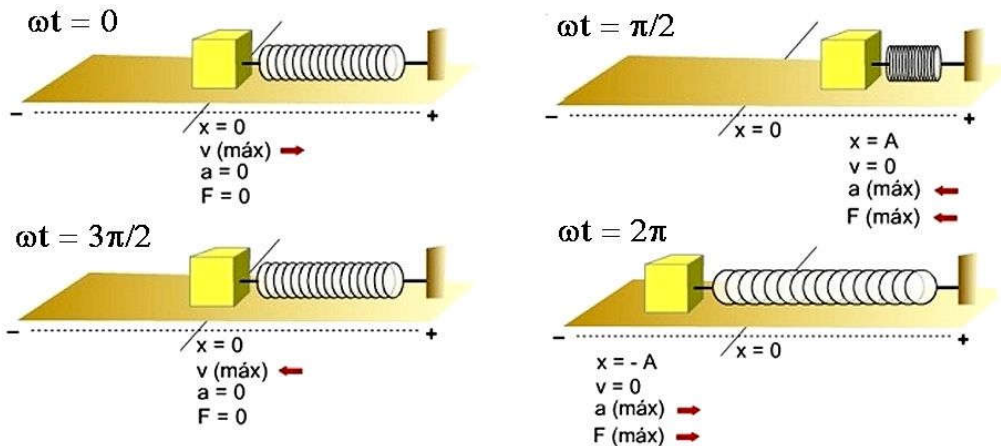


Figura 8.8. De izq. a der. y de arriba hacia abajo: $\omega t = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Para 2π se repite el primero.

La 2da ley de Newton $\vec{F}_R = m\vec{a}$ nos dice que, cuando la aceleración es máxima, la fuerza actuando sobre el cuerpo también lo será. De aquí que la fuerza máxima corresponda a la máxima elongación $\pm A$ y al mayor valor posible de la ley de Hooke, $F = -kA$ (figura 8.8).

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \{ \cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta) \}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

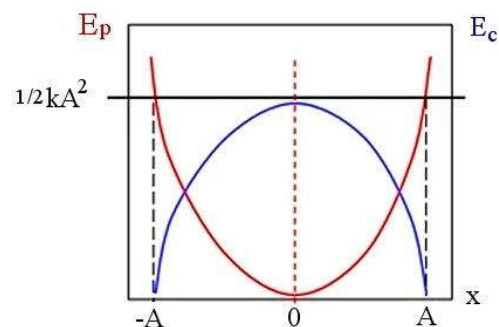
8.4 Energía en el MAS

Gráfico de la energía

Cómo la única fuerza que realiza trabajo en el sistema cuerpo-resorte es la fuerza elástica, el sistema será conservativo y la energía mecánica se mantendrá constante. Por tanto

Si se representa en un gráfico la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ de una masa puntual que realiza un MAS, se obtiene una parábola como la de la figura 8.9.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{ (constante).}$$



Sustituyendo x y v por sus correspondientes expresiones obtenidas a partir de la ecuación (1) de la sección anterior y tomando en cuenta que $\omega^2 = k/m$:

Figura 8.9. Energía potencial elástica y energía cinética en un MAS.

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)$$

En el gráfico también se ha superpuesto el

valor constante de la energía mecánica $\frac{1}{2} kA^2$.

Los puntos donde $x = \pm A$ son los *puntos de retorno*, donde la energía cinética se hace cero ($v = 0$). En forma analítica, lo anterior se expresa de la siguiente forma:

$$E_c = E - E_p = \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2)$$

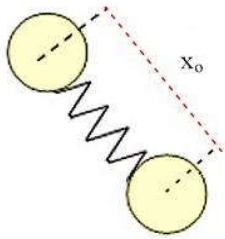


Figura 8.10. Modelo de molécula biatómica.

Si $x = \pm A \rightarrow E_c = 0$. También se puede ver de esta expresión que si $x = 0$, entonces la energía cinética alcanza su máximo valor,

$$E_c = \frac{1}{2} kA^2.$$

A los efectos de las vibraciones, una molécula biatómica como las del O_2 o N_2 gaseoso se puede considerar, en primera aproximación, formada por dos pequeñas esferas de igual masa unidas por un resorte, oscilando alrededor de una posición de equilibrio x_0 (figura 8.10). Su energía será, por tanto, $\frac{1}{2} kA^2$. Esta energía microscópica se manifiesta en lo macroscópico como *temperatura*, por la que la temperatura del gas aumenta con la amplitud de la vibración de sus moléculas.

Ejemplo. Un cuerpo de masa m realiza un MAS de acuerdo a la ecuación $x = 10.2\text{sen}(5t + 0.2)$, donde x está en centímetros y t en segundos. Calcular: a) amplitud,

b) frecuencia angular, c) periodo, d) fase inicial, e) fase para $t = 2\text{s}$, f) velocidad en $t = 0.59\text{ s}$.

Resolución:

a) $A = 10.2\text{ cm}$

b) $\omega = 5\text{ rad/s}$

c) $T = 2\pi/\omega = 2\pi/5 = 0.4\pi\text{ s}$

d) $\delta = 0.2\text{ rad}$

e) $(5t + 0.2)|_{t=2} = 10.2\text{ rad}$

f) $v = A\omega\cos(\omega t + \delta)$

$$= 10.2 \times 5 \times \cos(5 \times 0.59 + 0.2)$$

$$= 51 \cos(3.15) \approx 51 \cos(180^\circ)$$

$$= -51\text{ m/s.}$$

8.5 Movimiento armónico amortiguado

Considere el dispositivo de la figura 8.11, donde la esfera que está sumergida en el líquido tiene masa despreciable.

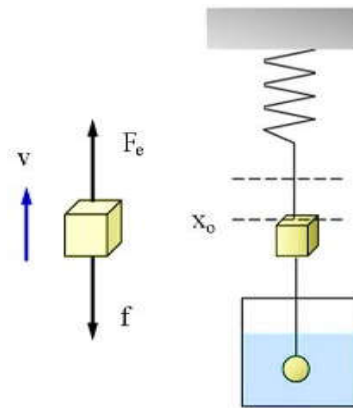


Figura 8.11. Movimiento armónico amortiguado.

El resorte tiene una constante k , y el cubo es de masa m . Al estar sumergida en un fluido, la esfera se encuentra sometida a fuerzas de fricción por viscosidad que son

proporcionales a la velocidad del cuerpo:

$$\vec{f} = -b\vec{v}.$$

El coeficiente b depende de las características del líquido y de la forma del cuerpo sumergido, y tiene dimensiones de $N/m/s$.

Cuando al bloque se le suministra un impulso inicial, el sistema comienza a oscilar, pero la fricción hace que vaya perdiendo energía y que la amplitud de las oscilaciones disminuya, hasta detenerse por completo. Como la fuerza de fricción siempre se opone al sentido del movimiento, el diagrama de fuerzas en un instante determinado es el de la figura 8.11.

Como se analizó con anterioridad, el efecto de la atracción gravitatoria es hacer que el cuerpo oscile alrededor de una posición de equilibrio x_0 que cumple la relación $kx_0 = mg$. Por tanto, en lo que sigue sólo tendremos en cuenta el análisis de la fuerza elástica y la de fricción, y no se tomará en cuenta el peso del cuerpo.

Note que el sentido de la fuerza F_e y el de f varían en dependencia de si el cuerpo está subiendo o si está bajando. Sin embargo, es posible plantear el problema en forma vectorial de manera general:

$$\vec{F}_e + \vec{f} = m\vec{a},$$

y como el movimiento es en una dimensión:

$$-kx - bv = ma.$$

Sustituyendo la aceleración y la velocidad por las correspondientes derivadas y agrupando términos, se obtiene una ecuación diferencial de 2do orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

El término b/m tiene dimensiones de t^{-1} , como se comprueba con facilidad:

$$\frac{[b]}{[m]} = \frac{N}{kg} = \frac{kgm/s^2}{kg} = \frac{1}{s}.$$

De aquí que resulta conveniente designar

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau},$$

donde τ se denomina *tiempo de relajación*, por razones que quedarán esclarecidas más adelante.

Expresando $d^2x/dt^2 = x''$, $dx/dt = x'$, $k/m = \omega_0^2$ (frecuencia del oscilador libre) se obtiene:

$$x'' + \frac{1}{\tau} x' + \omega_0^2 x = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial es del tipo $x = f(t)$, con dos constantes arbitrarias que deben ser evaluadas a partir de las condiciones iniciales. La ecuación tiene diferentes soluciones en dependencia de si ω_0 es mayor, igual o menor que $1/2\tau$.

Caso 1. Movimiento sub-amortiguado:

$$\omega_0 > \frac{1}{2\tau}.$$

La solución toma la forma:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \text{sen}(\omega t + \delta)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

(solución real cuando $\omega_0 > 1/2\tau$).

Note que la solución se puede interpretar

como un MAS con amplitud variable

$$A' = Ae^{-t/2\tau} \text{ (figura 8.12).}$$

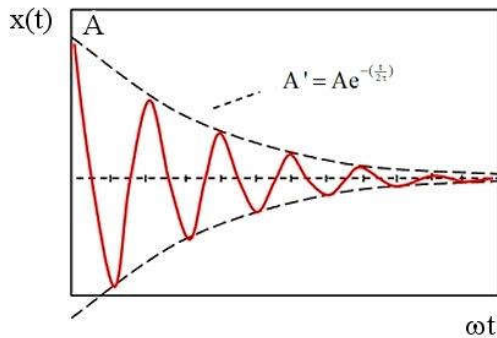


Figura 8.12. Movimiento armónico amortiguado.

