

Capítulo 1

O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$

Definição 1.1: O espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares de números reais (x, y) , denominado vetores, munidos das operações :

- $+$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; (adição)
- $\bullet$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; (multiplicação por escalar)

Definidas por :

$$\begin{aligned} \text{Dados } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha \cdot (x_1, y_1) &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1) \end{aligned}$$

Essas operações satisfazem , para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u, v e $w \in \mathbb{R}^2$, as seguintes propriedades :

- **Comutativa** : $u + v = v + u$
- **Associativa** : $(u + v) + w = (u + v) + w$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- **Vetor nulo**: existe um vetor *nulo* $\mathbf{0}$, tal que $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$ para todo

$v \in \mathbb{R}^2$;

- **Inverso aditivo**: para cada vetor $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ existe o vetor $-u = (-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$ chamado o *inverso aditivo*, (ou o *simétrico de u*), tal que $-u + u = \mathbf{0}$;

- **Distributividade**: $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- **Multiplicação por 1**: $1 \cdot v = v$.

Definição 1.2: Dizemos que dois vetores $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ são iguais se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definição 1.3: Considere $v, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$ dizemos que v é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n$.

Exemplo 1.1: Sejam $u = (1, 3)$, $w = (3, 4)$ e $v = (-1, 2)$, v é uma combinação linear de u e w , pois $v = 2u - w$.

Exemplo 1.2:

Sejam $u = (1,2)$, $v = (3,4)$ e $w = (4,8)$ então v não é combinação linear de u e w , pois não existe $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v = a_1 u + a_2 w$, de fato

$$(3,4) = a_1(1,2) + a_2(4,8) \Leftrightarrow (3,4) = (a_1 + 4a_2; 2a_1 + 8a_2)$$

$$S: \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 3 & (I) \\ 2a_1 + 8a_2 = 4 & (II) \end{cases}, \text{ tem solução}$$

de (I) temos $a_1 = 3 - 4a_2$ (I')

substituindo I' em II

$$2(3 - 4a_2) + 8a_2 = 4$$

$$6 - 8a_2 + 8a_2 = 4 \Rightarrow 0a_2 = 10$$

o que não acontece para nenhum valor real a_2 .

Conclui-se assim que o sistema não tem solução, portanto v não é uma combinação linear de u e w .

Observe que $\mathbf{0} = (0,0)$ é uma combinação linear de quaisquer vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, pois $\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.4: Dados os vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ se um deles é uma combinação linear dos demais, dizemos que eles são Linearmente Dependentes (L.D), caso contrário, dizemos que eles são Linearmente Independentes (L.I).

Exercício 1.1 Mostre que para $n > 2$ os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são L.D.

Exemplo 1.3:

Os vetores $u = (1,2)$, $v = (4,5)$, $w = (7,8)$ de $\mathbb{R}^2$ são L.D. pois: $w = 2v - u$.

Definição 1.5: Um conjunto $\beta = \{u, v\}$ de dois vetores de $\mathbb{R}^2$ é dito uma base de $\mathbb{R}^2$ se u e v são L.I.

Decorre direto da definição 1.5 que se β é uma base de $\mathbb{R}^2$ então $\mathbf{0} = (0,0) \notin \beta$.

Teorema 1.1: Seja $\beta = \{u_1, u_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, então β gera $\mathbb{R}^2$, isto é, qualquer que seja $v \in \mathbb{R}^2$, v é uma combinação linear de u_1, u_2 .

Demonstração:

Considere $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ e seja $v = (x, y)$ um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^2$. Devemos mostrar que existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v = a_1 u_1 + a_2 u_2$.

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 \Leftrightarrow (x, y) = a_1 (x_1, y_1) + a_2 (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x, y) = (a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 y_1 + a_2 y_2).$$

Daí temos o sistema $S: \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = x \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 = y \end{cases}$ devemos mostrar que, $\forall x, y \in S$ tem solução, para

$$\text{isso basta mostrar que } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - y_1 x_2 \neq 0.$$

Suponha que $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = y_1 x_2$

- Se $y_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_1}{y_2} x_2$ e $y_1 = \frac{y_1}{y_2} y_2 \Rightarrow u_1$ é uma combinação linear de u_2 , contradição.

- Se $y_2 = 0 \Rightarrow x_2 \neq 0$ (O vetor nulo não pertence à base) $\Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{x_2} y_2$ e

$$x_1 = \frac{x_1}{x_2} x_2 \Rightarrow u_1 \text{ é uma combinação linear de } u_2, \text{ contradição.}$$

Portanto devemos ter $x_1 y_2 \neq y_1 x_2 \Rightarrow S$ possui uma solução ■

Exemplo 1.4:

1) Considere a base de $\mathbb{R}^2$ $\beta = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (3, 5)\}$, se tomarmos por exemplo, $v = (-7, 3)$, existe $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v = a_1 u_1 + a_2 u_2$.

De fato :

$$(-7, 3) = a_1(1, 2) + a_2(3, 5)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = -7 \text{ (I)} \\ 2a_1 + 5a_2 = 3 \text{ (II)} \end{cases} \text{ de (I) temos, } a_1 = -7 - 3a_2 \text{ (I')}$$

Substituindo o I' em II

$$2(-7 - 3a_2) + 5a_2 = 3$$

$$-14 - 6a_2 + 5a_2 = 3 \Rightarrow \boxed{a_2 = -17}$$

$$a_1 = -7 - 3a_2 \Rightarrow a_1 = -7 - 3(-17) \Rightarrow \boxed{a_1 = 44}$$

Assim, $(-7,3) = 44(1,2) - 17(3,5)$

2) Seja $\beta = \{u, w\}$ sendo $u = (1,0)$, $w = (0,1)$ e considere $v = (x,y)$, pelo teorema 1.1

$$v = a_1 u + a_2 w$$

$$(x,y) = a_1 u + a_2 w \Rightarrow (x,y) = a_1 (1,0) + a_2 (0,1)$$

$$(x,y) = (a_1, a_2) \Rightarrow a_1 = x \text{ e } a_2 = y$$

Definição 1.6: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação (função), isto é, cada $u \in \mathbb{R}^2$ é associado por T , a um único elemento $T(u) \in \mathbb{R}^2$, dizemos que T é uma transformação linear ou operador linear, se são válidas as seguintes condições:

- i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$
- ii) $T(\alpha \cdot v) = \alpha T(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriedades:

Se T é uma transformação linear em $\mathbb{R}^2$, são validas as seguintes afirmações:

- a) $T(0,0) = (0, 0)$
- b) $T(-u) = -T(u)$, onde $-u$ indica o inverso aditivo de u e $-T(u)$ indica o inverso aditivo de $T(u)$ em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $-u + u = (0,0)$ e $-T(u) + T(u) = (0,0)$.

