PROBLEMAS RESUELTOS DE

MECÁNICA

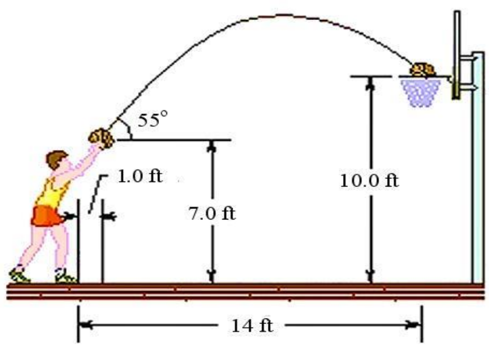
Para estudiantes de la educación superior

Arnaldo González Arias

Versión pdf 2023

PROBLEMAS RESUELTOS DE MECÁNICA

Para estudiantes de la educación superior



Arnaldo González Arias

Versión 2023

La presente colección de problemas resueltos de mecánica es un complemento al texto *Introducción a la Mecánica* del mismo autor, que también incluye problemas resueltos como ejemplo y problemas propuestos sin resolver. Aquí se incluyen más de 100 problemas con un grado de complejidad algo mayor que en texto anterior; por esa razón se tomó la decisión de presentar todos los problemas junto a su resolución.

Se incluyen 3 anexos para facilitar la mejor comprensión de algunos problemas. En cada caso se ha tratado hacer énfasis en los aspectos físicos del problema más que en su aspecto matemático, que se asume conocido. Se encuentran agrupados por temas y su cantidad está indicada entre paréntesis a la derecha.

I. Movimiento rectilíneo y uniforme MRU (5)
II. Movimiento rectilíneo uniformemente variado (4)
III. Movimiento en el plano y proyectiles (8)
IV. Movimiento circular y movimiento relativo (7)
V. Segunda ley de Newton (no fricción) (8)
VI. Segunda ley de Newton (con fricción) (6)
VII. Trabajo y energía (5)
VIII. Conservación de la energía (16)
IX. Conservación del momento lineal (5)
X. Choques (10)
XI. Cinemática de la rotación (5)
XII. 2da ley en rotación (14)
XIII. Momento angular (9)
XIV. Oscilaciones (8)
XV. Ondas (10)

Anexo 1. Energía cinética de un sistema de partículas. *Anexo 2.* Velocidad angular en el sistema de referencia del centro de masa. *Anexo 3.* Teorema de los ejes paralelos

I. MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME (MRU)

1. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x esta dada, en cm, por x = 9.75 + $1.50t^3$ donde t está en segundos. Considere el intervalo de tiempo de t = 2 a t = 3 s y calcule: a) Velocidad media, b) velocidad instantánea en t = 2s, c) velocidad instantánea en t = 3s, d) velocidad instantánea en t = 2.5s y e) velocidad instantánea cuando la partícula está a medio camino entre sus posiciones en t = 2 y t = 3 s.

Datos

$x(t) = 9.75 + 1.50t^3$

t de 2 a 3 segundos

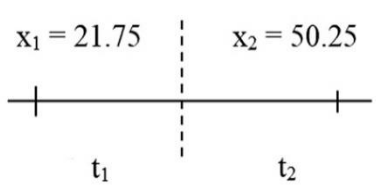
Resolución

a)

$v_m = \Delta x/\Delta t$

$x_2 = 9.75 + 1.50x3^3 = 6.75 + 40.50 = 50.25$

$x_1 = 9.75 + 1.50x2^3 = 6.75 + 12.00 = 21.75$



Problema I-1

$$v_m = (50.25 - 21.75)/1$$

$$= 28.50 \text{ cm/s.}$$

b)

$$v(t) = dx/dt = 4.5\ t^2$$

$$v(2) = 4.5x2^2$$

$$= 18.0 \text{ cm/s.}$$

c) $v(3) = 4.5x3^2 = 40.5$ cm/s.

d) $v(2,5) = 4.5 \text{ x } (2.5)^2 = 28.1$ cm/s.

e) *Comentarios*

a = dv/dt = 9t no es constante. Luego no hay proporcionalidad y v ≠ v(2.5). Hay que hallar v = f(x) y evaluar para $x_m = ½ (x_1+x_2)$. A partir de la ecuación de x, despejando:

$$t = \left(\frac{x - 9.75}{1.5}\right)^{1/3}$$

y al sustituir en $v(t) = 4.5\ t^2$, se obtiene

$$v = 4.5\left(\frac{x - 9.75}{1.5}\right)^{2/3}.$$

Evaluando en

$$x_m = ½ (x_1+x_2)$$

$$= ½ (21.75 + 50.25)$$

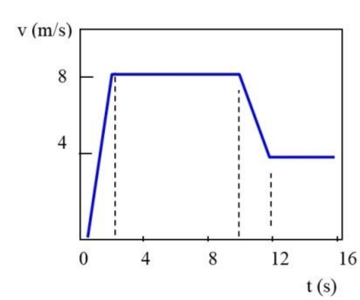
$$= 36 \text{ cm}$$

$$v = 4.5\left(\frac{36 - 9.75}{1.5}\right)^{2/3}$$

$$= 30.3 \text{ cm/s}$$

---

2. ¿Qué distancia recorre en 16 s el corredor cuya gráfica velocidad-tiempo se muestra en la figura?



Problema I-2a

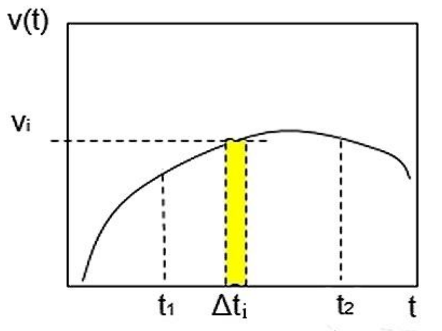
Datos: En el gráfico.

Resolución

Para cualquier movimiento rectilíneo:

$$v = dx/dt$$

$\Delta x = \int v dt$ = área bajo la curva en el gráfico de v vs. T (figura I-2b).



Problema I-2b

Área en $(t_1,t_2) = \sum v_i \Delta t_i$, igual a la integral en el límite para $\Delta t_i \to 0$ (definición de integral).

Por tanto, sólo hay que calcular el área bajo la curva.

Δx_1 = triangulo, ½ bh = ½ 2x8 = 8 m

Δx_2 = rectángulo, bh = (10-2)x8 = 64 m

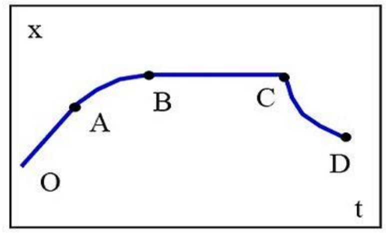
Δx_3 = trapecio, ½ $(b_1+b_2)h$ = ½ (4+8).2 = 12 m

Δx_4 = rectángulo, bh = (16-12)x4= 16 m

Δx = 8 + 64 + 12 + 16 = 100 m.

---

3. La gráfica de x vs. t que se muestra es de una partícula que se mueve en línea recta. a) Determine para cada intervalo si la velocidad v es +, -, o 0, y si la aceleración es +, -, o 0. Los intervalos con OA, AB, BC y CD. b) Según la curva, ¿existe un intervalo en el cual la aceleración sea obviamente no constante? (Desprecie el comportamiento en los extremos de los intervalos).



Problema I-3

Datos. Ver el gráfico.

Resolución

a) *Comentarios*

v = dx/dt → pendiente a la curva en un punto. OA: pendiente positiva y constante. Luego v es (+).

Como a = dv/dt, la derivada de la constante es cero y a = 0.

AB: Similar al anterior, v es (+), pero no es constante, disminuye desde un valor determinado hasta cero en BC. Si v disminuye su valor, el movimiento es retardado. Asumiendo (+) a la derecha, entonces a será (-).

BC: Como x = constante, v = 0 y a = 0. (La partícula no se mueve).

CD: La partícula comienza a moverse brusca y aceleradamente reduciendo x (moviéndose hacia la izquierda, según el convenio anterior). La pendiente es negativa, luego v es (-), acorde al movimiento de derecha a izquierda. La velocidad va disminuyendo, pues la pendiente se reduce → movimiento retardado → aceleración contraria a la velocidad → a es (+).

No se debe olvidar que la velocidad y la aceleración son vectores; recordar que (+) a la derecha y (-) a la izquierda es sólo un convenio para el movimiento unidimensional. Si a y v negativos: vectores apuntando a la izquierda, movimiento acelerado a la izquierda, etc. Analizar las 4 posibilidades.

Notar que el movimiento es acelerado o retardado con independencia del sistema de referencia considerado. La dependencia proviene de la orientación relativa de los vectores **v** y **a**.

b) *Comentarios*

No lo hay. La expresión de x = f(t) para aceleración constante toma la forma

$$x = x_o + v_o t + \tfrac{1}{2} at^2,$$

con todas las posibles combinaciones de signos. Ninguna de las secciones se aleja tanto de la dependencia cuadrática como para afirmar que la aceleración **a** no es constante.

---

4. Ud. viaja por carretera de Jipijapa a Guayaquil, la mitad del tiempo a 35 mi/h y la otra mitad a 55 mi/h. En el regreso, Ud. viaja la mitad de la distancia a 35 mi/h, y la otra mitad a 55 mi/h. a) ¿Cuál es la velocidad media en el viaje de ida? b) ¿Y en el de vuelta? c) ¿Y en todo el viaje?

Datos

v_1 = 35 mi/h

v_2 = 55 mi/h

Ida: medio tiempo

Vuelta: media distancia

Resolución

a)

$$v_m = \Delta x/\Delta t$$

$$= (\Delta x_1 + \Delta x_2)/(\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2$$

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1$$

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_1$$

Sustituyendo y simplificando:

$$v_m = (v_1 + v_2)/2$$

$$= 90/2$$

$$= 45 \text{ mi/h.}$$

b)

$$v_m = \Delta x/\Delta t$$

$$= (\Delta x_1 + \Delta x_2)/(\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2$$

$$\Delta t_1 = \Delta x_1/v_1$$

$$\Delta t_2 = \Delta x_1/v_2$$

Sustituyendo y simplificando:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$= \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$= 42.8 \text{ mi/h}$$

c) v_m = 0. Note que no es posible identificar el espacio recorrido con x_2 - x_1, lo cual no está acorde a la definición general vectorial de velocidad media,

$$\vec{v}_m = \Delta \vec{r} / \Delta t .$$

Si Ud. va a Guayaquil y regresa, el desplazamiento total es cero, y por tanto v_m también.

5**.** Dos trenes salen en el mismo instante de las ciudades A y B, separadas 300 km, con rapidez media constante de 60 y 90 km/h respectivamente, uno al encuentro del otro. a) ¿A qué distancia de la ciudad A se cruzan? b) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta ese momento?

Datos

d_{AB} + 300 km

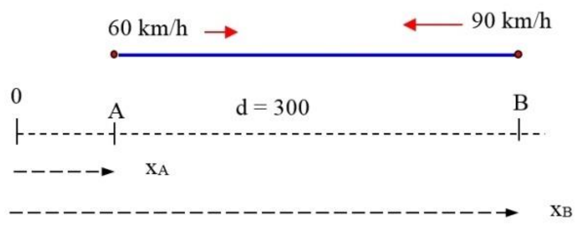
v_1 = 60 km/h

v_2 = 90 km/h

d_A (encuentro) ?

t?

Resolución



Problema I-5

Escogiendo un sistema de referencia común para ambos móviles (ver gráfico),

$$x_A = v_At$$

$$x_B = d - v_Bt$$

t es el mismo, porque arrancan en el mismo instante. Cuando se crucen:

$$x_A = x_B$$

$$v_A\, t = d - v_Bt$$

$$t = d/(v_A + v_B)$$

$$= 300/150$$

$$= 2h$$

$$x_B = x_A = v_At = 60x2$$

$$= 120 \text{ km.}$$

II. Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

1. Un corredor, en una carrera de 100 m, acelera desde el reposo hasta la velocidad máxima a razón de 2.80 m/s^2 (y mantiene esa velocidad hasta el final de la pista). a) ¿Qué tiempo transcurrió?; b) ¿Qué distancia recorrió el corredor durante la fase de aceleración si el tiempo total en la pista fue de 12.2 s?

Datos

$x_1 + x_2 = 100$ m

$a_1 = 2.8$ m/s^2

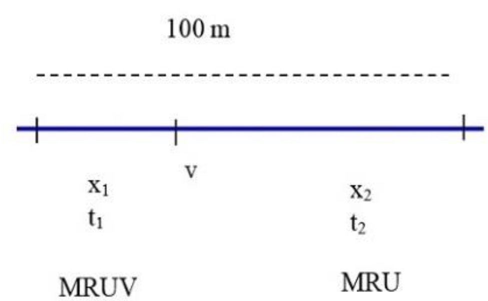
$t_1 + t_2 = 12.2$ s

$v_o = 0$ en x_1

t_1?

x_1?

Resolución



Problema II-1

a)

En (1), MRUV. Sólo hay dos posibles ecuaciones independientes:

$$v = v_o + at,$$

$$x = x_o + v_ot + ½\, at^2.$$

Evaluando:

$v = at_1$	(1)

$x_1 = ½ at_1^2$	(2)

En (2), MRU.

Sólo hay una posible ecuación independiente:

$x_2 = vt_2$	(3)

Hay dos ecuaciones independientes adicionales como datos:

$x_1 + x_2 = 100$	(4)
$t_1 + t_2 = 12.2$	(5)

De manera que se llega a un sistema no lineal de 5 ecuaciones con 5 incógnitas (t_1, t_2, x_1, x_2 y v). El valor de a es conocido. Como el sistema es no lineal, no se puede predecir de antemano si tendrá o no solución.

Eliminando v entre (1) y (3),

$$at_1 = x_2/t_2.$$

Eliminando x_2 a partir de (4) y t_2 a partir de (5),

$$at_1 = \frac{100 - x_1}{t_2} = \frac{100 - x_1}{12.2 - t_1}$$

y el sistema se ha reducido a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, x_1 y t_1:

$at_1 = \frac{100 - x_1}{12.2 - t_1}$	(6)
$x_1 = ½ at_1^2$	(7)

Despejando (6) y sustituyendo con (7):

$$12.2\, at_1 - at_1^2 = 100 - ½\, at_1^2$$

$$24.4t_1 - 200/a - t_1^2 = 0$$

Sustituyendo $a = 2.8\ m/s^2$ se llega a:

$$t_1^2 - 24.4t_1 + 71.4 = 0$$

$$t = \frac{24.4 \pm \sqrt{595.36 - 285.6}}{2}$$

$$t = ½\,(24.4 \pm 17.6)$$

$$t_a = 21.0\ s$$

$$t_b = 3.4\ s.$$

La solución (a) no tiene sentido real. Conduce a un absurdo, ya que el tiempo del recorrido (1) sería mayor que el total planteado como dato (12.2 s).

b)

$$x_1 = ½\, at_1^2$$

$$= ½\, x2.8\ x\ (3.4)^2$$

$$= 16.2\ m$$

---

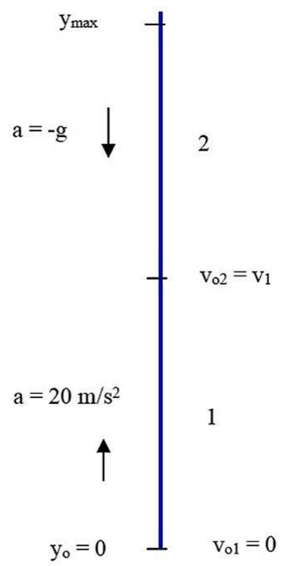
2. Un cohete se dispara en la vertical y asciende con aceleración de 20 m/s^2 durante 1.0 min. En ese momento su combustible se agota y continúa como un cuerpo en caída libre. a) ¿Cuál es la altitud máxima alcanzada? b) ¿Cuál es el tiempo total transcurrido desde el despegue hasta que el cohete regresa a la tierra? (Desprecie las variaciones de g con la altura).

Datos:

Etapa 1	Etapa 2
$a = 20\ m/s^2$	$v_{o2} = v_1$
$v_o = 0$	$a = -g$
$t = 60\ s$	

y_m?

t_{total}?



Problema II-2

Resolución

b) Notar que el tramo 1 lo sube a 20 m/s^2 pero lo baja en caída libre.

$$v = v_o + at$$

$$y = y_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

caída libre: $a = -g$

Etapa 1: Subida acelerada

$$v_1 = v_{o2} = at$$

$$= 20 \times 60$$

$$= 1200 \text{ m/s}$$

$$y_1 = y_{o2} = \frac{1}{2} at^2$$

$$= 1/2 \times 20 \times 3600$$

$$= 36000 \text{ m}$$

Etapa 2: Subida + bajada en caída libre

$$v_{o2} = v_1 = 1200 \text{ m/s}$$

$$0 = 36000 + 1200t - 5t^2$$

$$t^2 - 240t - 7200 = 0$$

$$t_+ = \frac{240 \pm \sqrt{57600 + 28800}}{2}$$

$$= \frac{240 \pm 294}{2}$$

$$t_- = -27 \text{ s (absurdo)}$$

$$t_+ = 267 \text{ s}$$

Tiempo total: $t_{subida} + c_{caída\ libre}$

$$= 60 + 267 = 327\text{s}$$

$$= 5 \text{ min, } 27 \text{ s.}$$

NOTA. Este resultado no toma en cuenta la resistencia del aire.

a)

Altitud máxima

En $y_{máx}$ se cumple $v = 0$;

$$0 = v_{o2} - gt_2$$

$$t_2 = v_1/g$$

$$= 1200/10$$

$$= 120 \text{ s}$$

(después de apagar el motor)

$$y_2(\text{máx}) = y_{máx} = y_o + v_o t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$= 36000 + 1200 \times 120 - \frac{1}{2} \times 10 \times (120)^2$$

$$= 36000 + 144000 - 72000$$

$$= 108000 \text{ m}$$

$$= 108 \text{ km.}$$

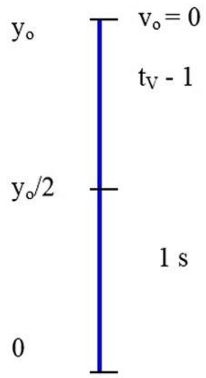
---

3. Si un objeto que cae libremente desde el reposo viaja la mitad de su trayectoria total en el último segundo de su caída halle: a) el tiempo y b) la altura de su caída. Explique la solución físicamente inaceptable de la ecuación cuadrática del tiempo.

Datos:

Segunda mitad: 1 s

Primera mitad: t_V -1, donde t_V es el tiempo total de vuelo, y $v_o = 0$.



Problema II-3

Resolución

a)

$$y = y_o + v_o t - ½\, gt^2$$

$$y_o/2 = y_o – ½\, g(t_V – 1)^2$$

$$y_o = g(t_V – 1)^2 \qquad (1)$$

Tenemos hasta el momento una ecuación y dos incógnitas (t_V, y_o). Se obtiene otra ecuación considerando que para $t = t_V$, $y = 0$ (v_o sigue siendo cero).

$$0 = y_o – ½\, gt_V^2$$

$$y_o = ½\, gt_V^2 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) con $g = 10\ m/s^2$

$$g(t_V – 1)^2 = ½\, gt_V^2$$

$$t_V^2 – 4t_V + 2 = 0$$

$$t_V = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}$$

$$t_V(-) = 0.59\ s.$$

No tiene significado real, ya que $t > 1$ s;

$$t_V(+) = t_V = 3.41\ s$$

b)

$$0 = y_o - ½\, gt^2$$

$$y_o = ½\, gt_V^2$$

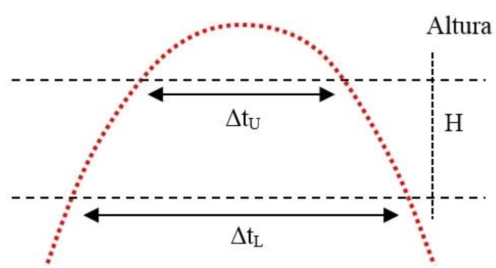
$$= ½ \times 10 \times (3.41)^2$$

$$= 58.14\ m$$

---

4. En el laboratorio Nacional de Física de Inglaterra se hizo una medición de la aceleración g arrojando una bola de vidrio hacia arriba en un tubo evacuado y dejándola regresar. Sea Δt_L el intervalo de tiempo entre los dos pasos a través del nivel inferior, Δt_U el intervalo de tiempo entre los dos pasos a través del nivel superior, y H la distancia entre los dos niveles. Demuestre que

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}\,.$$



Problema II-4a

Datos:

Δt_L, Δt_U, H

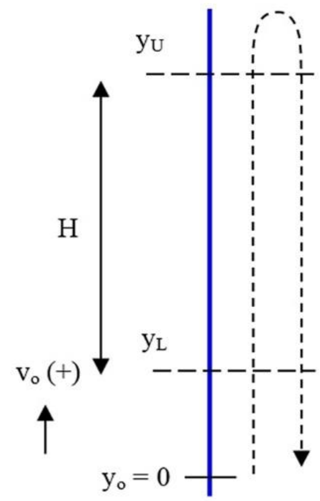
Resolución

El problema se resuelve fácilmente si se recuerda que la ecuación de la trayectoria es válida para todos los puntos de la misma. Analizando la altura y_U, con $y_o = 0$,

$$y_U = v_o t - ½\, gt^2,$$

$$t^2 - (2v_o/g)t + 2y_U/g = 0,$$

$$t_U = \frac{v_o}{g} \pm \sqrt{\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2y_U}{g}}\ .$$



Problema II-4b

Las dos soluciones posibles + y - corresponden a los dos instantes (subida y bajada) en que la bola pasa por y_U. Por tanto, el intervalo de tiempo que tarda en pasar por y_U hacia arriba (-) y regresar hacia abajo (+) viene dado por

$$\Delta t_U = t_U(+) - t_U(-) = 2\sqrt{\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2y_U}{g}}\ .$$

Elevando al cuadrado para la demostración,

$$\Delta t_U^2 = 4\left(\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2y_U}{g}\right).$$

El análisis es totalmente similar para la altura y_L, y el resultado también (v_o es la misma).
Por analogía:

$$\Delta t_L^2 = 4\left(\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2y_L}{g}\right)$$

Restando:

$$\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2 = \frac{8}{g}(y_U - y_L) = \frac{8H}{g}$$

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}\ .$$

III. Movimiento en el plano y proyectiles

1. La velocidad de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por

$$\vec{v} = \left(6t - 4t^2\right)\vec{i} + 8\vec{j}\ .$$

Aquí v está en m/s y t(>0) está en segundos.

a) ¿Cuál es la aceleración cuando t=3s? b) ¿Cuándo, si alguna vez, es la aceleración cero? c) ¿Cuándo (si sucede) es cero la velocidad? d) ¿Cuándo (si sucede) es la rapidez igual a 10 m/s?

Datos

$\vec{v} = \left(6t - 4t^2\right)\vec{i} + 8\vec{j}$.

a(3) =?

a = 0?

v = 0?

v = 0\10 m/s?

Resolución

a)

$$a(3) = dv/dt|_{t=3}$$

$$\vec{a} = (6 - 8t)\vec{i}$$

$$\vec{a}\big|_{t=3} = -18\vec{i}$$

b)
Para qué valor de t, a = 0?

$a_y = dv_y/dt = 0$ para todo t

para a_x:

$$6 - 8t = 0$$

$$t = ¾ \text{ s}$$

c)
Nunca, porque $v_y = 8$ m/s, constante

d)

$$v = \{(6t-4t^2)^2 + 64\}^{1/2} = 10$$

y elevando al cuadrado:

$$(6t-4t^2)^2 + 64 = 100$$

$$(6t-4t^2)^2 = 36$$

$$(6t-4t^2) = \pm 6$$

De ahí salen dos posibles ecuaciones:

$$6t - 4t^2 + 6 = 0$$

$$6t - 4t^2 - 6 = 0$$

Que se reducen a:

$$2t^2 - 3t - 3 = 0 \qquad (1)$$

$$2t^2 - 3t + 3 = 0 \qquad (2)$$

Caso (2):

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 24}}{4}$$

Discriminante negativo, raíces imaginarias, no hay solución.

Caso (1):

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{4},$$

$$t = ¼ (3 \pm 5.74).$$

La raíz negativa no tiene sentido real. Para la positiva, $t = 2.185$ s

---

2. Una partícula se mueve de modo que su posición en función del tiempo es, en unidades SI,

$$\vec{r}(t) = \vec{i} + 4t^2\vec{j} + t\vec{k}\ .$$

Escriba las expresiones para a) su velocidad y b) su aceleración, ambas en función del tiempo. c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la partícula?

Resolución

a) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 8t\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 8\vec{j}$ (constante)

c) Las ecuaciones paramétricas del movimiento son:

$$x = 1$$
$$y = 4t^2$$
$$z = t.$$

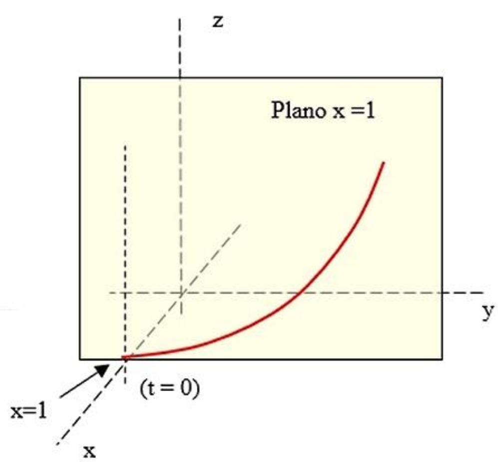
x=1 significa que la partícula siempre se mueve en el plano que pasa por x = 1 (ver figura);

$$x,y = 0 \text{ en } t = 0.$$

Eliminando t entre z e y se obtiene la ecuación de la trayectoria en ese plano:

$$y = 4z^2$$

(parábola que abre hacia el eje de las z).



Problema III-2

---

3. Una partícula sale del origen en $t = 0$ a una velocidad inicial $\vec{v}_o = 3.6\vec{i}$, en m/s. Experimenta una aceleración constante $\vec{a} = -1.2\vec{i} - 1.4\vec{j}$ en m/s^2. a) ¿En qué tiempo llega esa partícula a su coordenada x máxima? b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en ese momento? c) ¿Dónde está la partícula en ese momento?

Datos

$\vec{v}_o = 3.6\vec{i}$

$\vec{a} = -1.2\vec{i} - 1.4\vec{j}$

Interpretación:

Eje x: MRUV:

$a_x = -1.2\ m/s^2$, $v_{ox} = 3.6\ m/s$

Eje y: MRUV

$a_y = -1.4\ m/s^2$, $v_{oy} = 0$

t para $x_{máx}$?

v?

x?

Resolución

a)

$$x = x_o + v_o t + ½\, at^2$$

$$x = 3.6t - 0.6t^2.$$

Imponiendo la condición de máximo:

$$dx/dt = 3.6 - 1.2\,t = 0$$

$$t = 3.6/1.2$$

$$t = 3s$$

b) Al llegar al máximo

$$dx/dt = v_x = 0$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t$$

$$= 0 - 1.4(3)$$

$$= -4.2\ m/s^2$$

Y en notación vectorial,

$$\vec{v} = -4.2\vec{j}\ \ (m/s)$$

c)

$$x = x_o + v_o t + ½\, at^2$$

$$x = 0 + 3.6(3) - ½\,(1.2)(3)^2$$

$$= 10.8 - 5.4$$

$$= 5.4\ m$$

$$y = y_o + v_o t + ½\, at^2$$

$$y = 0 + 0 - ½\,(1.4)(3)^2$$

$$= -6.3\ m$$

$$\vec{r} = 5.4\vec{i} - 6.3\vec{j}\ \ (m).$$

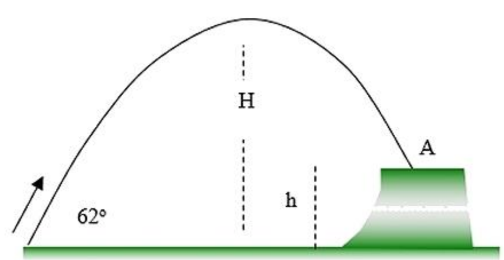
O también la respuesta equivalente en paramétricas:

$$x = 5.4m$$

$$y = -6.3m.$$

---

4. Una piedra se lanza con una velocidad inicial de 120 ft/s en una dirección 62° sobre la horizontal hacia un acantilado de altura h, como se muestra en la figura.



Problema III-4a

La piedra golpea el terreno en A, 5.5 s después del lanzamiento. Halle: a) la altura del acantilado, b) la velocidad de la piedra en el momento antes de que se impacte en A, y c) la altura máxima alcanzada sobre el suelo.

Datos

$v_o = 120$ ft/s

$\theta_o = 62^o$

$t = 5.5$ s

$g \approx 32$ ft/s^2

a) h?

Resolución

Evaluando y para t = 5.5 s,

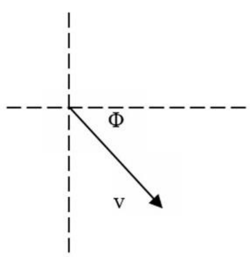
$$y = y_o + v_o sen\theta t - 1/2gt^2$$

$$= 0 + 120xsen(62)x5.5 - ½ x32 x (5.5)^2$$

$$h = y = 582.8 - 484$$

$$= 98.8 \text{ ft}$$

b) $\vec{v}$?



Problema III-4b

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$v_x = v_o cos\theta_o = 120x\ 0.47$$

$$= 56.4 \text{ ft/s}$$

$$v_y = v_o sen\theta_o - gt$$

$$= 120x0.88 - 32x5.5$$

$$= 105.6 - 176.0$$

$$= - 70.4 \text{ ft/s}$$

$$\vec{v} = 56.4\vec{i} - 70.4\vec{j} \quad (\text{ft/s})$$

De aquí se puede calcular, si es necesario:

$$tan\Phi = - 70.4/56.4$$

$$= - 1.25$$

$$\Phi = - 51.3^o$$

$$v = (56.4^2 + 70.4^2)^{1/2}$$

$$= 90.2 \text{ ft/s}$$

c) ¿H?

Cuando $y = y_m$, $v_y = 0$

$$0 = v_o sen\theta - gt$$

$$t = v_o sen62/g$$

$$= 120x0.88/32$$

$$= 3.3 \text{ s}$$

$$H = y_m = y_o + v_o sen\theta_o t - ½\ gt^2$$

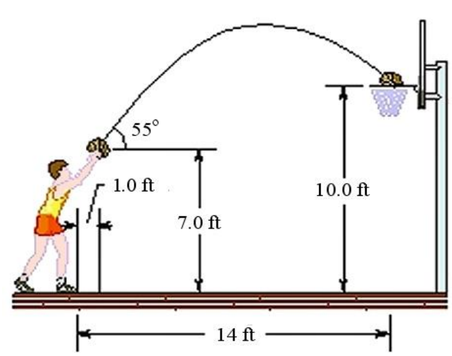
$$= 0 + 120x0.88x3.3 - 16(3.3)^2$$

$$H = 348.48 - 174.24$$

$$= 174.24 \text{ ft}$$

---

5. ¿A qué velocidad inicial debe el jugador de baloncesto lanzar la pelota, formando 55° con la horizontal, para encestar el tiro de castigo, como se muestra en la figura? El aro de la celda tiene un diámetro de 18''. Obtenga otros datos de la figura del problema.



Problema III-5

Datos

$y_o = 7$ ft

$x_o = 1$ ft

$\theta_o = 55^o$

$y = 10$ ft

$x = 14\text{-}1 = 13$ ft (gráfico)

$g \approx 32$ ft/s^2

$\cos(55^o) = 0.573$

$\tan(55^o) = 1.428$

v_o ?

Calcular v_o para que alcance el punto (14,10) en estas condiciones.

Resolución

$$y = y_o + v_o \text{sen}\theta_o t - \tfrac{1}{2} gt^2 \qquad (1)$$

Para evaluar (1) hace falta conocer t. Se puede eliminar t a partir de la ecuación

$$x = v_o \cos\theta_o t$$

$$y = y_o + \tan\theta_o x - gx^2/2v_o^2\cos^2\theta_o \qquad (2)$$

En esta ecuación se conocen todos los parámetros menos v_o. Sustituyendo:

$$(y - y_o - \tan\theta_o x)2v_o^2\cos^2\theta_o = -gx^2$$

$$v_o^2 = \frac{gx^2}{2\cos^2\theta_o(\tan\theta_o x - y + y_o)}$$

$$v_o = \frac{x}{\cos\theta_o}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta_o x - y + y_o)}}$$

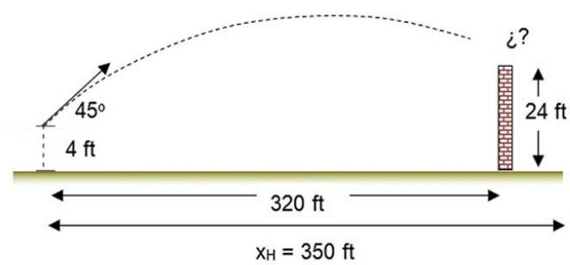
$$v_o = \frac{13}{0.57}\sqrt{\frac{32}{2(1.43\times 13 - 10 + 7)}}$$

$$v_o = 22.8\ (32.0/31.18)^{1/2} = 23.1 \text{ ft/s}$$

---

6. Un bateador golpea una bola lanzada a una altura de 4.0 ft sobre el suelo de modo que su ángulo de proyección es de 45^o y el alcance horizontal es de 350 ft. La bola viaja hacia la línea izquierda del campo donde hay una barda de 24 ft de altura que se ubica a 320 ft de la placa de "home". ¿Pasará la bola por encima de la barda? De hacerlo, ¿por cuánto?

Nota: el alcance horizontal se define como la distancia horizontal que se alcanza cuando el proyectil retorna a la altura a que fue lanzado.



Problema III-6

Datos

$y_o = 4.0$ ft

$\theta_o = 45^o$

$x_H = 350$ ft

$g = 32$ ft/s^2

$h = 24$ ft

$d = 320$ ft

Resolución

Las ecuaciones que involucran los **Datos** del problema son:

$$y = y_o + v_o \text{sen}\theta_o t - \tfrac{1}{2} gt^2 \qquad (1)$$

$$x = v_o\cos\theta_o t \qquad (2)$$

Para saber si pasa la barda, sólo hay que evaluar el valor de y para x = 320 ft. Eliminando t:

$$y = y_o + \tan\theta_o x - ½ (gx^2/v_o^2\cos^2\theta) \qquad (3)$$

El valor de v_o no es conocido, pero se puede obtener del dato del alcance horizontal

$$x_H = v_o\cos\theta_o t_V.$$

El tiempo de vuelo t_V se obtiene del doble que tarda en alcanzar la altura máxima (con y_o = 0):

Para $y = y_m \;\rightarrow\; v_y = 0$,

$$0 = v_o\text{sen}\theta_o - gt$$

$$t = v_o\text{sen}\theta_o/g$$

$$t_V = 2v_o\text{sen}\theta_o/g$$

y sustituyendo en x_H:

$$x_H = 2v_o^2\text{sen}\theta_o\cos\theta_o/g$$

$$v_o^2 = gx_H/(\text{sen}2\theta_o)$$

$$= 32x350/1$$

$$= 11200$$

$$v_o = 105.8 \text{ ft/s}$$

Sustituyendo en (3):

$$y = 4 + 1x320 - ½(32\cdot320^2/11200/2)$$

$$y = 4 + 320 - 292.6$$

$$= 31.4 \text{ ft} \quad > 24 \text{ ft.}$$

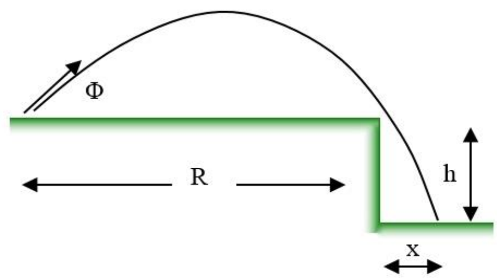
(Sí pasa la barda). La bola pasa y excede a la barda por (31.4 – 24) = 7.4 ft.

---

7. Se lanzan proyectiles a una distancia horizontal R del borde de un acantilado de altura h de manera tal que aterrizan a una distancia horizontal x del fondo del acantilado. Si queremos que x sea tan pequeña como es posible, ¿Cómo ajustaríamos Φ_o y v_o, suponiendo que v_o pueda ser variada desde cero hasta un valor máximo finito $v_{máx}$ y que Φ puede ser variado continuamente? Solo se permite una colisión con el suelo.