Caso 2. Movimiento crítica amortiguado:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\tau}.$$

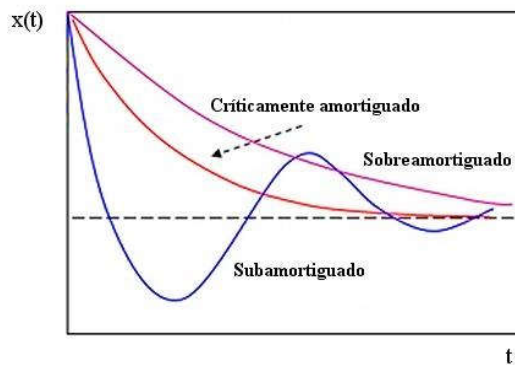


Figura 8.13. Diferentes casos de movimiento amortiguado.

En este caso

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = 0.$$

El sistema no oscila y la solución tiene la forma:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \text{sen} \delta.$$

Si el cuerpo se separa de la posición de equilibrio, regresa a ella sin oscilar (figura

8.13).

Caso 3. Movimiento sobreamortiguado:

$$\omega_0 < \frac{1}{2\tau}.$$

En este caso ω es un número complejo (se obtiene un número imaginario para la frecuencia ω). Las expresiones que se obtienen son complejas y no serán analizadas. Sólo es necesario señalar que el resultado es muy parecido al del caso anterior. La diferencia esencial radica en que se tarda un tiempo mayor en alcanzar el estado de equilibrio (figura 8.13).

Como ejemplo de aplicación de los sistemas de amortiguamiento mecánico se pueden mencionar los amortiguadores de puertas, autos y otros vehículos. Estos amortiguadores incluyen un resorte acoplado a un sistema hidráulico que regula la compresión o torsión del resorte, para que éste recupere con lentitud su tamaño inicial. En los amortiguadores que se colocan en las puertas por lo general se busca que trabajen en régimen crítico, para así lograr que la puerta se cierre en el menor tiempo posible, pero sin golpear el marco.

8.6 Energía en el movimiento subamortiguado

Como existe la fricción por viscosidad, en el movimiento armónico amortiguado hay disipación de energía. En el caso subamortiguado la energía del oscilador se obtiene sustituyendo el valor decreciente de la amplitud,

$$A' = Ae^{-t/2\tau},$$

en la expresión de la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} kA'^2$$

$$E = \frac{1}{2} k \left(A e^{-t/2\tau} \right)^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 e^{-t/\tau}$$

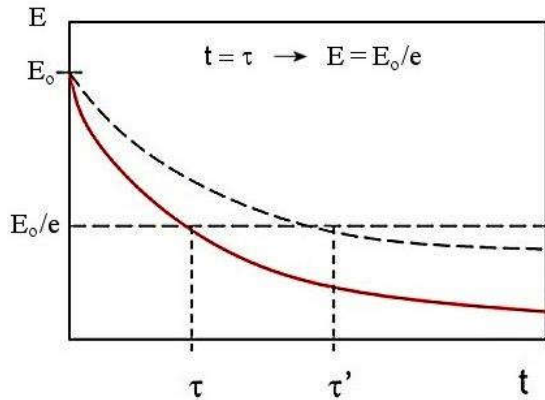


Figura 8.14. Tiempo de relajación

Llamando E_0 a la energía inicial $\frac{1}{2} k A^2$;

$$E = E_0 e^{-t/\tau}$$

Note que cuando $t = \tau$, entonces $E = E_0/e$, donde $e \approx 2.7172$ es la base de los logaritmos neperianos.

De aquí que (ver gráfico),

el tiempo de relajación τ es el tiempo que tarda la energía del oscilador en disminuir e veces.

Mientras mayor es el tiempo de relajación, más tiempo tarda en disminuir la energía del oscilador. En la figura 8.14, $\tau' > \tau$ indica que la energía disminuye con mayor lentitud.

8.7 Movimiento armónico forzado

Considere la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado de la sección anterior, a la que se le adiciona una fuerza *externa* del tipo

$$F = F_0 \text{sen}(\omega_e t).$$

El término ω_e representa una frecuencia externa que, en general, difiere de la frecuencia propia del sistema $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. La ecuación diferencial del movimiento amortiguado toma entonces la forma:

$$x'' + \frac{1}{\tau} x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega_e t)$$

Es posible demostrar que esta ecuación tiene una solución del tipo

$$x(t) = x_0 \text{sen}(\omega_e t + \phi), \quad (1)$$

donde

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\left[\left(\omega_e^2 - \omega_0^2 \right)^2 + \left(\omega_e/\tau \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{\omega_e/\tau}{\omega_e^2 - \omega_0^2}$$

Análisis de la solución

- De la ecuación (1) se ve de inmediato que el sistema vibra con la frecuencia impuesta ω_e y no con la frecuencia propia o natural ω_0 .
- El movimiento no es amortiguado (la amplitud x_0 es constante en el tiempo).
- x_0 depende de la frecuencia de la fuerza externa, y tiene un máximo cuando $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 1/2\tau^2$. El fenómeno se conoce como *resonancia* (figura 8.15).

Por lo general sólo interesan los casos donde la disipación de energía es pequeña (gran τ) y el término $1/2\tau^2$ es muy pequeño y puede despreciarse en comparación con ω_0 . La condición de resonancia queda entonces como $\omega_e \approx \omega_0$.

Este resultado indica que la máxima ampli-

tud de las oscilaciones tiene lugar cuando la frecuencia externa coincide aproximada con la frecuencia de las oscilaciones propias del circuito, $\omega_o = (k/m)^{1/2}$.

Considerando $1/2\tau \approx 0$ y $\omega_e = \omega_o$ en las expresiones anteriores se obtiene que, en la resonancia:

$$x_{o, \text{res}} = \frac{F_o \tau}{\omega_e m}$$

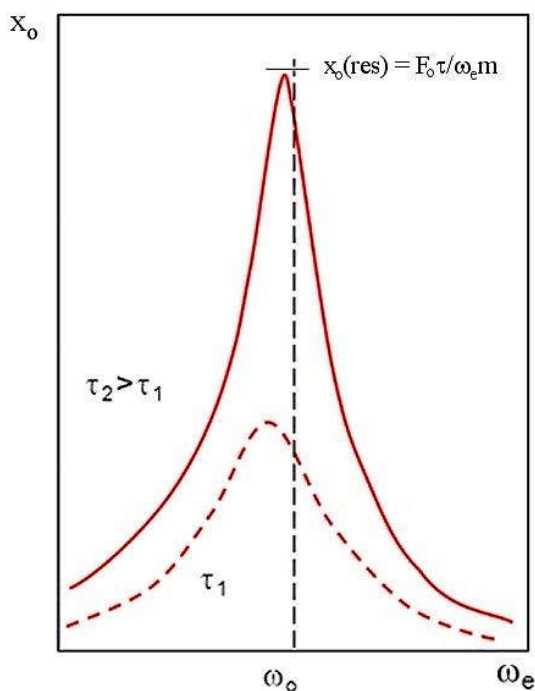


Figura 8.15. Resonancia mecánica

Según esta expresión, aunque la fuerza aplicada F_o sea pequeña, si las pérdidas de energía son también pequeñas ($\tau \rightarrow \infty$), entonces la amplitud x_o en resonancia también puede tender al infinito. La amplitud se puede hacer tan grande que origine la rotura del sistema o su desarticulación.

El término resonancia se aplica a cualquier situación en la que un sistema mecánico, estructural o acústico vibra en respuesta a una fuerza aplicada con la frecuencia natu-

ral del sistema o con una frecuencia próxima. La frecuencia natural es aquella a la que el sistema vibraría si lo desviáramos de su posición de equilibrio y lo dejáramos moverse libre.



Figura 8.16. Destrucción del puente de Tacoma Narrows en 1940.

Si se excita un sistema mediante la aplicación continuada de fuerzas externas con esa frecuencia, la amplitud de la oscilación va creciendo de manera continua, y puede llevar a su destrucción. La rotura del puente colgante de Tacoma Narrows en Puget Sound, Washington (EEUU), en 1940, fue causado por la resonancia de las ráfagas de viento con la frecuencia natural de torsión de la estructura. Este es un ejemplo típico mencionado en muchos textos, aunque en realidad el proceso fue algo más complejo

que una simple resonancia (figura 8.16).

Muchos problemas graves de vibración en ingeniería son debidos a la resonancia. Por ejemplo, si la frecuencia natural de la carrocería de un automóvil es la misma que el ritmo del motor cuando gira a una velocidad determinada, la carrocería puede empezar a vibrar o a dar fuertes sacudidas. Esta vibración puede evitarse al montar el motor sobre un material amortiguador, por ejemplo hule o goma, para aislarlo de la carrocería.

Potencia intercambiada

Analicemos la potencia absorbida proveniente de la fuente externa en el movimiento armónico forzado. Para la potencia instantánea, aplicando $v = dx/dt$, se obtiene:

$$P = Fv = F_0 \text{sen}(\omega_e t) x_0 \cos(\omega_e t + \varphi) \omega_e$$

$$P = F_0 x_0 \omega_e \text{sen}(\omega_e t) \cos(\omega_e t + \varphi)$$

Interesa calcular la potencia media. Para ello hace falta resolver la integral

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt,$$

donde T representa un período de la oscilación (teorema del valor medio). Resolviendo esta integral se llega a:

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega_e^2 / \tau}{\left(\omega_e^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\omega_e / \tau\right)^2}. \quad (1)$$

Analizando el denominador de esta expresión se ve que ahora se cumple, sin ninguna aproximación, que P_m es máxima cuando $\omega_e = \omega_0$. Estableciendo esta igualdad en (1) se obtiene:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m} \tau.$$

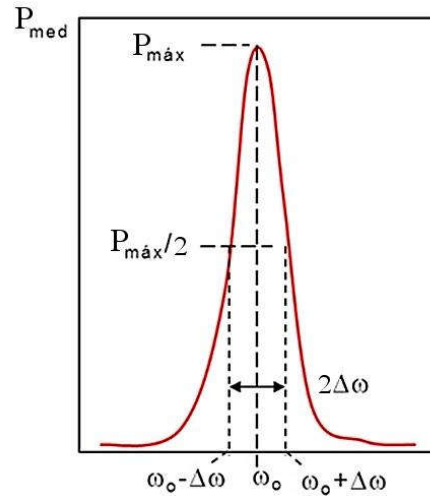


Figura 8.17. Potencia intercambiada en el movimiento armónico forzado.