Demonstração:

- a) Fazendo $\mathbf{0} = (0,0)$ temos, $T(0+0) = T(\mathbf{0}) \Rightarrow T(0) + T(0) = T(0)$
 $\Rightarrow -T(0) + T(0) + T(0) = -T(0) + T(0) \Rightarrow T(\mathbf{0}) = 0$.

- b) Basta mostrar que $T(-u) + T(u) = 0$.
 $T(-u) + T(u) = T(-u + u) = T(0) = 0$.

Exercício 1.2: Provar que todo operador linear em $\mathbb{R}^2$ tem a forma

$$T(x,y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$$

Se T é um operador linear em $\mathbb{R}^2$, isto é, $T(x,y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$ podemos escrever sua forma matricialmente por $T(x,y) = [T] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ onde $[T] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ é denominada matriz do operador linear T .

Teorema 1.2: Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{u_1, u_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, então, existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = a_1 \cdot T(u_1) + a_2 \cdot T(u_2)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração: Seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{u_1, u_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, v é uma combinação linear de u_1, u_2 (Teorema 1.1), ou seja, existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2$, logo,

$$T(v) = (a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2) = T(a_1 \cdot u_1) + T(a_2 \cdot u_2) = a_1 \cdot T(u_1) + a_2 \cdot T(u_2). \blacksquare$$

O teorema 1.2 mostra que, se soubermos onde são levados os vetores de uma base β , pela transformação linear T , sabemos onde são levados todos os vetores de $\mathbb{R}^2$, isto é, podemos determinar T .

Exemplo 1.5:

Seja $\beta = \{(1,2), (3,5)\}$ e seja T uma transformação linear tal que : $T(1,2) = (0,3)$ e $T(3,5) = (1,4)$, usando os teoremas 1.1 e 1.2 obtemos $(x,y) = a_1 (0,3) + a_2 (1,4)$ e $T(x,y) = a_1 T(1,2) + a_2 T(3,5) \Rightarrow T(x,y) = (2x - y, -7x + 5y)$.

A seguir daremos alguns exemplos de operadores lineares:

1) Operador de semelhança :

$T_S(v) = kv$; onde $k > 0$. T_S leva cada vetor não-nulo v num vetor de mesmo sentido mas com módulo (comprimento) multiplicado por k . Observe que o vetor nulo é levado nele mesmo.

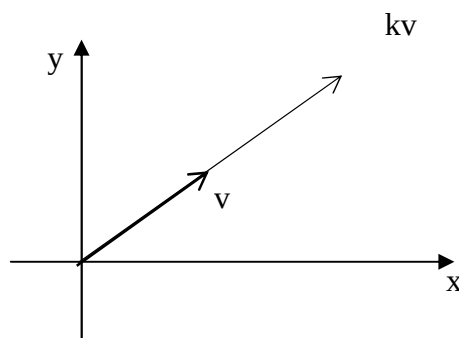


Figura 1.1

2) Operador de Rotação (de ângulo θ em torno da origem)

$T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, leva cada vetor v no vetor $T_\theta(v)$, obtido pela rotação de v , por um ângulo θ em torno da origem.

Seja $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, isto é $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, logo pelo teorema 1.1, existem $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $(x,y) = a \mathbf{e}_1 + b \mathbf{e}_2 \Rightarrow v = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2$, pelo teorema 1.2 temos que :

$$T_\theta(v) = x T_\theta(\mathbf{e}_1) + y T_\theta(\mathbf{e}_2) \quad (1.1)$$

Para encontrar T_θ , basta conhecer $T_\theta(\mathbf{e}_1)$ e $T_\theta(\mathbf{e}_2)$. Assim, através das figuras e utilizando razões no triângulo retângulo, obteremos $T_\theta(\mathbf{e}_1)$ e $T_\theta(\mathbf{e}_2)$.

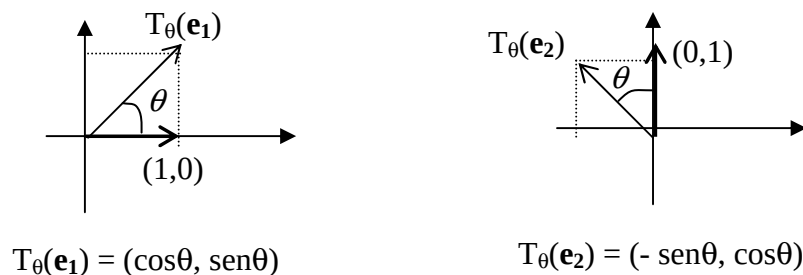


Figura 1.2

Substituindo em (1.1) obtemos :

$T(v) = x (\cos\theta, \text{sen}\theta) + y (-\text{sen}\theta, \cos\theta) = (x \cos\theta - y \text{sen}\theta, x \text{sen}\theta + y \cos\theta)$, logo para cada vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos um vetor

$T(v) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ onde :

$$\begin{cases} \overline{x} = x \cos \theta - y \text{sen} \theta \\ \overline{y} = x \text{sen} \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

Portanto $T(x,y) = (x \cos\theta - y \text{sen}\theta, x \text{sen}\theta + y \cos\theta) \Rightarrow$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3) Operador de Reflexão (em torno do eixo x)

- $T_R^x(x, y) = (x, -y)$. Se $y \neq 0$, então T_R reflete cada vetor (x, y) em torno do eixo dos x . Se $y = 0$, então o vetor é levado nele mesmo. Analogamente obtém-se $T_R^y(x, y) = (-x, y)$, translação em torno do eixo y