Datos

h, R, x - Φ_o?, v_o?



Problema III-7a

Resolución

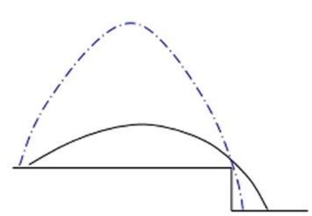
Desde el punto de vista formal, habría que buscar el alcance máximo despejando el tiempo en las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, tomando el cero en la parte inferior de la figura.

$$x = v_o\cos\Phi\cdot t$$

$$y = h + v_o\text{sen}\Phi\cdot t - ½\, gt^2$$

Sin embargo, esto conduce a expresiones matemáticas bastante complejas de laboriosa resolución.

Por otra parte, el *análisis físico* en la figura muestra que aumentando v_o y el ángulo de tiro conjuntamente es posible obtener trayectorias con x menor (trayectoria punteada en III-7b).



Problema III-7b

Para eso sólo hace falta analizar el movimiento hasta R, y buscar la relación entre Φ y v_o que permita alcanzar R con el mayor ángulo Φ

posible. Entonces, reduciendo el análisis al tramo (0,R) solamente:

$$x = v_o\cos\Phi\cdot t$$

$$y = v_o\text{sen}\Phi\cdot t - \tfrac{1}{2}\,gt^2$$

y el problema se reduce a buscar la relación entre Φ y v para x = R.

En el punto R:

$$R = v_o\cos\Phi\cdot t \qquad (1)$$

$$0 = v_o\text{sen}\Phi\cdot t - \tfrac{1}{2}\,gt^2 \qquad (2)$$

Eliminando t entre (1) en (2)

$$0 = \tan\Phi\cdot R - \tfrac{1}{2}\,(gR^2/v_o^2\cos^2\Phi)$$

$$2\tan\Phi v_o^2\cos^2\Phi = gR$$

$$2v_o^2\text{sen}\Phi\cos\Phi = gR$$

Y queda, para la relación buscada:

$$\text{sen}2\Phi = gR/v_o^2. \qquad (3)$$

El mayor ángulo *teóricamente posible* sería para $v_o \rightarrow \infty$; sen2Φ = 0. En ese caso Φ = 0, 180°. La primera es una raíz extraña, la segunda proporciona Φ = 90°. Por tanto, para una velocidad finita se obtendrá un ángulo < 90^0.

El mayor ángulo *práctico* posible se obtiene cuando $v = v_{máx}$, por tanto:

$$\text{sen}2\Phi = gR/v^2_{máx}.$$

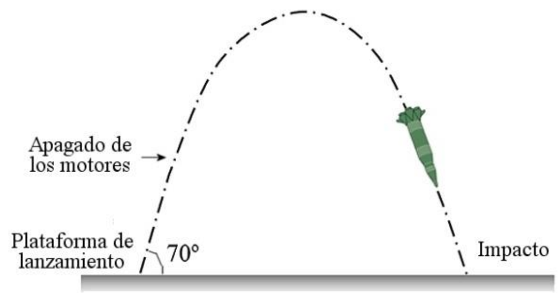
Notar que:

1. La expresión es dimensionalmente correcta.

3. Evaluando para otro valor notable, por ejemplo $v_o = (gR)^{1/2}$ se obtiene Φ = 45°, etc.

---

8. Un cohete se dispara desde el reposo y se mueve en línea recta a 70.0° sobre la horizontal con una aceleración de 46.0 m/s^2. Después de 30.0 s de vuelo impulsado, los motores se apagan y el cohete sigue una trayectoria parabólica hasta caer de nuevo en tierra (véase figura).



Problema III-8

a) Halle el tiempo de vuelo desde el disparo hasta el impacto.

b) ¿Cuál será la altitud máxima alcanzada?

c) ¿Cuál es la distancia desde la rampa de lanzamiento hasta el punto de impacto?(Desprecie la variación de g con la altitud).

Datos

1ra etapa, MRUV

θ = 70°

a = 46 m/s^2

t = 30 s

2da etapa, PROYECTIL

$\theta_o = 70^o$

a = - g

t?

Resolución

Es necesario dividir el vuelo en dos tramos o etapas, con diferentes ecuaciones del movimiento:

Etapa 1: MRUV (recta, a = constante en el plano).

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$a_x = a\cos 70^o = 46x0.342 = 15.73\ m/s^2$$

$$a_y = a\mathrm{sen}70^o = 46x0.94 = 43.24\ m/s^2$$

(*Nota:* se mantienen las dos cifras después del punto porque los números que se generan son grandes y el error por redondeo también).

La velocidad final de la etapa 1 es la velocidad inicial de la etapa 2:

$$v_{x1} = a_x t = 15.73x30$$

$$= 471.9\ m/s$$

$$= v_{ox2}$$

$$v_{y1} = a_y t = 43.24x30$$

$$= 1297.2\ m/s$$

$$= v_{oy2}$$

También es necesario calcular el espacio y la altura recorridos para resolver lo que se pide:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\ a_x t^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\ x\ 15.73\ x\ 30^2$$

$$= 7078.5\ m$$

$$= x_{o2}$$

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\ a_y t^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\ x\ 43.24\ x\ 30^2$$

$$= 19458.0\ m$$

$$= y_{o2}$$

Etapa 2: proyectil

a) El tiempo de vuelo se calcula haciendo y = 0 en la ecuación de la trayectoria:

$$y_2 = y_{o2} + v_{oy2}t - \tfrac{1}{2}\ gt^2$$

$$0 = 19458.0 + 1297.2\cdot t - \tfrac{1}{2}\ 10\cdot t^2$$

$$t^2 - 259.44\cdot t - 3891.6 = 0$$

$$t = \frac{259.44 \pm \sqrt{259.44^2 + 15566.4}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(259.44 \pm 287.88)$$

$$t = 129.72 \pm 143.94$$

t_a = negativo (no tiene sentido real)

$$t_b = 273\ s$$

$$t_{total} = t_1 + t_2$$

$$= 30 + 273$$

$$= 303\ s$$

$$= 5\ min,\ 3s.$$

b) y_m?

En $y = y_m$ se cumple que $v_{y2} = v_{oy2} - gt = 0$

$$0 = v_{oy2} - gt$$

$$t = v_{oy2}/g$$

$$= 1297.2/10$$

$$= 129.72\ s\ (\text{tiempo en alcanzar } y_m)$$

$$y_m = y_{o2} + v_{oy2}t - \tfrac{1}{2}\ gt^2$$

$$y_m = 19458.0 + 1297.2x129.72 - \tfrac{1}{2}\ 10x(129.72)^2$$

$$y_m = 19458.0 + 168272.78 - 84136.39$$

$$y_m = 103594.78\ m$$

$$\approx 103.6\ km$$

c) x_H?

$$x = x_{o2} + v_{ox2}t$$

$$= 7078.5 + (471.9\ x\ 303)$$

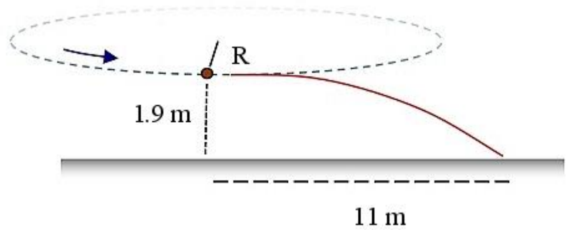
$$= 7078.5 + 142985.7$$

$$x_H = 150064.2\ m$$

$$\approx 150.0\ km$$

IV. MOVIMIENTO CIRCULAR Y MOVIMIENTO RELATIVO

1. Un niño hace girar una piedra en un círculo horizontal situado a 1.9 m sobre el suelo por medio de una cuerda de 1.4 m de longitud. La cuerda se rompe y la piedra sale disparada horizontalmente golpeando el suelo a 11 m de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?



Problema IV-1

Datos

$y_o = 1.9$ m

$x_h = 11$ m

$R = 1.4$ m

a_n?

Resolución

$$a_n = v^2/R \qquad (1)$$

La velocidad tangencial es la misma velocidad inicial v_{ox} del lanzamiento del proyectil.

$$y = y_o + v_{oy}t - \tfrac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

$$x_h = v_{ox}t_v \qquad (3)$$

El tiempo de vuelo se obtiene haciendo $y = 0$ en (2), con $v_{oy} = 0$:

$$0 = y_o + 0 - \tfrac{1}{2} gt_v^2$$

$$t_v = \pm(2y_o/g)^{1/2}.$$

La raíz (-) no tiene sentido físico. Como y_o y x_h son conocidos, sustituyendo en (3):

$$x_h = v_{ox}(2y_o/g)^{1/2}$$

$$v_o = \frac{x_h}{\sqrt{\frac{2y_o}{g}}}.$$

La aceleración normal se obtiene sustituyendo en (1):

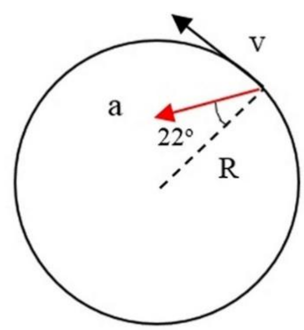
$$a_n = \frac{x_h^2 g}{2y_o R}$$

$$= \frac{11^2 \times 10}{2 \times 1.9 \times 1.4}$$

$$= 227.4 \text{ m/s2.}$$

---

2. Una partícula está viajando en una trayectoria circular de 3.64 m de radio. En cierto instante, la partícula se mueve a razón de 17.4 m/s y su aceleración forma un ángulo de 22.0° en dirección al centro del círculo según se ve desde la partícula (véase la figura). a) ¿A qué tasa está creciendo la rapidez de la partícula? b) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración?



Problema IV-2a

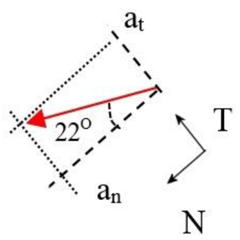
Datos

$R = 3.64$ m

$v = 17.4$ m/s

$\theta = 22°$

Resolución



Problema IV-2b

$$\vec{a} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N}$$

dónde $\vec{T}$ es el vector unitario tangente y $\vec{N}$ el vector unitario normal;

$$a_t = dv/dt \ ; \ a_n = v^2/R.$$

b) $a_n = v^2/R = (17.4)^2/3.64 = 83.2$ m/s^2,

y de aquí se obtiene el valor de a:

$$a_n = a\cos(22^o)$$

$$a = a_n/\cos(22^o) = 83.2/0.93 = 89.7 \text{ m/s}^2$$

a) De la figura del problema se ve que

$$a_t = dv/dt = a\,\text{sen}(22^o)$$

$$= 89.7 \cdot 0.374$$

$$= 33.5 \text{ m/s}^2$$

---

3. Una partícula se mueve en un plano de acuerdo a las ecuaciones:

$$x = R\text{sen}\omega t + \omega Rt$$

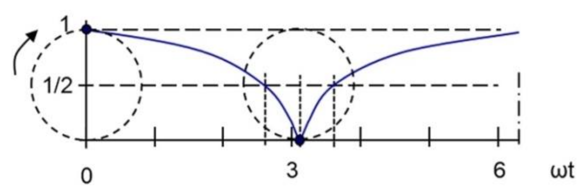
$$y = R\cos\omega t + R$$

donde ω y R son constantes. Esta curva, llamada *cicloide*, es la trayectoria trazada por el punto de una llanta de una rueda que gira sin resbalar a lo largo del eje x. a) Trace la trayectoria. b) Calcule la velocidad y la aceleración instantáneas cuando la partícula está en el valor de **y** máximo y mínimo.

Resolución

a) El gráfico se puede construir asumiendo un valor arbitrario de R, por ej., R = 1. Para valores mayores de t se repite cíclicamente.

t	**ωt**	**x**	**y**
0	0	0	2R
T/4	π/2	R(1+π/2)	R
T/2	π	πR	0
3T/4	3π/2	R(1-3π/2)	R
T	2π	2πR	2R



Problema IV-3

b)

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j},$$

$$v_x = dx/dt = R\cos(\omega t)\cdot\omega + \omega R$$

$$v_x = \omega R(\cos\omega t + 1)$$

$$v_y = dy/dt = -\ \omega R\text{sen}\omega t$$

Evaluando en $y_{máx}$ ($\omega t = 0$) *y* en $y_{min} = 0$ ($\omega t = \pi$):

$$v_x|_0 = 2\omega R,\ \ v_x|_\pi = 0$$

$$v_y|_0 = 0, \quad v_y|_\pi = 0$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$a_x = dv_x/dt = -\omega^2 R\text{sen}\omega t$$

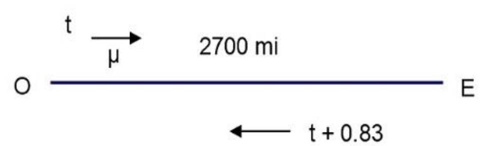
$$a_y = dv_y/dt = -\omega^2 R\cos\omega t$$

$$a_x]_0 = 0, \qquad a_x]_\pi = 0$$

$$a_y]_0 = -\omega^2 R, \quad a_y]_\pi = \omega^2 R$$

---

4. Un vuelo transcontinental de 2700 mi está programado con un tiempo de 50 min más largo cuando va hacia el oeste en vez de hacia el este. La velocidad del aeroplano en el aire tranquilo es de 600 mi/h. ¿Qué suposición se debe hacer sobre la velocidad de las corrientes de aire, ya sean provenientes del este o del oeste, al preparar la bitácora?



Problema IV-4

Datos

$x = 2700$ mi

$\Delta t = 50$ min $= 5/6$ hora $= 0.83$ h

$v_a = 600$ mi/h

μ = velocidad del viento

Resolución

Oeste a este $\rightarrow$ $x = (v + \mu)t$

Este a oeste $\rightarrow$ $x = (v - \mu)(t + 0.83)$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (t, μ). Eliminado t:

$$x = (v - \mu)\left(\frac{x}{v + \mu} + 0.83\right)$$

$$x(v + \mu) = (v - \mu) + 0.83(v^2 - \mu^2)$$

$$2\mu x = 0.83v^2 - 0.83\mu^2$$

$$\mu^2 + 6506\mu - 360000 = 0$$

$$\mu = -\frac{6506}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{6506^2 + 4 \times 36 \times 10^4}$$

$$\mu = -3253 \pm 3308$$

$$\mu = 55 \text{ mi/h}$$

Se debe asumir una velocidad promedio del viento en la dirección Este de 55 mi/h.

---

5. Está nevando verticalmente a una velocidad constante v_n de 7.8 m/s. a) ¿Con qué ángulo con respecto a la vertical y b) a qué velocidad parecen estar cayendo los copos de nieve según los ve el conductor de un automóvil que viaja en una carretera recta a una velocidad v_a de 55 km/h?

Datos

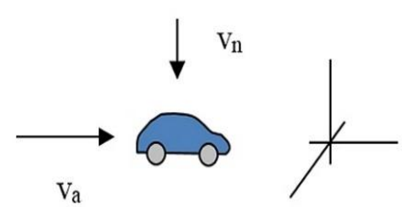
$v_n = 7.8$ m/s

$v_a = 55$ km/h $= 55\text{x}10^3/3600 = 15.3$ m/s

θ?

v_{na}?

Resolución



Problema IV-5a

a) Para el movimiento relativo de dos sistemas de referencia se cumple la relación

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu} \qquad (1)$$

$\vec{v}'$: Velocidad de la partícula respecto al sistema móvil

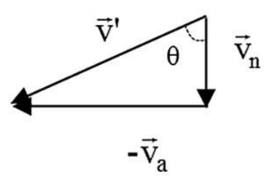
$\vec{v}$: Velocidad de la partícula respecto al sistema fijo

$\vec{\mu}$: Velocidad del sistema móvil respecto al fijo.

En este caso el sistema fijo está en tierra, y el sistema móvil es el auto:

$$\vec{\mu} \equiv \vec{v}_a .$$

La velocidad del copo de nieve, aunque no se dice explícitamente, es respecto a tierra: $\vec{v} \equiv \vec{v}_n$.



Problema IV-5b

Por tanto, aplicando (1):

$$\vec{v}' = \vec{v}_n - \vec{v}_a = \vec{v}_n + \left(-\vec{v}_a\right)$$

$$\tan\theta = v_a/v_n$$

$$= 15.3/7.8$$

$$= 1.96$$

$$\theta = \arctan(1.96)$$

$$\theta = 63^o$$

b) Calculando el módulo de v':

$$v'\cos\theta = v_n$$

$$v' = v_n/\cos\theta$$

$$= 7.8/0.45$$

$$= 17.3 \text{ m/s}$$

---

6. Un piloto debe viajar hacia el este desde A hasta B y luego regresar de nuevo al punto A hacia el oeste. La velocidad del aeroplano en el aire es $\vec{v}$, y la velocidad del aire con respecto al suelo es $\vec{\mu}$. La distancia entre A y B es L y la velocidad del aeroplano en el aire es constante. a) Si u = 0 (aire quieto), demuestre que el tiempo del viaje redondo es $t_o = 2L/v$. b) Suponga que la velocidad del aire va hacia el este (u oeste). Demuestre que el tiempo del viaje redondo es entonces

$$t_E = \frac{t_o}{1 - u^2 / v^2} .$$

c) Suponga que la velocidad del aire es hacia el norte (o hacia el sur). Demuestre que el tiempo del viaje redondo es, entonces

$$t_N = \frac{t_o}{\sqrt{1 - u^2 / v^2}} .$$

d) En las partes b) y c), ¿debemos suponer que u < v? ¿Por qué?

Datos: v, μ, $\overline{AB} = L$

Resolución

a) u = 0

$$t = 2t' = 2L/v$$

$$t_o = 2L/v$$

b)

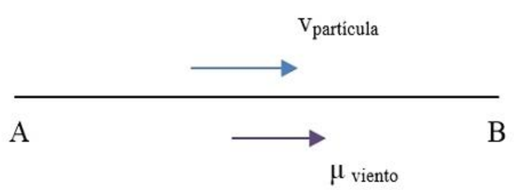
$$\vec{v}'_{sm} = \vec{v}_{sf} - \vec{\mu}_{mf}$$

v = velocidad de la partícula respecto al sistema fijo

v' = velocidad de la partícula respecto al sistema móvil *(avión)*

u = velocidad del sistema móvil respecto al fijo *(viento)*

En este caso interesa la velocidad del avión respecto a tierra. $\vec{v}_{sf} = \vec{v}_{sm} + \vec{\mu}_{mf}$.



Problema IV-6a

Como es en una dimensión:

$$\text{a favor del viento: } v_{sf} = v + u$$

$$\text{en contra del viento: } v_{sf} = v - u$$

$$t_{ida} = L/(v + u)$$

$$t_{vuelta} = L/(v - u)$$

$$t = t_{ida} + t_{vuelta} = L\left(\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-u}\right)$$

$$= \frac{2Lv}{v^2 - u^2}$$

tras dividir numerador y denominador por v^2 se llega a:

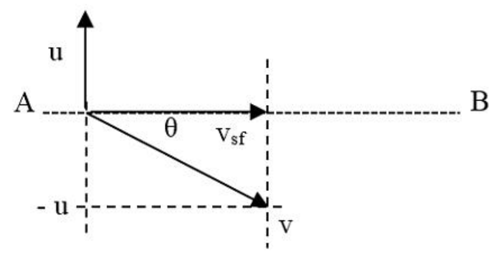
$$t = \frac{t_o}{1 - u^2 / v^2} .$$

c) En este caso el avión es empujado lateralmente por el viento. Para llegar a B, se debe orientar la dirección del vuelo en sentido contrario, con una componente – μ que neutralice la velocidad del viento.

La velocidad en la dirección correcta respecto a tierra será

$$v_{sf} = v\cos\theta = v(1 - \text{sen}^2\theta)^{1/2}$$

$$v_{sf} = v\sqrt{1 - u^2 / v^2} .$$



Problema IV-6b

Razonando desde B hasta A, se ve del gráfico que

$$t_{ida} = t_{vuelta}$$

$$t = 2t_{ida} = \frac{2L}{v\sqrt{1 - u^2 / v^2}}$$

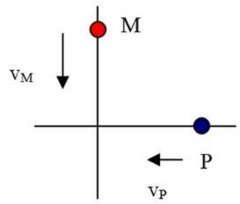
$$t = \frac{t_o}{\sqrt{1 - u^2 / v^2}} .$$

d) En la parte (b), u > v conduce a un tiempo negativo, sin sentido real. Significa físicamente que en el vuelo de regreso la velocidad del viento u es mayor que la del avión, lo que impediría que el avión regrese.

En la parte (c) ocurre algo similar. En este caso conduce a un número imaginario. La razón física es que u es una componente de v, y no puede ser nunca mayor. Para u = v el avión nunca llegaría a su meta (tendría que viajar en dirección perpendicular a la misma para poder vencer la componente del viento).

---

7. Dos carreteras se intersectan formando un ángulo de 90º. En un instante una patrulla P está a 41 m de la intersección y moviéndose a 76 km/h. Un motorista M está a 57 m de la intersección y moviéndose a razón de 62 km/h en esa dirección. En ese momento ¿Cuál es la velocidad V_{MP} del motorista con respecto a la patrulla?



Problema IV-7a

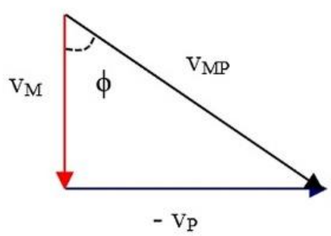
Datos

v_M = 62 km/h

v_P = 76 km/h

v_{MP}?

Resolución



Problema IV-7b

Los datos de distancia no se necesitan para resolver el problema.

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu}$$

v = velocidad de la partícula respecto al sistema fijo

v' = velocidad de la partícula respecto al sistema móvil

μ = velocidad del sistema móvil respecto al fijo

En este caso:

$$\vec{v} \equiv \vec{v}_M\,, \quad \vec{\mu} \equiv \vec{v}_P$$

$$\vec{v}_{MP} = \vec{v}_M - \vec{v}_P\,.$$

$$\tan \Phi = v_P/v_M$$

$$= 76/62$$

$$= 1.225$$

$$\Phi = \tan^{-1} 1.225$$

$$\Phi = 50.8\,^{o}$$

El módulo de la velocidad se calcula de la expresión

$$v_{MP}\cos\Phi = v_M:$$

$$v_{MP} = v_M/\cos\Phi$$

$$= 62/\cos(50.8)$$

$$= 62/0.632$$

$$= 98.1 \text{ km/h.}$$

V. Segunda ley de Newton (no fricción)

1. Una caja de 110 kg está siendo empujada a velocidad constante por la rampa de 34° que se muestra en la figura. a) ¿Qué fuerza horizontal F se requiere? b) ¿Cuál es la fuerza ejercida por la rampa sobre la caja?

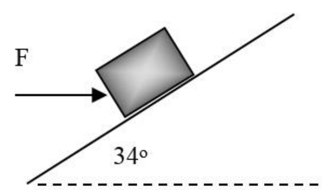


Figura V-1a

Datos

m = 110 kg

θ = 34°

v = constante

a) F?

b) F_{rc}?

Resolución

a) Pasos a seguir:

i) Identificar las fuerzas (*paso más importante*)

ii) Escoger un sistema de referencia adecuado (*un eje en el sentido del movimiento o del posible movimiento*).

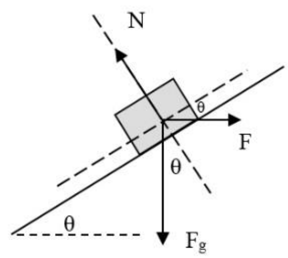


Figura V-1b

iii) Plantear la 2da ley en cada eje coordenado

Eje x:

$$F\cos\theta - F_g \text{sen}\theta = ma_x = 0$$

$$F = F_g \tan\theta$$

$$= mg \cdot \tan(34^o)$$

$$= 110 x 10 x 0.67$$

$$= 737 \text{ N}$$

b)

$$N - F_g\cos\theta - F\text{sen}\theta = ma_y = 0$$

$$N = F_g\cos\theta + F\text{sen}\theta$$

$$= mg\cos 37 + F\text{sen}37$$

$$= 110x10x0.83 + 737x0.56$$

$$= 1325.7 \text{ N}$$

---

2. Tres bloques están unidos como se muestra en la figura del problema, sobre una mesa horizontal carente de fricción, y se tira de ellos hacia la derecha con una fuerza $T_3 = 6.5$ N.

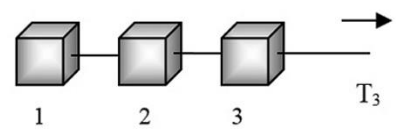


Figura V-2

Si $m_1 = 1.2$ kg, $m_2 = 2.4$ kg y $m_3 = 3.1$ kg, calcule: a) la aceleración del sistema y, b) las tensiones T_1 y T_2. Trace una analogía de los cuerpos que están siendo halados en tándem, tal como si una locomotora tirara de un tren de carros acoplados.

Datos

$T_3 = 6.5$ N

$m_1 = 1.2$ kg

$m_2 = 2.4$ kg

$m_3 = 3.1$ kg

Resolución

a) Como las sogas no tienen masa ni se estiran, ni hay fricción, *la posición relativa de los bloques no varía durante el movimiento*, y se puede considerar que los tres cuerpos forman una sola partícula de masa

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

$$= 1.2 + 2.4 + 3.1 = 6.7 \text{ kg.}$$

Entonces, aplicando la 2da ley: $\vec{F}_R = m\vec{a}$.

Como es en una dimensión,

$$T_3 = Ma$$

$$a = T_3/M$$

$$= 6.5/6.7$$

$= 0.97\ m/s^2.$

b) La 2da ley se debe cumplir igualmente para cada bloque por separado:

$$T_1 = m_1a$$
$$= 1.2 \times 0.97$$
$$= 1.16\ N$$
$$T_2 = (m_1 + m_2)a$$
$$= 3.6 \times 0.97$$
$$= 3.49\ N.$$

---

3. Una cadena que consta de 5 eslabones, cada uno con una masa de 100 g, se levanta verticalmente con una aceleración constante de 2.50 m/s^2. Halle a) las fuerzas que actúan entre eslabones adyacentes, b) la fuerza F ejercida en el eslabón superior por el agente que eleva la cadena y c) la fuerza neta en cada eslabón.

Figura V-3a

Datos

$m_i = 100\ g = 0.1\ kg$

$a = 2.5\ m/s^2$

Resolución

a)

F_i = fuerza ejercida por el eslabón superior

F_{gi} = fuerza gravitatoria sobre el eslabón i

P_i = peso de los eslabones inferiores = nm_ig donde n es el número de eslabones por debajo del eslabón i.

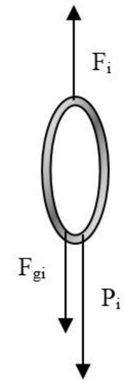


Figura V-3b

b) Aplicando la 2da ley en el eje y, considerando toda la cadena como una partícula, para el 1er eslabón $F_i = F$,

$$P_i + F_{gi} = 5m_ig$$
$$F - F_g = 5m_ia$$
$$F - 5m_ig = 5m_ia$$
$$F = 5m_i(a + g)$$
$$= 0.5x(10 + 2.5)$$
$$= 6.25\ N$$

c) Fuerza neta ≡ fuerza resultante. En este caso, para cualquier eslabón también se tiene que cumplir la 2da ley:

$$F_R = m_ia$$
$$= 0.1 \times 2.50$$
$$= 0.25\ N$$

Notar que la fuerza neta o resultante no es igual a la fuerza F_i ejercida por el eslabón superior, ya que, en cada caso tendríamos diferentes F_i, dependiendo del valor de P_i

$$F_R = F_i - F_{gi} - P_i = m_ia$$

---

4. Un bloque de masa m_1 = 3.70 kg está sobre un plano inclinado de ángulo θ = 28.0º y unido por una cuerda sobre una polea pequeña, sin fricción y sin masa, a un segundo bloque de masa m_2 = 1.86 kg que cuelga verticalmente. a) ¿Cuál es la aceleración de cada bloque? b) Halle la tensión en la cuerda.

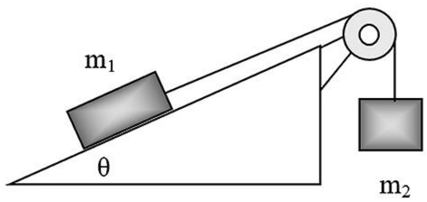


Figura V-4a

Datos

$m_1 = 3.7$ kg

$\theta = 28^o$

$m_2 = 1.86$ kg

a?

T?

Resolución

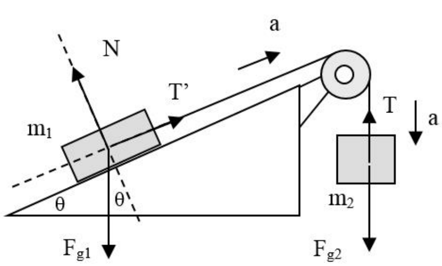


Figura V-4b

a) Ante todo, es necesario averiguar si se mueve hacia la izq. o hacia la derecha, y poder determinar el sentido relativo de la aceleración y las fuerzas. Para eso hay que comparar las componentes actuando a lo largo de la cuerda en distinto sentido. El movimiento será en el sentido de la mayor.

$$F_{g2} = m_2 g$$

$$= 18.6 \text{ N}$$

$$F_{g1}\text{sen}\theta$$

$$= 37\text{x } 0.47$$

$$= 17.4 \text{ N}$$

$$F_{g2} > F_{g1}\text{sen}\theta \rightarrow \text{se mueve a la derecha.}$$

Si la cuerda no tiene masa, analizando las parejas de acción y reacción de la tensión, se llega rápidamente a la conclusión de que T' = T. La aceleración también es la misma para los dos bloques en valor numérico, pues se supone la soga inextensible, y lo que avanza un cuerpo también lo avanza el otro en el mismo intervalo, $dx_1/dt = dy_2/dt$, e igual para la 2da derivada; $a_{x1} = a_{y2}$.

Cuerpo 1: (T y a tienen el mismo sentido)

$$T - F_{g1}\text{sen}\theta = m_1 a$$

$$T = m_1 g\text{sen}\theta + m_1 a \qquad (1)$$

Cuerpo 2: (T y a tienen sentido contrario)

$$T - F_{g2} = - m_2 a$$

$$T = m_2 g - m_2 a \qquad (2)$$

El resto es puramente matemático: despejando T en las ecuaciones (1) y (2) se llega a:

$$a = g\,\frac{(m_2 - m_1\text{sen}\theta)}{(m_1 + m_2)}$$

$$= 10\text{x}\,\frac{1.86 - 3.7\text{x}0.47}{3.7\text{x}1.86}$$

$$= 0.218 \text{ m/s}^2$$

b) Sustituyendo en (2):

$$T = m_2(g - a)$$

$$= 1.86 \text{ x } (10 - 0.218)$$

$$= 18.2 \text{ N.}$$

5. Un agente externo ejerce una fuerza vertical sobre el eje de la polea en la figura. Considere que la polea y el cable carecen de masa y que el buje carece de fricción. Dos objetos de masa m_1 = 1.2 kg y m_2 = 1.9 kg están unidos a los extremos opuestos del cable que pasa sobre la polea. El objeto de masa m_2 está en contacto con el piso. a) ¿Cuál es el mayor valor que la fuerza F puede tener de modo que m_2 permanezca en reposo sobre el piso? b) ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la fuerza F hacia arriba es de 110 N? c) Con la tensión determinada en b), ¿cuál sería la aceleración de m_1?

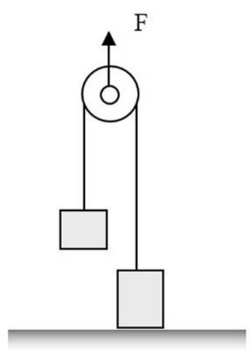


Figura V-5a

Datos

$m_1 = 1.2$ kg

$m_2 = 1.9$ kg

¿$F_{máx}$ para $v_2 = 0$?

¿T cuando F = 110 N?

Resolución

a) Si la cuerda y la polea no tienen masa no pueden alterar los valores de T_1 y T_2. Considerando las parejas de acción y reacción, se llega rápidamente a que

$$T_1 = T_2 = T.$$

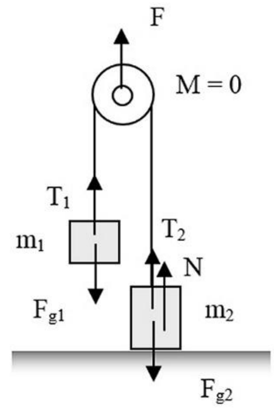


Figura V-5b

Al halar mediante F, la cuerda se desliza y la polea sube, junto con el cuerpo 1. Sin embargo, planteando la 2da ley en la polea:

$$F - T_1 - T_2 = Ma_p = 0$$

$$F = 2T\,. \qquad (1)$$

Para el cuerpo 2:

$$T + N - F_{g2} = m_2a = 0$$

$$T = m_2g - N. \qquad (2)$$

El valor de N se determina a partir de la condición de $F_{máx}$. Un instante antes de separarse del suelo, N ≈ 0**.** Sustituyendo (2) en (1) con N = 0 (caso límite):

$$F = 2m_2g$$

$$= 2 \text{ x } 1.9 \text{ x } 10$$

$$= 38 \text{ N.}$$

b) De (1),

$$T = F/2 = 110/2 = 55 \text{ N.}$$

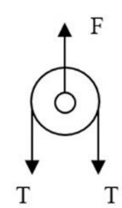


Figura V-5c

c)

$$T_1 - F_{g1} = m_1 a$$

$$a = \frac{T_1}{m_1} - g$$

$$= (55/1.2) - 10$$

$$= 35.8 \text{ m/s}^2.$$

---

6. El hombre de la figura del problema pesa 180 lb, la plataforma y la polea sin fricción unida a ella pesan un total de 43 lb. Desprecie el peso del cable. ¿Con qué fuerza debe el hombre halar el cable con objeto de elevarse a sí mismo y a la plataforma a razón de 1.2 ft/s^2?

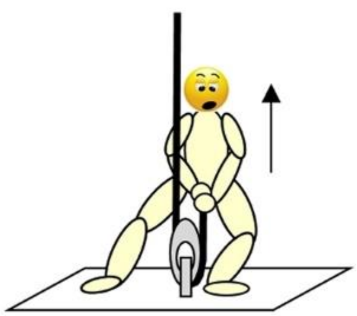


Figura V-6a

Datos

l lb (masa) = 0.453 kg

1 ft = 0.305 m

$m_h = 180 \times 0.453 = 81.54$ kg

$m_p = 43 \times 0.453 = 19.48$ kg

$a = 1.2$ ft/s $= 1.2 \times 0.305 = 0.366$ m/s^2

Resolución

El sistema hombre + polea-plataforma *no se puede considerar una partícula, porque hay fuerzas internas* actuando (hombre-polea, hombre-suelo y sus parejas de acción y reacción). Sin embargo, en el capítulo de sistemas de partículas se demuestra que, para un sistema cualquiera se debe cumplir que

$$\vec{F}_{Rext} = M\vec{a}_{cm},$$

donde el 1er término se refiere exclusivamente a las resultante de las fuerzas *externas* y la aceleración es la del centro de masa del sistema. Entonces, considerando solo las fuerzas externas en el sistema hombre + polea-plataforma:

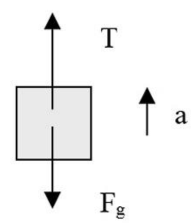


Figura V-6b

$$T - F_g = Ma$$

$$T = M(g+a)$$

$$T = (m_h + m_p)(g + a)$$

$$= (81.54 + 19.48)(10 + 0.366)$$

$$T = 1036.8 \text{ N}.$$

Para llevar a libras (fuerza):

$$1 \text{ N} = 0.2248 \text{ lb} \rightarrow T = 233 \text{ lb}.$$

La función de la cuerda sin peso es sólo transmitir la tensión T hasta el hombre, cambiando su dirección de aplicación, pero no su magnitud. Esa fuerza actúa sobre el hombre, y es igual a la ejerce el hombre sobre la cuerda por ser pareja de acción y reacción.

Nota. Este problema se puede resolver (de forma más compleja) considerando dos partículas (hombre y plataforma) y aplicando las leyes de Newton a cada una, sin necesidad de introducir los criterios de sistema de partículas.