Se define el *ancho de la curva de resonancia* como el valor $2\Delta\omega$ que corresponde a la mitad de la potencia máxima absorbida (figura 8.17).

Relación entre τ y $\Delta\omega$

La potencia entregada se reduce a la mitad de la potencia máxima cuando el denominador en la expresión (1) se duplica. El denominador se duplica cuando en vez de ser $\omega_e^2 - \omega_0^2 = 0$ (potencia máxima) se cumple la relación

$$\omega_e^2 - \omega_0^2 = \omega_e / \tau.$$

Por otra parte, en la figura 8.17 se ve que cuando P_m se reduce a la mitad, $\omega_e = \omega_0 \pm \Delta\omega$. Como $\omega_e^2 - \omega_0^2 = (\omega_e - \omega_0)(\omega_e + \omega_0)$, sustituyendo en la ecuación anterior:

$$(\omega_0 + \Delta\omega - \omega_0)(\omega_0 + \Delta\omega + \omega_0) = (\omega_0 + \Delta\omega) / \tau$$

$$\Delta\omega(2\omega_0 + \Delta\omega) = \omega_0 / \tau + \Delta\omega / \tau.$$

Considerando sólo los casos en que las pérdidas son pequeñas, entonces $\Delta\omega / \tau \rightarrow 0$ (por ser $\Delta\omega$ pequeño y τ grande). Dividiendo la expresión anterior por ω_0 :

$$2\Delta\omega + \Delta\omega^2/\omega_0 = 1/\tau.$$

El término $\Delta\omega^2/\omega_0$ también se puede despreciar, ya que por lo general $\Delta\omega^2 \ll \omega_0$, obteniéndose al final que $2\Delta\omega \approx 1/\tau$ y, por tanto,

$$\tau = \frac{1}{2\Delta\omega}.$$

Como el tiempo de relajación es una medida de las pérdidas de energía, esta expresión nos dice que es posible medir las pérdidas en un sistema resonante analizando el ancho de la curva de la potencia absorbida en función de la frecuencia. Este método de medir relajaciones es muy utilizado en la tecnología, con diversos fines.

El *factor de calidad* (Q) de la curva de resonancia se define por la relación

$$Q = \omega_0/2\Delta\omega.$$

Este factor puede expresarse en función de τ a partir de la expresión anterior: $Q = \omega_0\tau$. Un tiempo grande de relajación (gran Q) significa que hay pocas pérdidas de energía, y también que la curva de resonancia es estrecha ($2\Delta\omega$ pequeño). El factor de calidad es una *cifra de mérito* muy usada en ingeniería para comparar resonancias de diversos tipos.

Resonancia magnética. La imagen de la figura 8.18, obtenida por resonancia magnética nuclear (RMN) para diagnóstico, muestra el cerebro, las vías respiratorias superiores y los tejidos blandos de la cara y cabeza de un adulto. En la RMN resuena la frecuencia de precesión del momento magnético de los protones del agua con una señal externa de radiofrecuencia. La imagen se construye midiendo la absorción de la radiación en muchos puntos e integrando

después toda la información por medios de computación (tomografía).

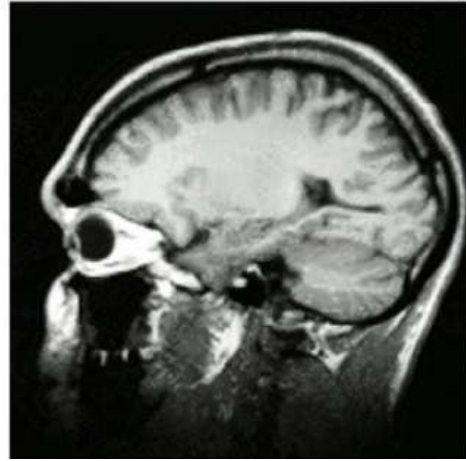


Figura 8.18. Imágenes de la cabeza (cortes tomográficos) obtenidas por técnicas de resonancia magnética.

Ejemplo

La Q de una resonancia en un experimento de RMN en protones, a la frecuencia de 21 MHz, es 250.

a) ¿Cuál es el ancho de la curva de resonancia? b) ¿Cuál es el tiempo de relajación del protón en esas condiciones?

a)

$$Q = \omega_0/2\Delta\omega = f_0/2\Delta f$$

$$2\Delta f = f_0/Q = 21/250$$

$$= 0.084 \text{ MHz.}$$

b)

$$\tau = 1/2\Delta\omega = 1/(2\pi \cdot 2\Delta f)$$

$$= 1/(6.28 \times 0.084 \times 10^6)$$

$$= 1.89 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

(Durante estos $1.89 \mu\text{s}$ la energía del protón excitado disminuye e veces)

8.8 Ondas mecánicas transversales

Una onda mecánica es una vibración que se propaga en un medio determinado como, por ejemplo, la superficie de un líquido, el seno de un sólido, una cuerda, o el aire. Una característica común a todas las ondas es que se transmiten el movimiento y la energía a lo largo de una dirección sin que haya transmisión neta de masa.

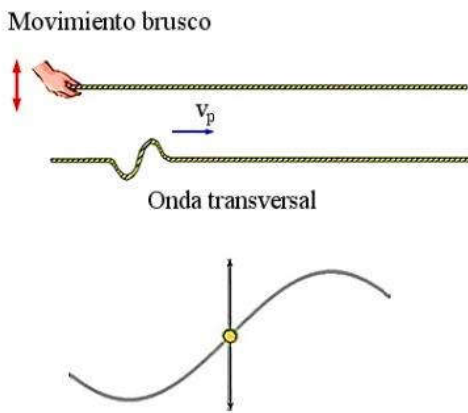


Figura 8.19. Arr. Pulso transmitido por una cuerda. Ab. Movimiento vertical de un punto de la cuerda.

Por ejemplo, considere un impulso que se propaga por una cuerda (figura 8.19). Cuando se tiene una cuerda sujeta por uno de los extremos y se agita brusca sin soltar la cuerda, aparece una onda que se propaga con cierta velocidad v_p .

La velocidad de propagación de la onda se

designa por v_p . Los puntos de la cuerda oscilan de forma transversal a la dirección de propagación, pero no avanzan a lo largo de la cuerda. Se propaga la deformación, pero no la masa de la cuerda, aunque sí hay propagación de energía.

Cuando se producen impulsos sucesivos, se obtiene un *tren de ondas*. Si la excitación en el eje y sigue la dependencia temporal de un MAS, cada segmento de la cuerda se moverá en el eje y de acuerdo a esa dependencia temporal:

$$y = y_m \text{sen}(\omega t + \delta)$$

donde y_m representa el valor máximo de y (amplitud).

El tipo de onda aquí descrito es *transversal*, donde la dirección de vibración es perpendicular a la dirección de propagación. También son posibles las ondas *longitudinales*, que serán analizadas más adelante.

Ecuación de propagación de la onda

Considere una onda que se propaga a lo largo del eje x , asumiendo que el medio de propagación es perfecta elástico (cuerda elástica, superficie de un líquido, etc.). Equivale a asumir que no hay pérdidas de energía y la onda no se deforma durante su propagación.

Supongamos que para $t = 0$ la función $y = f(x)$ describe la forma de la onda con respecto al sistema de referencia considerado. Un valor particular de esa función sería $y = f(x')$ (figura 8.20). Al transcurrir un intervalo de tiempo t , la onda habrá avanzado $\Delta x = v_p t$. Significa que en ese instante en el punto $x'' = x' + v_p t$ la elongación de la cuerda toma el valor $y = f(x')$. Sustituyendo x' en función de x'' en esta última expresión, es

posible escribir

$$y = f(x'' - v_p t).$$

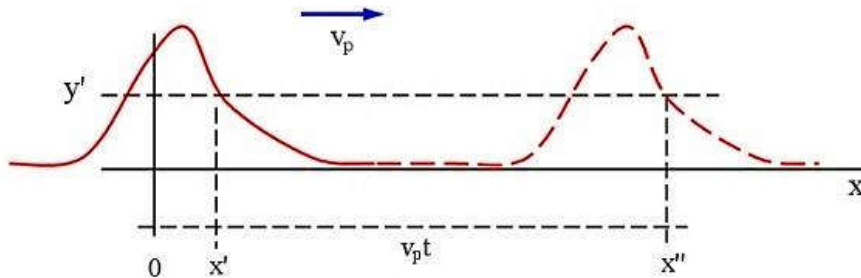


Figura 8.20. Propagación de una onda

La relación anterior se debe cumplir cualesquiera que sean los puntos x' y x'' considerados, siempre que estén separados por una distancia $v_p t$. Por tanto, omitiendo el supraíndice en x'' :

$$y = f(x - v_p t).$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de la onda*. Cualquier función f que presente un argumento del tipo $x - v_p t$ representa una onda que se propaga de izquierda a derecha.

Note que para $t = 0$ se obtiene $y = f(x)$, que representa la forma de la onda en el instante inicial. Para cualquier t posterior representa la forma de la onda desplazada un intervalo $v_p t$ hacia la derecha a partir de la posición inicial.