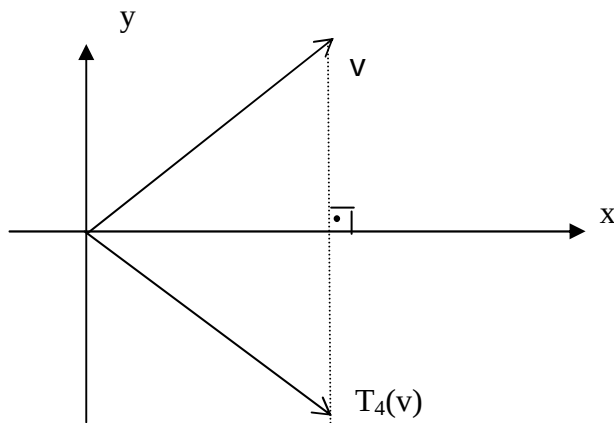


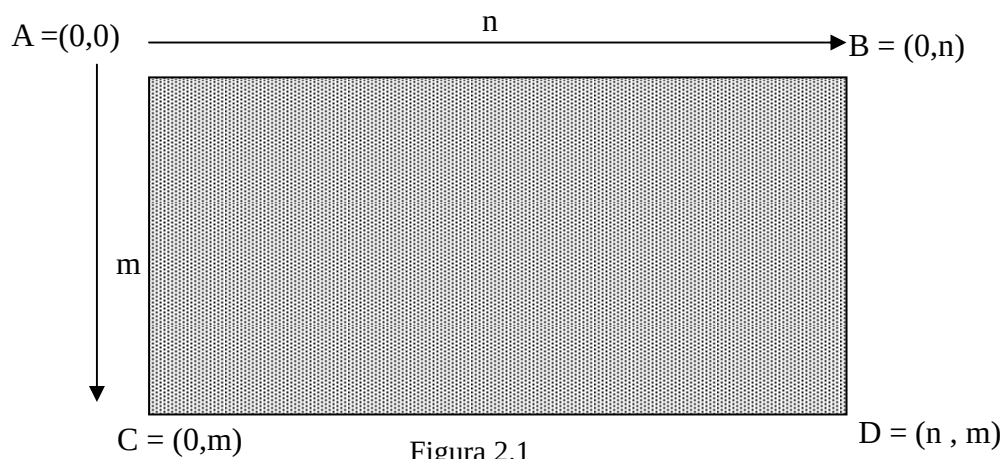
Figura 1.3

Capítulo 2

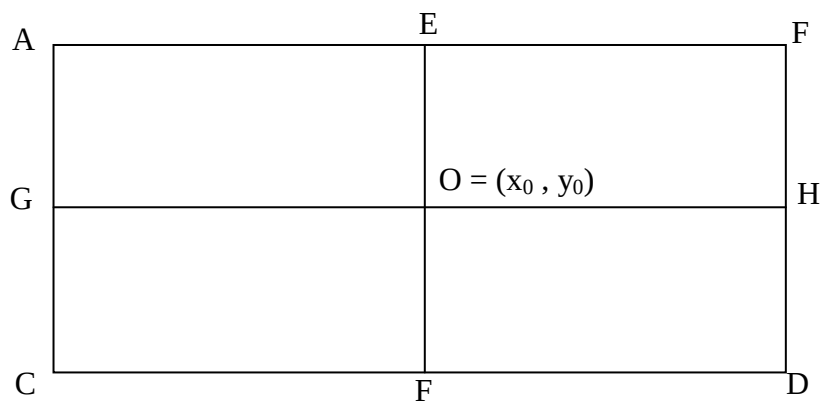
A Tela

Definição 1.1 : Denominamos *tela*($n \times m$) ao conjunto de pontos $(x,y) \in \{0,1,2,3,\dots,n\} \times \{0,1,2,3,\dots,m\} \subset \mathbb{R}^2$.

Representação Geométrica



Observe que o ponto $(0,0)$ localiza-se no canto superior esquerdo, e as coordenadas de abscissas e ordenadas crescem à direita e para baixo, respectivamente.



Fixando um número natural $k > 0$ (denominado escala), o conjunto de todos os pares

$$(x,y) \in \left[-\frac{n}{2k}, \frac{n}{2k} \right] \times \left[-\frac{m}{2k}, \frac{m}{2k} \right] \subset \mathbb{R}^2 \text{ denomina-se retângulo cartesiano } xy.$$

Criaremos um sistema de coordenadas cartesianas para a tela ($m \times n$) através de dois segmentos de retas $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, Sendo $E = \left(\left[\frac{n}{2} \right], 0 \right)$ e $F = \left(\left[\frac{n}{2} \right], m \right)$, $G = \left(0, \left[\frac{m}{2} \right] \right)$ e $H = \left(n, \left[\frac{m}{2} \right] \right)$, onde $[x]$ denota o maior inteiro menor que x , para $x \in \mathbb{R}$. Veja que a tela($m \times n$) é na verdade uma discretização do retângulo cartesiano.

Cada ponto (x, y) do retângulo cartesiano xy corresponde a um único ponto $(s, r) \in \text{tela}(m \times n)$ dada por $s = \left[kx + \frac{n}{2} \right]$ e $r = \left[-ky + \frac{m}{2} \right]$, Note que essa correspondência não é injetora, isto é, os pontos (s,r) da tela não estão associados a um único ponto (x,y) de xy .

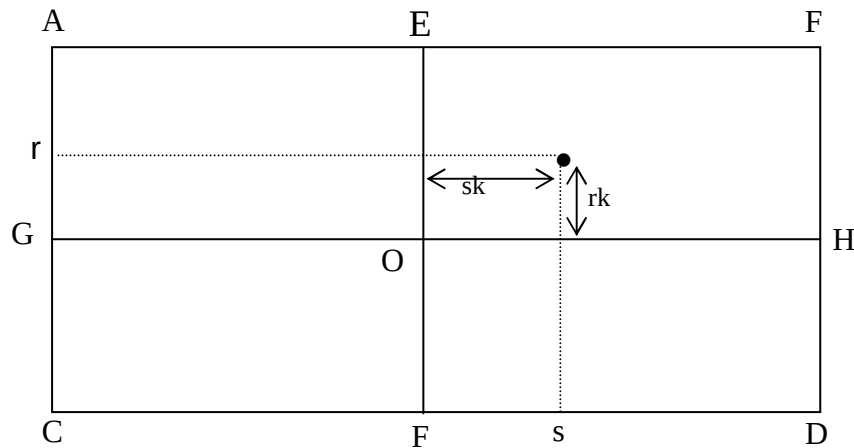


Figura 2.3

É fácil verificar que a transformação de um ponto (x,y) do retângulo cartesiano xy , num ponto (s,r) de tela($m \times n$) é um operador linear, que denominaremos **operador de tela**, isto é, o operador $T(x, y) = \left(\left[kx + \frac{n}{2} \right], \left[-ky + \frac{m}{2} \right] \right)$

Exemplo 2.1: Considere a tela (205 x 105) e seja $k = 10$ a escala, logo o retângulo cartesiano é dado por $\left[-\frac{41}{4}, \frac{41}{4}\right] \times \left[-\frac{21}{4}, \frac{21}{4}\right]$. Em cada item iremos encontrar o ponto de tela (205 x 105), correspondente ponto (x, y) dado, do retângulo cartesiano.