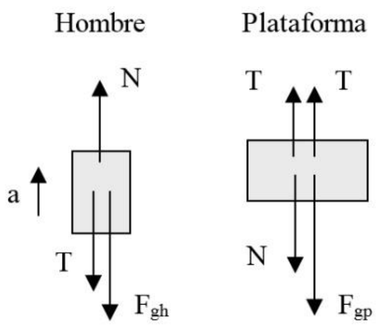


Figura V-6c

$$N - T - F_{gh} = m_h a \qquad (1)$$

$$2T - N - F_{gp} = m_p a \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) y agrupando se llega a la misma solución:

$$T - (m_h + m_p)g = (m_h + m_p)a$$

$$T = (m_h + m_p)(g + a)$$

Es decir, para lograr que todo suba aceleradamente el hombre se tiene que cargar a sí mismo junto con la plataforma, y además aportar una fuerza extra $(m_h+m_p)a$.

---

7. Una bola de 1.34 kg está unida a una varilla vertical rígida por medio de dos cordones sin masa, cada uno de 1.70 m de longitud. Los cordones están unidos a la varilla con una separación entre sí de 1.70 m (aparte). El sistema está girando con respecto al eje de la varilla, quedando ambos cordones tirantes y formando un triángulo equilátero con la varilla, como se muestra en la figura. La tensión en el cordón superior es de 35.0 N. a) Halle la tensión en el cordón inferior. b) Calcule la fuerza neta sobre la bola en el instante mostrado en la figura. c) ¿Cuál es la velocidad de la bola?

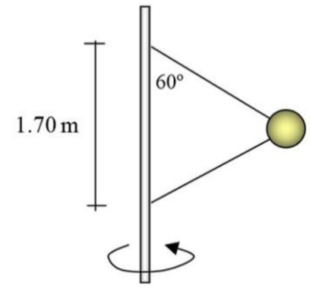


Figura V-7a

Datos

$m = 1.34$ kg

$L = 1.70$ m

$T_1 = 35.0$ N

¿T_2?

Resolución

a)

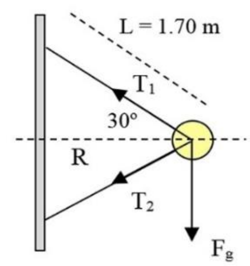


Figura V-7b

Eje x:

$$T_1 \cos 30^o + T_2 \cos 30^o = mv^2/R$$

$$= \frac{mv^2}{L\cos 30^o}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{mv^2}{L\cos^2 30^o} \qquad (1)$$

Eje y:

$$T_1 \,\text{sen}30^o - T_2 \,\text{sen}30^o - F_g = 0$$

$$T_1 - T_2 = \frac{mg}{sen30^o} \qquad (2)$$

T_2 se obtiene directamente despejando en (2):

$$T_2 = T_1 - mg/sen30^o$$

$$= 35.0 - 1.34x10/0.5$$

$$= 8.2\ N.$$

b) F_R?

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\,\vec{i} + F_{Ry}\,\vec{j}$$

$$F_{Ry} = ma_y = 0$$

$$F_{Rx} = ma_x = mv^2/R = mv^2/L\cos\theta. \qquad (3)$$

Falta el dato de la velocidad, que se obtiene despejando en la ecuación (1)

$$v = \left(\frac{1}{m}(T_1 + T_2)L\cos^2 30^o\right)^{1/2}$$

$$= [(1/1.34)(35.0 + 8.2)x1.70x0.75]^{1/2}$$

$$= 6.41\ m/s \text{ [inciso (c)]}$$

Finalmente, sustituyendo en (3)

$$F_R = F_{Rx} = (1.34x60.22)/(1.70x(\sqrt{3}/2))$$

$$= 54.9\ N \text{ [inciso (b)]}$$

---

8. Un globo aerostático desciende en aire tranquilo a una velocidad constante de 1.88 m/s. El peso total del globo, incluyendo la carga útil, es de 10.8 kN. Se ejerce sobre el globo una fuerza ascensional constante de 10.3 kN al inyectar aire caliente en su interior. El aire externo ejerce una fuerza de arrastre por viscosidad dada por $D = bv^2$, donde v es la velocidad del globo y b es una constante. La tripulación arroja 26.5 kg de lastre. ¿Cuál será la nueva velocidad constante de descenso del globo?

Figura V-8a

Datos

$v_o = 1.88$ m/s constante

$P = F_g = 10.8$ kN $= 10.8x10^3$ N

$F_e = 10.3$ kN $= 10.3x10^3$ N

$f = bv^2$ (fricción por viscosidad)

$\Delta m = 26.5$ kg

v '?

Resolución

Se considera el globo junto con la canasta como una partícula.

Diagrama de fuerzas:

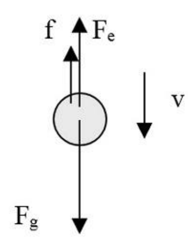


Figura V-8b

$$F_e + f - F_g = ma = 0$$

De aquí se puede determinar el valor de la constante "b".

$$bv^2 = F_g - F_e \qquad (1)$$

$$b = (F_g - F_e)/v^2$$

$$= (10800 - 10300)/(1.88)^2$$

$$= 141.5\ N/(m/s)^2$$

Comentarios:

1. La fuerza de empuje cumple el principio de Arquímedes. Como el aire caliente ocupa un volumen mayor que el aire frío, el globo lleno de aire caliente "pesa" menos que si lo estuviera de aire frío. La explicación de por qué aparece el empuje ascendente en este caso se logra al estudiar la ecuación fundamental de la hidrostática en el capítulo de fluidos.

2. Al arrojar lastre, habrá un período transiente donde la velocidad no se mantiene constante. En ese caso la 2da ley conduce a una ecuación diferencial de 1er orden,

$$F_e - F_g + bv^2 = m'(dv/dt).$$

F_e es la misma que antes, $F'_g = (m - \Delta m)g$ y $m' = m - \Delta m$. La solución general de esta ecuación no es trivial. Sin embargo, el problema pide calcular la nueva velocidad de equilibrio. Y en el equilibrio necesariamente se tiene que cumplir de nuevo la ecuación (1), con la nueva masa $(m - \Delta m)$.

Según (1)

$$bv^2 = F'_g - F_e$$

$$v = \left\{\frac{(m - \Delta m)g - F_e}{b}\right\}^{1/2}$$

donde

$$m = F_g/g$$

$$= 10.8 \times 10^2\ kg,$$

$$v = \left\{\frac{(1080 - 26.5)x10 - 10300}{141.5}\right\}^{1/2}$$

$$= 1.29\ m/s.$$

VI. SEGUNDA LEY DE NEWTON (CON FRICCIÓN)

1. Una fuerza horizontal F de 12 lb empuja a un bloque que pesa 5.0 lb contra una pared vertical (Fig. 26). El coeficiente de fricción estática entre la pared y el bloque es de 0.60, y el coeficiente de fricción cinética es de 0.40. Suponga que el bloque no se está moviendo inicialmente. a) ¿Comenzará a moverse el bloque? b) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el bloque por la pared?

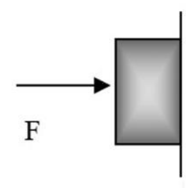


Figura VI-1a

Datos

F = 12 lb = 12 x 4.48 = 53.76 N (1 lb –fuerza- = 4.48 N)

P_B = 5 lb = 5 x 0.453 = 2.265 N (1 lb –masa- = 0.453 kg)

$\mu_s = 0.6$

$\mu_K = 0.4$

$v_o = 0$

a) Hay movimiento?

b) F_{pB}?

Resolución

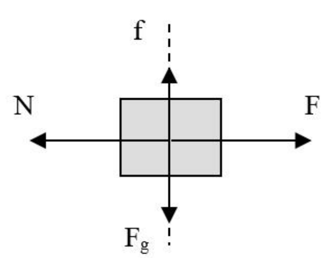


Figura VI-1b

En todo problema donde intervengan fuerzas:

paso 1: diagrama de fuerzas

Paso 2: sistema de referencia adecuado.

Eje x:

$$F - N = ma_x = 0$$

$$N = F.$$

Eje y:

$$F_g - f = ma_y = ?$$

a) Para que se mueva, se debe cumplir

$$F_g > f_{máx} = \mu_s N = \mu s F.$$

$$F_g = m_B g$$

$$= 2.265 \text{ x } 10$$

$$= 22.65 \text{ N}$$

$$\mu_s F = 0.6 \text{ x } 53.76$$

$$= 32.26 \text{ N.}$$

Por tanto, el bloque no se mueve.

b)

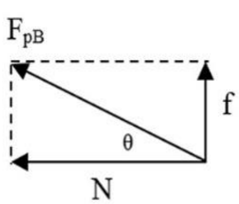


Figura VI-1c

$$\vec{F}_{pB} = \vec{N} + \vec{f}$$

$$F_{pB} = \sqrt{32.26^2 + 53.76^2}$$

$$= 62.7 \text{ N}$$

$$\tan\theta = f/N$$

$$= 32.26/53.76$$

$$= 0.60$$

$$\theta = \arctan(0.6) = 31^o.$$

---

2. Una caja se desliza hacia abajo por una canal inclinada y en ángulo recto como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el material que componen la canal es μ_k. Halle la aceleración de la caja.

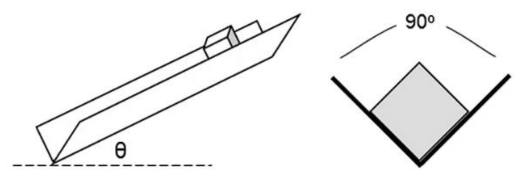


Figura VI-2a

Datos

θ, μ_k

Resolución

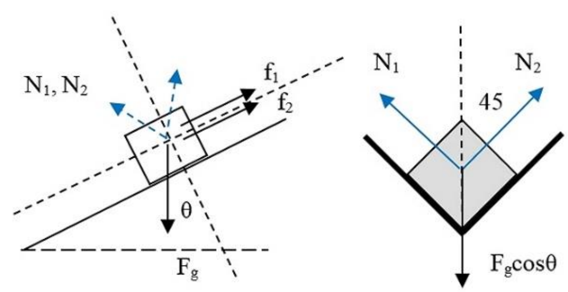


Figura VI-2b

Hay dos superficies con normales diferentes → hay dos fuerzas de fricción a considerar, una en cada superficie.

$$f_1 = \mu_k N_1 \text{ y similar para } f_2$$

En el eje y, por simetría, $N_1 = N_2$

$$N_1\cos 45 + N_2\cos 45 = F_g\cos\theta$$

$$N_1\sqrt{2} = mg\cos\theta$$

$$N_1 = mg\cos\theta/\sqrt{2}.$$

En el eje x, como $N_1 = N_2$, $f_1 = \mu_k N_1$ es igual a f_2: $f_1 + f_2 = 2f_1$

$$F_g sen\theta - 2f_1 = ma$$

$$mgsen\theta - 2\mu_k mgcos\theta/\sqrt{2} = ma$$

$$a = g(sen\theta - \sqrt{2}\mu_k cos\theta)$$

---

3. Un bloque de 4.40 kg está colocado sobre otro bloque de 5.50 kg. Con objeto de hacer que el bloque de arriba se deslice sobre el de abajo, que se mantiene fijo, debe aplicarse sobre el bloque de arriba una fuerza horizontal de 12.0 N.

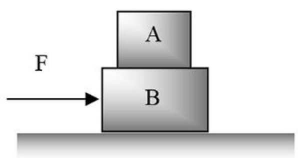


Figura VI-3ª

El conjunto de bloques es ahora situado sobre una mesa horizontal carente de fricción, como en la figura. Halle:

a) la fuerza horizontal máxima F que puede ser aplicada al bloque inferior de modo que ambos bloques se muevan juntos.

b) La aceleración resultante de los bloques y

c) el coeficiente de fricción estática entre los bloques.

Datos

$m_A = 4.4$ kg

$m_B = 5.5$ kg

$F_{máx}$ para que A no deslice?

a?

c) μ_s?

Resolución

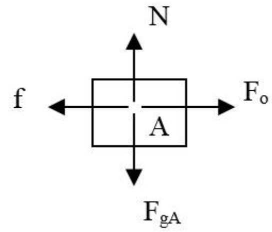


Figura VI-3b

c)

Bloque B fijo y fuerza F_A aplicada sobre A. Esta información se usa para obtener el coeficiente de fricción entre A y B (inciso c). Mientras el bloque A no se mueva, para cualquier fuerza F_o,

$$F_o - f = m_A a_x = 0,$$

$$N - F_{gA} = ma_y = 0$$

$$f = F_o$$

$$N = F_{gA}.$$

La fuerza de fricción estática cumple la condición

$$f_{máx} \leq \mu_s N.$$

Sustituyendo f por el máximo valor posible para que esté en reposo, cuando $F_o = F_A = 12.0$ N:

$$\mu_s m_a g = F_A$$

$$\mu_s = F_A/m_a g$$

$$= 12/4.4x10$$

$$= 0.27$$

a)

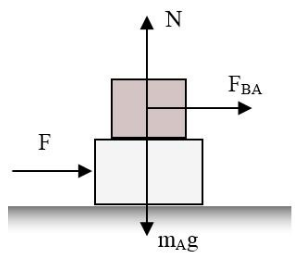


Figura VI-3c

Mientras se cumpla que $F_{BA} < f_{máx} = \mu_s m_A g$ el cuerpo A no podrá deslizarse sobre B, y por tanto *viajarán juntos*. Para que no se separen, $F_{BA} \leq \mu_s m_a g$.

Como además se tiene que cumplir la 2da ley en A,

$$F_{BA} = m_A a.$$

Por tanto, tomando el mayor valor posible de F_{BA} (signo igual):

$$\mu_s m_a g = m_a a$$

$$a = \mu_s g$$

$$= 0.27 \times 10$$

$$= 2.7 \text{ m/s}^2.$$

b) Aplicando 2da ley en el eje x, considerando los dos bloques A y B unidos como una partícula:

$$F_{máx} = F_{Rx} = (m_A + m_B)a$$

$$= 9.9 \times 2.7$$

$$= 26.7 \text{ N}$$

---

4. Un ciclista viaja en un círculo de 25 m de radio a una velocidad constante de 8.7 m/s. La masa combinada de la bicicleta y el tripulante es de 85 kg. Calcule la fuerza (magnitud y ángulo con la vertical) ejercida por la pista sobre la bicicleta.

Datos

R = 25 m

v = 8.7 m/s

m = 85 kg

F?

Resolución

Se considera el sistema bicicleta + tripulante como una partícula.

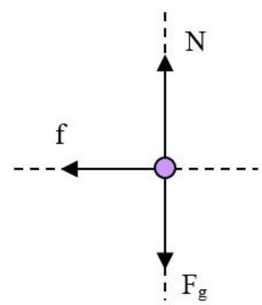


Figura VI-4a

Comentarios:

1. Considerar todo como una partícula es válido, pues sólo interesan las fuerzas externas al sistema (ejercida por la pista).

2. La normal es siempre perpendicular a las superficies en contacto, (aunque la bicicleta esté inclinada). *Razón*: porque experimentalmente $f = \mu N$, y la componente que interesa para calcular f es justamente la normal y no otra.

3. La fuerza centrípeta NO es una fuerza de la naturaleza, sino el nombre que se le da a la resultante de las fuerzas actuando en la dirección radial. No es una fuerza que se añada al diagrama de cuerpo libre.

4. Cuando hay fuerza centrípeta, usualmente resulta conveniente tomar un sistema de ejes

con el eje x en la dirección radial.

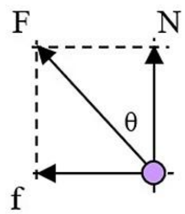


Figura VI-4b

Resolución

$$\vec{F}_R = \vec{N} + \vec{f}$$

eje y

$$N - F_g = ma_y = 0$$

$$N = F_g = mg$$

$$= 85x10$$

$$= 850\ N.$$

eje x

$$f = ma_c = mv^2/R = 85x(8.7)^2/25 = 257.3\ N$$

$$\vec{F} = \vec{N} + \vec{f}$$

$$F = \sqrt{850^2 + 257.3^2}$$

$$= 881.8\ N.$$

$$\tan\theta = f/N$$

$$= 257.3/850$$

$$= 0.30$$

$$\theta = \arctan(0.30) = 16.7^o.$$

---

5. Una curva peraltada de una carretera circular está diseñada para que el tráfico se mueva a razón de 95 km/h. El radio de la curva es de 210m. El tráfico se mueve a lo largo de la carretera a razón de 52 km/h en un día tormentoso. a) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo entre las llantas y la carretera que permita que los automóviles tomen la curva sin patinar? b) Con este valor del coeficiente de fricción, ¿cuál es la velocidad mayor a la que puede ser tomada la curva sin que haya un patinaje?

Datos

$v_o = 95$ km/h = $95x10^3/3600 = 26.4$ m/s

R = 210 m

v = 52 km/h = $52x10^3/3600 = 14.4$ m/s

a) μ_s (mínimo)

b) $v_{máx}$?

Resolución

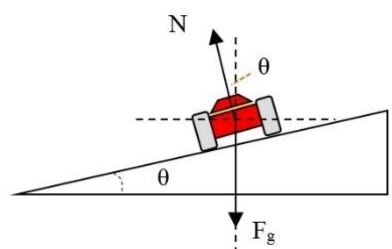


Figura VI-5a

Comentario: El diseño de un peralte se hace de forma tal que, para la velocidad propuesta, el ángulo de peralte θ proporcione *toda* la componente centrípeta necesaria, sin tomar en cuenta la fricción de las ruedas. → El dato de v_o se usa para calcular θ.

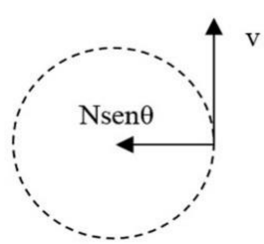


Figura VI-5b. Vista en planta

Eje x

$$N\text{sen}\theta = ma_c = mv^2/R$$

$$N\text{sen}\theta = mv^2/R. \qquad (1)$$

Eje y

$$N\cos\theta - F_g = ma_y = 0$$

$$N\cos\theta = mg. \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones 1 y 2:

$$\tan\theta = v^2/Rg$$

$$= (26.4)^2/210\text{x}10$$

$$= 0.332$$

$$\theta = \arctan(0.332)$$

$$= 18.4^o.$$

a) $\mu_{mínimo}$?

Comentario: Suponga que no hay fricción. Si $v < v_o$ el auto se deslizaría hacia abajo, porque la componente Nsenθ ahora es mayor que la fuerza centrípeta v^2/R que hace falta para que el auto gire → la fricción adicional siempre obra en contra del posible movimiento, hacia fuera.

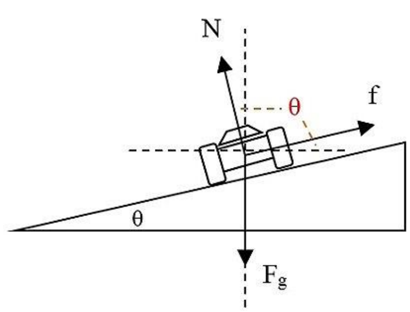


Figura VI-5c

Su efecto es reducir el valor de la resultante en el eje x hasta igualarlo a mv^2/R. El mínimo valor de f posible (y de μ) es aquel que junto a Nsenθ proporciona la fuerza centrípeta necesaria. Note que un valor mayor de μ no alterará el valor de f que cumpla la condición anterior (recuerde que en una dimensión $f = - F_{aplicada}$ mientras no se alcance el valor máximo).

eje x:

$$N\text{sen}\theta - f\cos\theta = mv^2/R$$

$$N(\text{sen}\theta - \mu_s\cos\theta) = mv^2/R. \qquad (1)$$

eje y:

$$N\cos\theta + f\text{sen}\theta - F_g = 0$$

$$N(\cos\theta + \mu_s\text{sen}\theta) = mg. \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{\text{sen}\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\text{sen}\theta} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\tan\theta - \mu = \frac{v^2}{Rg} - \frac{v^2}{Rg}\mu\tan\theta$$

$$\tan\theta - \frac{v^2}{Rg} = \mu\left(1 - \frac{v^2}{Rg}\tan\theta\right)$$

$$\mu = \frac{\tan\theta - \dfrac{v^2}{Rg}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{Rg}\tan\theta\right)}$$

$$= \frac{0.332 - (14.4)^2/2100}{1 - 0.332\text{x}(14.4)^2/2100}$$

$$\mu_s = (0.332 - 0.0987)/(1 - 0.0327)$$

$$= 0.233/0.967$$

$$= 0.24.$$

b) $v_{máxima}$?

Comentarios:

1. Al aumentar v por encima de la velocidad de diseño, el auto tiende a escapar por la tangente y se necesita la fricción con el pavimen-

to para no escapar. Ahora Nsenθ no basta para proporcionar la aceleración centrípeta necesaria.

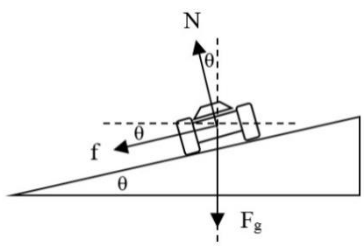


Figura VI-5d

2. La fricción siempre se opone al movimiento (o al posible movimiento) y ahora actúa en sentido contrario al inciso anterior, evitando que el auto suba la cuesta lateralmente.

eje x

$$N\text{sen}\theta + f\cos\theta = mv^2/R$$

$$N(\text{sen}\theta + \mu_s\cos\theta) = mv^2/R. \quad (1)$$

eje y

$$N\cos\theta - f\text{sen}\theta - F_g = 0$$

$$N(\cos\theta - \mu_s\text{sen}\theta) = mg. \quad (2)$$

Dividiendo 1 entre 2 para eliminar N

$$\frac{\text{sen}\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\text{sen}\theta}=\frac{v^2}{Rg}$$

$$\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}=\frac{v^2}{Rg}$$

$$v^2=Rg\left(\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}\right)$$

$$= 2100(0.332 + 0.24)/(1-0.332x0.24)$$

$$v = (2100x0.556/0.920)^{1/2}$$

$$= 35.6 \text{ m/s}$$

$$= 128.2 \text{ km/h}.$$

---

6. Una barcaza de masa m está navegando por un canal a velocidad v_o cuando sus motores se detienen. La fuerza de arrastre D en el agua está dada por D = bv. a) Halle la expresión del tiempo requerido para que la barcaza reduzca su velocidad a v_f. b) Evalúe numéricamente el tiempo para que la barcaza de 970 kg, que navega inicialmente a razón de 32 km/h, reduzca su velocidad a 8.3 km/h; el valor de b es de 68 Ns/m.

Datos

m = 970 kg

v_o = 32 km/h

v = 8.3 km/h

b = 68 Ns/m

Resolución

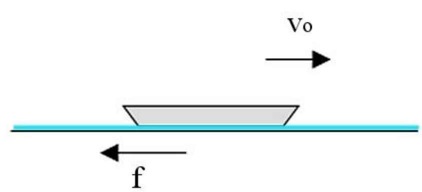


Figura VI-6a

Comentario: Note que f y v son vectores. Al trabajar en una dimensión, según los convenios usuales, consideramos (+) lo que esté hacia la derecha, y (–) en sentido contrario. En este caso, si v es (+), entonces f = d = - bv. La *fricción por viscosidad* f en gases y líquidos usualmente depende de la velocidad. *(Ej. trate de correr dentro del agua. ¿Qué sucede?)*

a) Aplicando la 2da ley: F_R = ma,

$$-bv = m\frac{dv}{dt}.$$

Esta es una ecuación diferencial de 1er orden, que relaciona la variable con su primera derivada. El método de solución de este tipo de ecuación se logra agrupando las variables, mediante integración:

$$-\frac{b}{m}dt = \frac{dv}{v}$$

$$-\int_{t=0}^{t}\frac{b}{m}dt = \int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{b}{m}t\Big]_0^t = \ln(v)\Big]_{v_o}^{v}$$

$$t = -\left(\frac{m}{b}\right)\ln\frac{v_f}{v_o}.$$

Despejando,

$$\frac{v_f}{v_o} = e^{-(b/m)t}$$

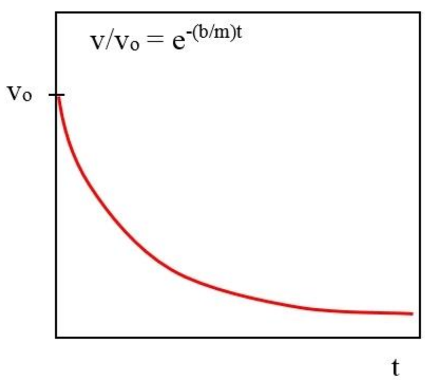


Figura VI-6b

b) Evaluando con los datos de más arriba:

$$t = \frac{970}{68}\ln\frac{8.3}{32}$$

$$= 19.2 \text{ s.}$$

VII. TRABAJO Y ENERGÍA

1. Para empujar una caja de 25 kg. por un plano inclinado a 27°, un obrero ejerce una fuerza de 120 N, paralela al plano. Cuando la caja se ha deslizado 3.6 m, ¿cuánto trabajo se efectuó sobre la caja por a) el obrero, b) la fuerza de gravedad y c) la fuerza normal al plano inclinado?

Datos

$m = 25$ kg

$d = 3.6$ m

$\theta = 27^o$

$F = 120$ N

a) W_o?

b) W_{Fg}?

c) W_N?

Resolución

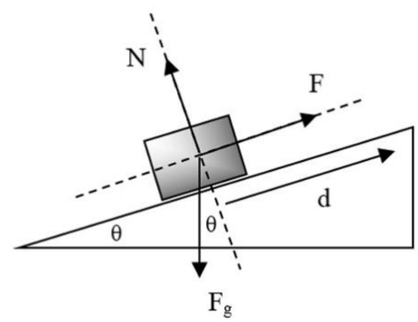


Figura VII-1

a)

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta \ (\theta = 0, \cos\theta = 1)$$

$$W_o = Fd = 120x3.6 = 432 \text{ J}$$

b)

$$W_{Fg} = F_g d\cos(90+\Phi) = -mgd\,\text{sen}\Phi$$

$$= -25x10x3.6x\text{sen}27^0$$

$$= 408.6 \text{ J}$$

c) $W_N = Nd\cos 90^o = 0.$

---

2. Se usa una cuerda para bajar verticalmente un bloque de masa M a una distancia d con una aceleración constante hacia abajo de g/4. a) Halle el trabajo efectuado por la cuerda sobre el bloque. b) Halle el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad.

Datos

M, d,

$a = g/4$

a) W_T?

b) W_{Fg}?

Resolución

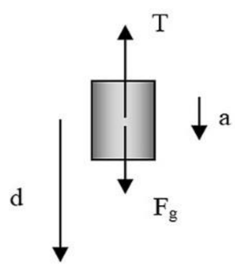


Figura VII-2

a)

$$W_T = Td\cos 180^o = - Td.$$

Para obtener T hay que plantear el diagrama de fuerzas:

$$T - F_g = - Ma$$

$$T = M(g - a) = M(g - g/4) = ¾\ Mg$$

$$W_T = ¾\ Mgd.$$

b)

$$W_{Fg} = F_g d\cos 0 = Mgd.$$

---

3. Un bloque de 5 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de una fuerza que varía con la posición como se muestra en la figura del problema. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza cuando el bloque se mueve desde el origen hasta x = 8.0 m?

Resolución

En una dimensión, si la fuerza es variable,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \text{área bajo la curva,}$$

(*tomando siempre el valor de F = 0 como referencia*).

En el caso de valores negativos, el área bajo la curva también se calcula hacia el eje F = 0, como puede comprobarse fácilmente a partir de la definición de integral (ver figura sombreada).

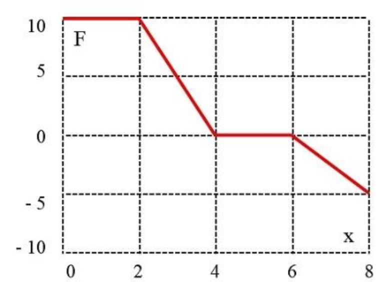


Figura VII-3a

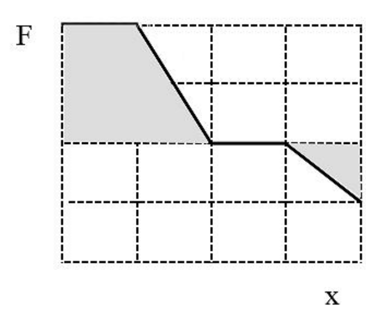


Figura VII-3b

$$W_{total} = W_{0-4} + W_{4-6} + W_{6-8}$$

$$W_{0-4} = \text{área trapecio}$$

$$= ½\ (4 + 2)x10 = 30\ J.$$

$$W_{4\text{-}6} = 0.$$

$$W_{6\text{-}8} = \text{área triángulo}$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{ x } 2 \text{ x } -5 = -5 \text{ J}$$

$$W_{total} = 25 \text{ J.}$$

---

4. Un objeto de 10 kg se mueve a lo largo del eje x. En la figura se muestra su aceleración en función de su posición. ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el objeto al moverse desde x = 0 hasta x = 8 m?

Datos

m = 10 kg

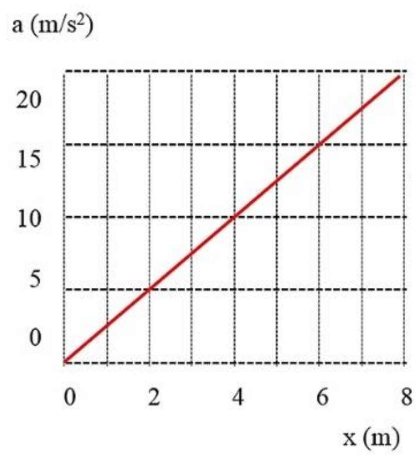


Figura VII-4

Resolución

Trabajo neto ≡ trabajo resultante.

La aceleración no es constante. Aumenta linealmente con la distancia según una expresión del tipo: $a = mx$ (ecuación de una recta que pasa por el origen).

El valor de m se obtiene del gráfico para dos puntos conocidos; por ej., (0,0) y (8,20):

$$m = \Delta a/\Delta x$$
$$= 20/8$$

$$= 2.5 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Entonces, a(x) = 2.5x.

$$W_R = \int_{x_1}^{x_2} F_R(x)dx = m\int_{x_1}^{x_2} a(x)dx$$

$$= 10\text{x}2.5\int_0^8 x dx$$

$$= 25\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^8$$

$$= 25\text{x}8^2/2$$

$$= 800 \text{ J.}$$

---

5. Un bloque de 263 g se deja caer sobre un resorte vertical con una constante de fuerza k = 2.52 N/cm (Fig. 20). El bloque se pega al resorte y el resorte se comprime 11.8 cm antes de alcanzar el reposo momentáneamente. Mientras el resorte está siendo comprimido, ¿cuánto trabajo efectúan, a) la fuerza de gravedad y b) el resorte? c) ¿Cuál era la velocidad del bloque inmediatamente antes de que alcanzara el resorte? d) Si esta velocidad inicial del bloque se duplica, ¿cuál es la compresión máxima del resorte? Desprecie la fricción.

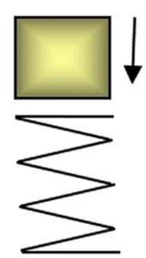


Figura VII-5a

Datos

m = 263 g = 0.263 kg

k = 2.52 N/cm = 2.53 N/10-2m = 252 N/m

x = 11.8 cm = 0.118 m

W_{Fg}?

$W_{resorte}$?

v_o? (antes de chocar)

$x_{máx}$ si v se duplica?

Velocidad inicial de caída = 0

Resolución

a)

$$W_{Fg} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos 0^o$$
$$= 0.263x10x0.118$$
$$= 0.31 \text{ J.}$$

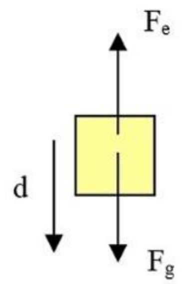


Figura VII-5b

b) La fuerza elástica no es constante. Cumple la ley de Hooke, F = - kx. La fuerza elástica y el W realizado por ella son opuestos al sentido del movimiento (W < 0). En una dimensión, considerando x positivo,

$$W_{resorte} = \int_0^x -kxdx = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_o^x$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, kx^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 252 \cdot 0.118^2$$
$$= -1.75 \text{ J}$$

c)

$$W_R = \Delta E_c = E_{cf} - E_{co} = -\tfrac{1}{2}\, mv_o^2.$$

Por otra parte,

$$W_R = \Sigma W_k = W_{resorte} + W_{Fg}\,,$$

es decir,

$$W_{resorte} + W_{Fg} = -\tfrac{1}{2}\, mv_o^2$$
$$v_o^2 = -2m(W_{resorte} + W_{Fg})$$
$$= -2x0.263x(-1.75 + 0.31)$$
$$= 10.95$$
$$v = 3.3 \text{ m/s.}$$

d) v_o = 6.6 m/s; ¿cuánto vale x?

El planteamiento es el mismo que en el inciso c, pero ahora se desea buscar x conocido v_o. *Note que es necesario escoger un origen común para x (en este caso, la posición del resorte en estado de equilibrio).*

$$W_R = \Delta E_c = E_{cf} - E_{co} = -\tfrac{1}{2}\, mv_o^2$$
$$W_{resorte} + W_{Fg} = -\tfrac{1}{2}\, mv_o^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\, kx^2 + mgx = -\tfrac{1}{2}\, mv_o^2$$

Dividiendo y agrupando

$$-kx^2/m + 2gx + v_o^2 = 0$$
$$958x^2 - 20x - 43.5 = 0$$
$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 + 166692}}{1916}$$
$$= (20 \pm 409)/1916$$
$$= 0.224 \text{ m.}$$

VIII. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

1. Un cubo de hielo muy pequeño cae desprendido desde el borde de una cubeta semiesférica sin fricción, cuyo radio es de 23.6 cm (ver figura). ¿A qué velocidad se mueve el cubo en el fondo de la cubeta?

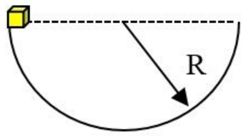


Figura VIII-1a

Datos

R = 23.6 cm = 0.236 m.

Resolución

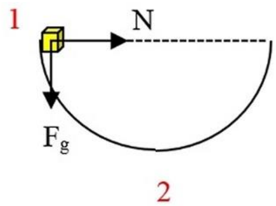


Figura VIII-1b

Comentarios

1. N siempre es ⊥ a la dirección del movimiento y *no trabaja*.

2. La única fuerza que trabaja es F_g (fuerza conservativa), y el sistema es conservativo. Escogiendo la posición inicial y final según la figura y el cero de la energía potencial en el fondo de la cubeta,

$$E_1 = E_2$$

$$mgR = ½\, mv^2$$

$$v = \sqrt{2gR}$$

$$= \sqrt{2x10x0.236}$$

$$= 2.2 \text{ m/s.}$$

---

2. El carrito sin fricción de una montaña rusa parte de A en la figura a la velocidad v_o. ¿Cuál será su velocidad a) en el punto B, b) en el punto C, y c) en el punto D? Suponga que el carrito puede ser considerado como una partícula y que siempre permanece en la vía.

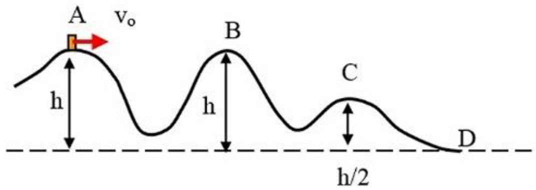


Figura VIII-2

Datos: v_o, h.

Resolución

Notar que la normal es siempre ⊥ a la superficie y al movimiento (y no trabaja) mientras que F_g (conservativa) siempre es vertical y sí trabaja. El sistema es conservativo.

a)

$$E_A = E_B$$

$$½\, mv_o^2 + mgh = ½\, mv_B^2 + mgh$$

mgh se cancela y queda $v_B = v_o$.

b)

$$E_A = E_C$$

$$½\, mv_o^2 + mgh = ½\, mv_C^2 + mgh/2$$

$$½\, v_o^2 + ½\, gh = ½\, v_C^2$$

$$v_C = \sqrt{v_o^2 + gh}\,.$$

c)

$$E_A = E_D$$

$$½\, mv_o^2 + mgh = ½\, mv_D^2$$

$$v_o^2 + 2gh = v_D^2$$

$$v_D = \sqrt{v_o^2 + 2gh}\,.$$

En la medida que la altura disminuye, mayor energía potencial se transforma en energía cinética.