Cuando la onda se desplaza de derecha a izquierda, se obtiene una expresión similar, pero con el signo cambiado; $f(x + v_p t)$. En general,

$$y = f(x \pm v_p t).$$

Note que la ecuación de la onda es una función de dos variables de conjunto (posición y tiempo); $y = f(x, t)$.

8.9 Propagación de un MAS

En la figura 8.21, el bloque oscila con un movimiento armónico simple del tipo $y = y_m \text{sen}(\omega t + \delta)$, y una cinta de papel se va enrollando en la derecha con una cierta velocidad v_p gracias a algún mecanismo auxiliar.

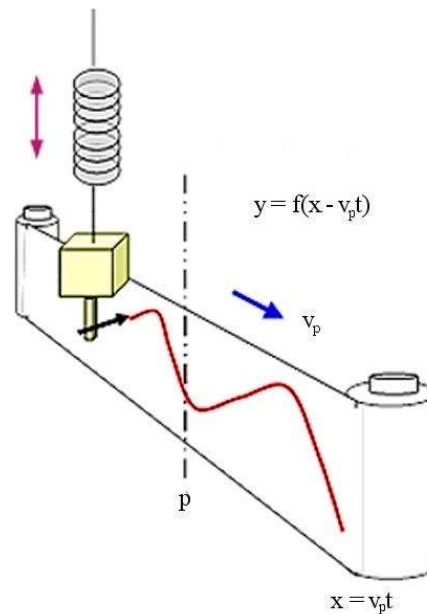


Figura 8.21. Onda generada por un MAS.

El trazo de la pluma representa entonces una onda que se propaga a la derecha con velocidad v_p . Es posible demostrar que si la

señal que se propaga es la de un MAS, como ocurre en este caso, entonces la ecuación de propagación de la onda $y = f(x \pm vt)$ toma la forma

$$y = y_m \text{sen}(kx \pm \omega t). \quad (1)$$

El parámetro $k = 2\pi/\lambda$ se denomina *número de onda* y la letra griega *lambda* (λ) representa la *longitud de onda* (distancia entre dos “valles” o “crestas” sucesivas de la onda); y_m es la *amplitud* de la onda.

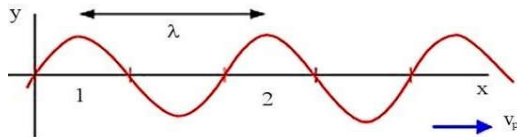


Figura 8.22. Onda transversal

De manera similar al MAS, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, donde la frecuencia f representa ahora el número de oscilaciones por unidad de tiempo *en un punto determinado de la onda*, y T el tiempo en que tarda *uno de esos puntos* en dar una oscilación completa.

En la figura 8.22, cuando la deformación del medio avance desde el punto (1) al punto (2) y recorra una longitud de onda λ , el punto (1) habrá bajado y subido de nuevo a ocupar la misma posición que tenía al inicio (habrá transcurrido un período). Por tanto, es posible escribir

$$v_p = \lambda / T = \lambda f,$$

y también, como $f = 1/T$; $v_p = \lambda f$.

Se acostumbra expresar esta relación sustituyendo en función de ω y k :

$$v_p = \omega / k.$$

Para analizar el significado de la ecuación de la onda $y = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$ es necesario hacer el análisis en dos etapas, ya que la

función es de dos variables; $y = y(x,t)$. Para ello hay que mantener el tiempo $t = \text{constante}$ o la elongación $x = \text{constante}$ por separado.

En un instante determinado $t = t_0 = \text{constante}$;

$$y = y_m \text{sen}(kx - \phi),$$

y la función depende solo de x : $y = f(x)$. La ecuación de la onda describe entonces la *forma* en ese instante particular. Equivale a tomar una “foto” de la onda (8.22).

Por el contrario, cuando se fija un valor determinado de x , por ej., $x = x_0$, entonces

$$y = y_m \text{sen}(\omega t + \phi),$$

y se obtiene la descripción de un MAS en el punto x_0 considerado (figura 8.23).

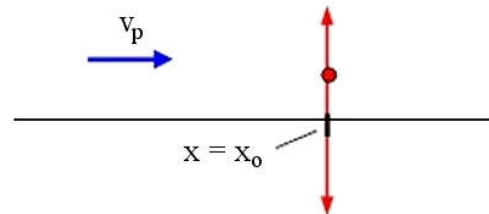


Figura 8.23. $y=f(x,t)$ para t constante

No es posible representar en un mismo gráfico ambas dependencias a la vez. Sólo es posible hacerlo en forma animada. Para tener una imagen de la onda, es necesario representarse mental la onda como una integración de las figuras 8.22 y 8.23, donde todos los puntos se encuentran a la vez en movimiento.

Aunque en la onda no hay transmisión de masa, sí hay transmisión de energía. No existe una expresión general para la energía que es capaz de transmitir la onda. Hay que determinarla para cada caso particular. Por ejemplo, para una onda que se propaga en

una cuerda, la potencia media transmitida tiene la forma

$$P = 2\pi^2 y_m^2 f^2 v_p \mu,$$

donde μ representa la masa por unidad de longitud de la cuerda.

8.10 Interferencia

El término interferencia se utiliza para designar la interacción que tiene lugar cuando dos o más trenes de ondas se superponen en una misma región del espacio.

A título de ejemplo, considere la fotografía de la figura 8.24, donde dos mecanismos excitan ondas de igual frecuencia y similar amplitud cerca del centro de una bandeja con agua. La iluminación se ha escogido de forma adecuada para resaltar los máximos y mínimos de interferencia en las ondas que se forman en la superficie del líquido.

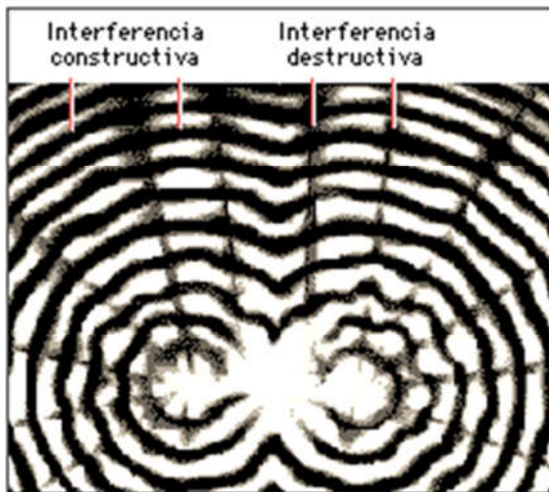


Figura 8.24. Interferencia de ondas mecánicas.

Interferencia de fuentes puntuales

El diagrama de interferencias que se muestra en 8.24 se obtuvo moviendo dos varillas de forma rítmica, arriba y abajo, en una bandeja de agua. Se pueden observar efec-

tos similares al meter y sacar del agua dos dedos u observando a dos patos nadando en un estanque cerca uno de otro. Las ondas procedentes de una de las fuentes puntuales (la varilla, el dedo o el pato) interfieren con las que proceden de la otra fuente. Si dos crestas llegan juntas a un punto, se superponen para formar una cresta muy alta; si dos valles llegan juntos, se superponen para formar un valle muy profundo (interferencia constructiva). Los anillos brillantes y oscuros son zonas de interferencia constructiva.

Si la cresta de una fuente llega a un punto a la vez que el valle de la otra, se anulan una a la otra (interferencia destructiva). Las líneas oscuras radiales son zonas de interferencia destructiva. Los tipos de interferencia constructiva y destructiva se representan en forma esquemática en la figura 8.25.

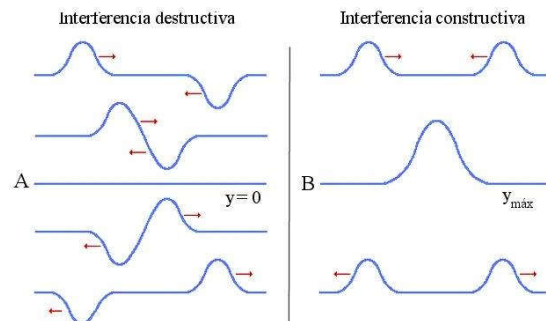


Figura 8.25. Interferencia constructiva/destructiva.

Si la amplitud de los pulsos es similar, la elongación puede llegar a anularse por completo en la región de interferencia, como ocurre en el caso (A). Se encuentra en la práctica que, si la amplitud de la onda no es muy grande, durante la interferencia se cumple el principio de superposición.

Principio de superposición

El principio de superposición establece que

la amplitud resultante en cada punto de la región que interfiere cumple la relación

$$y = y_1 + y_2$$

donde y_1 , y_2 representan las amplitudes de las ondas correspondientes.

Además, a los efectos de la propagación, cada onda se comporta como si la otra no estuviera presente. Significa que, a pesar de la interferencia, en lo que se refiere a la propagación del movimiento, cada onda no perturba el movimiento posterior de la otra.

Con el fin de ejemplificar el principio, considere dos ondas que se propagan a lo largo de una dirección dada:

$$y_1 = y_{m1} \text{sen}(k_1x - \omega_1t + \delta_1)$$

$$y_2 = y_{m2} \text{sen}(k_2x - \omega_2t + \delta_2).$$

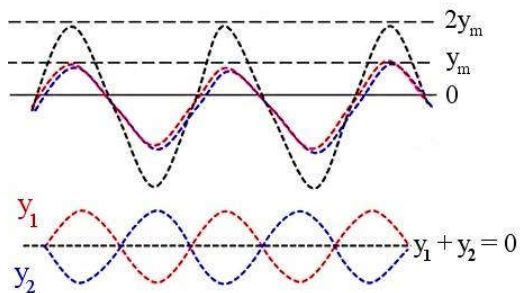


Figura 8.26. Principio de superposición. Arr.: Interferencia constructiva; ab.: destructiva.