a) $(1,1) \equiv (s,r)$

$$s = \left[10 \cdot 1 + \frac{205}{2} \right] = 112$$

$$r = \left[-10 \cdot 1 + \frac{105}{2} \right] = 42$$

$$\therefore \boxed{(1,1) \equiv (112, 42)}$$

b) $(-2, 1/3) \equiv (s,r)$

$$s = \left[10 \cdot (-2) + \frac{205}{2} \right] = 82$$

$$r = \left[-10 \cdot \frac{1}{3} + \frac{105}{2} \right] = 49$$

$$\therefore \boxed{(-2, 1/3) \equiv (82, 49)}$$

b) $(-\sqrt{3}, \pi) \equiv (s,r)$

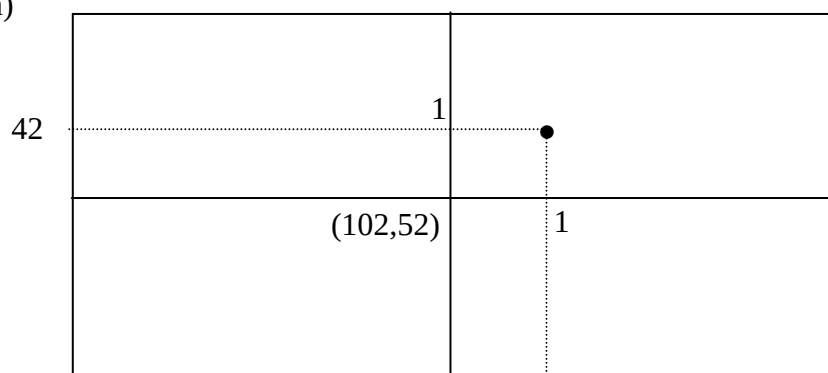
$$s = \left[10 \cdot (-\sqrt{3}) + \frac{205}{2} \right] = 85$$

$$r = \left[-10 \cdot \pi + \frac{105}{2} \right] = 21$$

$$\therefore \boxed{(-\sqrt{3}, \pi) \equiv (85, 21)}$$

A representação geométrica de cada ponto do exemplo 2.1 é dada por :

a)



$$\boxed{(1,1) \equiv (112,42)}$$

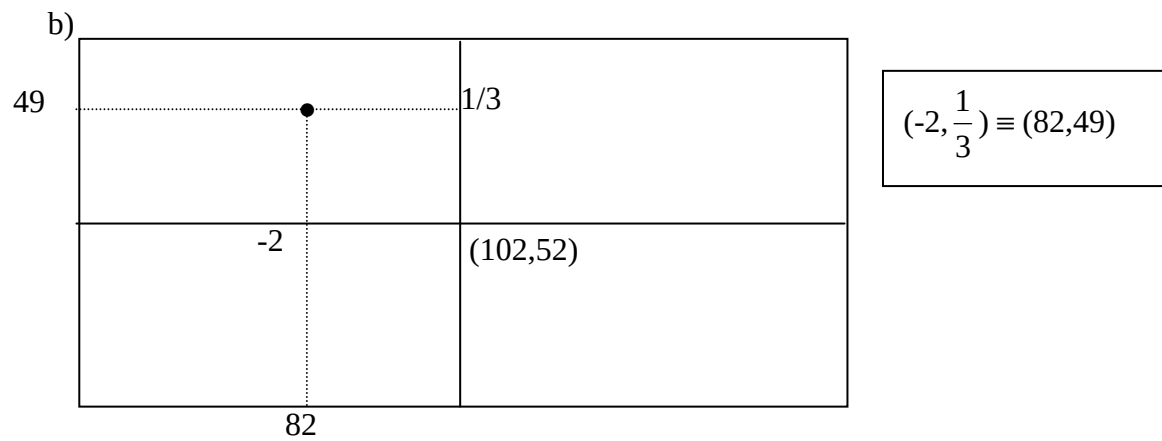


Figura 2.5

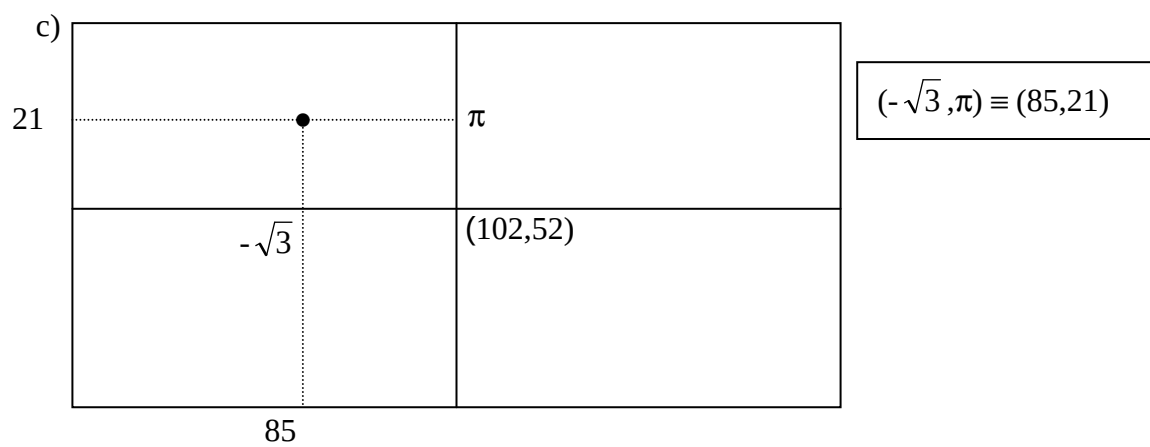


Figura 2.6

Capítulo 3

Construção de Curvas no Plano

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq \lambda < a + 1$ com $a \in \mathbb{Z}$. Decorre direto da definição de $[\lambda]$ que:

$$[\lambda] = a$$

Os infinitos valores reais (racionais e irracionais) de λ geram apenas a coordenada $a = [\lambda]$ da tela, logo um único valor $\lambda_0 \in [a, a+1[$ tem interesse na representação de tela e os outros infinitos valores podem ser desprezados, por gerar o mesmo valor de tela que λ_0 .