---

3. Un camión que ha perdido los frenos desciende por una pendiente a 80 mi/h. Por fortuna, existe una rampa de escape de emergencia al pie de la colina. La inclinación de la rampa es de 15º (ver figura). ¿Cuál deberá ser la longitud mínima L para que el camión llegue al reposo, al menos momentáneamente?

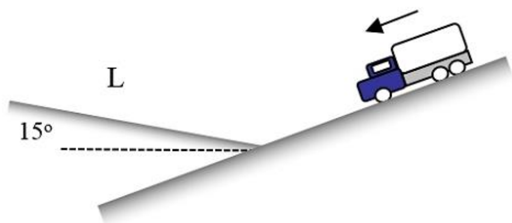


Figura VIII-3a

Datos

v = 80 mi/h = 80x1609m/3600s = 35.75 m/s.

Resolución

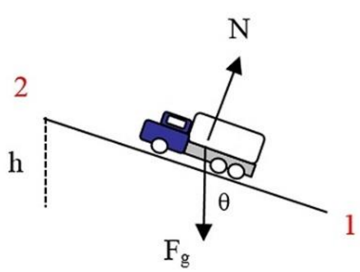


Figura VIII-3b

Consideraciones

1. Longitud mínima para que llegue al reposo → longitud máxima posible que puede recorrer el camión → esto será cuando no haya ninguna fricción (f = 0).

2. La componente normal no trabaja en todo el recorrido. Sólo trabaja F_g → sistema conservativo. Tomando la posición inicial (1) al pie de la pendiente (h = 0) y la (2) en el momento que se detiene el camión (v = 0);

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh,$$

pero senθ = h/L. Sustituyendo y despejando,

$$v^2 = 2gL\text{sen}\theta$$

$$L = \frac{v^2}{2g\text{sen}15^o}$$

$$= \frac{35.75^2}{2x10x0.26}$$

$$= 246 \text{ m.}$$

---

4. Un bloque de 1.93 kg se coloca contra un resorte comprimido sobre un plano inclinado de 27º sin fricción.

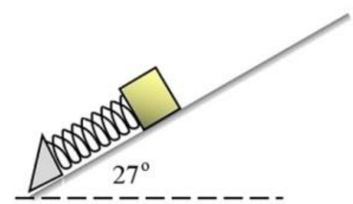


Figura VIII-4a

El resorte, cuya constante de fuerza es de 20.8 N/cm se comprime 18.7 cm después de lo cual el bloque se suelta. ¿Qué tanto subirá el bloque antes de alcanzar el reposo? Mídase la posición final del bloque con respecto a su posición precisamente antes de ser soltado.

Datos

m = 1.93 kg

θ = 27º

k = 20.8 N/cm = $20.8\text{N}/10^{-2}\text{m}$ = 2080 N/m

x = 18.7 cm = 0.187 m

h, L?

Resolución

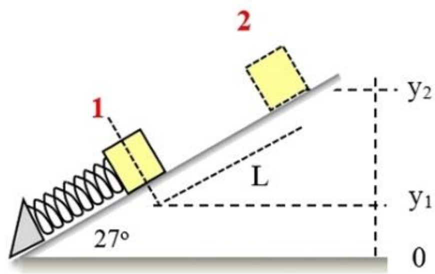


Figura VIII-4b

Las dos fuerzas que trabajan, F_e y F_g, son conservativas. Por tanto, escogiendo la posición inicial en el momento de soltar el resorte (v_o = 0), y la final cuando llega al reposo (v = 0):

$$E_1 = E_2$$

$$E_{pe}(1) + E_{pg}(1) = E_{pg}(2).$$

La energía potencial del resorte se mide a partir de su posición de equilibrio (x = 0). Cuando x = 0, $E_{pe} = E_{pe}(2) = 0$. La energía potencial gravitatoria se mide a partir de un cero arbitrario. Tomando este cero en la base del plano:

$$\tfrac{1}{2}\, kx^2 + mgy_1 = mgy_2$$

$$\tfrac{1}{2}\, kx^2 = mg(y_2 - y_1)$$

$$y_2 - y_1 = h = L\text{sen}\theta.$$

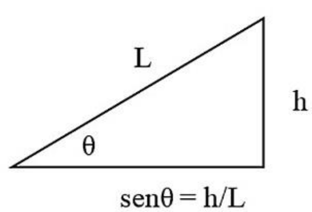


Figura VIII-4c

Despejando en las expresiones anteriores,

$$L = \frac{kx^2}{2mg\text{sen}27^o}$$

$$= \frac{2080x0.187^2}{2x1.93x10x0.454}$$

= 4.15 m.

---

5. Un bloque de 2.14 kg. se deja caer desde una altura de 43.6 cm contra un resorte de constante de fuerza k = 18.6 N/cm, con se muestra en la figura. Halle la distancia máxima de compresión del resorte.

Datos

m = 2.14 kg

h = 43.6 cm = 0.436 m

k = 18.6 N/cm = 18.6 N/10^{-2}m = 1860 N/m

v_o = 0 (se deja caer)

máxima compresión → v = 0

x?

Resolución

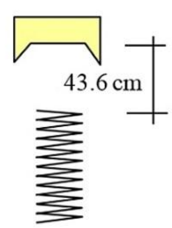


Figura VIII-5a

Comentarios.

1. Las dos fuerzas que trabajan son conservativas → el sistema es conservativo.

2. Note que el cero de la E_p elástica no es el mismo que el de E_p gravitatoria (aunque se pudieran escoger en el mismo lugar, lo que no resulta cómodo). El de la E_p gravitatoria es arbitrario, el de E_p elástica no lo es (sólo es cero en el estado de equilibrio x = 0).

3. El criterio para escoger los estados inicial

(1) y final (2) es que: a) incluyan datos conocidos o b) incluyan el parámetro que deseamos conocer.

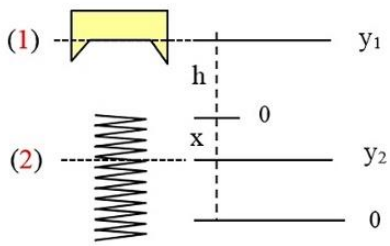


Figura VIII-5b

$$E_1 = E_2$$

$$mgy_1 = \frac{1}{2} kx^2 + mgy_2$$

$$mg(y_1 - y_2) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$mg(h+x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2} kx^2 - mgx - mgh = 0.$$

Ecuación de segundo grado. Se resuelve con mayor facilidad sustituyendo ahora los valores numéricos:

$$930x^2 - 21.4x - 9.33 = 0$$

$$x = \frac{21.4 \pm \sqrt{458 + 34708}}{1860}$$

$$x = \frac{21.4 \pm \sqrt{187.5}}{1860}$$

$$x_1 = -0.09 \text{ m}$$

$$x_2 = 0.112 \text{ m}.$$

La raíz x_1 no tiene sentido real o sentido físico. Se excluye.

---

6. Sobre un objeto de 1.18 kg actúa una fuerza neta conservativa dada exactamente por F= -3x – 5x^2, donde F está en newton si x está en metros. a) Halle la energía potencial del objeto en x = 2.26 m. Suponga que $E_p(0) = 0$. b) El objeto tiene una velocidad de 4.13 m/s en la dirección x negativa cuando está en x = 4.91 m. Halle la velocidad cuando pasa por x = 1.77 m.

Datos

m = 1.18 kg

$F = -3x - 5x^2$ (N, m)

Resolución

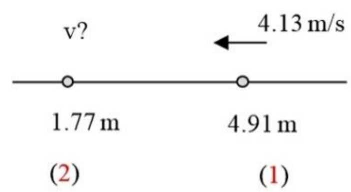


Figura VIII-6

a) E_p en x = 2.26 m si $E_p(0) = 0$.

b) v = - 4.13 m/s cuando x = 4.91 m. ¿v para x = 1.77 m?

a) Para calcular la energía potencial hay que aplicar la definición:

$$\Delta E_p = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{ap} . d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \; .$$

Como la función es de una sola dimensión,

$$\Delta E_p = -\int_{x_1}^{x_2} F_c(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (3x + 5x^2)dx \; .$$

$$= \tfrac{3}{2} x^2 + \tfrac{5}{3} x^3 \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Por tanto, la función energía potencial debe tener la forma $E_p(x) = 3/2\ x^2 + 5/3\ x^3$.

Evaluando en x = 2.26:

$$E_p(2.26) = 3/2\ (2.26)^2 + 5/3\ (2.26)^3$$

$$= 7.66 + 19.23$$

$$= 26.9 \text{ J}$$

b) Sistema conservativo → energía mecánica constante

$$E_1 = E_2$$

$$½ \, mv_1^2 + E_{p1} = ½ \, mv_2^2 + E_{p2}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\left(E_{p1} - E_{p2}\right)}{m}$$

$$E_{p1} = 233.5 \text{ J},$$

$$E_{p2} = 13.9 \text{ J}$$

$$v_2 = [(4.13)^2 + 2x21.96/1.18]^{1/2}$$

$$\approx 19.7 \text{ m/s}$$

---

7. El cordón de la figura del problema tiene una longitud L = 120 cm y la distancia d a la clavija fija P es de 75.0 cm. Cuando la bola se suelta desde el reposo en la posición mostrada, oscilará recorriendo el arco punteado. ¿A qué velocidad irá a) cuando llegue al punto más bajo de su oscilación y b) cuando llegue al punto más alto, una vez que el cordón haya topado con la clavija P?

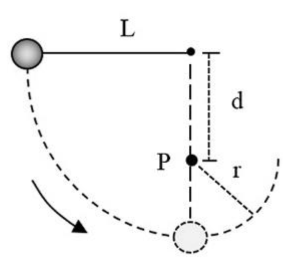


Figura VIII-7a

Datos

L = d + r = 120 cm = 0.12 m

d = 75 cm = 0.075 m

a) v_A?

b) v_B?

Resolución

a) Punto más bajo

Comentarios. Note que la tensión no es cero, pero siempre es perpendicular al movimiento y no trabaja. → sólo trabaja F_g → sistema conservativo. Por comodidad, el cero de la energía potencial gravitatoria se toma en A (se puede tomar en cualquier otro lugar. El resultado será el mismo).

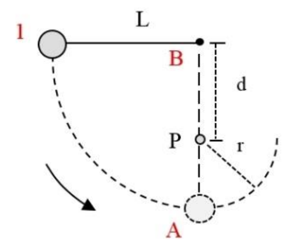


Figura VIII-7b

$$E_1 = E_A$$

$$mgL = ½ \, mv_A^2$$

$$v_A = \sqrt{2gL}$$

$$= \sqrt{2x10x0.12}$$

$$= 1.55 \text{ m/s}$$

b) Punto más alto:

$$E_1 = E_B$$

$$mgL = mg2r + ½ \, mv_B^2$$

$$gL = 2g(L\text{-}d) + ½ \, v_B^2$$

$$- gL + 2gd = ½ \, v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2g(2d - L)}$$

$$= \sqrt{20x(0.5 - 0.12)}$$

$$= 0.77 \text{ m/s}$$

---

8. En la figura del problema 7, demuestre que si la pesa del péndulo ha de oscilar completamente alrededor de la clavija fija, entonces d > 3L/5. (*Sugerencia*. La pesa debe moverse en la parte superior de su oscilación, de otro modo, el cordón se vendrá abajo).

Resolución

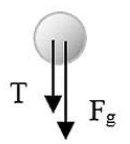


Figura VIII-8

Diagrama de fuerzas punto B,

$$T + F_g = ma_n = mv^2/r.$$

Mientras haya tensión en el hilo, significa que la bola no se cae al llegar a la parte superior. Si la velocidad no es suficiente, entonces T = 0. Luego, para que no caiga,

$$T = mv^2/r - mg = m(v^2/r - g) > 0$$

$$v^2 > rg \qquad (1)$$

Del inciso anterior, $v^2 = 2g(2d\text{-}L)$

Del gráfico, $r = L - d$

Sustituyendo en (1)

$$2g(2d - L) > (L - d)g$$

$$4d - 2L > L - d$$

$$5d > 3L$$

$$d > 3L/5$$

---

9. Un joven está sentado en la parte superior de un montículo esférico de hielo. Se da a sí mismo un pequeño impulso y comienza a deslizarse hacia abajo. Demuestre que abandona el hielo en un punto cuya altura es de 2R/3 si el hielo carece de fricción (*Sugerencia:* La fuerza normal se anula cuando el joven abandona el hielo).

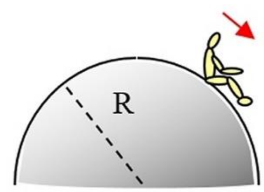


Figura VIII-9a

Datos: R

Resolución

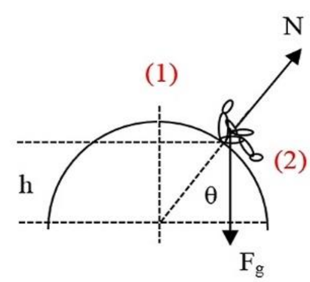


Figura VIII-9b

Consideraciones energéticas: La normal no trabaja. La única fuerza que lo hace es la atracción gravitatoria → sistema conservativo. Tomando la posición inicial (1) a la altura conocida R, y la final (2) cuando se despega del hielo,

$$E_1 = E_2$$

$$mgR = mgh + \tfrac{1}{2} mv^2$$

$$v^2 = 2g(R\text{-}h). \qquad (A)$$

Consideraciones dinámicas: Para que siga una circunferencia debe existir una aceleración centrípeta

$$mg\cos\theta - N = mv^2/R. \qquad (B)$$

Estas dos ecuaciones A y B se cumplen simultáneamente. En particular, en el punto donde el joven se despega del suelo, N = 0 (termina la interacción). Despejando en (B)

$$\cos\theta = v^2/Rg$$

Sustituyendo v^2 de (A)

$$\cos\theta = 2g(R - h)/Rg$$
$$= 2(R\text{-}h)/R. \qquad (C)$$

Por otra parte, de consideraciones geométricas en la figura se ve que $\cos\theta = h/R$. Sustituyendo en (C),

$$h/R = 2(R\text{-}h)/R$$
$$h = 2R - 2h$$
$$h = 2R/3$$

10**.** Una partícula de 2.0 kg de masa se mueve a lo largo del eje x a través de una región en la que su energía potencial $E_p(x)$ varía como se muestra en la figura.

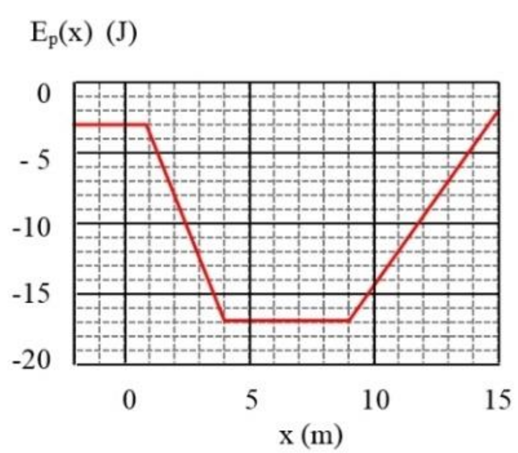


Figura VIII-10

Cuando la partícula está en x = 2.0 m, su velocidad es de – 2.0 m/s. a) Calcule la fuerza que actúa sobre la partícula en ésta posición. b) Entre que límites tiene lugar el movimiento? c) ¿A qué velocidad se mueve cuando está en x = 7.0 m?

Datos

m = 2.0 kg

x = 2.0 → v = - 2.0 m/s

a) F?

b) límites?

c) v para x = 7.0 m?

Resolución

a) En una dimensión $F = - dE_p/dx$ pendiente a la curva en el grafico $E_p(x)$ vs. x. En x = 2.0 m la pendiente es constante → tomando dos puntos cualesquiera, por ej., (4,-17) y (1,-3).

$$F = - \Delta E_p/\Delta x$$
$$= -(-17 - (-3)/(4 - 1)$$
$$= -(-14/3)$$
$$= 14/3 \text{ J/m}$$
$$F = 14/3 \text{ N.}$$

b) Para calcular los límites hay que calcular la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p$$
$$E = ½\, mv^2 + E_p(2.0)$$
$$E = ½\, x2.0x(-2.0)^2 + (-8)$$
$$E = -4 \text{ J.}$$

Los interceptos con el gráfico de $E_p(x)$ para este valor de E coinciden con 1 y 14 m. Por tanto, la partícula se puede mover en el intervalo

$$1 \leq x \leq 14.$$

Los puntos 1 y 14 son puntos de retorno, etc.

c)

$$E = E_c + E_p$$
$$½\, mv^2 = E - E_p$$
$$v = [(2/m)(E - E_p(7.0)]^{1/2}$$

$$v = [(2/2)(-4 -(-17)]^{1/2}$$

$$= [13]^{1/2}$$

$$v = \pm\ 3.6 \text{ m/s.}$$

---

11. Un paracaidista de 68 kg cae a una velocidad terminal constante de 59 m/s. ¿Qué tipo de intercambio de energía tiene lugar?

Datos

m = 68 kg

v = 59 m/s constante

¿Razón de cambio de la energía? (dE/dt)

Resolución

El paracaidista cae a v constante bajo la acción de dos fuerzas, la gravedad y la resistencia del aire (fricción por viscosidad). Desde el punto de vista energético, v = constante → E_c = constante. Por tanto,

$$W_{nc} = \Delta E$$

$$\Delta E = mgh_2 - mgh_1 = mg\Delta h$$

$$dE = mgdh$$

$$dE/dt = mgdh/dt = mgv$$

$$dE/dt = 68x10x59$$

$$= 40120 \text{ J/s}$$

$$dE/dt = 40.12 \text{ kw}$$

La energía mecánica del paracaidista *disminuye*, pues mgh final es menor que mgh inicial. Entonces la pregunta obligada es: ¿adónde va esa energía? Para contestar a esta pregunta hay que tomar en cuenta otras energías adicionales a la energía cinética y potencial que no hemos considerado hasta ahora.

La energía mecánica disipada por la fricción se transforma en otros tipos de energía. En este caso particular en energías cinética y potencial *desordenadas y microscópicas* de las moléculas del aire que frena al paracaidista y de la superficie del paracaidista. Esta energía se denomina usualmente *energía térmica*, y está asociada al incremento de la temperatura (del aire y del paracaidista).

Notar:

1) Que se habla de energía térmica y no de calor. El calor es *energía en tránsito a nivel microscópico* y *desordenado,* concepto diferente al de energía térmica, asociada a la energía cinética de cualquier tipo de las partículas que componen el cuerpo (vibración, rotación, etc.)

2) Que la variación de energía es igual al trabajo (negativo) realizado por la fricción. De aquí que, en principio, el trabajo también se pueda considerar como *otra forma de transmisión de la energía* diferente al calor: en este caso, transformando la energía potencial gravitatoria en energía térmica.

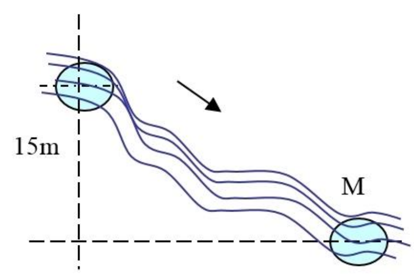


Figura VIII-12

12. Un río desciende 15 m al pasar por unos rápidos. La velocidad del agua es de 3.2 m/s al entrar en los rápidos y 13 m/s cuando sale. ¿Qué porcentaje de la energía potencial perdida por el agua al atravesar los rápidos aparece como energía cinética del agua corriente abajo? ¿Qué le sucede al resto de la energía?

Datos

h = 15 m

v_o = 3.2 m/s

v = 13 m/s

% energía potencial transformada en cinética?

Resolución

Consideremos una porción cualquiera de agua de masa M que desciende por el río. (Veremos más adelante que durante el proceso se puede considerar toda la masa de esa porción concentrada en su centro de masa)

$$\Delta E_p = Mgh$$

$$\Delta E_c = \tfrac{1}{2} M\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Para calcular el % formamos el cociente

$$\Delta E_c / \Delta E_p = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2gh}$$

$$= \frac{13^2 - 3.2^2}{2x10x15}$$

$$= 0.53\ (53\%).$$

El resto de la energía se transforma en otros tipos de energía: se vaporiza cierta cantidad de agua (para lo cual es necesario absorber calor), hay fricción por viscosidad (incremento de la energía molecular del agua – rotación y vibración de las moléculas -), ruido (incremento de las vibraciones acústicas), arrastre de arena y piedras del río, etc.

---

13. Durante un deslizamiento de rocas, una roca de 524 kg se cae desde el reposo por la ladera de una colina que tiene 488 m de longitud y 292 m de altura. La velocidad de la roca cuando llega al pie de la colina es de 62.6 m/s. ¿Cuánta energía mecánica pierde la roca durante el deslizamiento debido a la fricción?

Datos

m = 524 kg

L = 488 m

h = 292 m

v = 62.6 m/s

v_o = 0

Resolución

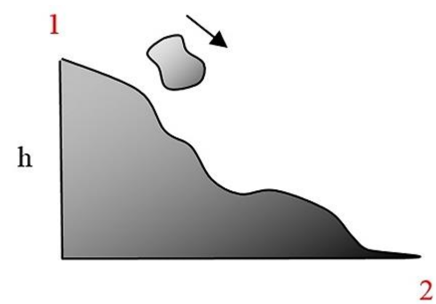


Figura VIII-13

La única fuerza no conservativa trabajando sobre la roca es la fricción, pero se desconoce el ángulo de la pendiente, el valor de f, etc. No obstante, aplicando criterios energéticos, y despreciando la posible energía de rotación de la piedra al llegar abajo:

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$W_f = ½\ mv^2 - mgh$$

$$= ½ \text{ x } 524 \text{ x } 62.6^2 - 524x10x292$$

$$= 1026715.12 - 1530080$$

$$= -503364.88 \text{ J}$$

$$= -503.4 \text{ kJ}.$$

Este es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (fricción, etc.). Será igual a la energía perdida por la roca, con signo cambiado: energía perdida = 503.4 kJ.

14. Un proyectil de masa 9.4 kg se dispara verticalmente hacia arriba. En su vuelo se disipan 68 kJ de energía mecánica a causa del arrastre del aire. ¿Qué tanto más alto habría llegado si el arrastre del aire fuese despreciable (por ej., haciendo aerodinámico el proyectil?

Datos

$m = 9.4$ kg

$W_f = - 68$ kJ $= - 68x10^3$ J

h?

Resolución

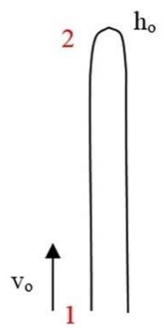


Figura VIII-14

Comentarios

1. Aunque el problema no lo especifica, es necesario considerar que el dato del arrastre del aire es sólo hasta alcanzar la altura máxima, y no todo el vuelo.

2. Note que el trabajo de la fricción siempre es negativo, ya que siempre se opone al movimiento. Cuando el cohete sube considerando la fricción del aire, e introduciendo la velocidad inicial v_o,

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$W_f = mgh_o - ½ mv_o^2. \qquad (1)$$

Si eliminamos la fricción del aire ($W_f = 0$), la energía antes disipada se empleará en alcanzar una altura superior h

$$0 = mgh - ½ mv_o^2. \qquad (2)$$

Eliminando la energía cinética en (1) a partir de (2),

$$W_f = mg(h_o - h) = - mg\Delta h$$

$$\Delta h = - W_f/mg$$

$$\Delta h = - (-68x10^3)/9.4x10$$

$$= 723 \text{ m.}$$

15. Un bloque de 1.34 kg que se desliza sobre una superficie horizontal choca con un resorte de 1.93 N/cm de constante de fuerza. El bloque comprime al resorte 4.16 cm desde la posición de relajamiento. La fricción entre el bloque y la superficie disipa 117 mJ de energía mecánica cuando el bloque es llevado al reposo. Halle la velocidad del bloque en el instante del choque con el resorte.

Datos

$m = 1.34$ kg

$k = 1.93$ N/cm $= 193$ N/m

$x = 4.16$ cm $= 0.0416$ m

$W_f = - 117$ mJ $= - 0.117$ J

$v = 0$

$v_o = ?$

Resolución

Comentarios

1. Aunque el problema no lo dice explícitamente, es necesario considerar que los 0.117 J se refieren sólo al segmento x donde el muelle

es comprimido, de aquí que las posiciones inicial y final son las de la figura.

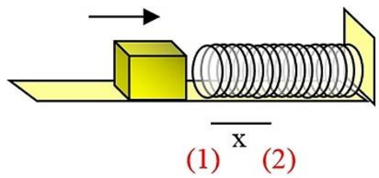


Figura VIII-15

2. $W_f < 0$ siempre

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$W_f = E_{c2} + E_{pe2} - (E_{c1} - E_{pe1})$$

$$W_f = \tfrac{1}{2} kx^2 - \tfrac{1}{2} mv_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - \frac{2W_f}{m}}\ .$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{193}{1.34}x0.0416^2 + \frac{2x0.117}{1.34}}$$

$$= 0.65 \text{ m/s}$$

---

16. Un objeto pequeño de masa m = 234 g se desliza por un carril con extremos elevados y una parte central plana, como se muestra en la figura. La parte plana tiene una longitud L = 2.16 m. Las porciones curvas del carril carecen de fricción. Al atravesar la parte plana, el objeto pierde 688 mJ de energía mecánica, debido a la fricción. El objeto se libera en el punto A, que tiene una altura h = 1.05 m sobre la parte plana del carril. ¿Dónde llega el objeto al reposo finalmente?

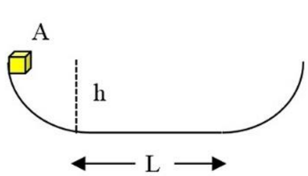


Figura VIII-16a

Datos

m = 234g = 0.234 kg

L = 2.16 m

W_f = - 688 mJ = - 0.688 J

h = 1.05 m; $v_o = 0$

Resolución

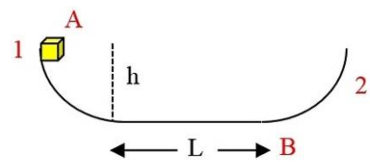


Figura VIII-16b

Para determinar si el bloque se detiene antes o después de llegar al punto B es necesario comparar la energía inicial con la energía disipada en el tramo recto de longitud L.

$$mgh = 0.234x10x1.05$$

$$= 2.457 \text{ J.}$$

Esta energía es mayor que la mayor posible disipada en el tramo (0.688 J), por lo tanto el bloque se detiene (v = 0) después que comienza a subir por el otro extremo de la pista.

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$W_f = mgh_2 - mgh_1$$

$$h_2 = h_1 + W_f/mg$$

$$= 1.05 - 0.688/0.234x10$$

$$= 0.76 \text{ m.}$$

IX. Conservación del momento lineal

1. Un hombre de 72.5 kg está subida a un carro de 38.6 kg que en marcha a 2.33 m/s. El

hombre salta del carro de modo que toca el suelo a una velocidad horizontal de cero. Halle el cambio resultante en la velocidad del carro.

Datos

$m_h = 72.5$ kg
$m_c = 38.6$ kg
$v_{oc} = 2.33$ m/s - velocidad del carro respecto a tierra
$v_{h'} = 0$ - velocidad del hombre respecto a tierra
Δv_c?

Resolución

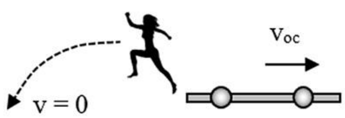


Figura IX-1

Comentarios

1. $F_{ry} = N - F_g = 0$; no hay fuerzas *externas* actuando en el eje x. El teorema de conservación del momento lineal expresa que si

$$\sum_{externas} \vec{F}_i = 0 \text{, entonces } \vec{P} \text{ es constante.}$$

2. El problema se resuelve escogiendo adecuadamente dos instantes cualesquiera, (antes y después que saltó, sin que importe cómo lo hizo) y analizando P.

2. Note que el teorema se refiere a un determinado sistema de referencia inercial. Significa que *siempre hay que medir las cantidades de movimiento con respecto al mismo sistema inercial de referencia.*

3. La velocidad del hombre en el instante final (después de saltar) es cero *respecto a tierra*. El salta hacia atrás con velocidad - v_{oc} *respecto al carro* de manera que contrarresta la velocidad v_{oc} que llevaba inicialmente. Escogiendo un sistema de referencia ligado a tierra: $P_o = P_f$

$$(m_h + m_c)v_{oc} = m_h v_h' + m_c v_c' \; (v_h' = 0)$$

$$v_c' = (1 + m_h/m_c)v_{oc}$$

$$\Delta v_c = v_c' = (1 + 72.5/38.6)x2.33$$

$$= 6.7 \text{ m/s}$$

---

2. Una plataforma de ferrocarril de peso W puede rodar sin fricción a lo largo de una vía horizontal recta. Inicialmente un hombre de peso w está parado sobre la plataforma que avanza hacia la derecha a velocidad v_o. ¿Cuál es el cambio en la velocidad de la plataforma si el hombre corre hacia el lado contrario, de modo que su velocidad con relación a la plataforma tiene un valor v_{rel} en el momento antes de que salte hacia fuera en el extremo izquierdo?

Datos

W, w, v_o, v_{rel}

Resolución

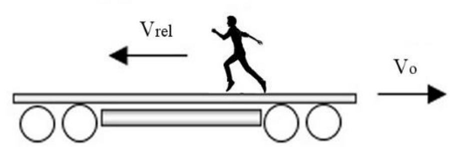


Figura IX-2a

$$\sum_{externas} \vec{F}_i = 0 \rightarrow \vec{P}$$ constante. Como sólo hay movimiento en el eje x, $P_o = P$.

Comentarios

Este problema se resuelve más fácilmente escogiendo un sistema de referencia que se mueva con la velocidad constante v_o de la plataforma hacia la derecha. *(Un sistema que se mueve con v = constante respecto a otro iner-*

cial también es inercial y las leyes de la física se cumplen de igual forma en ambos sistemas – principio clásico de la relatividad –).

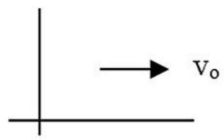


Figura IX-2b

Con respecto a este sistema de referencia, P_o = 0 antes de que el hombre comience a moverse. Independientemente de lo que haga el hombre para saltar, si v_{rel} es su velocidad al saltar en sentido contrario,

$$0 = - m_h v_{rel} + M_p v_p'.$$

Despejando y sustituyendo en la ecuación anterior

$$v_p' = (m_h/M_p)v_{rel} ,$$

donde v_p' es la nueva velocidad con *respecto al sistema móvil*.

Con respecto a tierra, la nueva velocidad será $v_o + v_p'$, y el *incremento* que pide el problema (con respecto a tierra) será ese valor menos la velocidad inicial v_o de la plataforma; es decir:

$$\Delta v_p = v_o + v_p' – v_o = (m_h/M_p)v_{rel}.$$

Como

$$m_h = w/g, M_p = W/g,$$

$$\Delta v_p = (w/W)v_{rel.}$$

Nota 1: Compruebe que se obtiene exactamente el mismo resultado, pero de forma bastante más laboriosa, tomando un sistema ligado a tierra como referencia. *Recuerde que* $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu}$ es una relación *vectorial.*

---

3. Una vasija en reposo explota, rompiéndose en tres partes. Dos partes, una con el doble de la masa de la otra se desprenden, de modo que una es perpendicular a la otra en el plano horizontal, a la misma velocidad de 31.4 m/s. La tercera parte tiene el triple de masa de la parte más liviana. Halle la magnitud y dirección de su velocidad inmediatamente después de la explosión. (Especifique la dirección dando el ángulo desde la línea de recorrido de la parte menos pesada).

Datos

$m_2 = 2m_1$

$v_1 = v_2 = 31.4$ m/s

$m_3 = 3m_1$

v_3?

Resolución

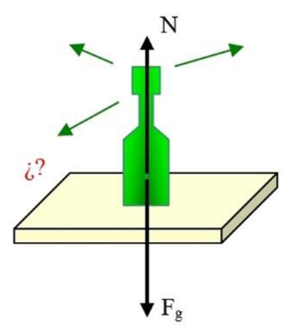


Figura IX-3a

*Comentarios***.**

1. Supongamos la vasija apoyada en una mesa. Como las únicas fuerzas N y Fg que actúan están en equilibrio, $\sum_{externas} \vec{F}_i = 0$ y $\vec{P}$ constante (teorema de conservación del momento lineal). Significa que la cantidad de movimiento debe ser la misma antes que después de la explosión:

$$\vec{P} = \vec{P}_o .$$

2. Como las dos partes salen según la horizon-

tal, $p_y = 0$ al inicio y al final. Al inicio,

$$\vec{P}_o = M\vec{v}_o = 0\,.$$

Como la botella explota en tres pedazos, entonces:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

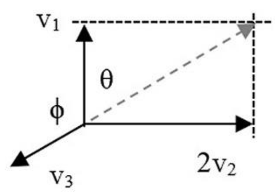


Figura IX-3b

Note que $v_1 = v_2$ sólo en valor modular. Sustituyendo:

$$m_1\vec{v}_1 + 2m_1\vec{v}_2 + 3m_1\vec{v}_3 = 0$$

$$\vec{v}_3 = -\tfrac{1}{3}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)$$

pero ($v_1 = v_2$)

$$v_3 = (1/3)\sqrt{v_1^2 + 4v_1^2}$$

$$= (v_1/3)\sqrt{5}$$

$$v_3 = 23.4 \text{ m/s.}$$

Note que si los pedazos 1 y 2 salieron en direcciones paralelas a la superficie, el pedazo 3 también sale en una dirección paralela (no hay posible componente en el eje y).

$$\tan\theta = v_2/v_1 = 2v_1/v_1 = 2$$

$$\theta = \arctan(2) = 63.4^o$$

$$\Phi = 180 - \theta$$

$$= 116.6^o$$

---

4. Un núcleo radiactivo, inicialmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón y un neutrino en ángulos rectos entre sí. La cantidad de movimiento del electrón es de $1.2\text{x}10^{-22}$ kgm/s, y la del neutrino es de $6.4\text{x}10^{-23}$ kgm/s. a) Halle la dirección y magnitud de la cantidad de movimiento del núcleo al recular. b) La masa del núcleo residual es de $5.8\text{x}10^{-26}$ kg ¿Cuál es su energía cinética de retroceso? El neutrino es una de las partículas fundamentales de la naturaleza.

Datos

$p_e = 1.2\text{x}10^{-22}$ kgm/s

$p_n = 6.4\text{x}10^{-23}$ kgm/s

a) p_N?

b) Si $m_N = 5.8\text{x}10^{-26}$ kg, E_{cN}?

Resolución

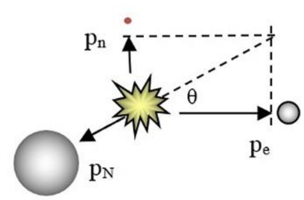


Figura IX-4

a)

$$\vec{P}_o = \vec{P}$$

$$0 = \vec{p}_e + \vec{p}_n + \vec{p}_N$$

$$\vec{p}_N = -\left(\vec{p}_e + \vec{p}_n\right).$$

Escogiendo los ejes coordenados x e y de manera que coincidan con los vectores p_e y p_n (son perpendiculares), es posible expresar

$$\vec{p}_N = -p_e\vec{i} - \vec{p}_n\vec{j}\,.$$

Calculando el valor modular,

$$p_N = \sqrt{1.2^2\text{x}10^{-44} + 6.4^2\text{x}10^{-46}}$$

$$= 10^{-22}\,\sqrt{1.44 + 0.4096}$$

$= 1.36 \times 10^{-22}$ kgm/s

$\tan\theta = p_n/p_e$

$= 0.64/1.2 = 0.53$

$\theta = \arctan(0.53)$

$= 28^o$.

R: Forma un ángulo de 180 – 28 = 152º con el electrón.

b)

$$E_c = ½\, mv^2 = m^2v^2/2m = p^2/2m$$

$$E_c = (1.36x10^{-22})^2/2x5.8x10^{-26}$$

$$= 0.1594 \times 10^{-18}\ J$$

$$E_c \approx 1.6 \times 10^{-19}\ J$$

$$= 1\ eV$$

Nota: En el micromundo se utiliza mucho el electrón-volt como medida de la energía, pues las energías son muy pequeñas al ser expresadas en joule. (1 eV es la energía que adquiere un electrón al ser acelerado por una diferencia de potencial de 1 volt): 1 eV= 1.6×10^{-19} J.