Al sumar $y_1 + y_2$ se obtienen resultados muy diferentes en dependencia de las relaciones k_1/k_2 y ω_1/ω_2 . A continuación se muestra un ejemplo sencillo.

Considere $y_{m1} = y_{m2} = y_m$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = \delta \neq 0$. Entonces,

$$y_1 = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

$$y_2 = y_m \text{sen}(kx - \omega t).$$

Sumando $y_1 + y_2$, tomando en cuenta que

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

y agrupando términos, se obtiene:

$$y = \{2y_m \cos(\delta/2)\} \text{sen}(kx - \omega t + \delta/2).$$

Caso 1

Si además $\delta = 0$, como $\cos(\delta/2) = 1$:

$$y = 2y_m \text{sen}(kx - \omega t).$$

Se obtiene una onda resultante con la misma frecuencia y longitud de onda (ω, k) y con el doble de amplitud.

Caso 2

Si $\delta = \pi$, $\cos(\pi/2) = 0$, y no hay oscilación. Como resultado de la suma de las dos ondas no se obtiene movimiento alguno (línea recta en la figura 8.26).

Ondas estacionarias

Se forman por la interferencia de dos ondas de la misma naturaleza con igual y_m y λ que avanzan en sentido opuesto a través de un medio (cuerdas, membranas, etc.). Se pueden formar por una onda y la onda reflejada en el extremo de una cuerda tensa como en una guitarra o un violín.

En la figura 8.27 se muestran, de arriba abajo, 4 etapas de la formación de una onda estacionaria.

Considerando la suma de dos ondas que se mueven en sentido opuesto,

$$y_1 = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_m \text{sen}(-kx - \omega t),$$

al sumar se obtiene que

$$y = 2A \cos(kx) \text{sen}(\omega t).$$

Si $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc., $\cos kx = \pm 1$, se obtiene $y=2y_m$ (vientre)

Si $kx = \pi/2, 3\pi/2, \text{etc.}, \cos kx = 0$ (nodo).

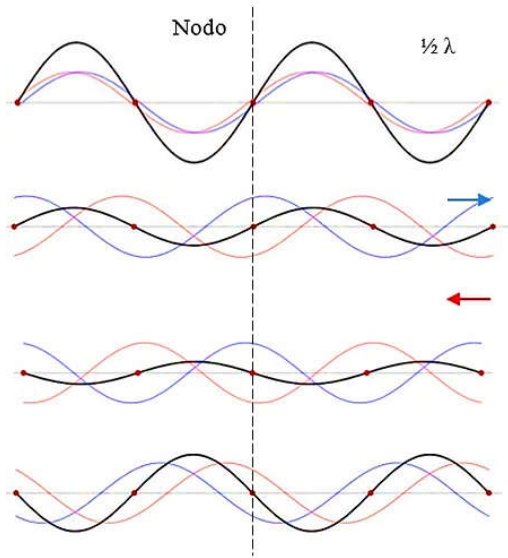


Figura 8.27. De arriba hacia abajo, formación de una onda estacionaria por dos ondas iguales que viajan en sentido contrario (ver texto)

8.11 Ondas longitudinales

La onda longitudinal se caracteriza porque la dirección de vibración es paralela a la dirección de propagación.

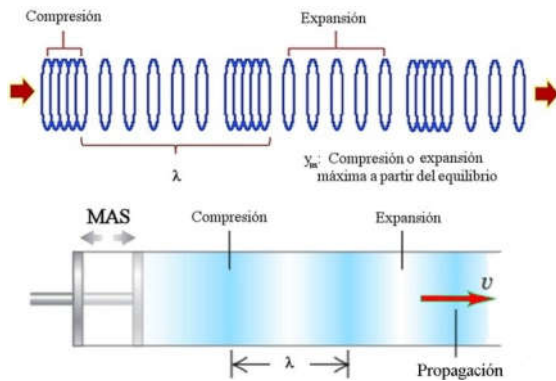


Figura 8.28. Onda longitudinal. Se alternan regiones de expansión y de compresión de las capas de aire. Se describe considerando a y_m como el máximo de la posición de una capa a partir de su posición de equilibrio. Si la excitación es un MAS, se propaga una onda sinusoidal.

Un ejemplo típico de onda longitudinal es el de la propagación del sonido en el aire. En la figura 8.28 se representa una onda longitudinal.

Sonido

El sonido es la sensación psicofisiológica originada al interactuar la vibración del aire con la membrana timpánica, cuando la frecuencia de las oscilaciones varía entre 20 y 20 000 Hz aproximada. El tímpano recoge las vibraciones del aire, que se traducen en la cóclea en impulsos eléctricos y van al cerebro (figura 8.29).

Durante la transmisión del sonido oscilan las moléculas de aire (ordenadas en capas) alrededor de sus posiciones de equilibrio. La elongación de una capa cualquiera a partir del equilibrio viene dada por una expresión similar a la de la onda transversal:

$$y = y_m \text{sen}(kx - \omega t).$$

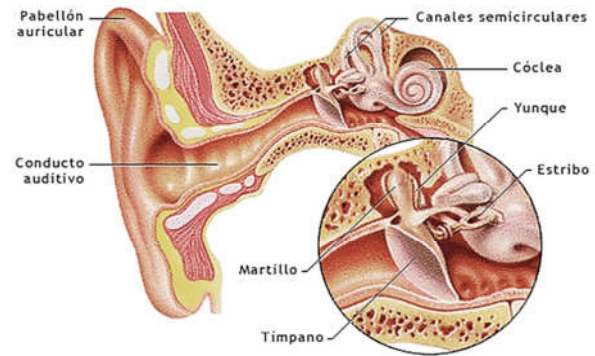


Figura 8.29. Oído interno

Se demuestra que también es posible considerar la onda como una onda de presión:

$$p = p_m \text{sen}(kx - \omega t),$$

donde $p_m = k\rho v_p^2 y_m$ y ρ es la densidad del medio. Las ondas longitudinales se pueden presentar tanto en gases como en sólidos y

líquidos, mientras que las transversales sólo se pueden presentar en medios sólidos. La velocidad de propagación es característica del medio considerado (tabla 8.1).

TABLA 8.1 VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA EN DIFERENTES MEDIOS	
Medio	v_p (m/s)
caucho	54
aire	336
agua	1450
aluminio	5100
granito	6000

Número de Mach

La velocidad del sonido en el aire a 20°C a nivel del mar, con 50% de humedad relativa, es de 343 m/s. Como esta velocidad puede variar en función de los factores mencionados, es usual utilizar los números de Mach (M) 1, 2, etc. para indicar la velocidad relativa cuando un objeto avanza en el aire a velocidades comparables al sonido; los aviones de combate contemporáneos son capaces de alcanzar estas velocidades de manera regular.

Cualquier objeto que viaje a velocidades mayores que el sonido *crea una onda de choque*, como se muestra en las figuras 8.30 y 8.31.

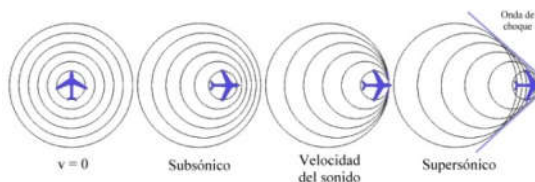


Figura 8.30. Formación de una onda de choque. De izquierda a derecha: 1. objeto en reposo; 2. velocidad subsónica; 3. transónica y 4. supersónica.

Según el valor del número de Mach, los regímenes de vuelo se clasifican en:

- subsónico ($M < 0.7$),
- transónico ($0.7 < M < 1.2$),
- supersónico ($1.2 < M < 5$)
- hipersónico ($M > 5$).

En la figura 8.31 se muestra un avión a reacción rompiendo la barrera del sonido. El disco blanco en la parte trasera se origina por la condensación del vapor de agua a causa de la diferencia de presión generada por la onda de choque. Algo similar se observa tras la cabina del piloto.

En la actualidad se han hecho comunes los misiles que superan la barrera hipersónica. Los sistemas de radar contemporáneos son incapaces de detectar y rastrear los misiles hipersónicos (figura 8.31a). En otras aplicaciones como por ejemplo, la aviación comercial, el control térmico a causa de la fricción del aire es importante para evitar el desgaste prematuro, así como la reacción con los gases atmosféricos, a causa de las altas temperaturas que alcanza el fuselaje.



Figura 8.31. Izq. Rompiendo la barrera del sonido en un FA18 Hornet. Cada parte saliente del avión genera su propia onda de choque. Der. Misil hipersónico “Daga” (*Kinzhal*) cargado por un Mig-31K.

La descarga de un rayo también genera ondas de choque en las que, al inicio, el ruido

se propaga a una velocidad de hasta 40 veces la velocidad normal del sonido. La onda de choque causa en el oído la sensación de un chasquido; cuando se escucha, es un indicio de que el rayo cayó muy cerca. La velocidad de la onda de choque disminuye con rapidez a medida que la perturbación se aleja de la fuente, hasta convertirse en una onda acústica ordinaria.

Como la observación del rayo es casi instantánea, a veces se afirma de manera errónea que es posible estimar la distancia hasta el lugar donde ocurrió la descarga multiplicando la velocidad de propagación de 340 m/s por los segundos transcurridos entre la visión del rayo y la audición del trueno. Pero lo cierto es que, al inicio, la velocidad de la onda de choque es mucho mayor que la del sonido ordinario y sólo disminuye más tarde hasta convertirse en una onda sónica normal, razón por la cual ese tipo de cálculo no proporciona resultados correctos. Sin embargo, sí resulta posible estimar de esta manera la distancia hasta el lugar donde ocurrió un disparo de cañón, pues la onda de choque generada por el estallido se convierte en acústica a sólo 2 m de la pieza.