Teorema 3.1: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, o intervalo $[a, b]$ possui exatamente N números inteiros, onde:

$$N = \begin{cases} [b] - [a], & \text{se } a \notin \mathbb{Z} \\ [b] - [a] + 1, & \text{se } a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Demonstração:

Se $a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [a] + 1$ é o primeiro inteiro do intervalo $[a, b]$ e o último é $[b]$, assim, os números inteiros de $[a, b]$ são: $[a] + 1, [a] + 2, \dots, [b]$. Se N indica a quantidade de termos dessa seqüência,

$$N = [b] - ([a] + 1) + 1 = [b] - [a], \text{ e isso mostra o primeiro caso.}$$

Se $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = [a]$ é o primeiro inteiro de $[a, b]$, isto é, apenas um inteiro a mais que no caso anterior, logo

$$N = [b] - [a] + 1 \quad \blacksquare$$

Definição 3.1: Denominamos curva no plano, qualquer função $C: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, uma lei que associa a cada número real $t \in [a, b]$ um único ponto $C(t) = (x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.1

- i) $C(t) = (3t, t^2), -2 \leq t \leq 2,$
- ii) $C(t) = (\sin t, \cos t), \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi$
- iii) $C(t) = (t, \ln(t)) \text{ com } 1 \leq t \leq 5.13$

Definição 3.2: Seja $C:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva no plano, denominamos traço da curva C ao conjunto:

$$\text{Tr}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid C(t) = (x,y), \text{ para algum } t \in [a,b]\}.$$

Por conveniência, muitas vezes chamaremos o traço de uma curva, simplesmente por curva.

Considere uma tela $(m \times n)$, e $k \neq 0$ um número real (escala) e seja C uma curva no plano, onde $C(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, se

$$C(t) \in \left[-\frac{n}{2k}, \frac{n}{2k} \right] \times \left[-\frac{m}{2k}, \frac{m}{2k} \right] \text{ podemos aplicar o operador de tela } T \text{ na curva } C \text{ e}$$

obter:

$$T(C(t)) = T(x(t), y(t)) = (s(x(t)), r(y(t))) \quad a \leq t \leq b, \text{ uma curva de tela } (m \times n),$$

determinada por C e denotada por $\overline{C}$.

$$\text{Onde: } \begin{cases} s(x(t)) = \left[kx(t) + \frac{n}{2} \right] \\ r(y(t)) = \left[-ky(t) + \frac{m}{2} \right] \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

Teorema 3.2: Seja $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $A = \{ [f(t)] \mid a \leq t \leq b \}$, então existem $t_1, t_2, \dots, t_N \in [a,b]$ tais que $A = \{ [f(t_1)], [f(t_2)], \dots, [f(t_N)] \}$

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$ (fechado e limitado) então f possui máximo e mínimo M e m , respectivamente (Teorema de máximos e mínimos), logo $m \leq f(t) \leq M \Rightarrow m-1 \leq [f(t)] \leq M, \forall t \in [a,b] \Rightarrow A \subset [m-1, M]$, como os elementos de A são inteiros, pelo teorema 3.1 A é um conjunto finito, daí concluímos a demonstração. ■

Considere $\bar{C}(t) = (s(t), r(t))$, $t \in [a, b]$ uma curva da tela $(m \times n)$ determinada por C , assim, se $x(t)$ e $y(t)$ são contínuas então $kx(t) + \frac{n}{2}$ e $-ky(t) + \frac{m}{2}$

também o são e pelo teorema 3.2 existem $t_1, t_2, \dots, t_p$ e $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_q \in [a, b]$ tais que :

$$\{s(t) \mid a \leq t \leq b\} = \{s(t_i) \mid i = 1, 2, \dots, p\}$$

$$\{r(t) \mid a \leq t \leq b\} = \{r(\bar{t}_j) \mid j = 1, 2, \dots, q\}.$$

em outras palavras, podemos gerar a curva $C(t)$ através de uma variação finita para t em s e r , isto é

$$C(t) = (s(t_i), r(\bar{t}_j)), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{e} \quad j = 1, 2, 3, \dots, q$$

Considere v_i e $\bar{v}_j$ as variações de t_i e $\bar{t}_j$, respectivamente, ou seja,

$$t_{i+1} = t_i + v_i$$

$$\bar{t}_{j+1} = \bar{t}_j + \bar{v}_j$$

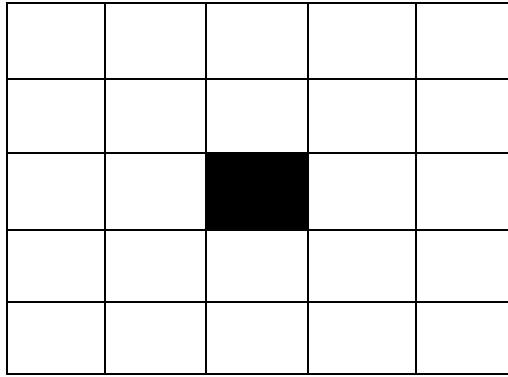
Falta descobrir como se calcula v_i e $\bar{v}_j$. Para isso podemos olhar a tela $(m \times n)$ como uma matriz e cada ponto da tela $(s(t_i), r(\bar{t}_j))$ é na verdade um preenchimento do campo da matriz, como, ilustra a figura 3.1 .

		$s(t_i)$		
$r(\bar{t}_j)$				

Figura 3.1

Daí, uma curva contínua na tela $(m \times n)$ é composta por pontos com representações adjacentes (horizontalmente, verticalmente ou diagonalmente), logo, se o ponto $(s(t_i), r(\bar{t}_j))$ já foi representado na tela $(m \times n)$ o próximo ponto $(s(t_{i+1}), r(\bar{t}_{j+1}))$ deve ser um dos pontos indicados por 1,2,3,4,5,6,7 ou 8 na figura 3.2 .

$$s(t_i)$$



Para que ocorra uma das oito possibilidades, é necessário e suficiente que um dos itens seja satisfeito:

$$(3.1) \begin{cases} i) \quad |s(t_{i+1}) - s(t_i)| = 1 \text{ e } |r(\bar{t}_{j+1}) - r(\bar{t}_j)| = 1 \text{ (posição 2, 4, 6 ou 8)} \\ ii) \quad |s(t_{i+1}) - s(t_i)| = 1 \text{ e } |r(\bar{t}_{j+1}) - r(\bar{t}_j)| = 0 \text{ (posição 3 ou 7)} \\ iii) \quad |s(t_{i+1}) - s(t_i)| = 0 \text{ e } |r(\bar{t}_{j+1}) - r(\bar{t}_j)| = 1 \text{ (posição 1 ou 5)} \end{cases}$$

Os três itens acima indicam um, e apenas um, deslocamento na direção de s ou r ou ambas. Tomando,

$$v_i = \frac{1}{\lambda} \text{ e } \bar{v}_j = \frac{1}{\bar{\lambda}}, \text{ onde } \lambda \text{ e } \bar{\lambda} \in \mathbb{N}^*. \text{ teremos:}$$

$$\begin{cases} t_1 = \bar{t}_1 = a \\ t_p = \bar{t}_q = b \\ t_{i+1} = t_i + v_i = t_i + \frac{1}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, p-2 \\ \bar{t}_{j+1} = \bar{t}_j + \bar{v}_j = \bar{t}_j + \frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad j = 1, 2, \dots, q-2 \end{cases}$$

escolhemos λ e $\bar{\lambda}$ como os primeiros naturais que satisfaz apenas uma, das condições de (3.1) e assim poderemos construir a curva em toda tela ($m \times n$) com uma escala fixa k .