---

5. Una bala de 3.54 g se dispara horizontalmente contra dos bloques que descansan sobre una mesa sin fricción como se muestra en A. La bala atraviesa el 1er bloque, que tiene una masa de 1.22 kg y se empotra en el segundo, que tiene una masa de 1.78 kg. Al hacerlo, se imprimen en los bloques velocidades de 0.630 m/s y 1.48 m/s respectivamente, como se muestra en B. No tomando en cuenta la posible la masa extraída del primer bloque por la bala, halle: a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque y b) la velocidad original de la bala.

Datos

m_b = 3.54 g = 0.00354 kg

m_A = 1.22 kg

m_B = 1.78 kg

v_A = 0.630 m/s

v_B = 1.48 m/s

v_b? v_{ob}?

Resolución

Comentario: Las fuerzas en el eje y están equilibradas, y no hay fuerzas *externas* actuando en el eje x durante todo el proceso, por tanto:

$$\sum_{ext} \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{constante.}$$

Como el movimiento es en una dimensión, se puede obviar el tratamiento vectorial y considerar $P_o = P$.

a) En el 2do choque, si v_b es la velocidad de la bala después de pasar el bloque A y antes de llegar a B,

$$m_bv_b = (m_b + m_B)v_B \qquad (2)$$

$$v_b = (m_b + m_B)v_B/m_b$$

$$= (0.00354 + 1.78)x1.48/0.00354$$

$$= 759\ m/s$$

b) En el 1er choque,

$$m_bv_{ob} = m_bv_b + m_Av_A \qquad (1)$$

$$v_{ob} = v_b + m_Av_A/m_b$$

$$v_{ob} = 759 + 1.22x0.63/0.00354$$

$$= 976\ m/s$$

Note que también se debe cumplir la relación para el proceso como un todo; es decir:

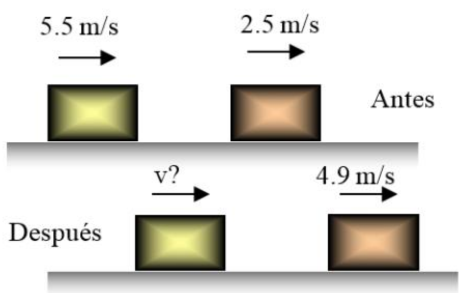
$$P_B = P_o$$

$$m_bv_{ob} = m_Av_A + (m_b + m_B)v_B.$$

Se obtiene esta misma ecuación cuando se sustituye (2) en (1).

X. CHOQUES

1. Los bloques de la figura se deslizan sin fricción a) ¿Cuál es la velocidad v del bloque de 1.6 kg después de la colisión? b) ¿Es la colisión elástica?



Datos (ver figura del problema)

$m_1 = 1.6$ kg

$v_{o1} = 5.5$ m/s

$m_2 = 2.4$ kg

$v_{o2} = 2.5$ m/s

$v_2 = 4.9$ m/s

v_1?

Resolución

No hay fuerzas externas, P = constante, se cumplen las condiciones de choque, $P_1 = P_2$

a)

$$m_1v_{o1} + m_2v_{o2} = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$v = v_{o1} + (m_2/m_1)(v_{o2} - v_2)$$

$$v_1 = 5.5 + (2.4/1.6)(2.5 - 4.9)$$

$$= 1.9 \text{ m/s}$$

b) Comparando las energías cinéticas del sistema antes y después del choque,

$$½\ m_1v_{o1}^2 + ½\ m_2v_{o2}^2$$

$$= ½\ x1.6x5.5^2 + ½\ x2.4x2.5^2$$

$$= 31.7 \text{ J}$$

$$½\ m_1v_1^2 + ½\ m_2v_2^2$$

$$= ½\ x\ 1.6\ x\ 1.9^2 + ½\ x2.4x\ 4.9^2$$

$$= 31.7 \text{ J}$$

Como la energía *cinética* se conserva durante el proceso, el choque es elástico.

---

2. Un elefante furioso embiste a razón de 2.1 m/s contra una mosca que revolotea. Suponiendo que la colisión sea elástica, ¿a qué velocidad rebota la mosca? Nótese que el proyectil (el elefante) es mucho más masivo que el blanco (la mosca).

Datos

$v_{oe} = 2.1$ m/s

Resolución

Comentarios

El choque elástico en una dimensión para dos partículas está resuelto de manera general en la sección 10.4 del texto original, con la solución en las ecuaciones 15 y 16, donde se aplica el convenio usual de signos: la velocidad dirigida hacia la derecha es positiva, y negativa en caso contrario.

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{o1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{o2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{o1} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{o2}\ .$$

Interesa calcular v_2 (velocidad de la mosca después del choque). Llamando 1 al elefante y

2 a la mosca, entonces $v_{oe} = v_{o1}$. Como la mosca "revolotea", es decir, cambia continuamente la dirección de su vuelo, se puede considerar con buena aproximación que $v_{o2} \approx 0$. Sustituyendo entonces en (16) y dividiendo por la masa del elefante $m_1 \gg m_2$,

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{o1} = \frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}} v_{o1} \approx 2v_{o1}$$

$$= 4.2 \text{ m/s}$$

Pregunta: ¿Cómo justifica Ud. el haber considerado al elefante como una partícula? ¿O es que no hace falta hacerlo?

---

3. Dos esferas de titanio se aproximan una a la otra frontalmente a la misma velocidad y chocan elásticamente. Después de la colisión una de las esferas, cuya masa es de 300 g, permanece en reposo. ¿Cuál es la masa de la otra esfera?

Datos

$v_{o1} = - v_{o2}$

$m_2 = 300$ g

$v_2 = 0$

$m_1 = ?$

Resolución

Comentarios. El choque elástico en una dimensión para dos partículas está resuelto de manera general en el texto original, donde se aplica el convenio usual de signos: la velocidad dirigida hacia la derecha es positiva, y negativa en caso contrario.

Sea (1) la bola que incide desde la izquierda y (2) a la que queda detenida después del choque. Interesa calcular m_1 a partir de las ecuaciones anteriores.

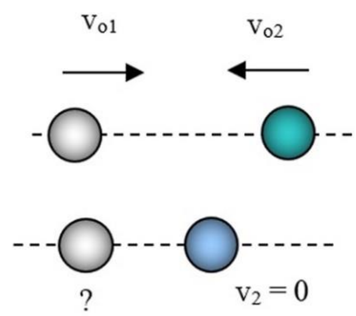


Figura X-3

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{o1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{o2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{o1} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{o2}.$$

Sustituyendo los valores conocidos de los datos en (16) y simplificando,

$$0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{o1} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{o1}$$

$$= 2m_1 - m_2 + m_1 = 0$$

$$3m_1 = m_2$$

$$m_1 = m_2/3 = 100 \text{ g}$$

---

4. Una bala de 4.54 g de masa se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 2.41 kg en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.210. La bala llega al reposo dentro del bloque, el cual se mueve 1.83 m. a) ¿Cuál es la velocidad del bloque inmediatamente después que la bala llega al reposo dentro de él? b) ¿Cuál es la velocidad de la bala?

Datos

$m = 4.54 \text{ g} = 4.54\text{x}10^{-3}$ kg

$\mu_k = 0.21$

$\Delta x = 1.83$ m

a) v_B?

b) v_b?

Resolución

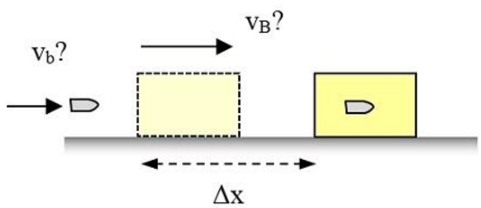


Figura X-4ª

*Comentarios***.** Para resolver el problema es necesario, como aproximación, considerar dos etapas por separado:

1. Choque perfectamente inelástico de la bala.
2. Retroceso del bloque hasta frenar.

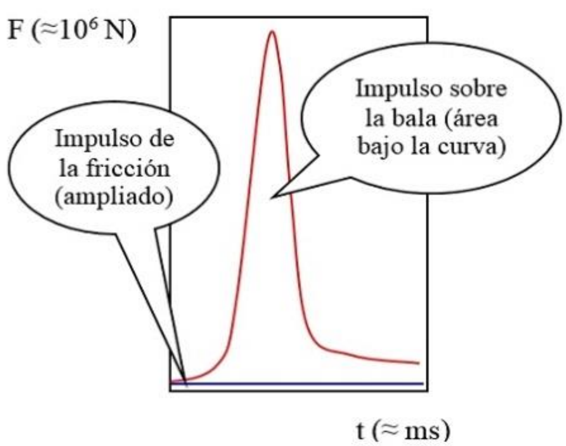


Figura X-4b

La aproximación no toma en cuenta el pequeño intervalo de tiempo en que el bloque se mueve mientras la bala no ha terminado de penetrar. La misma es válida porque las fuerzas durante un choque son fuerzas impulsivas, y el impulso proporcionado por la fricción es despreciable mientras la bala penetra (fracciones de segundo).

$$\int_{\text{choque}} F\,dt \gg \int_{\text{fricción}} f\,dt$$

a) Después que la bala penetró

$$W_{nc} = \Delta E$$

$$- f\Delta x = E_c - E_{co}$$

$$- \mu_k(m_B+m_b)g\Delta x = - \tfrac{1}{2}(m_B+m_b){v_B}^2$$

$$v_B = \sqrt{2\mu_k g\Delta x}$$

$$= \sqrt{2x0.21x10x1.83}$$

$$= 2.77 \text{ m/s}$$

b) Choque perfectamente inelástico (los dos cuerpos quedan unidos después del choque)

$$m_b v_b = (m_b + m_B)v_B$$

$$v_b = (1 + m_B/m_b)v_B$$

$$= \left(1+\frac{2.41}{4.54x10^{-3}}\right)\cdot 2.77$$

$$= 1473 \text{ m/s}$$

---

5. Una bala de 5.18 g que se mueve a 672 m/s golpea un bloque de madera de 715 g que está en reposo sobre una superficie sin fricción. La bala sale con su velocidad reducida a 428 m/s. Halle la velocidad resultante del bloque.

Datos

$m_b = 5.18$ g $= 0.00518$ kg

$v_{ob} = 672$ m/s

$m_m = 715$ g $= 0.715$ kg

$v_{oB} = 0$

$v_b = 428$ m/s

v_B?

Resolución

Comentarios

Las fuerzas en el eje *y* sobre el bloque están equilibradas, y el efecto de la gravedad sobre la bala durante el choque se desprecia porque las fuerzas impulsivas asociadas a un choque son muchísimo mayores que la gravedad, y sólo duran fracciones de segundo.

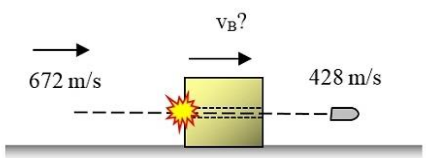


Figura X-5

Con excelente aproximación, sólo actúan fuerzas internas en el sistema bala-bloque durante el proceso. → Se conserva la cantidad de movimiento del sistema. Como es en una dimensión:

$$\Sigma F_{ext} = 0, \rightarrow P = \text{constante}$$

$$P = P_o.$$

$$m_b v_{ob} = m_b v_b + m_B v_B$$

$$v_{ob} = \frac{m_b}{m_B}\left(v_{ob} - v_b\right)$$

$$= \frac{0.00518}{0.715}\left(672 - 428\right)$$

$$= 1.77 \text{ m/s}$$

---

6. Un objeto de 2.0 kg de masa choca elásticamente contra otro objeto en reposo y continúa moviéndose en la dirección original, pero a un cuarto de su velocidad original. ¿Cuál es la masa del objeto golpeado?

Datos

$m_1 = 2\text{kg}$

$v_1 = ¼\ v_{o1}$

$v_{o2} = 0$

m_2?

Resolución

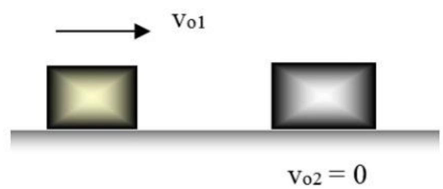


Figura X-6

$$m_1 v_{o1} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 v_{o1} = ¼\ m_1 v_{o1} + m_2 v_2$$

$$¾\ m_1 v_{o1} = m_2 v_2 \qquad (1)$$

Conservación de E_c (choque elástico)

$$½\ m_1 v_{o1}^2 = ½\ m_1 v_1^2 + ½\ m_2 v_2^2$$

$$m_1 v_{o1}^2 = 1/16\ m_1 v_{o1}^2 + m_2 v_2^2$$

$$15/16\ m_1 v_{o1}^2 = m_2 v_2^2 \qquad (2)$$

Elevando (1) al cuadrado y dividiendo miembro a miembro entre (2):

$$9/15\ m_1 = m_2$$

$$m_2 = 1.2 \text{ kg}$$

---

7. Una bola de acero de 0.514 kg de masa está sujeta a un cordón de 68.7 cm de longitud del que se deja caer cuando el cordón está horizontal. En el fondo de su trayecto, la bola golpea un bloque de acero de 2.63 kg inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción. La colisión es elástica. Halle a) la velocidad de la bola y b) la velocidad del bloque, ambos en el momento después de la colisión.

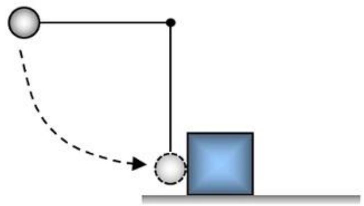


Figura X-7

c) Suponga ahora que, durante la colisión, la mitad de la energía cinética mecánica se convierte en energía interna y en energía sónica. Halle la velocidad final.

Datos

$m_1 = 0.514$ kg

L = 68.7 cm = 0.687 m

$m_2 = 2.63$ kg

$v_{o2} = 0$

a) v_b?

b) v_B?

Resolución

Comentarios

i) La velocidad inicial horizontal de la bola en el momento del choque se obtiene por criterios energéticos. Sistema conservativo, por tanto: $E_1 = E_2$

$$m_1 gL = ½\, m_1 v_{o1}^2$$

$$v_{o1} = \sqrt{2gL}$$

$$= \sqrt{2x10x0.687}$$

$$= 3.7 \text{ m/s.}$$

ii) El choque elástico en una dimensión para dos partículas está resuelto de manera general en el texto mencionado en la introducción, donde se aplica el convenio usual de signos: la velocidad dirigida hacia la derecha es positiva, y negativa en caso contrario.

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{o1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{o2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{o1} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{o2}$$

a) Para calcular la velocidad de la bola después del choque, sustituyendo los datos en (15):

$$v_1 = \frac{0.514 - 2.63}{0.514 + 2.63} x3.7$$

$$= -\,2.49 \text{ m/s}$$

El signo negativo indica que la bola rebota hacia atrás.

b) La velocidad del bloque se obtiene de la fórmula anterior:

$$v_2 = \frac{2x0.514}{0.514 + 2.63} x3.7$$

$$= 1.2 \text{ m/s}$$

c) Para resolver este inciso hay que resolver el sistema de la sección 10.4 en el texto, multiplicando por ½ los términos a la derecha del signo de igualdad (queda como ejercicio).

---

8. Un peso de 2.9 ton que cae desde una distancia de 6.5 ft se hunde 15 in en un montón de tierra de 0.50 ton. Suponiendo que la colisión peso-montón sea completamente inelástica, halle la fuerza promedio de resistencia ejercida por la tierra.

Datos

$P = F_g = 2.9$ ton = 2.9 x 2000 lb(f)

$= 2.9 \times 2000 \times 4.448$ N

$= 25798.4$ N

$h = 6.5$ ft $= 6.5 \times 0.3048$ m $= 1.9812$ m

$\Delta x = 15$ in. $= 15 \times 0.0254$ m $= 0.381$ m

$M_{tierra} = 0.5$ ton $= 0.5 \times 2000 \times 4.448$

$= 4448$ kg

F_{media}?

Resolución

Comentarios

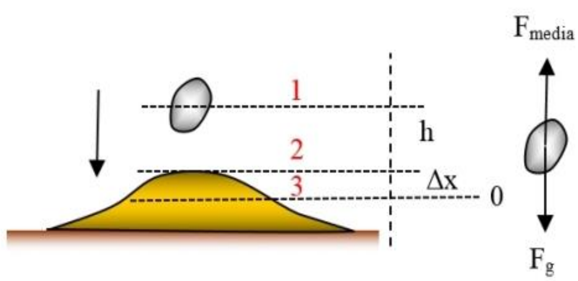


Figura X-8

Las ecuaciones de choques no contemplan fuerzas. Por tanto, para resolver este problema no se necesitan en lo esencial los criterios de choque, sino aquellos que involucren fuerzas

Para el cuerpo que cae: $F_R = ma$. La fuerza media de resistencia actúa solamente en el tramo Δx, entre 2 y 3, y es constante, por definición de valor medio:

$$F_{media} - F_g = - ma_{media} \ . \qquad (1)$$

Utilizando las fórmulas conocidas del MRUV en el tramo 2-3, con v = 0 (se detiene):

$$v^2 = v_o^2 + 2a_{med}\Delta x$$

$$a_{med} = -\frac{v_o^2}{2\Delta x} \ . \qquad (2)$$

El valor de v_o en (2) se obtiene planteando la conservación de la energía entre (1) y (2):

$$mgh = \frac{1}{2} mv_o^2$$

$$v_o = \sqrt{2gh} \ . \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1),

$$F_{media} - F_g = \frac{mgh}{\Delta x}$$

$$F_{media} = P(1 + h/\Delta x)$$

$$= 25798,4(1 + 1.9812/0.381)$$

$$= 159950,08$$

$$F_{media} \approx 160 \text{ ton métricas}$$

Vía alternativa. Mediante criterios de trabajo y energía. Para el cuerpo que cae, $W_{nc} = \Delta E$.

Tomando el cero de la E_{pg} en la posición donde el cuerpo se detiene (3) y las posiciones 1 y 3 como inicial y final respectivamente, (E_{c3} = 0):

$$- F_{media}\Delta x = - E_1 = - mg(h+\Delta x)$$

$$F_{media} = mg(1 + h/\Delta x)$$

$$F_{media} = P(1 + h/\Delta x).$$

Esta vía es mucho más simple, pero ilustra menos el proceso que tiene lugar.

Notar que en el problema anterior se ofrecieron datos innecesarios. Puede suceder en la realidad o en una evaluación.

---

9. Una bola de masa m se proyecta a una velocidad v_o en el cañón de una pistola de resorte de masa M inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción (figura). La bola se pega al fondo del cañón en el punto de máxima compresión del resorte. No se pierde energía por la fricción.

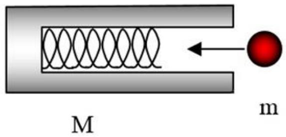


Figura X-9

a) ¿Cuál es la velocidad de la pistola de resorte después que la bola llega al reposo dentro del cañón? b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de la bola se almacena en el resorte?

Datos

m, v_o, M,

v_p?,

$(E_o\text{-}E_f)/E_o$?

Resolución

Comentarios. La fuerza de la gravedad es despreciable en comparación con las fuerzas impulsivas del choque. → Solo hay que considerar fuerzas internas del sistema bola - pistola → Se conserva al cantidad de movimiento del sistema y $P_o = P$. El choque es perfectamente inelástico, pues ambos cuerpos quedan pegados después del choque.

a)

$$mv_o = (m + M)v_p$$

$$v_p = \frac{m v_o}{m + M}.$$

b)

Energía inicial:

$$½\, mv_o^2$$

Energía final:

$$½\,(m + M)v_p^2$$

$$= ½\,(m + M)\left(\frac{mv_o}{m + M}\right)^2$$

$$= ½\left(\frac{m^2 v_o^2}{m + M}\right)$$

Pérdida de energía (conversión a E_{pe})

$$\Delta E = E_f - E_o$$

$$= ½\left(\frac{m^2 v_o^2}{m + M}\right) - ½\, mv_o^2$$

$$= ½\, mv_o^2\left(\frac{m}{m + M} - 1\right)$$

luego

$$\Delta E = -\, E_o\left(\frac{M}{m + M}\right)$$

$$\frac{\Delta E}{E_o} = \frac{M}{m + M}.$$

10**.** Un bloque de masa $m_1 = 1.88$ kg se desliza a lo largo de una mesa sin fricción a una velocidad de 10.3 m/s. Directamente frente a él, y moviéndose en la misma dirección, está un bloque de masa $m_2 = 4.92$ kg que se mueve a razón de 3.27 m/s. Un resorte carente de masa con una fuerza constante de $k = 11.2$ N/cm está unido a la parte posterior de m_2 como se muestra en la figura.

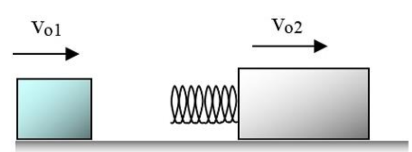


Figura X-10

Cuando los bloques chocan, ¿cuál es la máxima compresión del resorte? (*Sugerencia*: en el momento de compresión máxima del resorte, los dos bloques se mueven como uno solo;

halle la velocidad observando que la colisión es completamente inelástica en ese punto).

Datos

$m_1 = 1.88$ kg

$v_{o1} = 10.3$ m/s

$m_2 = 4.92$ kg

$v_{o2} = 3.27$ m/s

$k = 11.2$ N/cm = 1120 N/m

Δx?

Resolución

$$P_o = P$$

$$m_1 v_{o1} + m_2 v_{o2} = (m_1 + m_2)v$$

$$v = \frac{m_1 v_{o1} + m_2 v_{o2}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1.88 \text{x} 10.3 + 4.92 \text{x} 3.27}{1.88 + 4.92}$$

$$= 5.2 \text{ m/s}$$

Para calcular la compresión del resorte hay que tomar en cuenta que, para un sistema de partículas,

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_c,$$

donde la energía cinética es ahora, por definición, la suma de las energías cinéticas de todas las partículas en el sistema. Las fuerzas en el eje y están equilibradas, y en eje x todas las fuerzas son internas al sistema formado por las dos partículas. $\rightarrow W_{ext} = 0$, $W_{int} = -\Delta E_{pe}$, por tanto:

$$-\Delta E_{pe} = \Delta E_c$$

$$-\tfrac{1}{2} kx^2 = E_{cf} - E_{co}$$

$$x = \sqrt{\frac{2\left(E_{co} - E_{cf}\right)}{k}}$$

$$E_{cf} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(1.88 + 4.92) \text{x} 5.2^2$$

$$= 92 \text{ J}$$

$$E_{co} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{o1}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{o2}^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{x} 1.88 \text{x} 10.3^2 + \tfrac{1}{2} \text{x} 4.92 \text{x} 3.27^2$$

$$= 126 \text{ J}$$

$$x = \sqrt{\frac{2(126 - 92)}{1120}}$$

$$= 0.25 \text{ m}$$

XI. Cinemática de la rotación

1. Un *día solar* es el intervalo de tiempo entre dos salidas sucesivas del Sol en lo más alto de una longitud dada, esto es, el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación al Sol. Un *día sideral* es el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación a las estrellas fijas, es decir, el intervalo de tiempo entre dos observaciones sucesivas en lo más alto de una dirección fija en el cielo llamada el equinoccio de primavera. a) Demuestre que hay exactamente un día solar (medio) menos en un año que días siderales (medios) en un año. b) Si el día solar (medio) tiene exactamente 24 horas, ¿qué tan largo es un día sideral (medio)?

Resolución

Sea $\Delta t_{sideral}$ el tiempo para un día sideral y Δt_{solar} el del día solar (24 horas). Si ω_r es la velocidad angular de rotación de la tierra, entonces la tierra da una vuelta completa sobre sí misma (2π) en un tiempo

$$\Delta t_{sideral} = 2\pi/\omega_r.$$

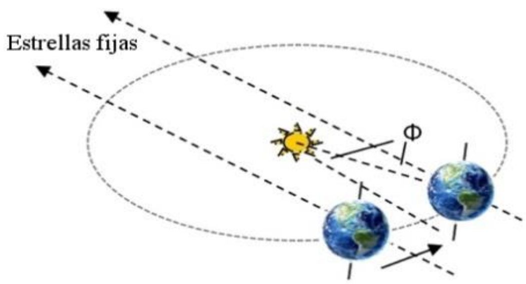


Figura XI-1

En el caso del tiempo solar, de la figura se ve que para un observador en el ecuador, la tierra va dejando detrás al sol en su movimiento, y que al observar el sol en el cenit en dos días sucesivos, habrá recorrido un ángulo Φ adicional a la vuelta completa.

$$\Delta t_{solar} = (2\pi+\Phi)/\omega_r$$

Por tanto

$$\frac{\Delta t_{solar}}{\Delta t_{sideral}} = 1 + \frac{\phi}{2\pi}. \qquad (1)$$

Sea n el número de días (solares) que hay en un año (365 o 366 si es bisiesto). Como hay un año bisiesto cada 4 años, el número de días por año es realmente

$$n = ¼\,(3x365 + 366)$$

$$= 365.25 \text{ días.}$$

Por tanto, el ángulo Φ barrido en un día por la tierra en su órbita, será

$$\Phi = 2\pi/n,$$

y sustituyendo en la ecuación (1):

$$\frac{\Delta t_{solar}}{\Delta t_{sideral}} = 1 + \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

b) La longitud del día sideral se obtiene directamente de (2) con n = 365.25:

$$\Delta t_{sideral} = \frac{\Delta t_{solar}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{24}{1.00273785}$$

$$= 23.934\,h$$

$$\Delta t_{sideral} = 23 \text{ h, } 56 \text{ min.}$$

b) Llamando $T_{sideral}$ al tiempo transcurrido para n días (1 año sideral), y similar para el T_{solar}:

$$T_{sideral} = n\Delta t_{sideral}$$

$$T_{solar} = n\Delta t_{solar}$$

$$T_{solar} - T_{sideral} = n\left(\Delta t_{solar} - \Delta t_{sideral}\right)$$

Despejando en (2) y sustituyendo:

$$T_{solar} - T_{sideral} = n\Delta t_{solar}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$T_{solar} - T_{sideral} = \Delta t_{solar}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Para n = 365.25 (año medio),

$$n/(n+1) = 0.997 \approx 1.$$

$$T_{solar} - T_{sideral} \text{ » } \Delta t_{solar} \text{ » } 24\,\text{horas}$$

(el resultado es aproximado, no *exacto* como plantea el problema).

---

2. La velocidad angular de un motor de automóvil aumenta de 1170 rev/min a 2880 rev/min en 12.6 s. a) Halle la aceleración angular en rev/min^2. b) ¿Cuántas revoluciones completa el motor durante este tiempo?

Datos

f_o = 1170 rev/min = 1170 rev/60s

$= 19.5$ rev/s

$f = 2880$ rev/min $= 2880$ rev/60s

$= 48$ rev/s

$t = 12.6$ s

α?

n?

Resolución

a) f, f_o, t, α ?

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\alpha = (\omega - \omega_o)/ t = 2\pi(f - f_o)/ t$$

$$\alpha = 6.28(48 - 19.5)/12.6 = 14.2 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta_{rad}/\theta_{rev} = 2\pi/1$$

$$\theta_{rev} = \theta_{rad}/2\pi$$

$$1 \text{ s} = (1/60)\text{min}$$

$$14.2 \text{ rad/s}^2$$

$$= \frac{14.2 / 2\pi}{1/60^2}\frac{\text{rev}}{\text{min}^2}$$

$$= 8140 \text{ rev/min}^2.$$

b) n?

$$n = \theta/2\pi$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + ½ \alpha t^2$$

$$\theta = 2\pi\cdot 19.5\cdot 12.6 + ½ \cdot 14.2\cdot(12.6)^2$$

$$= 2670.2 \text{ rad}$$

$$n = 425.2 \text{ vueltas.}$$

3**.** Una rueda completa 42.3 rev cuando su velocidad angular disminuye desde 1.44 rad/s hasta detenerse por completo. a) Suponiendo una aceleración uniforme, ¿cuál es el tiempo necesario para que llegue al reposo? b) ¿Cuál es la aceleración angular? c) ¿Cuánto tiempo se requiere para que complete la primera mitad de las 42.3 rev?

Datos

$n = 42.3$ rev

$\omega_o = 1.44$ rad/s

$\omega = 0$

α = constante

a) t?

b) t para n/2?

Resolución

a) ω_o, ω, t? α?

$$\theta = 2\pi n;$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x,$$

por tanto, por analogía:

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta, \qquad (1)$$

$$\alpha = (\omega^2 - \omega_o^2)/2\theta$$

$$= - (1.44)^2/2\cdot 6.28\cdot 42.3)$$

$$= - 0.0039 \text{ rad/s}^2.$$

El tiempo se obtiene entonces a partir de

$$\omega = \omega_o + \alpha t, \qquad (2)$$

$$t = \omega_o/\alpha$$

$$= 1.44/0.0039$$

$$= 369.3 \text{ s .}$$

b) α, ω_o, θ, t?, ω?

En este caso, la vía más simple es obtener ω de (1) y t de (2), con $\theta = 2\pi(n/2)$

$$\omega^2 = (1.44)^2 - 2\cdot 0.0039\cdot 3.14\cdot 42.3$$

$$= 1.038$$

$$= \pm 1.019 \text{ rad/s}$$

El (-) no tiene sentido físico real. A partir de (2):

$$t = (\omega - \omega_o)/a$$
$$= (1.019 - 1.44)/(- 0.0039)$$
$$= 107.9$$
$$\approx 108 \text{ s}$$

Nota: la vía alternativa de resolver la ecuación $\theta = \theta_o + \omega_o t + ½\ \alpha t^2$ conduce a valores numéricos complejos.

---

4. Una rueda A de radio r_A = 10.0 cm está acoplada por medio de una banda B a otra rueda C de radio r_C = 25.0 cm como se muestra en la figura 19. La rueda A aumenta su velocidad angular desde el reposo a razón de una cantidad uniforme de 1.60 rad/s^2.

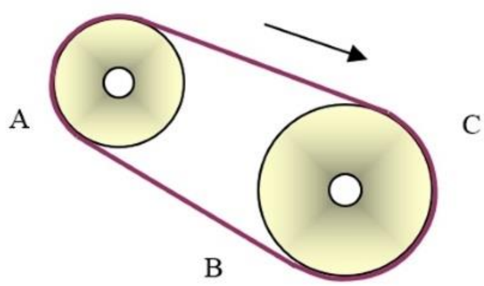


Figura XI-4

Determine en cuanto tiempo llegará la rueda C a la velocidad de rotación de 100 rev/min suponiendo que la banda no se deslice. (Sugerencia: Si la banda no se desliza, las velocidades lineales en la periferia de las ruedas deben ser iguales).

Datos

r_A = 10.0 cm = 0.1 m

$\omega_o = 0$

r_C = 25.0 cm = 0.25 m

α_A = 1.60 rad/s^2 (constante → MCUV)

f_C = 100 rev/min = 10/6 rev/s = 1.67 rev/s

Resolución

Ante todo, es necesario hallar la relación de giro de ambas ruedas a partir de consideraciones geométricas. Cuando $\theta_A = 2\pi$, la banda B avanza L = $2\pi\ r_A$, y el ángulo barrido por C será

$$\theta_C = L/r_C = 2\pi r_A/\ r_C.$$

Por tanto:

$$\theta_C/\theta_A = r_A/r_C$$
$$= 10/25 = 0.4$$
$$\theta_C = 0.4\ \theta_A.$$

Cuando el ángulo varíe con el tiempo, la relación anterior se mantiene (si la banda no desliza). Por tanto, derivando dos veces respecto al tiempo a ambos lados de la ecuación:

$$\omega_C = 0.4\ \omega_A$$
$$\alpha_C = 0.4\ \alpha_A$$
$$\alpha_C = 0.4 \text{ x } 1.6 = 0.64 \text{ rad/s}^2$$
$$\omega = \omega_O + \alpha t\ (\omega_O = 0)$$
$$t_C = \omega_C/\alpha_C = 2\pi f_C/\alpha_C$$
$$= 6.28\text{x}1.67/0.64$$
$$= 16.4 \text{ s}$$

---

5. El disco de un sistema de audio digital compacto tiene un radio interior y exterior de su material grabado (los conciertos para violín de Tchaikovsky y de Mendelssohn) de 2.50 y 5.80 cm, respectivamente. Al funcionar, el disco es barrido con una velocidad lineal constante de 130 cm/s, comenzando desde el borde interior y moviéndose hacia afuera. a) Si la velocidad angular inicial del disco es de 50.0 rad/s, ¿cuál es su velocidad angular final? b) Las líneas en espiral del barrido están a una separación de 1.60 μm aparte; ¿cuál es la longitud total del barrido? c) ¿Cuál es el tiempo de la grabación sonora?

Datos:

$r_o = 0.025$ m

$r = 0.058$ m

$v = 1.3$ m/s

$\omega(r_o) = 50.0$ rad/s

$d = 1.6 \times 10^{-6}$ m

a) $\omega(r_f)$?

b) Δx?

c) t?

Resolución

a)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\omega = v/r$$

$$\omega = 1.3/0.058$$

$$= 22.4 \text{ rad/s} \ \ \text{(disminuye)}$$

b) *Aproximación:* Dado el pequeño paso de la espiral, se aproxima ésta por un conjunto de n circunferencias concéntricas de radio variable, separadas a una distancia d. Del disco se ve que

$$n = (r - r_o)/d$$

$$= (0.058 - 0.025)/(0.0000016)$$

$$= \underline{20625}$$

Notar que r se puede escribir como $r = r_o + nd$.

Entonces, el radio de cada circunferencia tendrá el valor $r_i = r_o + id$, donde i toma valores

i = 0,1,2,3,4... n. (Para i = 0 se obtiene r_o. Para i = n se obtiene r.)

La longitud de la circunferencia de radio i será entonces

$$L_i = 2\pi r_i = 2\pi(r_o + id)$$

y la longitud total recorrida:

$$\Delta x = \sum_{i=0}^{n} l_i = \sum_{i=0}^{n} 2\pi\left(r_o + id\right) = 2\pi r_o + \sum_{i=1}^{n} 2\pi(r_o + id)$$

$$\frac{\Delta x}{2\pi} = r_o + r_o n + d\sum_{i=1}^{n} i$$

La sumatoria es una progresión aritmética de valor conocido:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sustituyendo y agrupando:

$$\frac{\Delta x}{2\pi} = r_o(n+1) + d\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Delta x = 2\pi(n+1)(r_o + \frac{nd}{2}).$$

Sustituyendo valores numéricos:

$\Delta x = 6.28 \cdot 20626 \cdot \{0.025 + (20625 \cdot 0.0000016)/2)\}$

$$\Delta x = 5375.55 \text{ m}$$

$$\Delta x \approx 5.375 \text{ km}$$

c) (v = constante);

$$v = \Delta x/\Delta t$$

$$t = \Delta x/v$$

$$= 5375.55/1.3$$

$$= 4135.0 \text{ s}$$

$$t = 68', 55 \text{ s}$$

XII. 2DA LEY EN LA ROTACIÓN

1. Un cilindro de masa 1.92 kg gira en torno a su eje de simetría. Se le aplican las fuerzas que se muestran en la figura: F_1= 5.88 N, F_2 = 4.13 N y F_3 = 12.2 N. También R_1 = 4.93 cm y R_2 = 11.8 cm. Halle la magnitud y la dirección de la aceleración angular del cilindro.

Datos

m = 1.92 kg

F_1 = 5.88 N

F_2 = 4.13 N

F_3 = 2.12 N

R_1 = 4.93 cm = $4.93\text{x}10^{-2}$ m

R_2 = 11.8 cm = $11.8\text{x}10^{-2}$ m

α?