Pulsación

Tal como ocurre en las ondas transversales, la interferencia también tiene lugar en las ondas longitudinales. El oído no es capaz de diferenciar frecuencias muy cercanas, pero es más sensible a las diferencias de amplitud (intensidad). Si en el sonido tiene lugar la interferencia con ondas de frecuencia muy cercanas, $\nu_1 \approx \nu_2$, aparecen pulsaciones, que consisten en variaciones detectables de la amplitud que se repiten a muy baja frecuencia. el oído es capaz de percibir

pulsaciones de hasta 6 o 7 por segundo (figura 8.32).

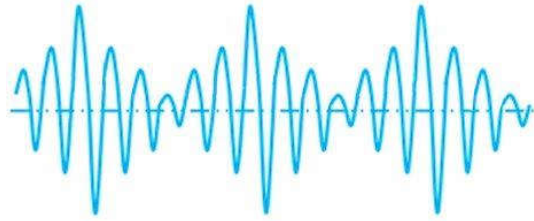


Figura 8.32. Pulsaciones

Por ejemplo, Cuando el oído percibe dos ondas sinusoidales de $\nu = 300$ y $\nu = 304$ Hz, detecta una sola de 302 Hz, con variaciones de amplitud que ocurren con frecuencia de 2Hz (4 veces por segundo, 2 pulsaciones por período). Frecuencia detectada por el oído: $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$; frecuencia de la pulsación (o de batido): $\frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)$.

8.12 Infrasonido y ultrasonido

Cuando la frecuencia cae por debajo de 20 Hz, nos encontramos en la región de los tonos ultrabajos o infrasonido. A pesar de ser inaudibles, estas frecuencias por lo general son dañinas para el organismo. Cuando las intensidades son grandes pueden causar dolores de cabeza, náuseas y sensación de temor.

Las frecuencias mayores de 20 000 Hz corresponden a los tonos superagudos o ultrasonido, de amplia aplicación en la tecnología contemporánea como alarmas electrónicas, sensores de movimiento y equipos de diagnóstico médico. Entre otras muchas aplicaciones médicas, la ecografía de ultrasonido se utiliza para controlar el crecimiento, desarrollo y bienestar del feto, y también se puede emplear para comprobar la fecha de la concepción.



Figura 8.33. Sistema de localización de los delfines.

El umbral de frecuencia de algunos animales es mayor que el de los humanos; los perros son capaces de escuchar el sonido a frecuencias más altas que las personas; delfines y murciélagos emplean el ultrasonido como sistema de orientación (figura 8.33).

8.13. Ondas sísmicas

Son ondas transversales y longitudinales que se radian cuando un sismo tiene lugar. Hasta un 10% de la energía liberada en un sismo se puede disipar en forma de ondas sísmicas, que se propagan en todas direcciones a través del planeta, y no sólo en su superficie.

Existen dos tipos principales de ondas sísmicas. Las ondas primarias P son ondas longitudinales de compresión y extensión; su velocidad de propagación varía entre 1.5 y 8 km por segundo en la corteza terrestre. Las ondas secundarias S son ondas transversales, y viajan siempre a una velocidad del 60-70% relativa a la de la onda P.

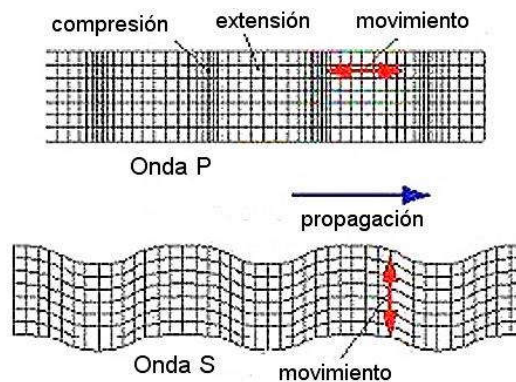


Figura 8.34. Ondas sísmicas

Las ondas P hacen oscilar el terreno en la misma dirección en que se van propagando. Las ondas S lo mueven en dirección perpendicular a la dirección de propagación (figura 8.34). La diferencia de velocidad e intensidad entre los dos tipos de ondas permite a los sismólogos determinar con rapidez la distancia hasta el sismo desde cualquier lugar. Para ello, basta medir el intervalo de tiempo que tardan ambos tipos de ondas en llegar hasta el detector (sismógrafo, figura 8.35).

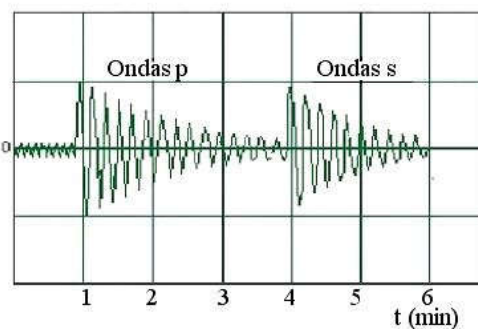


Figura 8.35. Registro de un sismógrafo.

Ejemplo

Una velocidad típica para las ondas S es de 4.5 km/s, y de 8.0 km/s para las P. Un sismógrafo que registra las ondas sísmicas capta la primera onda P proveniente de un

sismo a unos 3.0 minutos antes que la primera onda S. Suponiendo que las ondas viajan en línea recta, ¿a qué distancia tuvo lugar el terremoto?

$$t_p = x/v_p ; t_s = x/v_s$$

$$\Delta t = t_s - t_p = x(1/v_s - 1/v_p)$$

$$x = \frac{\Delta t}{\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p}} = \frac{3.0 \times 60}{\frac{1}{4.5} - \frac{1}{8.0}} = 1855.7 \text{ km}$$

Tema avanzado

8.14. Efecto Doppler

En el sonido, el efecto Doppler se refiere a la variación de la frecuencia de las ondas que llegan a un observador según si la fuente de sonido se aleja o se acerca al mismo.

Por ejemplo, en la figura 8.36, los autos se mueven de derecha a izquierda, y el micrófono está en reposo. El tono que se escucha del auto de la derecha, que se acerca al observador, es de mayor frecuencia, mientras que el tono que se aleja es de frecuencia menor.

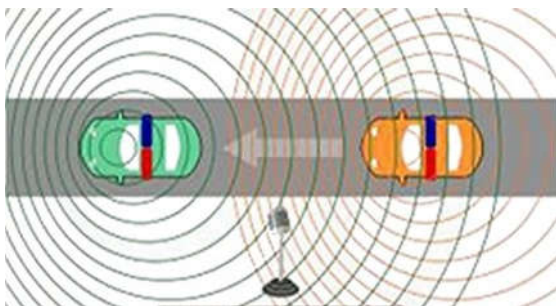


Figura 8.36. Cambios en la frecuencia del sonido en función de la velocidad relativa fuente-observador.

En el centro, observador en reposo.

Es el efecto típico que tiene lugar cuando se escucha una sirena pasar por nuestro lado. Cuando se acerca el sonido es más agudo, y

baja de tono después que pasa y se aleja. Se pueden presentar diversos casos:

Caso 1. Observador que se mueve hacia una fuente de sonido en reposo.

Recordando lo visto al estudiar el movimiento relativo:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu} ;$$

v : velocidad de la onda respecto a tierra (velocidad de propagación de la onda v_p)

v' : velocidad de la onda respecto al observador.

μ : velocidad del observador respecto a tierra (v_o)

Como v_o y v_p tienen sentido contrario, al restar los vectores hay que sumar los módulos y

$$v' = v_p + v_o.$$

$v_p = \lambda f$ respecto a tierra, donde f y λ son los valores originales emitidos por la fuente.

$v' = \lambda f'$, pues λ no cambia. Es el observador quien se mueve y recorre una distancia λ en un período $T' = 1/f'$ menor.

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v_p + v_o}{\lambda} = f + \frac{v_o}{\lambda}$$

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v_p + v_o}{\lambda}$$

$$f' = f \left(1 + \frac{v_o}{\lambda f} \right)$$

$$f' = f \left(1 + \frac{v_o}{v_p} \right).$$

Como μ y v son positivas, $f' \geq 1$ y el observador en movimiento hacia la fuente escucha una frecuencia mayor que el observador en reposo.

Caso 2. Observador que se aleja de una fuente en reposo

Si el observador se aleja de la fuente, entonces $v' = v - \mu$ y con similar razonamiento se llega a

$$f' = f \left(1 - \frac{v_o}{v_p} \right).$$

La frecuencia que oye el observador es menor que la que percibe el observador en reposo. En general,

$$f' = f \left(1 \mp \frac{v_o}{v_p} \right), \quad (1)$$

donde el signo es (+) si el observador se acerca a la fuente y (-) si se aleja.

Caso 3. Fuente que se mueve hacia un observador en reposo.

Ahora $v_o = 0$, y $v_f \neq 0$. La λ' que percibe el observador en reposo será menor que si la fuente se encuentra en reposo, porque en un período la onda avanza una distancia $v_f T$ hacia el observador y

$$\lambda' = \lambda - v_f T.$$

Sustituyendo $T = 1/f$ se obtiene:

$$\lambda' = \lambda - \frac{v_f}{f}.$$

Pero $v_p = \lambda' f' = \lambda f$, y despejando y sustituyendo λ' :

$$\frac{\lambda f}{f'} = \lambda - \frac{v_f}{f}.$$

Dividiendo por λ a ambos lados y sustituyendo $\lambda f = v_p$,

$$\frac{f}{f'} = 1 - \frac{v_f}{v_p}$$

$$f' = f \left(1 - \frac{v_f}{v_p} \right)^{-1}$$

$$f' = f \left(\frac{v_p}{v_p - v_f} \right)$$

y la frecuencia que escucha el observador es mayor ($v_p > v_f$).