Capítulo 4

Movimento de Curva Planas via Transformações Lineares

Um movimento de uma curva plana é simplesmente a alteração dos pontos da curva em forma organizada, ou seja, mudando cada ponto para uma nova posição estabelecendo uma lei, que preserva o formato original da curva e suas medidas, em relação ao tamanho da tela (m x n).

Para formalizar melhor essa idéia, iremos introduzir o conceito de isometria e mostrar que algumas transformações lineares, que definiremos, são exemplos de isometrias.

Definição 4.1.: Uma isometria em $\mathbb{R}^2$ é uma função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distâncias, isto é, dados os pontos $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e considerando

$$T(u) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) \text{ e } T(v) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \text{ tem-se } d(u, v) = d(T(u), T(v))$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}$$

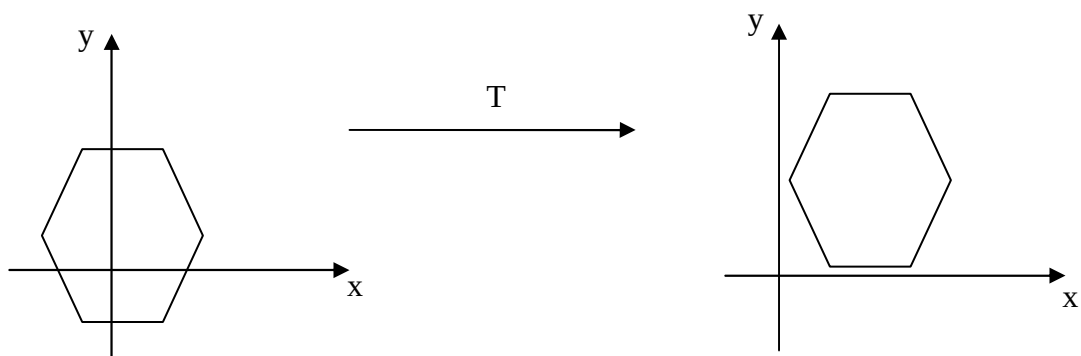


Figura 4.1

Definição 4.2.: Seja $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria, dizemos que uma curva $C' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um movimento de C pela isometria T , se $T(C) = C'$.

Exemplo 4.1.: Seja a translação $T_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_t(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. T_t é uma isometria, de fato, dados:

$$\begin{aligned} u = (x_1, y_1) \text{ e } v = (x_2, y_2) &\Rightarrow T_t(u) = T_t(x_1, y_1) = (x_1 + x_0, y_1 + y_0) \text{ e } \\ T_t(x_2, y_2) &= (x_2 + x_0, y_2 + y_0) \Rightarrow d(T_t(u), T_t(v)) = d((x_1 + x_0, y_1 + y_0), \\ &(x_2 + x_0, y_2 + y_0)) \\ &= \sqrt{[x_1 + x_0 - (x_2 + x_0)]^2 + [y_1 + y_0 - (y_2 + y_0)]^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(u, v). \blacksquare \end{aligned}$$

Considere a curva C , dada por $C(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $a \leq t \leq b$. Aplicando a transformação T_t em C , obtemos:

$T_t(C(t)) = T_t(r \cos t, r \sin t) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0)$, isto é $C'(t) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0)$ é um movimento da curva C por T_t .

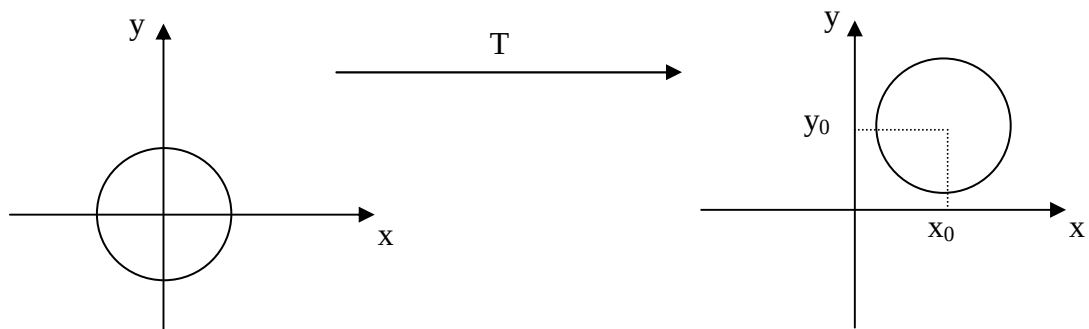


Figura 4.2

Observe que a isometria T dada no exemplo 4.1 é um *operador linear translação*, mas nem todos os *operadores lineares são isometrias*, por exemplo, o operador de semelhança.

Veremos a seguir algumas transformações lineares que produzem movimento no plano, ou seja, são isometrias.

1. Translação

Como foi visto no exemplo 4.1, uma translação (x_0, y_0) é a isometria definida por $T_t(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$.

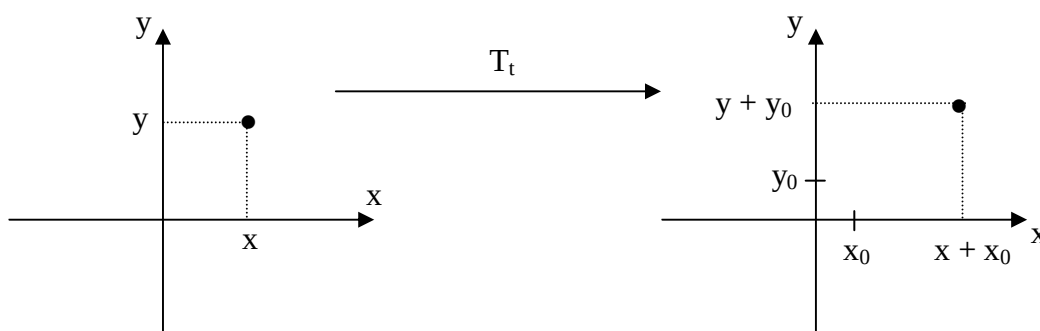


Figura 4.3

2. Rotação

Foi visto no capítulo 1 o operador de rotação em torno da origem, denotado por T_θ .