Resolución

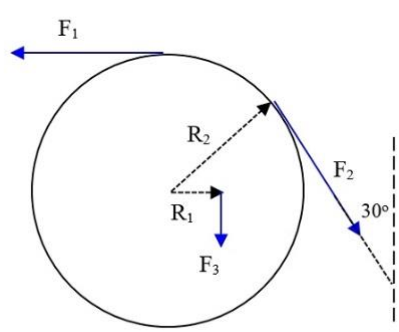


Figura XII-1a

2da ley de Newton en rotación (eje fijo, cuerpo rígido)

$$\vec{\tau}_R = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = I\vec{\alpha}.$$

Como los vectores τ y α son colineales, perpendiculares al plano, tomando el convenio de que si el torque entra en el plano es (+) (giro a la derecha) y (-) en caso contrario, tendremos:

$$-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = I\alpha. \qquad (1)$$

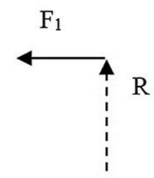


Figura XII-1b

En valor modular:

$$\tau_i = r_i F_i \text{sen}\Phi_i.$$

Note que, por definición, R es el vector que va del eje de giro al punto de aplicación de F, y Φ el ángulo que forman r y F cuando se llevan a un origen común.

$$\tau_1 = r_1 F_1 \text{sen}\Phi_1$$

$$= 11.8\text{x}10^{-2}\text{x}5.88\text{xsen}90^{\circ}$$

$$= 69.4\text{x}10^{-2} \text{ Nm.}$$

$$\tau_2 = r_2 F_2 \text{sen}\Phi_2$$

$$= 11.8\text{x}10^{-2}\text{x}4.13\text{xsen}90^{\circ}$$

$$= 48.7\text{x}10^{-2} \text{ Nm.}$$

(Note que el ángulo no es 30°).

$$\tau_3 = r_3 F_3 \text{sen}\Phi_3$$

$$= 4.93\text{x}10^{-2}\text{x}2.12\text{xsen}90^{\circ}$$

$$= 10.45 \text{ Nm.}$$

Para un cilindro con eje de rotación en el eje de simetría, las tablas proporcionan ½ mR^2.

$$I = ½\, mR^2$$

$$= ½\, \text{x}1.92\text{x}(11.8)^2\text{x}10^{-4}$$

$$= 133.6 \text{ x } 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Por tanto, despejando en (1) y sustituyendo,

$$\alpha = \frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{I}$$

$$= \frac{(-69.4 + 48.7 + 10.45)\text{x}10^{-2}}{133.6\text{x}10^{-4}}$$

$$= -\ 7.7\ \text{rad/s}^2.$$

La rotación sería hacia la izquierda. La dirección del vector α, según nuestro convenio, saliendo del plano.

---

2. La figura muestra dos bloques, cada uno de masa m, suspendidos de los extremos de una barra rígida carente de peso de longitud $L_1 + L_2$, siendo L_1 = 20.0 cm y L_2 = 80.0 cm. La barra es sostenida en posición horizontal como se muestra en la figura y luego se deja caer. Calcule las aceleraciones lineales de los dos bloques cuando comienzan a moverse.

Figura XII-2a

Datos

L_1= 20.0 cm = 0.2 m

L_2= 80.0 cm = 0.8 m

a_1?

a_2?

Resolución

Para cada uno de los cuerpos de masa m en el equilibrio se cumple

$$T - mg = ma = 0.$$

Luego, antes de soltar la barra, (e inmediatamente después de soltarla)

$$T_1 = T_2 = mg.$$

Como la cuerda tira de la barra con la misma fuerza que ella ejerce sobre la cuerda, el diagrama de fuerzas queda según la figura.

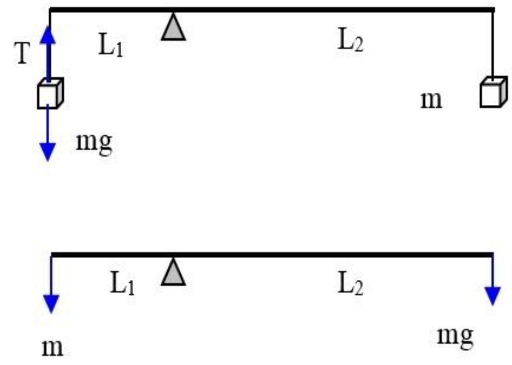


Figura XII-2b

Las aceleraciones lineales de los bloques serán iguales a las correspondientes aceleraciones tangenciales de los extremos de la barra:

$$a_t = \alpha R.$$

Para calcular α se aplica la 2da ley de Newton en el caso de la rotación:

$$\vec{\tau}_R = I\vec{\alpha}\,.$$

Como los dos torques y la posible aceleración angular están en la misma dirección perpendicular al plano del papel, la relación será válida para los módulos:

$$\tau_R = I\alpha. \qquad (1)$$

Aplicando la definición de momento de inercia:

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

$$= mL_1^2 + mL_2^2$$

$$= m(L_1^2 + L_2^2). \qquad (2)$$

Tomando (+) cuando entra en el papel (giro a la derecha) y (-) en caso contrario:

$$\tau_1 = L_1 mg = 0.2mg$$

$$\tau_2 = L_2 mg = 0.6\ mg$$

→ *el sistema gira hacia la derecha.*

Sustituyendo en (1) y (2).

$$\tau_1+\tau_2 = m(L_1^2 + L_2^2)\alpha - L_1mg + L_2mg$$

$$= m(L_1^2 + L_2^2)\alpha;$$

agrupando y simplificando se llega a:

$$\alpha = \frac{(L_2 - L_1)g}{L_1^2 + L_2^2}$$

$$= \frac{0.6x10}{0.2^2 + 0.8^2}$$

$$= 8.82 \text{ rad / s}^2$$

$$a_1 = \alpha R = \alpha L_1$$

$$= 8.82x0.2$$

$$= 1.76 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

$$a_2 = \alpha R = \alpha L_2$$

$$= 8.82x0.8$$

$$= 7.0 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

3**.** La máquina de Atwood es de uso común en los laboratorios de mecánica para estudiar los movimientos acelerados. En una de estas máquinas, una pesa tiene masa de 512 g, y la otra de 463 g. La polea, que está montada en chumaceras horizontales sin fricción, tiene un radio de 4.90 cm. Cuando es liberada a partir del reposo, se observa que el bloque más pesado cae 76.5 cm en 5.11 s. Calcule la inercia de rotación de la polea.

Datos

m_1 = 512 g = 0.512 kg

m_2 = 463 g = 0.463 kg

r = 4.9 cm = 0.049 m

Δx = 76.5 cm = 0.765 m

t = 5.11 s

I?

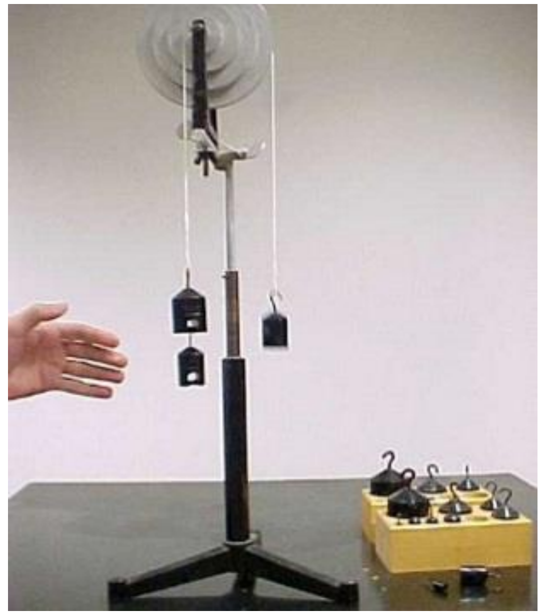


Figura XII-3a

Resolución

Comentarios

1. Como $m_1 > m_2$ el sistema gira hacia la izquierda.

2. El valor numérico de la aceleración es el mismo para 1 y para 2. Efectivamente, cuando el bloque 1 avanza x_1, si la cuerda es inextensible el bloque 2 avanzará x_2. Es decir, $x_1 = x_2$.

Derivando respecto al tiempo se obtiene inmediatamente que, en cada instante $v_1 = v_2$, y $a_1 = a_2$.

3. T_1 y T_2 no pueden ser iguales, pues el sistema no giraría en ese caso.

4. La aceleración a es constante, ya que todas las fuerzas que intervienen son de origen gravitatorio (constantes). Una fuerza constante no puede originar una aceleración variable.

Diagramas de fuerza de los bloques

$$T_1 – m_1g = - m_1a$$

$$T_2 – m_2g = m_2a$$

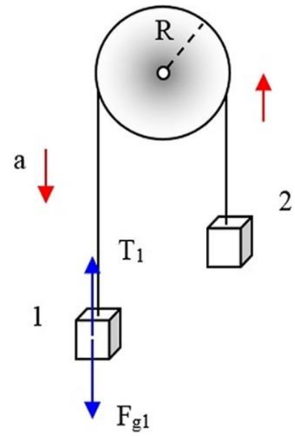


Figura XII-3a

Dos ecuaciones y 3 incógnitas (T_1, T_2, a).

El valor constante de a se puede calcular de los datos, conocidos v_o (0), Δx y t.

$$\Delta x = v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

$$a = 2\Delta x/t^2$$

$$= 2 \times 0.765/(5.11)^2$$

$$= 0.0586 \text{ m/s}^2$$

El cálculo de T_1 y T_2 es inmediato:

$$T_1 = m_1(g-a)$$

$$= 0.512 \times (10.0 - 0.0586)$$

$$= 5{,}09 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2(g+a)$$

$$= 0.463 \times (10.0 + 0.0586)$$

$$= 4.66 \text{ N.}$$

Diagrama de fuerzas de la polea

Comentario: por la 3ra ley, el bloque tira de la cuerda con la misma fuerza con que la cuerda lo hace del bloque. Esa fuerza se transmite hasta la polea, etc. Aplicando la 2da ley de Newton para la rotación en 1 dimensión, considerando positiva la rotación a la izquierda,

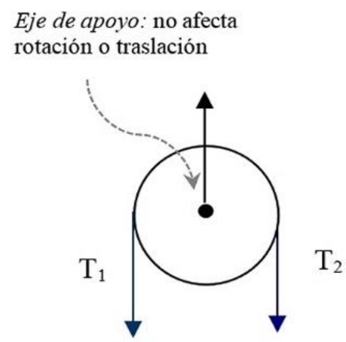


Figura XII-3b

$$rT_1 - rT_2 = I\alpha.$$

La aceleración angular α no es conocida, pero se puede obtener de la relación $a = a_t = \alpha r$.

$$I = \frac{rT_1 - rT_2}{a / r} = \frac{r^2\left(T_1 - T_2\right)}{a}$$

$$= \frac{0.049^2 x(5.09 - 4.66)}{0.0586}$$

$$= 0.0176 \text{kgm}^2$$

---

4. Una rueda en forma de disco uniforme de 23.0 cm de radio y 1.40 kg de masa gira a razón de 840 rev/min en rodamientos sin fricción. Para detener la rueda se oprime la zapata de un freno contra el borde de la rueda con una fuerza de 130 N, dirigida radialmente. La rueda completa 2.80 revoluciones antes de detenerse. Halle el coeficiente de fricción entre la zapata del freno y la periferia de la rueda.

Datos

R = 23.0 cm = 0.23 m

m = 1.4 kg

f_o = 840 rev/min = 840 rev/60s = 14 rev/s

F = 130 N

n = 2.8 vueltas (x 2π) = 5.6π rad

De las tablas, para una rueda, I = ½ MR^2

μ_k?

Nota: No confundir los símbolos fricción (f_f) *y frecuencia* (f).

Figura XII-4a

Resolución

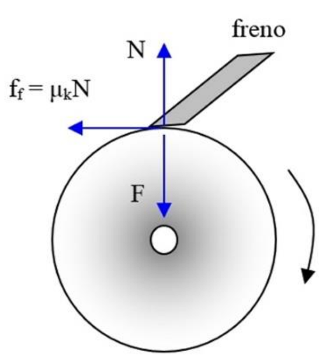


Figura XII-4b

En el eje y no hay movimiento,

$$N = F \rightarrow f_f = \mu_k F. \qquad (1)$$

Por otra parte, como hay un solo torque actuando (el de f_f), se puede trabajar con los módulos, y

$$\tau = I\alpha.$$

Sustituyendo (1) y el momento de inercia,

$$\mu_k FR = \tfrac{1}{2} MR^2\alpha. \qquad (2)$$

El valor de α se puede calcular a partir de los datos, pues se conocen ω_o, ω y $\Delta\theta$. La expresión que los relaciona cuando α es constante y el movimiento es retardado es (MCUV):

$$\omega^2 = \omega_o^2 - 2\alpha\Delta\theta$$

$$\alpha = \omega_o^2/2\Delta\theta.$$

Sustituyendo en (2), simplificando y despejando:

$$\mu_k = \frac{MR^2\omega_o^2}{4F\Delta\theta}$$

$$= \frac{1.4x0.23^2x4\pi^2x14^2}{4x130x5.6\pi}$$

= 0.06 (adimensional)

---

5. Un cascarón esférico tiene un radio de 1.88 m. La aplicación de un torque de 960 Nm le imparte una aceleración angular igual a 6.23 rad/s^2 en torno a un eje que pasa por el centro del cascarón. Calcule a) la inercia de rotación del cascarón en torno al eje de rotación y b) la masa del cascarón.

Datos

R = 1.88 m

τ = 960 Nm

$\alpha = 6.23\ rad/s^2$

I?

M?

Resolución

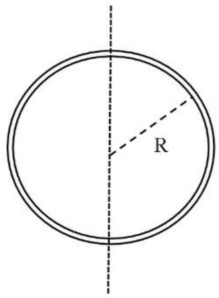


Figura XII-5

a)

$$\tau = I\alpha$$

$$I = \tau/\alpha$$

$$= 960/6.23$$

$$= 154 \text{ kgm}^2.$$

b) Por la tabla, para un cascarón esférico I = ⅔ MR^2. Despejando:

$$M = 3/2\ I/R^2$$

$$= 3/2 \times 154/1.88^2$$

$$= 65.4 \text{ kg}$$

6**.** Una esfera sólida de 4.72 cm de radio rueda hacia arriba por un plano inclinado a un ángulo de 34°. En el fondo del plano inclinado el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de traslación de 5.18 m/s. a) ¿Qué distancia recorrerá la esfera por el plano hacia arriba? b) ¿Cuánto tiempo le toma regresar al pie del plano? c) ¿Cuántas rotaciones completa la esfera durante el viaje completo?

Datos

r = 4.72 cm = 0.0472 m

$\theta = 34^o$

$v_o(cm)$ = 5.18 m/s

Δx?

$t_{regreso}$?

n?

Resolución

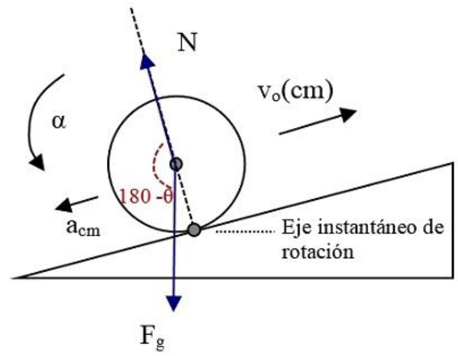


Figura XII-6

Comentarios

1. A los efectos de la traslación, el CM se comporta como si todas las fuerzas estuvieran aplicadas sobre él.

2. La fricción en este caso es una excepción, pues su único papel es lograr que el cuerpo no deslice (no se representa). Note que, siempre que no haya deslizamiento, el valor de la fricción no afectará el resultado (por ej. suponga que es tan grande como se quiera). Por otra parte, como pasa por el eje de rotación, no da origen a torque.

Diagrama de fuerzas

a) Por las tablas, con respecto a un eje que pasa por el CM,

$$I_{CM} = (2/5)\ Mr^2.$$

Como el eje de rotación está en un borde, aplicando el teorema de los ejes paralelos, (M≡m)

$$I = I_{cm} + mr^2$$

$$I = 7/5\ mr^2.$$

Según la 2da ley en rotación:

$$(\tau_R)_{externo} = I\alpha$$

$$F_g r sen(180-\theta) = (7/5)mr^2\alpha \qquad (1)$$

$$sen(180-\theta)$$

$$= sen180cos\theta - cos180sen\theta$$

$$= sen\theta.$$

La aceleración del CM y la aceleración angular se relacionan por la expresión

$$a_t = a_{cm} = \alpha r.$$

Sustituyendo en (1) y simplificando:

$$a_{cm} = (5/7)gsen\theta. \qquad (2)$$

Como la aceleración del CM es constante y se mueve en una dimensión, serán válidas las expresiones del MRUV. En particular,

$$v^2 = v_o^2 - 2a\Delta x \text{ (movimiento retardado).}$$

$$\Delta x = \frac{v_o^2}{2a_{cm}}$$

$$= \frac{7}{10}\frac{v_o^2}{gsen(34^o)}$$

$$= \frac{7x5.18^2}{10x10x0.56}$$

$$= 3.35\ m.$$

b) Al llegar arriba la aceleración del CM no varía, es la misma que en el inciso anterior con sentido contrario, al igual que α. El Δx a recorrer es el mismo. La velocidad inicial es cero (v_o' = 0). Por tanto, se sigue manteniendo el MRUV.

$$\Delta x = v_o't + ½\ at^2$$

Despejando y sustituyendo (2) con v_o' = 0,

$$t^2 = \frac{2\Delta x}{a}$$

$$= \frac{14}{5}\frac{\Delta x}{gsen\theta}$$

$$= \frac{14x3.35}{5x10x0.56}$$

$$= 1.675$$

$$t = 1.3\ s$$

c)

$$n = \Delta x/2\pi r$$

$$= 3.35/(6.28x0.0472)$$

$$= 11.3 \text{ vueltas}$$

Nota: Este problema se resuelve de forma mucho más sencilla utilizando criterios de trabajo y energía; la expresión $E_{c\ traslación} + E_{c\ rotación} = mgh$ conduce directamente a h/Δx = senθ y a Δx.

7**.** Un cilindro sólido de longitud L y radio R tiene un peso W. Alrededor del cilindro están enrolladas dos cuerdas, cada una de ellas cerca de cada extremo, y los extremos de las cuerdas están unidos a ganchos en el techo. El cilindro se mantiene horizontalmente con las dos cuerdas exactamente verticales y luego se deja caer. Halle a) la tensión en cada cuerda cuando se desenrollan y b) la aceleración lineal del cilindro cuando cae.

Datos

L
R
W = mg
T_1, T_2 ?
a?

Resolución

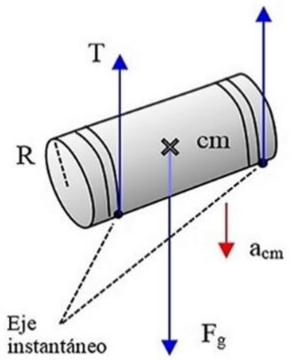


Figura XII-7a

Comentarios

a)

1. A los efectos de la traslación el CM se comporta como si todas las fuerzas estuvieran aplicadas sobre él.

2. Por simetría, $T_1 = T_2 = T$.

3. El eje instantáneo de rotación está en la tangente con las cuerdas, que *no dan origen a torques*.

4. Aplicando el teorema de los ejes paralelos, $I = I_{cm} + mR^2$ se obtiene $I = 3/2\ mR^2$.

5. La aceleración angular alrededor del eje instantáneo y la aceleración del centro de masa se relacionan por $a_t = a_{cm} = \alpha R$.

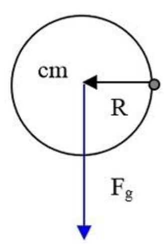


Figura XII-7b

Traslación

$$2T - mg = -\ ma_{cm}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\ m(g - a_{cm})\ . \qquad (1)$$

Rotación

$$\tau_R = I\alpha.$$

$$mgR = (3/2)\ mr^2 a_{cm}/R$$

$$a_{cm} = \tfrac{2}{3}\ g.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1),

$$T = \tfrac{1}{2}\ (W/g)(g - \tfrac{2}{3}\ g)$$

$$T = 1/6\ W.$$

b)

$$a_{cm} = \tfrac{2}{3}\ g.$$

8**.** Un cilindro sólido de 23.4 kg de masa y 7.60 cm de radio tiene una cinta delgada enrollada a su alrededor y descansa en un plano inclinado formando un ángulo de 28.3° con la horizontal. La cinta pasa sobre una polea ligera sin fricción hasta un objeto de masa 4.48 kg que cuelga verticalmente en la parte superior del plano. Halle a) la aceleración lineal del cilindro al rodar por el plano inclinado y b) la tensión en la cuerda, suponiendo que no hay deslizamiento.

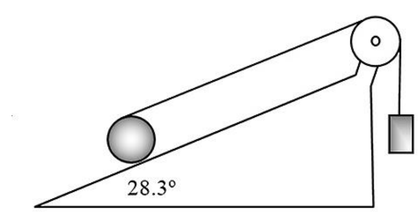


Figura XII-8a

Datos

$m_c = 23.4$ kg

$r = 7.60$ cm $= 0.076$ m

$m = 4.48$ kg

$\theta = 28.3^o$

a?

T?

Resolución

a) Note que, aunque el problema no especifica, es de suponer que, dada la diferencia apreciable de masas, el cilindro baje por el plano.

Diagrama de fuerzas para el cuerpo de masa m;

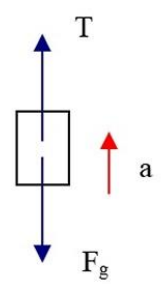


Figura XII-8b

$$T - F_g = ma$$

$$T = m(g+a). \qquad (1)$$

Esta aceleración es la misma aceleración tangencial del cilindro, pues cuando el bloque avanza una distancia x_b, el borde del cilindro avanza $x_c = x_b$. Derivando a ambos lados se llega a que

$$a_{c(tangencial)} = a.$$

Para el cilindro:

Según el teorema de los ejes paralelos,

$$I = I_{cm} + m_c r^2$$

$$= \frac{1}{2} m_c r^2 + m_c r^2$$

$$= (3/2)m_c r^2.$$

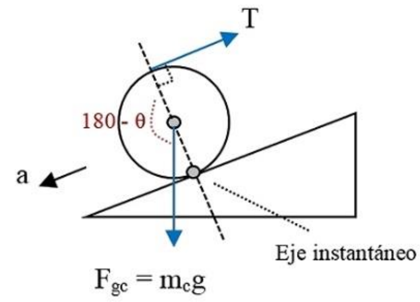


Figura XII-8c

Por otra parte, en el punto de aplicación de T, a un diámetro de distancia del eje instantáneo,

$$a_t = a = 2\alpha r.$$

El cilindro hala la cuerda, y a su vez la cuerda ejerce una tensión T sobre el borde del cilindro. Aplicando la 2da ley de Newton en la rotación, considerando (+) a la derecha para que la aceleración tangencial tenga el mismo sentido que la aceleración.

Cálculo de a:

$$\tau_R = I\alpha$$

$$m_c g r sen(180-\theta) - T(2r)sen90^o$$

$$= (3/2)m_c r^2 a/2r.$$

Considerando $sen(180-\theta) = sen\theta$, despejando y simplificando,

$$T = \frac{m_c g sen\theta}{2} - \frac{3}{8} m_c a$$

$$T = \frac{1}{8}\left(4m_c g sen\theta - 3m_c a\right). \qquad (2)$$

Se obtiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (T y a) que se puede resolver. Eliminando T entre (1) y (2):

$$m\left(g + a\right) = \frac{1}{8}\left(4m_c g sen\theta - 3m_c a\right)$$

$$8mg + 8ma = 4mcgsen\theta - 3m_c a$$

$$(8m - 4m_c sen\theta)g = a\,(- 3m_c - 8m)$$

$$a = \frac{4m_c sen\theta - 8m}{3m_c + 8m} g$$

$$a = \frac{4x23.4x0.47 - 8x4.48}{3x23.4 + 8x4.48} x10$$

$$= 81.52 / 34.4$$

$$= 2.37 \text{ m/s}^2.$$

b) La tensión se obtiene de (1),

$$T = 4.48 \text{ x } (10 + 2.37)$$

$$= 55.4 \text{ N.}$$

9**.** Sobre una polea que tiene una inercia de rotación de $1.14x10^{-3}$ Kgm^2 y un radio de 9.88 m actúa una fuerza, aplicada tangencialmente a su borde, que varía en el tiempo según $F = 0.496t + 0.305t^2$, donde F está en N y t en segundos. Si la polea estaba inicialmente en reposo, halle su velocidad angular 3.60 s después.

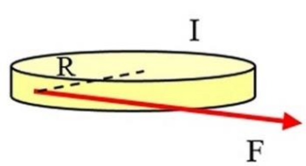


Figura XII-9

Datos

$I = 1.14 \text{ x } 10^{-3}$ Kgm^2

R = 9.88 cm = 0.0988 m

$F = 0.496t + 0.305t^2$

t = 3.60 s

$\omega_o = 0$

ω?

Resolución

Comentarios

Note que F varía con el tiempo. Por tanto, la aceleración del cuerpo también variará con el tiempo. → No se pueden aplicar las expresiones del MCUV o cualquiera otra de aceleración constante.

2da ley en la rotación: $\tau_R = I\alpha$; por otra parte:

$$\tau_R = RFsen\Phi$$

$$= RF\ (\Phi = 90^0)$$

Igualando ambas expresiones y despejando,

$$\alpha = \frac{R}{I} F = (R/I)(0.496t + 0.305t^2).$$

Por otra parte, $\alpha = d\omega/dt \rightarrow d\omega = \alpha dt \rightarrow$ integrando se obtiene

$$\omega - \cancel{\omega_o}^{\,0} = (R/I)\left\{0.496\frac{t^2}{2} + 0.305\frac{t^3}{3}\Big|_0^{3.6}\right\}$$

$$= \frac{(98.8x10^{-3})}{(1.14x10^{-3})\left\{0.496x\dfrac{3.6^2}{2} + 0.305x\dfrac{3.6^3}{3}\right\}}$$

$$= 86.7\{3.214 + 4.743\}$$

$$= 689.9 \text{ rad/s}$$

10**.** Una esfera hueca, uniforme, gira en torno a un eje vertical en chumaceras sin fricción. Un cordón delgado pasa alrededor del ecuador de la esfera, sobre una polea, y está unido a un objeto pequeño que, por otra parte, está libre de caer bajo la influencia de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad del objeto después que ha caído una distancia h desde el reposo?

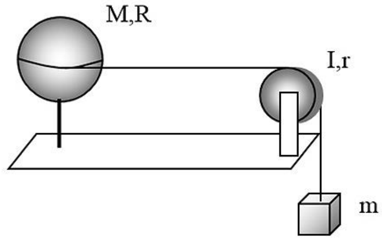


Figura XII-10a

Datos

M, R, I, r, m, h v?

($v_o = 0$).

Resolución

Comentarios

1. $T_1 = T_1'$ y $T_2 = T_2'$ (analizar las parejas de acción y reacción transmitidas por las cuerdas, suponiéndolas inextensibles y sin masa). $T_1 \neq T_2$ para que se mueva la polea.

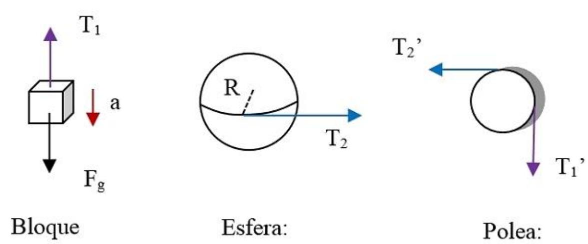


Figura XII-10b

2. Cuando el cuerpo cae una distancia x_c, la cuerda en la esfera se desenrolla x_e, de modo que $x_c = x_e$. Derivando dos veces respecto al tiempo se llega a que $a_c = a_e = a$. Esa aceleración (tangencial de la esfera y lineal del bloque) debe cumplir $a = \alpha R$.

3. La aceleración tangencial también es la misma para la polea, y debe cumplir $a = \alpha' r$. Note que α' y α son diferentes; una vuelta completa de la polea no coincide con una vuelta completa de la esfera.

4. Para la esfera hueca, a partir de los datos conocidos, $I = 2/3\ MR^2$

Bloque:

$$T_1 - F_g = -\ ma$$
$$T_1 = mg - ma. \qquad (1)$$

Esfera:

$$RT_2 = I\alpha = \tfrac{2}{3}MR^2\frac{a}{R}$$
$$T_2 = \tfrac{2}{3}Ma\ . \qquad (2)$$

Polea:

$$rT_1 - rT_2 = I\alpha' = Ia/r$$
$$T_1 - T_2 = Ia/r^2. \qquad (3)$$

Note que si T_1 es constante, todas las fuerzas involucradas son constantes, así como la aceleración. Además de las tres ecuaciones 1 a 3, para calcular la velocidad del objeto a partir de la altura h es necesario aplicar una cuarta ecuación: $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta y$. Asumiendo (+) el movimiento hacia abajo por comodidad,

$$v^2 = 2ah. \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se llega a:

$$mg - ma - \tfrac{2}{3}Ma = \frac{I}{r^2}a$$

$$mg = a\left(m + \tfrac{2}{3}M + \frac{I}{r^2}\right)$$

$$a = \frac{mg}{\tfrac{2}{3}M + m + \dfrac{I}{r^2}}\ .$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{\tfrac{2}{3}M + m + \dfrac{I}{r^2}}}\ .$$

Nota. Cuando las soluciones presentan expresiones complejas como ésta, una forma de verificarlas es analizar los casos límites. Por ej., ¿Cuál será el valor de v cuando la masa M de la esfera y de la polea (I = 0) son despreciables?

---

11. Una esfera sólida de 4.72 cm de radio rueda hacia arriba por un plano inclinado a un ángulo de 34°. En el fondo del plano inclinado el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de traslación de 5.18 m/s. a) ¿Qué distancia recorrerá la esfera por el plano inclinado hacia arriba? b) ¿Cuánto tiempo le toma regresar el pie del plano? c) ¿Cuántas rotaciones completa la esfera durante el viaje completo?

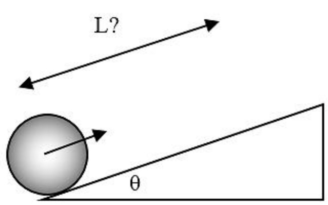


Figura XII-11a

Datos

R = 4.72 cm = 0.0472 m

$\theta = 34^o$

v_{CM} = 5.18 m/s

a) L?

b) $t_{regreso}$?

c) N (ida y vuelta)

Resolución

a) *Comentarios.* El problema no lo dice, pero es necesario considerar que no hay deslizamiento. En ese caso la fricción, aunque está presente, no trabaja (hay un eje instantáneo de rotación). La única fuerza trabajando es la gravedad, que es conservativa, $\rightarrow W_{nc} = 0$.

$$E_1 = E_2.$$

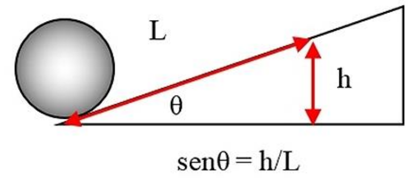


Figura XII-11b

En el estado inicial el cuerpo rota y se traslada a la vez. Escogiendo la posición (1) y el cero de la E_{pg} en el fondo del plano y la (2) cuando recorre la distancia L a una altura h,

$$\tfrac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 = Mgh \qquad (1)$$

$$\omega = v_{CM}/R. \qquad (2)$$

(Ver anexos 1 y 2).

Para una esfera que gira alrededor de su CM, por las tablas, $I_{CM} = 2/5\ MR^2$. Sustituyendo en (1) junto con la ecuación (2),

$$\tfrac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\ x\ \tfrac{2}{5} MR^2 \frac{v_{CM}^2}{R^2} = Mgh$$

$$\tfrac{7}{10} v_{CM}^2 = gL\text{sen}\theta$$

$$L = \frac{7v_{CM}^2}{10g\text{sen}\theta}$$

$$= \left(7x5.18^2\right)/\left(10x10x\text{sen}34^o\right).$$

$$= 3.35\,\text{m}$$

b) Todas las fuerzas actuando son constantes $\rightarrow a_{CM}$ = constante. Además, el movimiento del CM es en una recta $\rightarrow$ son válidas las expresiones del MRUV para el CM. Si parte del reposo $v_o = 0$,

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} a_{CM} t^2. \qquad (1)$$

Cuerpo en rotación $\rightarrow$ 2da ley de Newton en la rotación. Respecto al eje instantáneo de rotación,

$$\tau_R = I\alpha. \qquad (2)$$

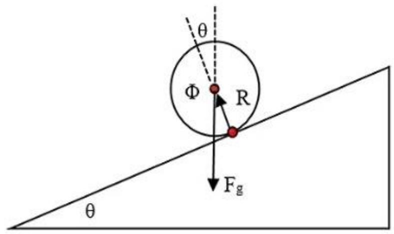


Figura XII-11c

La fricción, aunque se encuentra presente, pasa en cada instante por el eje instantáneo de rotación y no produce torque. Calculando los restantes términos de (2):

$$\tau_R = RF_g\text{sen}\Phi = mgR\text{sen}\theta. \qquad (3)$$

[Aquí se ha hecho uso de: sen Φ = sen (180-θ) = senθ].

Por el teorema de los ejes paralelos *(ver apéndice 3)*, con respecto al eje de rotación instantáneo,

$$I = I_{CM} + MR^2$$
$$= 7/5\ MR^2 \qquad (4)$$

La relación entre la aceleración del CM y la aceleración angular se obtiene derivando la ecuación (2) del inciso a):

$$v_{CM} = \omega R$$
$$a_{CM} = \alpha R. \qquad (5)$$

La sustitución y simplificación de (3), (4) y (5) en (2) conduce a

$$a_{CM} = (5/7)\ g\text{sen}\theta$$
$$= 5/7 \text{ x } 10 \text{ x sen}(34^o)$$
$$\approx 4 \text{ m/s}^2.$$

Sustituyendo en (1)

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a_{CM}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2x3.35}{4}}\ .$$
$$= 1.3 \text{ s}$$

c)

$$n = 2L/2\pi R$$
$$= 3.35/(3.14x\ 0.0472)$$
$$= 29.01$$
$$\rightarrow 22.6 \text{ vueltas.}$$

12**.** Una esfera homogénea parte desde el reposo, en el extremo superior de la pista que aparece en la figura, y rueda sin deslizarse hasta que se sale por el extremo de la derecha. Si H = 60 m y h = 20 m y la pista es horizontal en el extremo de la derecha, determine la distancia a la derecha del punto A donde la bola golpea la línea horizontal de base.

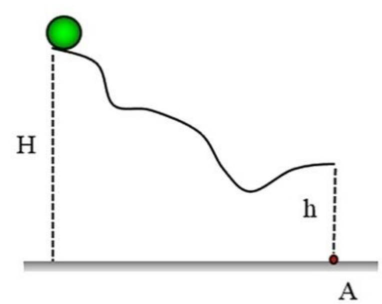


Figura XII-12

Datos

$v_o = 0$

H = 60 m

h = 20 m

x?

Resolución

La bola se convierte en un proyectil en el momento que deja de tocar la pista. Para determinar la distancia a la derecha del punto A,

Eje y:

$$y = y_o + v_{oy}t - ½\, gt^2.$$

El tiempo de vuelo se obtiene haciendo y = 0. Como la pista es horizontal, v_{oy} = 0, y_o = h. Así,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

El alcance horizontal en el eje x será, por tanto,

$$x_h = v_{ox}t = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \qquad (1)$$

Para calcular v_o es necesario utilizar criterios energéticos.

Rueda sin deslizarse → la fricción no trabaja → sistema conservativo. Se toma el estado inicial (1) cuando está en reposo a la altura H, y el final en el momento que deja de interactuar con la pista y se convierte en proyectil:

$$E_1 = E_2$$

$$mgH = mgh + ½\, mv_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\omega^2$$

$$\omega = v_{CM}/R$$

$$I_{CM} = 2/5\, mR^2$$

(importante, ver anexos 1 y 2).

$$mg(H-h) = ½\, mv_{CM}^2 + ½\, 2/5\, mR^2(v_{CM}^2/R^2)$$

$$10/7\, g(H-h) = v_{CM}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\tfrac{10}{7}g\left(H-h\right)}\,. \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$x_h = \sqrt{\tfrac{20}{7}\left(H-h\right)h}$$

$$= \sqrt{\tfrac{20}{7}\text{x}40\text{x}20}$$

$$= 47.8 \text{ m}$$

13**.** Una esferita de vidrio (canica) sólida de masa m y radio r rueda sin deslizamiento a lo largo de la pista en rizo que se muestra en la figura, habiendo sido liberada desde el reposo en algún punto de la sección recta de la pista. a) ¿Desde qué altura mínima desde el fondo de la pista deberá soltarse la canica con el fin de que se quede en la pista en la parte superior del rizo? (El radio del rizo es R, suponga que R » r). b) Si la canica se suelta desde una altura de 6R medida desde el fondo de la pista, ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre ella en el punto Q?

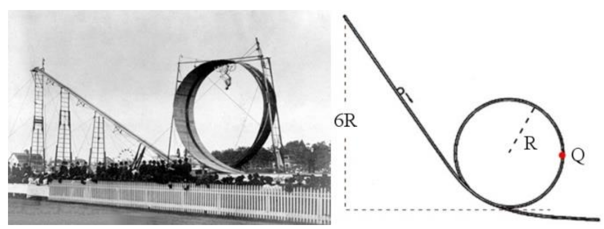


Figura XII-13a

Datos: m, r, R, ¿$h_{mínima}$?