Caso 4. Fuente que se aleja de observador en reposo.

Si la fuente se aleja del observador tendremos $\lambda' = \lambda + \frac{v_f}{f}$, y se obtiene

$$f' = f \left(\frac{v_p}{v_p + v_f} \right).$$

Dividiendo por v_p y combinando ambas ecuaciones

$$f' = f \frac{1}{1 \pm \frac{v_f}{v_p}} \quad (2)$$

donde el signo es + si la fuente se aleja y es (-) si se acerca.

Caso 5. Fuente y observador se mueven a la vez.

Si la fuente y el observador se mueven a la vez, ambos efectos se superponen. En la ecuación anterior (2) hay que considerar que f viene dada por la ecuación (1); es decir

$$f' = f \left(1 \mp \frac{v_o}{v_p} \right) \frac{1}{1 \pm \frac{v_f}{v_p}}$$

$$f' = f \frac{v_p \mp v_o}{v_p \pm v_f}.$$

Si fuente y observador se alejan (el tono del

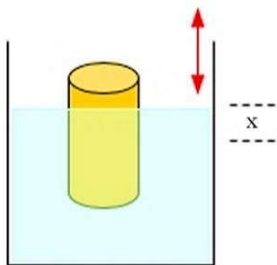
sonido baja) el numerador es (-) y el denominador (+). En caso contrario, si el tono percibido sube, los signos se intercambian.

Efecto Doppler relativista

El efecto Doppler también se manifiesta en los fenómenos electromagnéticos y luminosos, pero como la velocidad de la luz es constante e independiente del sistema de referencia considerado, las expresiones que se obtienen no son las mismas que en el caso del sonido.

8.15 Problemas resueltos

8.1. Un cuerpo de masa desconocida se cuelga de un resorte de constante también desconocida, y se observa que al llegar al equilibrio, el resorte se ha estirado una distancia de 10 cm. ¿Cuál es el período de oscilación de este sistema cuerpo resorte?

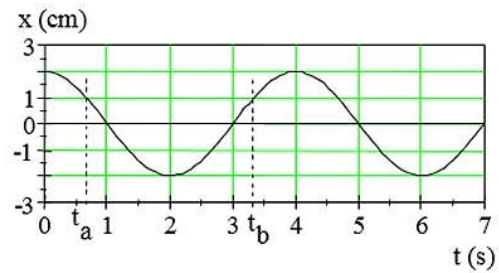


Problema resuelto 3

8.2. El extremo de un resorte vibra con un período de 2 s cuando tiene unido a él una masa m . Cuando a esa masa se le agregan 2 kg se encuentra que el período es de 3 s. Determinar el valor de m .

8.3. Un cilindro metálico hueco de masa m y sección transversal A , cerrado herméticamente, flota verticalmente en un líquido de densidad ρ . Calcule el período de oscilación del cilindro cuando recibe un pequeño impulso vertical.

No tome en cuenta la viscosidad del agua.



Problema resuelto 4

8.4. Un cuerpo realiza un MAS de forma tal que su posición x varía con t según el gráfico del problema. a) ¿Cuál es la ley de movimiento para este cuerpo? b) Considere los instantes t_A y t_B ¿la posición, velocidad y aceleración del cuerpo son iguales o diferentes? c) ¿En qué instantes es máxima la fuerza actuando sobre el cuerpo?

8.5. Una onda viajera avanza de derecha a izquierda a lo largo del eje de las x con una amplitud de 2 cm, frecuencia de 550 vibraciones por segundo y velocidad de propagación de 330 m/s. ¿Cuál es la ecuación de esta onda?

8.6. Una onda de frecuencia 500 Hz se propaga a 350 m/s en una dirección dada. a) ¿Qué separación hay entre dos puntos que tienen 60° de diferencia de fase en un instante dado? b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos elongaciones separados por 10^{-3} s en un cierto punto x_0 del eje x ?

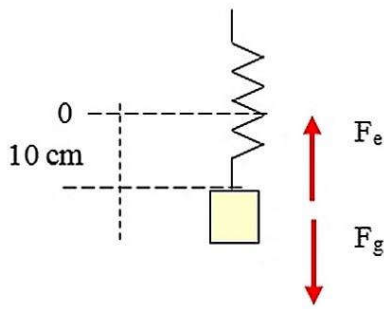
Soluciones

Problema 8.1.

En el equilibrio,

$$F_e = F_g$$

$$kx_0 = mg. \quad (1)$$



Solución 1

El cuerpo oscila alrededor de la posición de equilibrio x_0 con frecuencia $(k/m)^{1/2}$.

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

pero según (1), $m/k = x_0/g$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{10}} \approx 0.628 \text{ s}$$

Problema 8.2

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

a) $m, 2s \rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Elevando al cuadrado: $1 = 4\pi^2(m/k)$

b) $m + 2, 3s \rightarrow 3 = 2\pi\sqrt{\frac{m+2}{k}}$.

Elevando al cuadrado: $9 = 4\pi^2(m+2)/k$.

Eliminando la k desconocida entre ambas ecuaciones y simplificando:

$$9m - 4m = 8$$

$$m = 8/5 \text{ kg} = 1.6 \text{ kg}$$

Problema 8.3

Designemos el volumen sumergido por V_s .

En el equilibrio, $F_g = E$:

$$mg = \rho g V_s$$

Cuando el cilindro se empuja hacia abajo una distancia x a partir del equilibrio, se desplaza un volumen adicional de líquido $V' = Ax$, y aparece un empuje adicional (en sentido contrario a x)

$$E' = -\rho g Ax$$

Si se tira del cilindro *hacia arriba* una distancia x , el volumen sumergido *disminuye* en la magnitud $V'' = Ax$, con la correspondiente disminución del empuje $E'' = -\rho g Ax$. El signo (-) se incluye porque el efecto es similar a como si apareciera una fuerza adicional *hacia abajo* de esa magnitud. Es posible escribir entonces, para una separación x de la posición de equilibrio,

$$E' = E'' = -kx$$

$$k = \rho g A.$$

La fuerza restauradora es la misma de un MAS, por tanto el resultado debe ser similar:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g A}}$$

Esta expresión nos dice, por ejemplo, que mientras mayor sea el área que cubre una embarcación, menor será la frecuencia de sus oscilaciones en el mar, si el resto de los parámetros no varía.

Problema 8.5

Resolución

$$\omega = 2\pi f = 1100\pi \text{ rad/s}$$

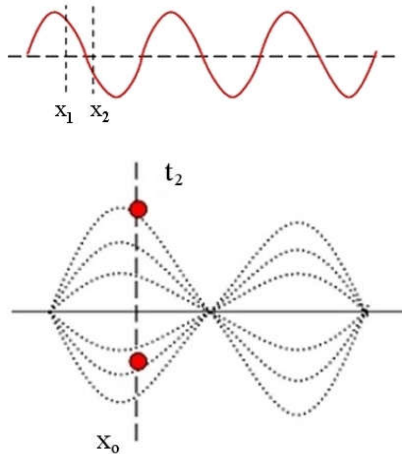
$$v_p = \lambda/T = \omega/k$$

$$k = \omega/v_p = 1100\pi/330 = 3.33 \pi \text{ m}^{-1}$$

$$y = 0.02\text{sen}\pi(3.33x + 1100t)$$

(x en m, t en s)

Problema 8.6



Solución 6 (a y b)

$$a) \phi_1 = kx_1 - \omega t_1 ; \phi_2 = kx_2 - \omega t_2$$

$$(t_1 = t_2 = t)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$\Delta x = \Delta\phi/k = \Delta\phi v_p/\omega = \Delta\phi v_p/2\pi f$$

$$60^\circ = 60\pi/180 = \pi/3 \text{ radianes}$$

$$\Delta x = (\pi/3) \times 350 / 2\pi \times 500 = 7/60 \approx 0.12 \text{ m}$$

b) En este caso $x_1 = x_2 = x_0$, pero $t_1 \neq t_2$:

$$\Delta\phi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

$$\Delta\phi = 2\pi f\Delta t = 2\pi \times 500 \times 10^{-3} = \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

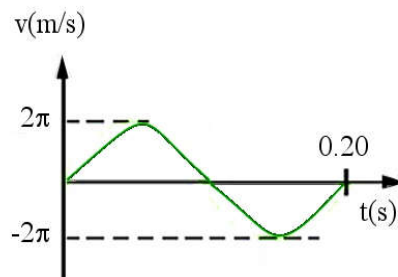
Problemas adicionales oscilaciones y ondas

Oscilaciones mecánicas

1. Un cuerpo de masa m_1 se cuelga del resorte A y otro de masa $m_2 < m_1$ se cuelga del resorte B. Ambos resortes se estiran la

misma longitud. Cuando ambos sistemas se ponen a oscilar con igual amplitud, ¿cuál tiene mayor energía?

2. El pistón del cilindro de vapor de una locomotora cañera tiene un recorrido máximo (doble de la amplitud) de 0.76 m. Si el pistón se mueve con un movimiento armónico simple de frecuencia 180 rev/min, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza?

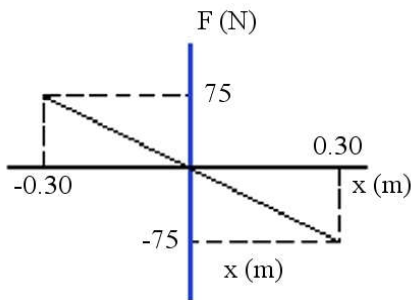


Problema adicional 3

3. Un oscilador está formado por un bloque amarrado a un resorte de constante 200 N/m y masa despreciable. El gráfico de la velocidad del bloque en función del tiempo sobre una superficie sin fricción, con el punto de equilibrio en $x = 0$ y amplitud de 2π metros se muestra en el gráfico del problema. ¿Cuáles son: a) el período, b) la masa del bloque, c) la elongación en $t = 0$, d) la aceleración cuando $t = 0.10$ s, e) la energía cinética máxima que alcanza el bloque? R: 0.20s, 0.20 kg, -0.20m, -200 m/s², 4.0 J.