A inversa da translação $T_t(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$ é $T_t^{-1}(x, y) = (x - x_0, y - y_0)$.

De fato,

$(T_t T_t^{-1})(x, y) = T_t(T_t^{-1}(x, y)) = T_t(x - x_0, y - y_0) = ((x - x_0) + x_0, (y - y_0) + y_0) = (x, y)$
da mesma forma,

$(T_t^{-1} T_t)(x, y) = (T_t^{-1}(T_t(x, y))) = T_t^{-1}(x + x_0, y + y_0) = T_t(x + x_0) - x_0, (y + y_0) - y_0 = (x, y)$.

Quando aplicamos a T_t^{-1} num ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, estamos deslocando os valores de x e y , para posições opostas a de x_0 e y_0 na direção do eixo x e y respectivamente, pensando desta forma o ponto (x_0, y_0) é deslocado para a origem do sistema cartesiano.

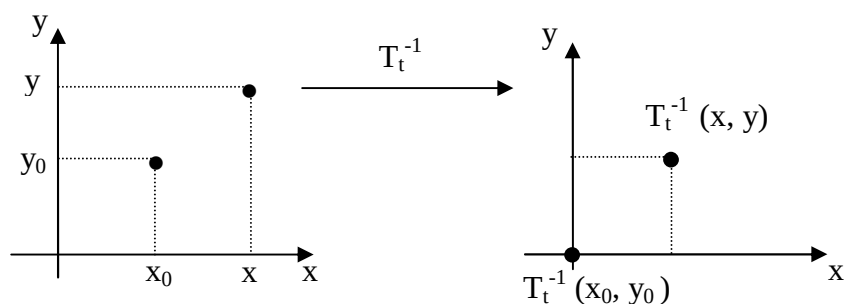


Figura 4.4

Aplicando , em seguida, a transformação de rotação (em torno da origem), vista no capítulo 1, ou seja , $T_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, obtemos

$T_\theta = (T_t^{-1}(x, y)) = T_\theta = (x - x_0, y - y_0) = ((x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta, (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta)$, isto é $(T_\theta T_t^{-1})(x, y) = ((x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta, (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta)$. Essa aplicação nos dá a rotação do ponto $T_t^{-1}(x, y)$ em relação a origem caracterizada por $T_t^{-1}(x_0, y_0)$, isto é, em outra posição do sistema cartesiano original, como mostra a figura 4.5.

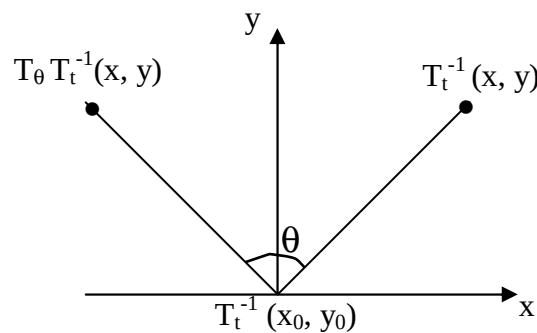
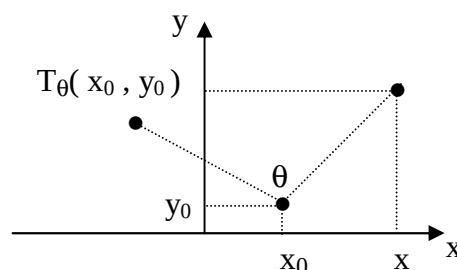


Figura 4.5

Para voltarmos à posição original, isto é retirar a translação feita por T_t^{-1} , basta aplicar a transformação T_t , assim obtemos:

$$T_t(T_\theta(T_t^{-1}(x, y))) = (x_0 + (x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta, y_0 + (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta).$$

Essa transformação, que denotaremos por $T_\theta^{(x_0, y_0)}$ faz a rotação de qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em torno do ponto (x_0, y_0) , e ela é caracterizada pela composição das transformações de rotação e translação em relação à origem.



Observe que para $(x_0, y_0) = (0, 0)$ obtemos $T_\theta(x_0, y_0) = T_\theta$. O fato de que $T_\theta(x_0, y_0)$ é uma isometria no plano decorre imediato do fato dela ser composições de isometrias, assim, basta provar que a composição de duas isometrias é uma isometria, e isso fica como exercício para o leitor.

3. Reflexão:

No Capítulo 1 vimos que a reflexão em torno dos eixos x e y são dadas por $T_R^x(x, y) = (x, -y)$ e $T_R^y(x, y) = (-x, y)$, respectivamente. Agora construiremos a transformação de reflexão T_R^r em torno de uma reta $r: ax + by + c = 0$.

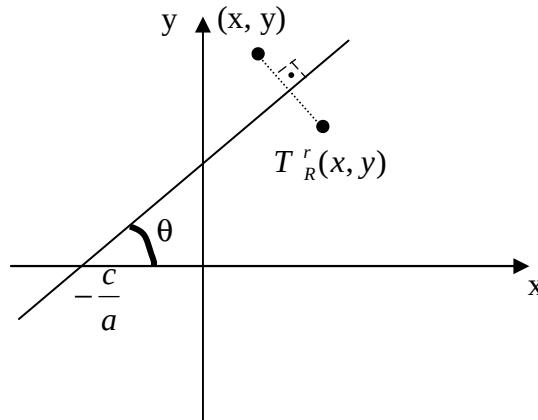


Figura 4.7

Observe que $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ é um ponto da reta r .