Resolución

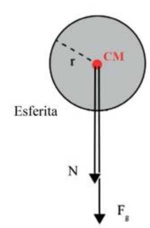


Figura XII-13b

*Comentarios***.** En el momento que la bola alcanza su máxima altura dentro del rizo, el CM se comporta como si todas las fuerzas estuvieran actuando sobre él (2da ley de Newton para un sistema de partículas)

$$N + F_g = mv_{cm}^2/(R\text{-}r)$$

(Si R » r, r se puede despreciar aquí)

$$N = mv_{cm}^2/R - mg. \qquad (1)$$

Cuando la bola se despegue, N = 0. Por tanto, para que no se despegue, N > 0, y de (1),

$$mv_{cm}^2/R - mg > 0$$

$$v_{cm}^2 > Rg. \qquad (2)$$

Como la bola rueda sin deslizamiento, la fricción no trabaja. Solo trabaja la fuerza de gravedad → sistema conservativo. Tomando la posición inicial en la altura h desconocida, y la final en la parte superior del rizo, a una altura 2R:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = ½\, mv_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\omega^2 + mg2R$$

(*importante, ver anexos 1 y 2*)

$$\omega = v_{CM}/r$$

$$mgh = ½\, mv_{CM}^2 + ½\; 2/5\; mr^2 v_{CM}^2/r^2 + mg2R$$

$$gh = (7/10)v_{CM}^2 + 2gR$$

$$10/7(h - 2R)g = v_{CM}^2 \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2),

$$10/7(h - 2R) > R$$

$$h - 2R > 7/10\, R$$

$$h > 2.7\, R$$

b) Se deja al lector como ejercitación.

---

14. Un cuerpo rueda horizontalmente sin deslizamiento con una velocidad v. Luego rueda hacia arriba en un montículo hasta una altura máxima h. Si $h = 3v^2/4g$, ¿qué cuerpo puede ser?

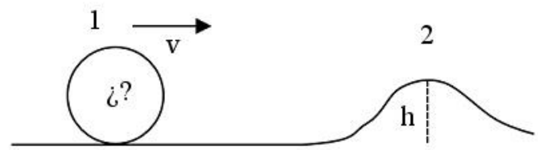


Figura XII-14

Datos

Respecto a un eje de rotación que pasa por el CM: $I = \alpha MR^2$

$\alpha = 1/2$ → cilindro, rueda

$\alpha = 2/5$ → esfera sólida

$\alpha = 2/3$ → esfera hueca

$\alpha = 1$ → anillo estrecho

Resolución

Comentario: la velocidad de traslación del cuerpo es la velocidad de su CM.

Rueda sin deslizar → la fricción no trabaja → sistema conservativo → $E_1 = E_2$,

$$½\, mv_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\omega^2 = mgh \qquad (1)$$

$$\omega = v_{CM}/R. \qquad (2)$$

(Importante, ver anexos 1 y 2)

Sustituyendo $I = \alpha MR^2$ y la ecuación (2) en (1),

$$½\, mv_{CM}^2 + ½\, \alpha mR^2 v_{CM}^2/R^2 = mgh$$

$$v_{CM}^2(1 + \alpha) = 2gh$$

$$\frac{v_{CM}^2(1+\alpha)}{2g} = h$$

Comparando con el dato del problema, $h = 3v^2/4g$, se ve que ambas expresiones serán iguales si

$$\frac{v_{CM}^2(1+\alpha)}{2g} = \frac{3v_{CM}^2}{4g}$$

$$\frac{1+\alpha}{2}=\frac{3}{4}$$

Por tanto, $\alpha = ½$, que coincide con el coeficiente de la rueda.

XIII. MOMENTO ANGULAR

1. Dos ruedas A y B están interconectadas por una banda, como se muestra en la figura.

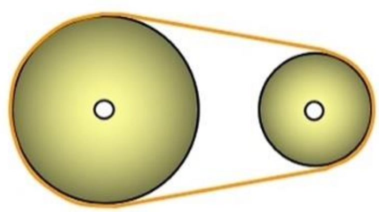


Figura XII-1

El radio de B es tres veces el de A. ¿Cuál sería la razón de las inercias de rotación I_A/I_B = si a) ambas ruedas tienen los mismos ímpetus (momentos) angulares y b) las dos ruedas tienen la misma energía cinética de rotación? Suponga que la banda no patina.

Datos

$r_B = 3r_A$

a) I_A/I_B si $L_A = L_B$ ¿?

b) I_A/I_B si $E_{cA} = E_{cB}$?

Resolución

a)

$$L_A = L_B$$

$$I_A\omega_A = I_B\omega_B$$

$$I_A/I_B = \omega_B/\omega_A$$

Como $v = \omega r$ y la velocidad tangencial es la misma para las dos ruedas

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B$$

$$\omega_B/\omega_A = r_A/r_B = 1/3$$

$$I_A/I_B = 1/3.$$

b)

$$½\, I_A\omega_A^2 = ½\, I_B\omega_B^2$$

$$I_A/I_B = (\omega_B/\omega_A)^2 = 1/9.$$

Nota: se ve con facilidad que la velocidad tangencial es la misma para las dos ruedas considerando que cuando el borde de la rueda A avanza una distancia x_A, la B debe avanzar una distancia x_B tal que

$$x_A = x_B.$$

Derivando con respecto al tiempo, $v_A = v_B = v$.

---

2. Un volante es una rueda o sistema similar, de masa apreciable, que se utiliza en algunas máquinas para estabilizar su funcionamiento; cuando sobra o falta energía, ésta se adiciona o se extrae de la rotación del volante.

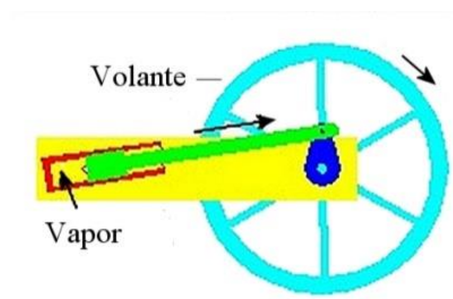


Figura XIII-2

El ímpetu o momento angular de un volante, que tiene una inercia de rotación de 0.142 kgm^2 disminuye de 3.07 a 0.788 kgm^2/s en 1.53 s. a) Halle el torque promedio que actúa sobre el volante durante ese periodo. b) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿qué ángulo habrá girado el volante? c) ¿Cuánto trabajo se efectuó sobre el volante? d) ¿Cuánta potencia promedio fue suministrada por el volante?

Datos

$I = 0.142$ kg

$L_o = 3.07\ kgm^2/s$

$L = 0.788\ kgm^2/s$

$t = 1.53$ s

a) $\tau_{promedio}$?

b) θ?

c) W?

d) P?

Resolución

a)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\tau_{promedio} = \Delta L/\Delta t \text{ (constante)}$$

$$= (L-L_o)/t$$

$$= (0.788 - 3.07)/1.53$$

$$= - 1.49 \text{ Nm}$$

b)

$$\Delta\theta = \omega_o t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\text{Pero } \omega_o = L/I$$

$$= 3.07/0.142$$

$$= 21.6 \text{ rad/s}$$

$$\text{Además } \alpha = \tau/I$$

$$= - 1.49/0.142$$

$$= - 10.5 \text{ rad/s}^2$$

$$\Delta\theta = 21.6x1.53 - \tfrac{1}{2}\, x10.5x1.53^2$$

$$= 20.7 \text{ rad}$$

c) Para un sistema de partículas como es el volante,

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_c \quad (W_{int} = 0)$$

$$W_{ext} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_o^2$$

$$= \tfrac{1}{2} I(\omega^2 - \omega_o^2)$$

$$\text{Pero } \omega = L/I$$

$$= 0.788/0.142$$

$$= 5.5 \text{ rad/s}$$

$$W_{ext} = \tfrac{1}{2}\, x0.142x(5.5^2 - 21.6^2)$$

$$= - 31 \text{ J.}$$

Note que el trabajo es (-) como debe ser (se opone al movimiento; está frenando el volante). La energía cinética del volante disminuye. El volante *entrega* energía a otro sistema.

d)

$$P = dW/dt$$

$$P_{media} = \Delta W/\Delta t$$

$$= - 31/1.53$$

$$= - 20.3 \text{ w.}$$

Esta es la potencia media que el volante entrega al disminuir su velocidad de rotación. La potencia por él suministrada a otro sistema (por ej., la maquinaria) será esta misma, pero con signo contrario; es decir, potencia entregada: 20.3 w

---

3. Una persona está de pie sobre una plataforma sin fricción que gira con una velocidad angular de 1.22 rev/s; sus brazos están en cruz y en cada mano sostiene una pesa. Con sus manos en esta posición la inercia de rotación total de la persona, junto con las pesas y la plataforma, es de 6.13 kgm^2.

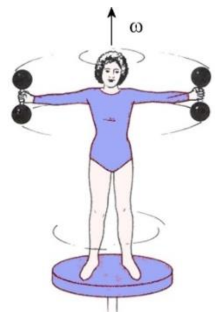


Figura XIII-3

Si al mover las pesas la persona disminuye la inercia de rotación a 1.97 kgm^2; a) ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma y b) ¿Cuál es la razón entre la nueva energía cinética y la energía cinética original?

Datos

$f_o = 1.22$ rev/s

$I_o = 6.13\ kgm^2$

$I = 1.97\ kgm^2$

a) ω?

b) E_c/E_{co}?

Resolución

Comentarios

1. La fuerza de gravedad está actuando, pero es paralela al eje de rotación y no produce torque en el plano perpendicular. Por tanto, en el plano de rotación, $\tau_{ext} = 0 \rightarrow L =$ constante. Considerando los instantes antes y después de mover las pesas, (cambia la distribución de masa y por tanto cambia $I = \sum m_i r_i^2$ respecto al eje de rotación de la figura).

2. Si la persona pega los brazos al cuerpo, reducirá los valores de r_i y por tanto su momento de inercia será menor.

a)

$$L = L_o$$

$$I\omega = I_o\omega_o$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi f$,

$$If = I_o f_o$$

$$f = I_o f_o / I$$

$$= 6.13x1.22/1.97$$

$$= 3.8 \text{ rev/s.}$$

La velocidad angular aumenta. Este efecto es utilizado por los bailarines de ballet para controlar la velocidad de giro en el escenario.

b)

$$E_c = ½\ I\omega^2$$

$$E_{co} = ½\ I\omega_o^2$$

$$E_c/E_{co} = (\omega/\omega_o)^2 = (f/f_o)^2$$

$$= (3.8/1.22)^2$$

$$= 9.7$$

La energía cinética del sistema aumenta casi 10 veces.

Nota 1: ¿Se viola el principio de la conservación de la energía en este problema? Es decir, si la gravedad no ejerce un torque sobre el sistema, ¿de dónde procede este incremento de energía?

Nota 2: Un estudiante respondió a la pregunta anterior que la energía vino del sol. ¿Consideraría Ud. esta respuesta un disparate o no? ¿Por qué?

---

4. En una clase demostrativa se montan unos carriles de un tren de juguete sobre una rueda grande que puede girar libremente con fricción despreciable en torno a un eje vertical. Sobre los carriles se coloca un tren de masa m y, con el sistema inicialmente en reposo, se conecta la potencia eléctrica. El trencito llega a una velocidad uniforme V respecto a los carriles. ¿Cuál es la velocidad angular ω_r de la rueda, si su masa es M y su radio R? (Desprecie la masa de los rayos de la rueda).

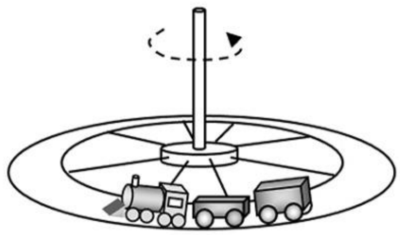


Figura XIII-4

Datos: m, $v_o = 0$, V, M, R

ω?

Resolución

Comentarios. La gravedad actúa, pero como es paralela al eje de rotación no produce torque. Luego, en el plano de rotación, $\sum\tau_{ext} = 0$, → L = constante (durante todo el proceso).

$$L = L_o$$

$$L_{tren} - L_{rueda} = 0$$

$$I_t\omega_t - I_r\omega_r = 0$$

$$\omega_r = (I_t/I_r)\omega_t. \qquad (1)$$

Aproximación: se desprecia el grosor de la línea del tren. En este caso toda la masa m del tren está a la misma distancia R del eje. Por tanto,

$$I_t = \sum m_i r_i^2 = mR^2. \qquad (2)$$

Para un aro que gira alrededor de un eje que pasa por su centro:

$$I_r = MR^2. \qquad (3)$$

Para calcular ω_t en (1) según v/R hay que notar que la velocidad final V del tren (dato) es relativa a los carriles, pero se necesita la velocidad respecto a tierra. El teorema de conservación de L se refiere a un sistema inercial, y el sistema en rotación no es un sistema inercial. Si v_t fuera la velocidad del tren relativa a tierra, entonces

$$\omega_t = v_t/R. \qquad (4)$$

Cálculo de v_t.

Para el movimiento relativo:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\mu}$$

v: velocidad del tren respecto a tierra; $\vec{v} = \vec{v}_t$

v’: velocidad del tren respecto a la rueda;

$$v' \equiv V \leftarrow$$

μ: velocidad tangencial de la rueda respecto a tierra;

$$\mu \equiv v_r = \omega_r R \rightarrow$$

Como los vectores tienen sentido contrario uno es (+) y el otro (-); por tanto, se restan;

$$v_t = V - \omega_r R. \qquad (5)$$

La sustitución de (2), (3), (4) y (5) en (1) conduce a:

$$\omega_r = \frac{m}{M}\frac{\left(V - \omega_r R\right)}{R}$$

$$MR\omega_r = mV - m\omega_r R$$

$$\omega_r = \frac{mV}{\left(M + m\right)R}$$

5**.** Una rueda con una inercia rotatoria de 1.27 kgm^2 está girando con una frecuencia de 824 rev/min en un eje cuya inercia rotatoria es despreciable. Una segunda rueda, inicialmente en reposo y con una inercia rotatoria de 4.85 kgm^2 se acopla de repente al mismo eje. a)

¿Cuál es la velocidad angular de la combinación resultante de la flecha y las dos ruedas? b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde?

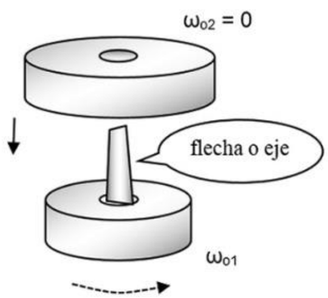


Figura XIII-5

Datos

$I_1 = 1.27\ kgm^2$

$f_{o1} = 824$ rev/min = 824/60 rev/s = 13.7 rev/s

$\omega_{o1} = 2\omega f_{o1} = 86$ rad/s

$\omega_{o2} = 0$

$I_2 = 4.85\ kgm^2$

ω?

Resolución

Comentarios

1. La fuerza de gravedad está actuando sobre ambas ruedas, pero no realiza torque alrededor del eje de rotación. → $\tau_{ext} = 0$ y se conserva el momento angular del sistema, $L_o = L$.

2. Al unirse ambos cuerpos, como $I = \sum m_i r_i^2$, la suma se puede agrupar a conveniencia, y

$$I = \sum_{cuerpo1} m_i r_i^2 + \sum_{cuerpo2} m_i r_i^2$$
$$= I_1 + I_2.$$

a)

$$L_o = L$$
$$I_1\omega_{o1} = (I_1 + I_2)\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_{o1}}{I_1 + I_2}$$
$$= 17.8 \text{ rad/s}$$

b)

$$E_o = ½\, I_1\omega_{o1}^2$$
$$E = ½\, (I_1 + I_2)\omega^2$$

$$\frac{E}{E_o} = \frac{I_1 + I_2}{I_1}\left(\frac{\omega}{\omega_{o1}}\right)^2$$

$$= \frac{I_1 + I_2}{I_1}\left(\frac{1}{\omega_{o1}}\right)^2\left(\frac{I_1\omega_{o1}}{I_1 + I_2}\right)^2$$

$$\frac{E}{E_o} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

$$= \frac{1.27}{1.27 + 4.85}$$

$$= 0.207$$

$$\approx 0.21 \text{ (fracción remanente)}$$

R: Se pierden 0.79 partes (79%) de la energía cinética inicial.

6**.** Una joven de 50.6 kg de masa está de pie sobre el borde de un tiovivo sin fricción de 827 kg de masa y 3.72 m de radio, que no se mueve. Lanza una piedra de 1.13 kg en una dirección horizontal tangente al borde exterior del tiovivo. La velocidad de la piedra, en relación al suelo, es de 7.82 m/s. Calcule a) la velocidad angular del tiovivo y b) la velocidad lineal de la joven después de haber lanzado la piedra. Suponga que el tiovivo es un disco uniforme.

Datos

$v_o = 0$

$mj = 50.6$ kg

$v_p = 7.82$ m/s

$M_T = 827$ kg

$I_T = ½\, MR^2$

$R = 3.72$ m

$m_p = 1.13$ kg

a) ω_T?

b) v_j?

Resolución

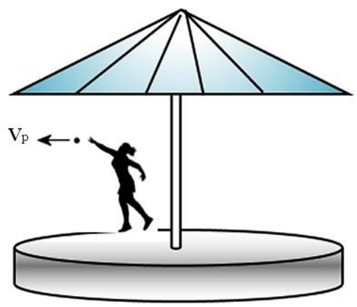


Figura XIII-6

Comentarios

1. La gravedad actúa, pero no produce torque alrededor del eje de rotación del tiovivo.

2. Las fuerzas (y torques) durante el lanzamiento de la piedra son internos al sistema piedra-joven-tiovivo. $\Sigma\tau_{ext} = 0 \rightarrow L$ = constante.

3. La joven y el tiovivo quedan juntos después de lanzar la piedra. Por definición $I = \sum m_i r_i^2$ → el momento de inercia total será la suma de los momentos de inercia del tiovivo y de la joven.

4. La joven se considera como una partícula de masa m_j con toda su masa concentrada en el CM a una distancia R del eje.

4. Los momentos angulares de la piedra y el tiovivo después del lanzamiento tienen sentido y signo contrarios

a)

$$L = L_o$$
$$L_p - L_{(j+T)} = 0$$
$$L_p = L_{(j+T)}$$
$$I_p\omega_p = I_{j+T}\omega$$
$$m_p R^2 \frac{v_p}{R} = \left(m_j R^2 + \tfrac{1}{2} M_T R^2\right)\omega_T$$
$$\omega_T = \frac{m_p v_p}{R\left(m_j + \tfrac{1}{2} M_T\right)}$$
$$\omega_T = \frac{1.13x7.82}{3.72\left(50.6 + \tfrac{1}{2}827\right)}$$
$$= 5.12 \text{ x } 10^{-3} \text{ rad/s}$$

b)

$$v_j = \omega_T R$$
$$= 5.12 \text{ x } 10^{-3} \text{ x } 3.72$$
$$= 0.019 \text{ m/s } (1.9 \text{ cm/s})$$

---

7. Un disco plano uniforme de masa M y radio R gira en torno a un eje horizontal que pasa por su centro con una velocidad angular ω_o.

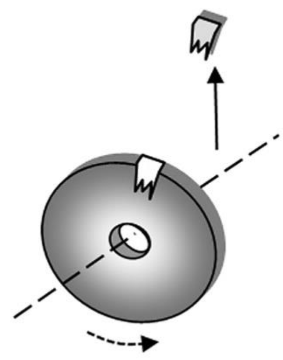


Figura XIII-7

a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuál es su ímpetu (momento) angular? b) Del borde del disco se rompe en cierto momento un trozo de masa m, de modo que el trozo se eleva verticalmente sobre el punto en que se rompió. ¿A qué altura de ese punto llegará antes de que comience a caer? c) ¿Cuál es la velocidad angular final del disco roto?

Datos

M, R, ω_o, m

a)
Para un disco plano de radio R y masa M, I = ½ MR^2 (tablas de momentos de inercia)

$$E_c = \tfrac{1}{2} I_o\omega_o^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} MR^2 \omega_o^2$$

$$= \tfrac{1}{4} MR^2\omega_o^2$$

$$L = I_o\omega_o = \tfrac{1}{2} MR^2\omega_o$$

Resolución

c) *Comentarios*

1. Con respecto al eje de rotación considerado, F_g ejerce torques en todos los puntos del cuerpo. Sin embargo, dada la simetría y homogeneidad del cuerpo, esos torques se cancelan. También se puede ver la cancelación considerando que el CM se comporta como si todas las fuerzas externas estuvieran aplicadas sobre él, y en este caso el CM coincide con el eje de rotación.

2. La simetría se pierde después que se separa el trozo de masa m, y ahora la gravedad si contribuye al torque.

3. Sin embargo, durante el proceso de separación (milésimas de segundo) el torque no compensado ejercido por la gravedad sobre el trozo y el resto del disco es despreciable → $\Sigma\tau ext \approx 0$ y L = constante con excelente aproximación.

4. El momento de inercia es aditivo: $I = \sum m_i r_i^2$. Por tanto, después que se desprende el trozo de masa m (suponiéndola una partícula), $I_{disco} = I_o - mR^2$.

5. Inmediatamente después que se separa del cuerpo, la velocidad angular del trozo ω y la del resto del cuerpo es la misma.

$$L_o = L$$

$$I_o\omega_o = I_{disco}\omega + I_{trozo}\omega$$

$$I_o\omega_o = (I_o - mR^2)\omega + mR^2\omega$$

$$\omega_o = \omega$$

b)

$$E_1 = E_2$$

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = mgh$$

$$v = \omega_o R$$

$$(\omega_o R)^2 = 2gh$$

$$h = \frac{\omega_o^2 R^2}{2g} \; .$$

8**.** Una cucaracha de masa m corre en contra de las manecillas del reloj por el borde de un plato circular giratorio montado sobre un eje vertical de radio R e inercia de rotación I que tiene chumaceras sin fricción. La velocidad de la cucaracha (con relación a la tierra) es v, mientras que el plato gira en sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular ω. La cucaracha encuentra una miga de pan sobre el borde y, por supuesto, se detiene. a) Halle la velocidad angular del plato después de haberse detenido la cucaracha. b) ¿Cuánta energía cinética se ha perdido, si es que eso ha sucedido?

Datos

m,
R,
I,

v,
ω,
ω'?,
ΔE_c?

Resolución

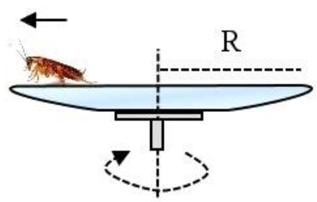


Figura XIII-8

Comentarios

1. No hay fuerzas externas proporcionando torque respecto al eje de rotación considerado $\rightarrow \sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{constante}$.

2. El momento de inercia es aditivo, pues $I = \sum m_i r_i^2$. Cuando la cucaracha y el plato roten conjuntamente, $I' = I_c + I$. ($I_c = mR^2$),

a) La velocidad angular inicial de la cucaracha es $\omega_c = v/R$. Luego:

$$L_o = L$$

$$I_c\omega_c + I\omega = (I_c + I)\omega'$$

$$mR^2 v/R + I\omega = (mR^2 + I)\omega'$$

$$mRv + I\omega = (mR^2 + I)\omega'$$

$$\omega' = \frac{mRv + I\omega}{mR^2 + I}$$

b)

$$\Delta E_c = E_c - E_{co}$$

$$E_{co} = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2$$

$$E = ½\, (I + mR^2)\omega'^2$$

$$= ½\, (I + mR^2)\left(\frac{mRv + I\omega}{mR^2 + I}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{(mRv + I\omega)^2}{mR^2 + I}$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\frac{(mRv + I\omega)^2}{mR^2 + I} - ½\, mv^2 - ½\, I\omega^2 .$$

---

9. En una gran pista circular horizontal sin fricción, de radio R, se encuentran dos pequeñas bolas de masas m y M que pueden deslizarse libremente sobre la pista. Entre las dos bolas hay un resorte comprimido el cual, sin embargo, no se halla unido a las bolas. Las dos bolas se mantienen juntas por medio de un cordón. Si el cordón se rompe, el resorte comprimido (que se supone sin masa) dispara a las dos bolas en direcciones opuestas; el propio resorte queda atrás. Las bolas chocan cuando se encuentran de nuevo sobre la pista. a) ¿En dónde tiene lugar esta colisión? Exprese la respuesta en términos del ángulo, en radianes, a través del cual se desplaza la bola de masa M. b) La energía potencial inicialmente almacenada en el resorte era U_o. Halle el tiempo que transcurre desde que el cordón se rompe hasta que sucede la colisión. c) Suponiendo que la colisión sea perfectamente elástica y de frente, ¿en dónde chocarían las bolas nuevamente después de la primera colisión?

Datos

R,
m,
M,
a) θ?
b) conocido U_o, ¿t?
c) θ'?

Resolución

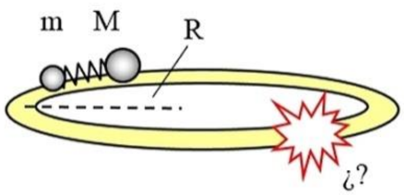


Figura XIII-9

a) En el sistema bolas + pista, las componentes en el eje *y* se anulan, y las fuerzas en el eje x son todas internas. Tampoco hay torques externos, por tanto: $L_o = L$. Considerando (+) la rotación a la izq. y (-) a la derecha,

$$0 = I_1\omega_1 - I_2\omega_2$$

$$\omega_2/\omega_1 = I_1/I_2.$$

Utilizando la definición $I = \sum m_i r_i^2$:

$$\omega_2/\omega_1 = mR^2/MR^2$$

$$\omega_2/\omega_1 = m/M. \qquad (1)$$

No hay fricción → ω = constante, →

$$\theta_1 = \omega_1 t$$

$$\theta_2 = \omega_2 t. \qquad (2)$$

Cuando choquen, habrá transcurrido el mismo tiempo para las dos bolas. Por tanto, eliminando el tiempo y sustituyendo en función de los **datos** según (1),

$$\theta_1/\theta_2 = \omega_1/\omega_2 = M/m. \qquad (3)$$

Los dos ángulos, como van en sentido contrario, también deben cumplir al momento del choque, que

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

Eliminando θ_1 entre (3) y (4) se llega al valor buscado de θ_2:

$$(M/m)\theta_2 + \theta_2 = 2\pi$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{1+\frac{M}{m}} \quad \textbf{(}\text{radianes)}$$

b) El tiempo transcurrido se puede calcular de la expresión (2) $t = \theta_2/\omega_2$, donde θ_2 ya es conocido del inciso anterior. El valor de ω_2 se calcula utilizando el dato adicional de la energía U_o almacenada en el resorte.

Según el teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas,

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_c.$$

En el sistema considerado las fuerzas externas no trabajan ($W_{ext} = 0$) y

$$W_{int} = -\Delta E_p = -(E_{pf} - E_{po}) = U_o$$

$$U_o = \tfrac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2\omega_2^2.$$

Sustituyendo los momentos de inercia por su valor y haciendo uso de la ecuación (1),

$$U_o = \tfrac{1}{2} mR^2(M/m)^2\omega_2^2 + \tfrac{1}{2} MR^2\omega_2^2$$

$$U_o = \tfrac{1}{2} \omega_2^2 R^2 M(1 + M/m)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2U_o}{MR^2\left(1+\frac{M}{m}\right)}}\,.$$

y sustituyendo finalmente en la ecuación (2)

$$t = \frac{\theta_2}{\omega_2} = \frac{\dfrac{2\pi}{1+M/m}}{\sqrt{\dfrac{2U_o}{MR^2\left(1+\frac{M}{m}\right)}}}$$

$$t = \frac{2\pi R}{\sqrt{2U_o\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)}}\,.$$

1. Note que las dimensiones de la ecuación son correctas (forma de verificar si el resultado lo es).

2. Otra forma de verificar el resultado: *analice los casos límites.* Por ej., si las masas son iguales, ¿Dónde se encontrarían? ¿Tiene sentido la solución?

c) Este inciso se resuelve con razonamientos similares a los de los incisos anteriores. Se deja al lector para ejercitación.

XIV. Oscilaciones

1. Un objeto de 2.14 kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 325 g colgado abajo del objeto estira adicionalmente al resorte 1.80 cm. El cuerpo de 325 g es retirado y el objeto entra en oscilación. Halle el período del movimiento.

Datos

m = 2.14 kg

m’ = 325 g = 0.325 kg

Δx’ = 1.80 cm = 0.018 m

T?

Resolución

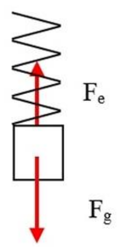


Figura XIV-1a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

La masa del objeto es conocida (2.14 kg).

Para calcular k, considere el diagrama de fuerzas. En el equilibrio, sin oscilar, $F_e = F_g$.

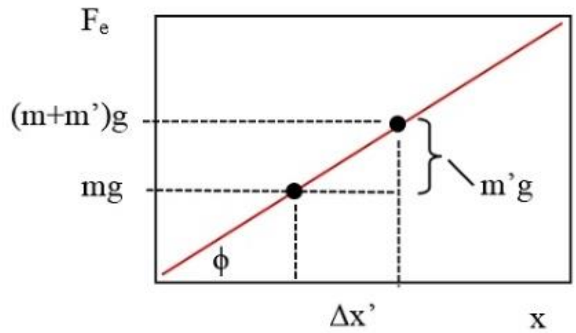


Figura XIV-1b

La ley de Hooke $F_e = -kx$ es una relación lineal y k es constante, igual a la pendiente en el gráfico de F vs. x (ver figura b). Es posible entonces hacer uso de los datos Δx’, m’:

$$k = \tan\phi = \frac{\Delta(mg)}{\Delta x} = \frac{m'g}{\Delta x}$$

Sustituyendo en el período,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta x}{m'g}}$$

$$= 6.28\sqrt{\frac{2.14x0.018}{0.325x10}}$$

$$= 0.68 \text{ s}$$

---

2. Dos bloques (m = 1.22 kg y M = 9.73 kg) y un resorte (k = 344 N/m) están dispuestos sobre una superficie horizontal sin fricción, uno sobre otro.

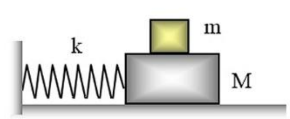


Figura XIV-2a

El coeficiente de fricción estática entre los bloques es de 0.42. Halle la amplitud máxima posible del movimiento armónico simple sin que ocurra un deslizamiento entre los bloques.

Datos

$m = 1.22$ kg

$M = 9.73$ kg

$k = 344$ N/m

$\mu_s = 0.42$

Resolución

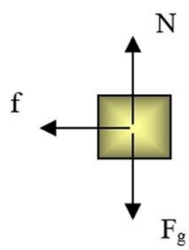


Figura XIV-2b

Consideraciones

El problema pide la amplitud máxima posible. Por tanto, se analizan las fuerzas sobre el bloque superior cuando el sistema está en su máxima amplitud hacia la derecha e inicia su retorno (considerando la amplitud hacia la izquierda el análisis sería similar). Para que el bloque superior se mueva de regreso junto al inferior, debe haber una fuerza neta en el sentido del movimiento (la fricción, que se opone a que el bloque superior deslice).

Eje y:

$$N - F_g = 0$$

$$N = mg.$$

Eje x:

$$f = ma.$$

$$x = A\text{sen}(\omega t+\delta)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t+\delta)$$

$$a = -A\omega^2\text{sen}(\omega t+\delta)$$

$$a = -\omega^2 x$$

En un MAS la aceleración es máxima cuando x es máximo ($x = A$) y tiene un valor $a = -\omega^2 A$ (ver cuadro arriba). El (-) indica que a y x están en sentidos contrarios, y no hay que considerarlo en los cálculos posteriores.

$$f_{máx} = m\omega^2 A \le \mu_s N$$

$$\omega^2 A \le \mu_s g$$

$$A_{máx} = \frac{\mu_s g}{\omega^2}.$$

Pero ω no se conoce. Sin embargo, para un MAS se cumple la relación $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En este caso particular hay que considerar la suma de las masas, m+M, pues los dos cuerpos oscilan unidos. Sustituyendo $\omega^2 = \frac{k}{M+m}$ en la expresión anterior,

$$A_{máx} = \frac{\mu_s (m+M) g}{k}$$

$$A_{máx} = \frac{0.42x(1.22+8.73)x10}{344}$$

$$= 0.12 \text{ m}$$

Si se sustituye el resorte por otro de menor constante, ¿qué le pasa al posible deslizamiento de los bloques?

---

3. Un oscilador consta de un bloque unido a un resorte ($k = 456$ N/m). En cierto tiempo t la posición (medida desde la posición de equili-

brio), la velocidad y la aceleración del bloque son x = 0.112 m, v = - 13.6 m/s, a = -123 m/s^2. Calcule a) la frecuencia, b) la masa del bloque y c) la amplitud de la oscilación.

Datos

k = 456 N/m
x = 0.112 m
v = - 13.6 m/s
a = - 123 m/s^2
a) f?
b) m?
c) A?

Resolución

$$x = A\text{sen}(\omega t+\delta) \qquad (1)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t+\delta) \qquad (2)$$

$$a = - A\omega^2\text{sen}(\omega t+\delta) \qquad (3)$$

a) Eliminando sen(ωt+δ) entre (1) y (3):

$$a = - \omega^2 x$$

$$\omega^2 = - a/x.$$

$$f = \omega/2\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}}$$

$$= \frac{1}{6.28}\sqrt{-\frac{-123}{0.112}}$$

$$= 5.3 \text{ s}^{-1} \quad \text{(oscilaciones/s).}$$

c) Elevando al cuadrado (1) y (2), agrupando convenientemente y sumando

$$x^2 + (v/\omega)^2$$

$$= A^2\{\text{sen}^2(\omega t+\delta) + \cos^2(\omega t+\delta)\}$$

$$= A^2.$$

Despejando,

$$A = \sqrt{x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{0.112^2 + \left(\frac{13.6}{6.28\text{x}5.3}\right)^2}$$

$$= 0.42 \text{ m.}$$

b)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m = k/\omega^2$$

$$= 456/4\pi^2 f^2$$

$$= 0.41 \text{ kg.}$$

4**.** Dos resortes están unidos en oposición a un bloque de masa m que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}\ ,$$

donde ν_1 y ν_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si se uniera solamente al resorte (1) o al resorte (2).

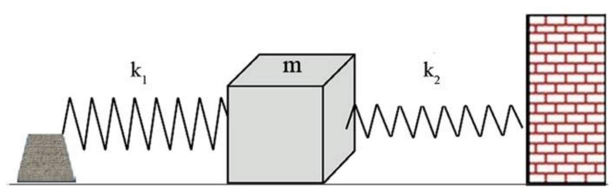


Figura XIV-4a

Resolución

Considere el cuerpo separado de su posición de equilibrio y analice el diagrama de las fuerzas que aparecen (figura 4b).

$$F_1 = - k_1 x$$

$$F_2 = - k_2x$$

$$F_R = - (k_1 + k_2)x.$$

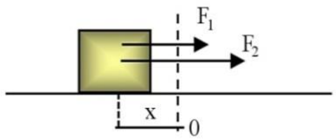


Figura XIV-4b

Significa que la fuerza actuando sobre el bloque es exactamente la misma que proporcionaría un solo resorte equivalente cuya constante de fuerza fuera $k_e = k_1 + k_2$.

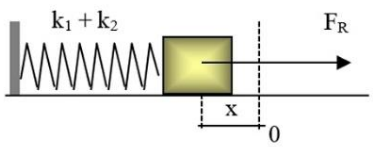


Figura XIV-4c

La frecuencia angular de la oscilación asociada a tal resorte con el bloque de masa m sería

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \ .$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi f$ y simplificando en estas expresiones, se obtiene finalmente lo que se quería demostrar:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$f = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \ .$$

---

5. Dos resortes unidos entre sí se enlazan al bloque de masa m por un extremo. Las superficies carecen de fricción. Si los resortes por separado tienen constantes de fuerza k_1 y k_2, demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}} \ ,$$

donde ν_1 y ν_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte 1 o al resorte 2.

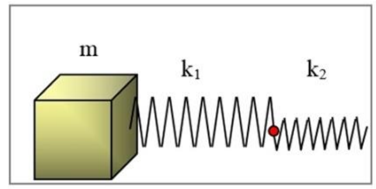


Figura XIV-5a

Resolución

Considere el cuerpo separado una distancia x de su posición de equilibrio. Si el resorte 1 se comprime x_1 y el 2 se comprime x_2 a partir de las respectivas posiciones de equilibrio, entonces

$$x = x_1 + x_2. \qquad (1)$$

Note que la fuerzas ejercidas por el resorte 1 sobre el bloque y sobre P son necesariamente iguales en módulo en el equilibrio (analice las parejas de acción y reacción).