4. Un oscilador armónico simple consiste de un bloque de masa 0.50 kg unido a un resorte de masa despreciable. El bloque se desliza atrás y adelante a lo largo de una línea recta en una superficie sin fricción, con el punto de equilibrio en $x = 0$. En $t = 0$ el bloque se encuentra en su punto de equilibrio y se mueve en la dirección donde x aumenta. El gráfico de la magnitud de la fuerza elástica en función de la posición se

muestra adjunto.

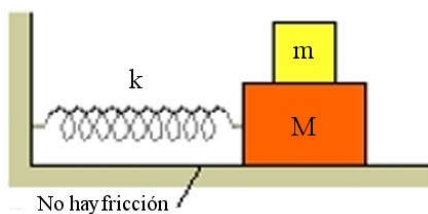


Problema adicional 4

¿Cuáles son: a) la amplitud, b) el período, c) el valor de la máxima aceleración experimentada por el bloque, d) La energía cinética máxima que alcanza el bloque?

5. En una determinada bahía, las mareas hacen que la superficie del mar suba y baje una distancia d , realizando un movimiento armónico simple con un período de 12.5 horas. ¿Cuánto tarda la marea en bajar una distancia de $d/4$ a partir de la pleamar?

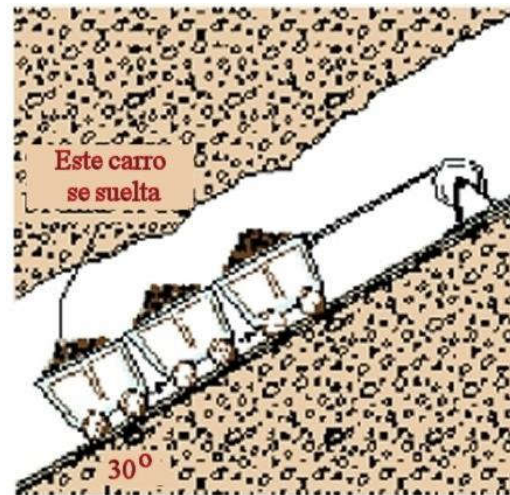
6. Dos bloques de masa $m = 1.0 \text{ kg}$ y $M = 10 \text{ kg}$ y un resorte de 200 N/m están acoplados en una superficie horizontal sin fricción como muestra el esquema adjunto.



Problema adicional 6

El coeficiente de fricción estático entre los dos bloques es 0.40. ¿Cuál es la amplitud máxima posible del movimiento armónico simple para que el bloque superior no se deslice de su posición durante la oscilación? R: 22 cm

7. Tres vagones de mineral de $10\,000 \text{ kg}$ cada uno se encuentran en reposo a un ángulo de 30° , sujetos por un cable largo de acero en una mina (ver esquema).



Problema adicional 7

Se observa entonces que el cable se estira 15 cm antes de que se rompa el acoplamiento del último carro y éste se desprenda, haciendo que los dos carros restantes comiencen a realizar oscilaciones. Suponiendo que el cable cumple la ley de Hooke, encuentre: a) la frecuencia, b) la amplitud de las oscilaciones.

8. Un vehículo de 1000 kg que carga 4 personas de 80 kg cada una viaja por un terraplén en muy mal estado, con ondulaciones transversales espaciadas de manera regular cada 4 m. La amplitud de los saltos al atravesar las protuberancias del terraplén es máxima cuando la velocidad es de 16 km/h . Cuando el vehículo llega a su destino y se bajan todos sus ocupantes, ¿qué distancia se eleva la suspensión del carro a causa de la pérdida de peso? R: 5 cm aprox.

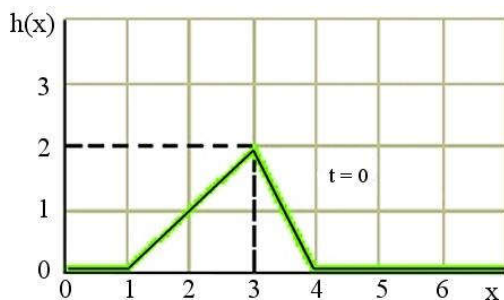
Ondas mecánicas

9. Al mecerse en un bote, un niño genera

ondas superficiales en las aguas de un lago. El bote realiza 12 oscilaciones en 20 s, y cada oscilación genera una cresta de 15 cm por encima de la superficie no perturbada del lago. Además, cada cresta alcanza la orilla, a 12 metros del bote, en 6.0 s. ¿Cuáles son: a) el período, b) la velocidad, c) la longitud de onda y d) la amplitud de esta onda? R: 0.6s, 2.0 m/s, 1.2m, 15 cm.

10. Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. Un punto particular de la onda tarda 0.170 s en moverse desde su máxima elongación hasta cero. ¿Cuáles son a) el período, b) la frecuencia?. c) Si la longitud de onda es de 1.40 m, ¿cuál es la velocidad de la onda? R: 0.68s, 1.47 Hz, 2.06 m/s

11. Un pulso aislado como el que se muestra puede describirse por la función $h = h(x-5t)$, donde x está en cm y t en segundos. ¿Cuáles son a) la velocidad y b) la dirección de propagación del pulso? c) Grafique h vs. x para $t = 2$ s. d) Grafique h vs. t para $x = 10$ cm.



Problema adicional 11

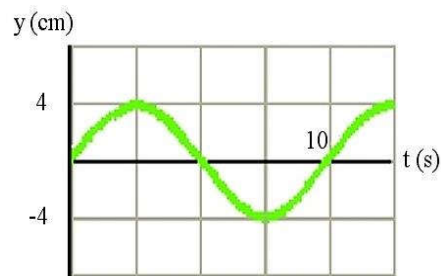
12. Dos aficionados de un juego de béisbol ven, y un instante más tarde, escuchan, la conexión de un bateador con la pelota. El intervalo de tiempo que detecta un observador es de 0.23 s, mientras que para el otro es sólo de 0.12 s. Las rectas que van desde los espectadores hasta el jugador forman un

ángulo de 90° . a) ¿A qué distancia está cada espectador del jugador? b) ¿Qué tan lejos se encuentra un espectador del otro?

13. Se deja caer una piedra en un pozo, y el sonido al caer la piedra en el agua se escucha 3.00 s después. ¿Cuál es la profundidad del pozo? R: 43.8 m

14. Un equipo médico de ultrasonido de frecuencia 4.50 MHz se usa para visualizar tumores en los tejidos blandos. a) ¿Cuál es la longitud de onda en el aire de esta onda sónica? b) Si la velocidad de la onda en los tejidos es de 1500 m/s, ¿cuál es la longitud de onda en los tejidos?

15. Una onda transversal sinusoidal de longitud de onda 20 cm se mueve a la derecha. La elongación y de la partícula en $x = 0$ se muestra en el gráfico adjunto, en función del tiempo. a) Dibuje un diagrama de una longitud de onda de esta onda (la porción entre $x = 0$ y $x = 20$ cm) en $t = 0$.



Problema adicional 15

b) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda? c) Escriba la ecuación de la onda con todas las constantes evaluadas. d) ¿Cuál es la velocidad transversal de la partícula en $x = 0$ cuando $t = 5.0$ s?

BIBLIOGRAFÍA

1. University Physics Volume 1, OpenStax.org. OpenStax Rice University, 6100 Main Street MS-375, Houston, Texas 77005. ©2018 Rice University
2. Halliday, Resnick and Krane, Física, Vol. I, 4ta Ed., 2003, Editorial Félix Varela.
3. Sears: Mecánica, Movimiento Ondulatorio y Calor, Ediciones R., Instituto del Libro, La Habana, 1968.
4. Young y Freedman, Sears y Zemansky, Física Universitaria, vol. 1, 13^a Ed., PEARSON, México, 2013.
6. Charles Kittel, Mechanics, Berkeley Physics Course, vol 1, 2nd Ed. 1973, McGraw-Hill.
7. B. G. Fuentealba y E. M. San Martín, APUNTES CON EJERCICIOS FÍSICA MECÁNICA 1^o Edición (Versión Preliminar) Marzo, 2012. U. TEC. METROPOLITANA *del Estado de Chile*, Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente,
- <https://repositorio.utem.cl/bitstream/handle/30081993/427/APUNTES%20CON%20EJERCICIOS%20MECANICA%202018.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Revisado dic 2023.
8. S.P.Strelkov, Mechanics, Mir Publishers, Moscow, 1978.
<https://ia801600.us.archive.org/8/items/strelkov-mechanics-mir-1978/Strelkov%20-%20Mechanics%20-%20Mir%20-%201978.pdf>. Revisado Dic. 2023.
11. V.S. Volkenshtein, Problemas de Física General, Moscú, Editorial Mir, 1970.
https://dl200.vdocuments.mx/file_download/file1/55cf8f28550346703b997b8d?ext=pdf&vaid=12bd0936f977793ad76e9fa6bd926fb48ee10391869cd11cc73997565c53bcbc446431be0efa01c41d3feecde5029fc742b1ba205ee0b810fa15b49dd68c39bfZGHTiWutQK338nuHB15rSWQUcixnc71lxf3Z/z6qTNq1HWTX7hhUPGgCe3bnhmYG7tZpt+sPifla-jxkNRZS0ekhDt/EYsSuzEGU0rYhYufE=. Revisado Dic. 2023.