A transformação inversa de $T_\theta(x_0, y_0)$ é $T_{-\theta}(x_0, y_0)$ de fato,

$$T_\theta(x_0, y_0) \cdot T_{-\theta}(x_0, y_0) = (T_t T_\theta T_t^{-1})(T_t T_\theta T_t^{-1}) = T_t T_\theta T_{-\theta} T_t^{-1} = e$$

$$T_{-\theta}(x_0, y_0) \cdot T_\theta(x_0, y_0) = (T_t T_\theta T_t^{-1})(T_t T_\theta T_t^{-1}) = T_t T_{-\theta} T_\theta T_t^{-1} = e$$

para concluir, basta mostrar que $T_{-\theta}$ é a inversa de T_{θ} .

$$\begin{aligned} (T_{\theta} T_{-\theta})(x, y) &= (T_{\theta} T_{-\theta})(x, y) = T_{\theta}(T_{-\theta}(x, y)) = T_{\theta}(x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta), x \sin(-\theta) + y \cos(-\theta)) = \\ &= T_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) = ((x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \theta - (-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \theta, \\ &= (x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \theta + (-x \sin \theta + y \cos \theta) \cos \theta) = (x \cos^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta + x \sin^2 \theta - y \cos \theta \sin \theta, \\ &= x \cos \theta \sin \theta + y \sin^2 \theta - x \sin \theta \cos \theta + y \cos^2 \theta) = (x, y) \end{aligned}$$

para $(T_{-\theta} T_{\theta})(x, y) = (x, y)$ a demonstração é análoga.

Aplicando $T_{-\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)}$ nos pontos de r , obteremos uma rotação de r em torno do ponto

$\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ no sentido horário, isto leva a reta r a coincidir com o eixo x .

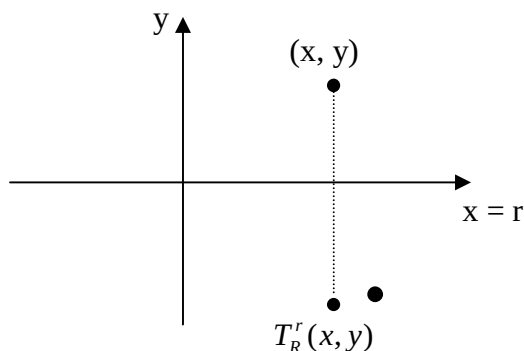


Figura 4.8

Em seguida obtemos T_R^r (reflexão em torno da reta r) através da reflexão T_R^x (reflexão em torno do eixo x). Faltava agora voltar a reta a inclinação original, juntamente com o ponto (x_0, y_0) , para isso basta aplicar a rotação $T_{\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)}$, isto é a inversa de $T_{-\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)}$, sem alterar a reflexão feita.

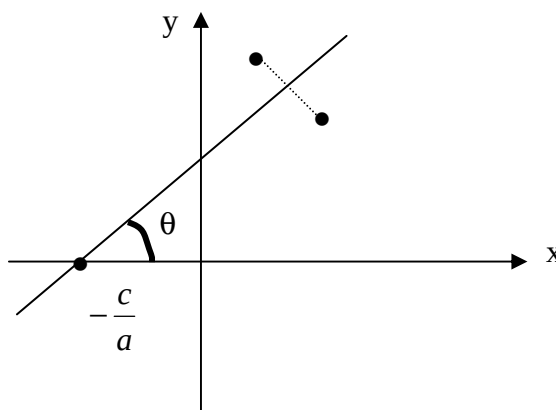


Figura 4.9

Portando,

$$T_R^r = T_{\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)} T_R^x T_{-\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)}, \text{ isto é,}$$

$$T_R^r(x, y) = T_{\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)} (T_R^x (T_{-\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)} (x, y)))$$

$$= T_{\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)} (T_R^x (-\frac{c}{a} + (x + \frac{c}{a}) \cos \theta + y \sin \theta, -(x + \frac{c}{a}) \sin \theta + y \cos \theta)) =$$

$$T_{\theta}^{(-\frac{c}{a}, 0)} (-\frac{c}{a} + (x + \frac{c}{a}) \cos \theta + y \sin \theta, (x + \frac{c}{a}) \sin \theta - y \cos \theta) =$$

$$(-\frac{c}{a} + (x + \frac{c}{a}) \cos^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta - (x + \frac{c}{a}) \sin^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta,$$

$$(x + \frac{c}{a}) \sin \theta \cos \theta + y \sin^2 \theta + (x + \frac{c}{a}) \sin \theta \cos \theta - y \cos^2 \theta) =$$

$$(-\frac{c}{a} + (x + \frac{c}{a}) \cos 2\theta + y \sin 2\theta, (x + \frac{c}{a}) \sin 2\theta - y \cos 2\theta).$$

Sendo: $a \neq 0$, $\theta = \arctg(-\frac{a}{b})$ para $b \neq 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$

Veremos agora o caso $a = 0$

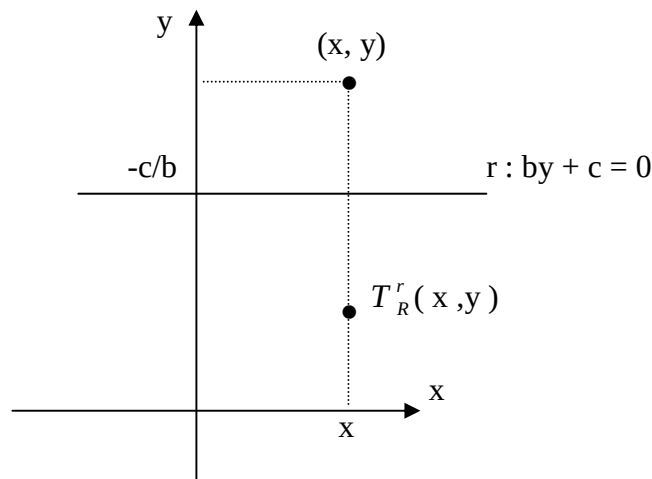


Figura 5.1

Pela figura 5.1 vemos que a reflexão mantém x fixo e faz uma translação em y , dada por : $y - 2 (y + c/b) = y - 2y - 2c/b = -y - 2c/b$,

Portanto,

$$T_R^r(x, y) = \begin{cases} (x, -y - 2\frac{c}{b}), & \text{se } a = 0 \\ (-\frac{c}{a} + (x + \frac{c}{a})\cos 2\theta + y\sin 2\theta, (x + \frac{c}{a})\sin 2\theta - y\cos 2\theta), & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

Onde: $\theta = \arctg(\frac{-a}{b})$, se $b \neq 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, se $b = 0$

A partir de composições das transformações de translação e rotação em torno da origem, construímos transformações de rotação em torno de um ponto (x_0, y_0) e a reflexão em torno de uma reta qualquer, assim podemos constatar que um movimento no plano pode ser visto como composições simultâneas dessas transformações. Neste caso um algoritmo de movimentos de curvas pode ser facilmente implementado, fazendo apenas chamadas simultâneas das funções de rotação e translação em torno da origem.