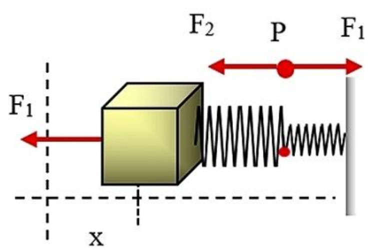


Figura XIV-5b

El punto P de unión está en equilibrio bajo la acción de la fuerzas F_1 y F_2 que ejercen los resortes, por tanto, $F_1 = F_2$ y

$$k_1x_1 = k_2x_2. \qquad (2)$$

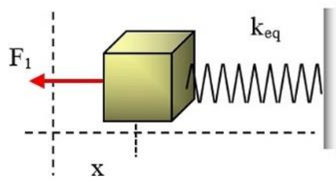


Figura XIV-5c

Para resolver el problema hace falta encontrar un solo resorte con una k equivalente tal que ejerza sobre el bloque la misma fuerza F_1 que ejercen los otros dos cuando éste se separa una distancia x de su posición de equilibrio; es decir: $F_1 = - k_{eq}x$. Tomando valores absolutos (el signo sólo indica sentido) y usando (1)

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{x}{F_1} = \frac{x_1 + x_2}{k_1 x_1} = \frac{1}{k_1} + \frac{x_2}{k_1 x_1}.$$

Sustituyendo x_2/x_1 según la ecuación (2),

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

La frecuencia angular de oscilación del resorte equivalente sería

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

$$= \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}$$

lo que demuestra la proposición del problema.

---

6. Un bloque de masa m en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción está unido a un soporte rígido promedio de un resorte de constante de fuerza k. Una bala de masa m y velocidad v golpea al bloque como se muestra en la figura. La bala se queda empotrada en el bloque. Determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante en términos de m, M, v y k.

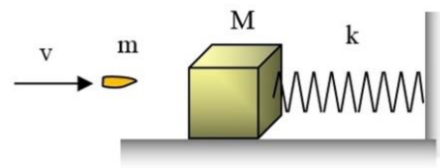


Figura XIV-6

Resolución

Consideraciones

Como las fuerzas durante el choque de la bala con el bloque son impulsivas (F muy grande, Δt muy pequeño) es posible separar el proceso en dos etapas: a) choque perfectamente inelástico y b) compresión del resorte. La pequeña compresión del resorte cuando la bala aún no se ha detenido totalmente en relación al bloque es despreciable en comparación con la fuerza de resistencia que frena la bala, y no se toma en cuenta.

a) Choque perfectamente inelástico (se conserva $\vec{P}$, pero no E_c). Al inicio $v_{bloque} = 0$.

$$P = P_o$$

$$(m + M)v_{bloque} = mv$$

Por tanto, inmediatamente después de incrustarse la bala,

$$v_{bloque} = \frac{m}{m + M}v.$$

b) Después del choque el sistema es conservativo, y toda la energía que hay al inicio es sólo la cinética del bloque + bala. Al final, la compresión máxima del resorte es justamente su máxima elongación (amplitud) antes de comenzar a oscilar. Por tanto:

$$E = E_o$$

$$½\ kA^2 = ½\left(M + m\right)v_{bloque}^2$$

$$kA^2 = (M + m)\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v^2$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2v^2}{k\left(M + m\right)}}.$$

Note que en el choque perfectamente inelástico que tiene lugar la energía cinética no se conserva. Por tanto, *no es posible* considerar que la energía cinética de la bala al inicio será la misma que la potencial del resorte comprimido al final.

7**.** Un cilindro sólido está unido a un resorte horizontal sin masa de modo que puede rodar sin resbalar a lo largo de una superficie horizontal como en la figura. La constante de fuerza del resorte es de 2.94 N/cm.

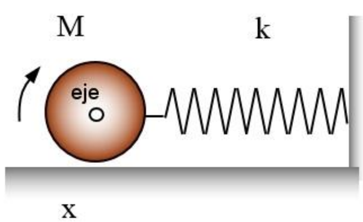


Figura XIV-7a

Si el sistema parte del reposo desde una posición en que el resorte está estirado 23.9 cm, halle a) la energía cinética de traslación y b) la energía cinética de rotación del cilindro al pasar por la posición de equilibrio. c) Demuestre que en estas condiciones el centro de masa del cilindro efectúa un movimiento armónico simple con un período $T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$, donde M es la masa del cilindro.

Datos

k = 2.94 N/cm = 294 N/m

x = 23.9 cm = 0.239 m

a) E_{ct}?

b) E_{cr}?

Resolución

Consideraciones

a) Las fuerzas en el eje y no trabajan. La fricción tampoco (eje instantáneo de rotación). La única fuerza que trabaja en el eje x es la elástica → sistema conservativo,

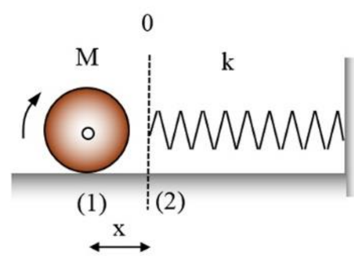


Figura XIV-7b

$$E_1 = E_2$$

$$½\ kx^2 = ½\ Mv_{CM}^2 + ½\ I_{CM}\omega^2.$$

Para el cilindro, por las tablas de datos,

$$I_{CM} = ½\ MR^2.$$

Además, $v_{CM} = \omega R$. Sustituyendo en la expresión anterior,

$$½\ kx^2 = ½\ Mv_{CM}^2 + ½\ ½\ MR^2v_{CM}^2/R^2$$

$$= E_{CT} + ½\ E_{CT}$$

$$= 3/2\ E_{CT}$$

Despejando:

$$E_{CT} = ⅓\ kx^2$$

$$= 1/3 \times 294 \times 0.239^2$$

$$= 5.6\ J$$

b) $E_{CR} = ½\ kx^2 – E_{CT}$

c) Para demostrar que el CM realiza un MAS hay que analizar las fuerzas que actúan sobre el cilindro y comprobar si efectivamente el CM cumple la ecuación de un MAS, y de ahí calcular el período. Considerando el eje instantáneo de rotación en el punto P, por el teorema de los ejes paralelos

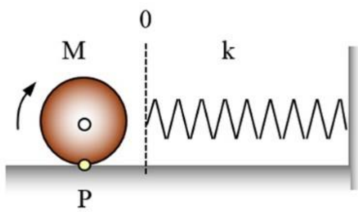


Figura XIV-7c

$$I = I_{CM} + MR^2$$

$$I = ½\ MR^2 + MR^2$$

$$= 3/2\ MR^2.$$

Por otra parte, si $v_{CM} = \omega R$, derivando ambos miembros de esta igualdad respecto al tiempo se llega de inmediato a que $a_{CM} = \alpha R$. Aplicando la 2da ley de Newton en la rotación con $F = - kx$:

$$\tau_R = I\alpha$$

$$F_eR = 3/2\ MR^2 a_{CM}/R$$

$$- kx = 3/2\ Ma_{CM}\,.$$

Como $a_{CM} = \dfrac{d^2x_{CM}}{dt^2}$ finalmente queda

$$\frac{d^2x_{CM}}{dt^2} + \frac{2k}{3m}x_{CM} = 0\,.$$

Esta es la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple, que tiene por solución una función del tipo

$$x_{CM} = A\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

siempre y cuando la frecuencia angular del movimiento cumpla la condición

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}\,.$$

Como $\omega = 2\pi/T$, entonces:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

que es la proposición a demostrar

---

8. Un péndulo consta de un disco uniforme de 10.3 cm de radio y 488 g de masa unido a una barra de 52.4 cm de longitud que tiene una masa de 272 g (ver figura).

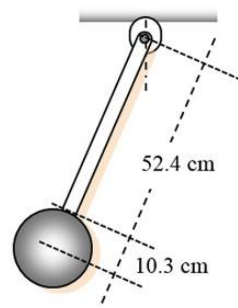


Figura XIV-8

a) Calcule la inercia rotatoria del péndulo respecto al pivote. b) ¿Cuál es la distancia entre el pivote y el centro de masa del péndulo? c) Calcule el período de oscilación para ángulos pequeños.

Datos

$R = 10.3\ cm = 0.103\ m$

$M_{disco} = 488\ g = 0.488\ kg$

$L = 52.4\ cm = 0.524\ m$

M_{barra} = 272 g = 0.272 kg

Resolución

a)
Aplicando la definición de momento de inercia:

$$I = \sum_{total} m_i r_i^2 = \sum_{disco} m_i r_i^2 + \sum_{barra} m_i r_i^2 \qquad (1)$$

Por las tablas de datos, para una barra que rota alrededor de un extremo, $I = ⅓M_bL^2$. El valor que aparece para el disco es relativo a un eje que pasa por el CM: $I = ½\ M_dR^2$. Haciendo uso del teorema de los ejes paralelos para considerar el momento de inercia respecto al pivote, $I = I_{CM} + Mh^2$, donde h es la distancia entre los dos ejes paralelos:

$$I = ½\ M_dR^2 + M_d(R+L)^2.$$

Sustituyendo en (1)

$$I = ½\ M_dR^2 + M_d(R+L)^2 + ⅓\ M_bL^2$$

$$I = ½\ x0.488x0.103^2 + 0.488x0.627^2$$

$$+ ⅓\ x0.272x0.524^2$$

$$I = 0.0026 + 0.192 + 0.0249$$

$$I = 0.224\ kgm^2$$

b)
Aplicando la definición de CM:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_{disco} m_i \vec{r}_i + \sum_{barra} m_i \vec{r}_i\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(M_{disco}\vec{r}_{CM(disco)} + M_{barra}\vec{r}_{CM(barra)}\right)$$

El CM del disco está en su centro geométrico. El de la barra en su punto medio. M es la suma de ambas masas.

El CM es independiente del sistema de referencia que escoja. Tomando el eje x a lo largo de la barra y el origen en el CM del disco (centro del disco) de forma que $\vec{r}_{CM(disco)} = x_{CM}(disco) = 0$,

$$x_{CM} = \frac{M_{barra}x_{CM(barra)}}{M_{disco} + M_{barra}}$$

$$= \frac{0.272\,x\left(62.7/2\right)}{0.488 + 0.272}$$

$$= 0.131\ m.$$

El CM se encuentra del pivote a 0.627 - 0.131 = 0.496 m.

c)
El período de un péndulo físico viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}},$$

donde I es el momento de inercia con respecto al pivote y d la distancia desde el pivote hasta el CM.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.224}{(0.488 + 0.272)x10x0.496}}$$

$$= 3.66\ s.$$

XV. ONDAS

1. Una onda de 493 Hz de frecuencia tiene una velocidad de 353 m/s. a) ¿A qué distancia entre sí están dos puntos que difieran en fase por 55.0°? b) Halle la diferencia de fase entre dos desplazamientos en el mismo punto pero en tiempos que difieran en 1.12 ms.

Datos

f = 493 Hz

v_p = 353 m/s

a) Δx? si $\Delta\Phi = 55^o$

b) $\Delta\Phi$? si $\Delta t = 1.12$ ms

Resolución

$y = y_m sen(kx-\omega t)$, donde la fase de la onda es, por definición, $\Phi = kx - \omega t$

a)
Note que $\Phi = \Phi(x,t)$ es una función de dos variables. Para considerar Δx correspondiente a un $\Delta\Phi$ dado hay que considerar un instante dado t al calcular las dos fases:

$$\Phi_1 = kx_1 - \omega t$$

$$\Phi_2 = kx_2 - \omega t$$

$$\Delta\Phi = k(x_2 - x_1)$$

$$\Delta x = \Delta\Phi/k.$$

Pero

$$k = 2\pi/\lambda \ ; \ v_p = \lambda f$$

$$k = 2\pi f/v_p.$$

Sustituyendo:

$$\Delta x = \frac{v_p \Delta f}{2\pi f}.$$

$\Delta\Phi$ está en grados y es necesario expresarlo en radianes:

$$\Delta\Phi_{radianes} = \frac{\pi}{180}\Delta f_{grados}$$

$$= \frac{3.1416}{180} x\, 55$$

$$= 0.96 \text{ rad}$$

$$\Delta x = \frac{v_p \Delta f}{2\pi f}$$

$$= \frac{353x0.96}{6.28x493}$$

$$= 0.109 \text{ m.}$$

b) Para un punto cualquiera de la onda:

$$\Phi_1 = kx - \omega t_1$$

$$\Phi_2 = kx - \omega t_2$$

$$\Delta\Phi = - \omega(t_2 - t_1)$$

$$= - 2\pi f \Delta t$$

$$= - 6.28x493x1.12x10^{-3}$$

$$= - 3.46 \text{ rad.}$$

---

2. Demuestre a) que la velocidad transversal máxima de una partícula de una cuerda debida a una onda viajera está dada por $v_{máx} = \omega y_{máx}$ y b) que la aceleración transversal máxima es $a_{máx} = \omega^2 y_{máx}$.

Demostración

a)

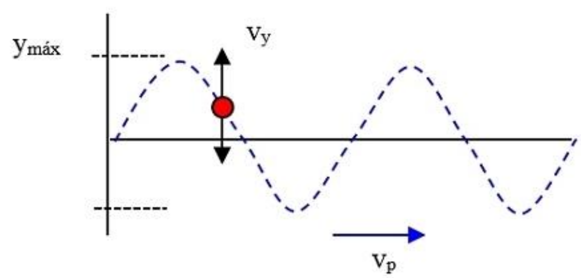


Figura XV-2

La ecuación de una onda sinusoidal que se mueve de izq. a derecha por el eje x es

$$y = y_{máx} sen(kx-\omega t)$$

$$v_y = dy/dt = -\omega y_{máx} cos(kx-\omega t)$$

$$\text{pero } cos(kx-\omega t)_{máx} = \pm 1$$

$$v_y(máx) = \omega y_{máx}$$

b)

$$a_y = dv_y/dt = \omega^2 y_{máx} sen(kx-\omega t)$$

$$\text{pero } sen(kx-\omega t)_{máx} = \pm 1$$

$$a_y(máx) = \omega^2 y_{máx}$$

---

3. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es y = 1.8sen(23.8x + 317t) donde *x* está en metros, *y* está en mm y *t* en segundos. La cuerda está sometida a una tensión de 16.3 N. Halle la densidad de masa lineal de la cuerda.

Datos

y = 1.8sen(23.8x + 317t)

F = 16.3 N

μ?

Resolución

$$v_p = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{F}{v_p^2}.$$

La velocidad de propagación se obtiene de la ecuación de la onda, identificando los términos con la expresión general $y = y_m sen(kx\text{-}\omega t)$:

$$k = 23.8\ m^{-1},$$

$$\omega = 317\ rad/s.$$

$$v_p = \lambda f = \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{2\pi} = \omega/k.$$

$$\mu = \frac{Fk^2}{\omega^2}$$

$$= 1.63x23.8^2/317^2$$

$$= 9.19 \times 10^{-3}\ kg/m.$$

---

4. Una onda transversal armónica simple se está propagando a lo largo de una cuerda hacia la izquierda (o -x). La figura muestra un trazo del desplazamiento en función de la posición en el tiempo t = 0.

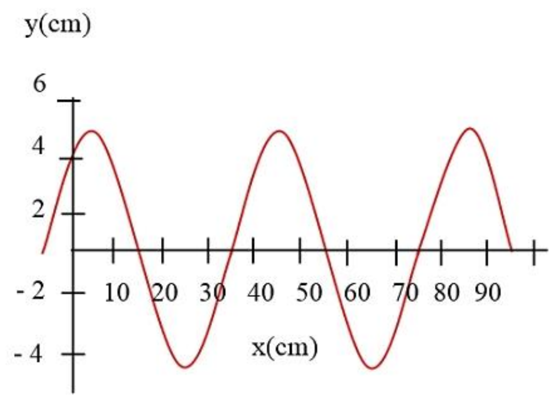


Figura XV-4

La tensión de la cuerda es de 3.6 N y su densidad lineal es de 25 g/m. Calcule a) la amplitud, b) la longitud d onda, c) la velocidad de la onda, d) el período y e) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda. f) Escriba una ecuación que describa la onda viajera.

Datos

F = 3.6 N

$\mu = 25\ g/m = 25x10^{-3}\ kg/m$

Resolución

$$y = y_m sen(kx\text{-}\omega t)$$

a) Por inspección, del gráfico se ve que

$$y_m = 5\ cm = 0.05\ m.$$

b) Por inspección del gráfico:

$$\lambda = 40\ cm = 0.04\ m.$$

c)

$$v_p = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$= \sqrt{\frac{3.6}{25x10^{-3}}}$$

$$= 12 \text{ m/s}$$

d)

$$v_p = \lambda/T \rightarrow$$

$$T = \lambda/v_p = 0.04/12$$

$$= 0.033 \text{ s}$$

e)

$$v_y(\text{máx}) = \omega y_m$$

$$= 2\pi y_m/T = 6.28x0.05/0.033$$

$$= 9.5 \text{ m/s}$$

f)

$$k = 2\pi/\lambda = 6.28/0.04$$

$$= 157 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi/T = 6.28/0.033$$

$$= 190.3 \text{ rad/s}$$

$$y = 0.05\text{sen}(157x + 190.3t + \delta).$$

Es necesario añadir δ porque para x = 0 y t = 0, el valor de y no es igual a cero, sino + 0.04 m (gráfico problema 4). Por tanto, evaluando δ en (0,0):

$$0.04 = 0.05 \text{ sen}\delta$$

$$\text{sen } \delta = 0.8$$

$$\delta = \text{arcsen}(0.8)$$

$$= 53.1\ ^{o}$$

$$53.1x3.14/180 = 0.92 \text{ rad}$$

Respuesta: 0.05sen(157x + 190.3t + 0.92)

---

5. Para una onda que se propaga en una cuerda, demuestre que la pendiente en cualquier punto de la cuerda es numéricamente igual a la razón entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la onda en ese punto.

Demostración

Hay que demostrar que $m = v_y/v_p$ en cualquier punto.

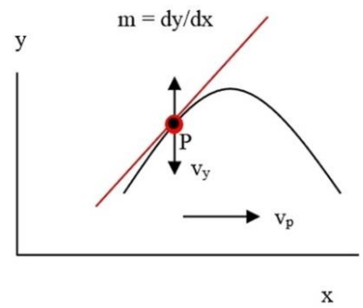


Figura XV-5

Considere la ecuación de la onda

$$y = y_m\text{sen}(kx\text{-}\omega t).$$

En un punto cualquiera P,

$$m = dy/dx = ky_m\cos(kx\text{-}\omega t)|_p$$

$$v_y = dy/dt = \mp\ \omega y_m\cos(kx\pm\omega t)|_p$$

por tanto,

$$\frac{m}{k} = m\frac{v_y}{\omega}$$

$$m = \mp\ v_y k/\omega. \qquad (1)$$

pero

$$k / \omega = \frac{2\pi/\lambda}{2\pi/T} = \frac{T}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{v_p}$$

Y sustituyendo k/ω en (1),

$$m = \mp\ v_y/v_p.$$

---

6. Una cuerda de 2.72 m de longitud tiene una masa de 263 g. La tensión en la cuerda es de 36.1 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas viajeras de amplitud de 7.70 mm para que la potencia promedio transmitida sea de 85.5 w?

Datos

L = 2.72 m

y_m = 7.70 mm = 7.7×10^{-3} m

m = 263 g = 0.263 kg

P_m = 85.5 w

F = 36.1 N

f?

Resolución

La potencia media transmitida por una onda que se propaga en una cuerda viene dada por

$$P_m = \frac{1}{2} y_m^2 \mu v_p \omega^2.$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi f$ y despejando:

$$f = \sqrt{\frac{2P_m}{4\pi^2 y_m^2 \mu v_p}}. \qquad (1)$$

Todos los **datos** son conocidos excepto μ y v_p:

$$\mu = m/L = 0.263/2.72$$

$$= 0.097 \text{ kg/m}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{36.1}{0.097}}$$

$$= 19.3 \text{ m/s}.$$

Sustituyendo en (1)

$$f = \sqrt{\frac{2 \text{x} 85.5}{4 \text{x} 9.87 \text{x} 7.7^2 \text{x} 10^{-6} \text{x} 0.097 \text{x} 19.3}}$$

$$= 197 \text{ Hz}.$$

7. Una cuerda fija en ambos extremos tiene una longitud de 8.36 m y una masa de 122 g. Está sujeta a una tensión de 96.7 N y se pone en vibración. a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda? b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible? c) Indique la frecuencia de esa onda.

Datos

L = 8.36 m

m = 122 g = 0.122 kg

F = 96.7 N

v?

$\lambda_{máx}$?

f?

Resolución

a)

$$v_p = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{96.7 \text{x} 8.36}{0.122}}$$

$$= 81.4 \text{ m/s}$$

b) Una cuerda fija en ambos extremos es capaz de mantener ondas estacionarias con longitudes de onda tales que

$$\lambda = 2L/n \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

Una demostración rigurosa aparece en Sears: Mecánica, Movimiento Ondulatorio y Calor, Ediciones R., Instituto del Libro, La Habana, 1968, sec. 17.6, p. 460.

La máxima λ posible se obtiene para el n mínimo (n = 1):

$$\lambda = 2L = 16.72 \text{ m}.$$

c) $v_p = \lambda f$

$$f = v_p/\lambda = 81.4/16.72$$

$$= 4.9 \text{ Hz.}$$

---

8. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por

$$y = 0.15\text{sen}(0.79x\text{-}13t),$$

donde x e y están expresadas en metros y t en segundos. a) ¿Cuál es el desplazamiento en x = 2.3 m, t = 0.16 s? b) Escriba la ecuación de la onda que, cuando se sume a la dada, produciría ondas estacionarias en la cuerda. c) ¿Cuál es el desplazamiento de la onda estacionaria resultante en x = 2.3 m, t = 0.16 s?

Datos

$y = 0.15\text{sen}(0.79x\text{-}13t)$ (m,s)

Resolución

a)

$$y = 0.15\text{sen}(0.79\cdot 2.3 - 13\cdot 0.16)$$

$$= 0.15\text{sen}(-0.263)$$

Como sen(-x) = -senx,

$$y = - 0.15\text{sen}(+0.263).$$

Para llevar los radianes a grados,

$$0.263\text{x}180/3.1416 = 15^o$$

$$\text{sen}(15^o) = 0.26$$

$$y = - 0.15\text{x}0.26$$

$$= - 0.039 \text{ m.}$$

b) Cambiando el signo del término en ωt:

$$y = 0.15\text{sen}(0.79x+13t)$$

c) Para la onda resultante,

$$y = 0.15\text{sen}(0.79x\text{-}13t) + 0.15\text{sen}(0.79x+13t)$$

$$= - 0.039 + 0.15\text{sen}(3.897).$$

Llevando a grados:

$$3.897\cdot 180/3.1416 = 223.3^o$$

$$\text{sen}(223.3^o) = - 0.69$$

$$y = - 0.039 + 0.15\cdot(-0.69)$$

$$= - 0.039 - 0.1$$

$$= - 0.139 \approx - 0.14 \text{ m.}$$

---

9. Las vibraciones que parten de un diapasón de 622 Hz producen ondas estacionarias en una cuerda sujeta en ambos extremos. La velocidad de la onda para la cuerda es de 388 m/s. La onda estacionaria tiene 4 rizos y una amplitud de 1.90 mm. a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? b) Escriba una ecuación para el desplazamiento de la cuerda en función de la posición y del tiempo.

Datos

f = 622 Hz

$v_p = 388$ m/s

4 vientres

$y_m = 1.90 \text{ mm} = 1.9\text{x}10^{-3} \text{ m}$

a) L?

b) y = y(x,t)?

Resolución

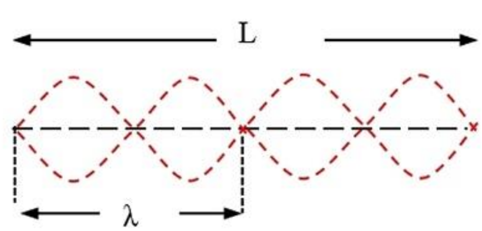


Figura XV-9

a) λ se obtiene de $v_p = \lambda f$

$$\lambda = v_p/f$$

$= 388/622$

$= 0.624$ m.

El valor de L se obtiene analizando la forma de la oscilación (4 vientres). Cada λ cubre dos vientres, por lo que $L = 2\lambda$.

$L = 2x0.624$

$= 1.248$ m

b)

$$y = y_m sen(kx-\omega t) + y_m sen(kx+\omega t)$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$= 6.28/0.624$$

$$= 10.1$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$= 6.28x622$$

$$= 3906.2$$

$$y = 1.9x10^{-3}\ \{sen(10.1x - 3906.2t)$$

$$+ sen(10.1x + 3906.2t)\}10.$$

---

10. Un extremo de una cuerda de 120 cm se mantiene fijo. El otro extremo está unido a un anillo sin peso que puede deslizarse a lo largo de una barra sin fricción. ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más grandes posibles de ondas estacionarias en la cuerda? Trace las ondas estacionarias correspondientes.

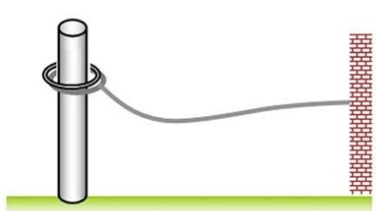


Figura XV-10a

Datos

L = 120 cm = 0.12 m

Resolución

Cuando una onda se refleja en el extremo libre de una cuerda tensa, en el extremo libre aparece un vientre, y necesariamente aparecen nodos en las distancias (medidas a partir del extremo libre) de $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$, etc.

$x = (2n+1)\lambda/4$ donde n = 0, 1, 2, 3, ... etc.

(La demostración aparece en Sears, Mecánica, Movimiento Ondulatorio y Calor, Instituto del Libro, Habana, 1968, Sección 17.4, pág. 456).

Por tanto, en el caso aquí analizado necesariamente debe haber un vientre en x = 0 y un nodo donde la cuerda está fija a la pared (x = L).

Es decir, debe existir algún n tal que:

$$(2n+1)\lambda/4 = L$$

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1}.$$

Los 3 menores valores de n (0, 1 y 2) corresponden a las tres mayores λ posibles:

$$n = 0 \rightarrow \lambda_1 = 480/1 = 480 \text{ cm}$$

$$n = 1 \rightarrow \lambda_2 = 480/3 = 160 \text{ cm}$$

$$n = 2 \rightarrow \lambda_3 = 480/5 = 96 \text{ cm}$$

El gráfico se construye considerando los valores de λ conjuntamente con el hecho de que en un extremo hay un vientre y en el otro un nodo. Por ej., $\lambda_2/2 = 80$. Combinando este resultado con el vientre y el nodo en los extremos, se obtiene la onda de dos nodos en 40 y 120.

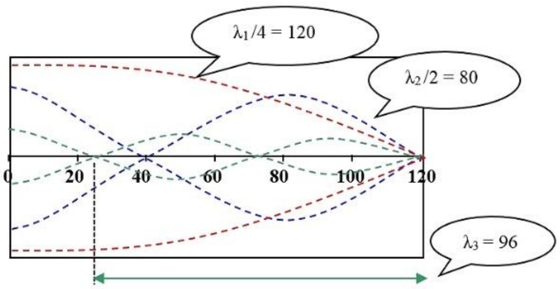


Figura X1V-10b

11**.** Una cuerda de 75.6 cm está estirada entre soportes fijos. Se observa que tiene frecuencias de resonancia de 420 y 315 Hz, y ninguna otra entre estas dos. a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia más baja de esta cuerda? b) ¿Cuál es la velocidad de onda de ésta cuerda?

Datos

$L = 75.6\ cm = 0.756\ m$

$f_1 = 420\ Hz$

$f_2 = 315\ Hz$

a) $f_{mínima?}$

b) v_p?

Resolución

Una cuerda fija en ambos extremos es capaz de mantener ondas estacionarias con longitudes de onda tales que $\lambda = 2L/n$ $(n = 1, 2, 3...)$.

Estas son las frecuencias naturales de oscilación de la cuerda. La demostración rigurosa aparece en Sears: Mecánica, Movimiento Ondulatorio y Calor, Ediciones R., Instituto del Libro, La Habana, 1968, sec. 17.6, p. 460.

$$v_p = \lambda f \rightarrow f_{min} = v_p/\lambda_{máx.}$$

La mayor λ posible será aquella que corresponde al mínimo n ($n = 1$, $\lambda = 2L$). Por tanto,

$$f_{min} = \frac{v_p}{2L} \qquad (1)$$

El valor de v_p se desconoce, pero se puede obtener a partir de los **datos** de frecuencia.

$$\lambda_1 = \frac{2L}{n_1} = \frac{v_p}{f_1} \qquad (2)$$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{n_2} = \frac{v_p}{f_2} \qquad (3)$$

Dividiendo miembro a miembro (2) entre (3),

$$n_2/n_1 = f_2/f_1$$

$$= 315/420$$

$$= 0.75$$

$$n_2 = 0.75n_1.$$

Por dato, n_1 y n_2 son consecutivos (no hay otra frecuencia entre esas dos). Además, $n_2 < n_1$, luego

$$n_2 = 0.75(n_2 + 1)$$

$$n_2(1\text{-}0.75) = 0.75$$

$$n_2 = 0.75/0.25 = 3$$

$$n_1 = 4$$

El valor de v_p se obtiene de (2) o de (3):

b)

$$v_p = 2Lf_1/n_1$$

$$= 2x0.756x420/4$$

$$= 158.8\ m/s.$$

a)

$$f_{min} = \frac{v_p}{2L}$$

$$= 158.8/1.512$$

$$= 105.0\ Hz.$$

ANEXO 1. ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

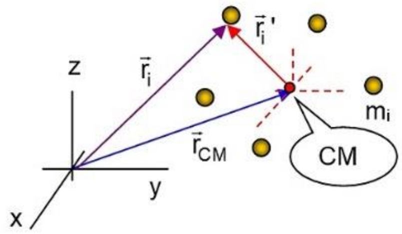


Figura A1

Considere un sistema de partículas, ya bien sea discretas, ya bien pertenezcan a un cuerpo continuo, y un sistema inercial xyz (figura A1).

Es posible demostrar de manera totalmente general que

$$E_c = E_c(CM) + E_c',$$

donde:

E_c es la energía cinética del sistema respecto al sistema inercial xyz;

E_{CM} la energía cinética del CM respecto a ese mismo sistema y,

E_C' la energía cinética de las partículas con respecto a un sistema de referencia ligado al CM.

Nota: en el caso particular de un cuerpo rígido que rota, entonces $E_c' = ½ I\omega^2$ donde *el momento de inercia debe estar referido a un eje que pasa por el CM del sistema*. Se acostumbra escribir este resultado como

$$E_c = ½ Mv_{cm}^2 + ½ I_{cm}\omega^2. \qquad (1.1)$$

donde ω se refiere a la velocidad angular con relación a un eje que pasa por el CM.

ANEXO 2. VELOCIDAD ANGULAR EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CM

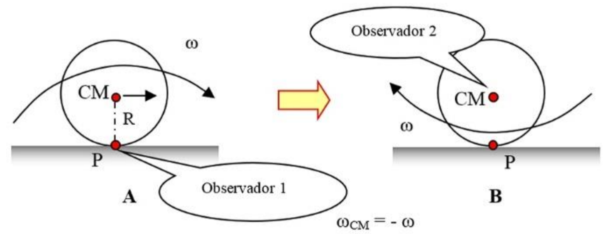


Figura A2

La velocidad angular que aparece en (1.1) es la velocidad angular *respecto al eje que pasa por el CM*. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos usualmente la ω conocida está referida a un eje *fijo instantáneo ligado a tierra*. Si ω es la velocidad angular respecto al eje que pasa por P en (**A**), entonces $v_{CM} = \omega R$.

No obstante, un observador parado en el CM verá girar la rueda en sentido contrario, *pero con la misma velocidad angular* ω, como en (**B**), y $\omega_{CM} = -\omega$ (figura A2).

Por tanto, la velocidad angular respecto a un sistema de referencia en el CM es la misma que respecto a un sistema asociado al eje fijo (pero en sentido contrario) y la ω obtenida según (A) se puede utilizar directamente para evaluar la ecuación (1.1).

ANEXO 3. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

En forma analítica, el teorema se puede expresar de la forma siguiente:

$$I = I_{CM} + Mh^2,$$

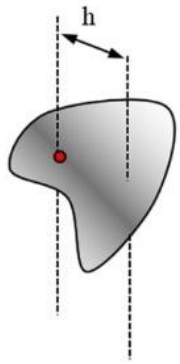


Figura A3

donde:

I_{CM} es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje que pasa por el CM;

I el momento de inercia respecto a cualquier eje paralelo al anterior;

M es la masa del cuerpo y h la distancia entre los dos ejes (ver figura A3).

Si se conoce la masa del cuerpo y el valor de I para un eje que pase por el CM, entonces es posible calcular el momento de inercia para cualquier otro eje paralelo, conocidos h y M.

BIBLIOGRAFÍA

1. University Physics Volume 1, OpenStax.org. OpenStax Rice University, 6100 Main Street MS-375, Houston, Texas 77005. ©2018 Rice University

2. Halliday, Resnick and Krane, Física, Vol. I, 4ta Ed., 2003, Editorial Félix Varela.

3. Sears: Mecánica, Movimiento Ondulatorio y Calor, Ediciones R., Instituto del Libro, La Habana, 1968.

4. Young y Freedman, Sears y Zemansky, Física Universitaria, vol. 1, 13ª Ed., PEARSON, México, 2013.

5. Kim Hauser Vavra. Mecánica-FI2001 Problemas Propuestos y Resueltos. Fac. Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile, 2011; https://www.cec.uchile.cl/~javier.huenupi/img/books/Kim_Hauser_Problemas_Propuestos_y_Resueltos.pdf, Revisado dic 2023.

6. Charles Kittel, Mechanics, Berkeley Physics Course, vol 1, 2nd Ed. 1973, McGraw-Hill.

7. B. G. Fuentealba y E. M. San Martín, APUNTES CON EJERCICIOS FÍSICA MECÁNICA 1° Edición (Versión Preliminar) Marzo, 2012. U. TEC. METROPOLITANA *del Estado de Chile,* Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente, https://repositorio.utem.cl/bitstream/handle/30081993/427/APUNTES%20CON%20EJERCICIOS%20MECANICA%202018.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Revisado dic 2023.

8. F. J. González Gallero, J.M. Gutiérrez Cabeza y J. Méndez Zapata, Ejercicios de Física: resueltos y propuestos, Universidad de Cádiz, Departamento de Física Aplicada, E.P.S. de Algeciras. https://tiendaeditorial.uca.es/descargas-pdf/84-7786-910-3-completo.pdf . Revisado dic 2023.

9. A. del C. Fabian, PROBLEMAS RESUELTOS DE FÍSICA I (Mecánica - Movimiento Ondulatorio – Calor). EDITORIAL CIENTÍFICA UNIVERSITARIA DE LA SECRETARIA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA. https://www.academia.edu/27570027/PROBLEMAS_RESUELTOS_DE_F%C3%8DSICA_I_Mec%C3%A1nica_Movimiento_Ondulatorio_Calor. Revisado Dic. 2023.

10. S.P.Strelkov, I.A.Yakovlev, Problems In Undergraduate Physics, Vol. 1 Mechanics. PERGAMON PRESS, 1965,

https://ia801600.us.archive.org/8/items/strelkov-mechanics-mir-1978/Strelkov%20-%20Mechanics%20-%20Mir%20-%201978.pdf. Revisado Dic. 2023.

11. V.S. Volkenshtein, Problemas de Fìsica General, Moscú, Editorial Mir, 1970. https://dl200.vdocuments.mx/file_download/file1/55cf8f28550346703b997b8d?ext=pdf&vaild=12bd0936f977793ad76e9fa6bd926fb48ee10391869cd11cc73997565c53bcbc446431be0efa01c41d3feecde5029fc742b1ba205ee0b810fa15b49dd68c39bfZGHTiWutQK338nuHB15rSWQUcixnc71lxf3Z/z6qTNq1HWTX7hhUPGgCe3bnhmYG7tZpt+sPIfIajxkNRZS0ekhDt/EYsSuzEGU0rYhYufE=. Revisado Dic. 2023