PARTE III

2.6 – Métodos Numéricos para Encontrar Raiz de Uma Equação

Até o momento introduzimos conceitos que nos possibilite fazer uma análise da equação a respeito da existência, números possíveis de raízes para certas equações, etc. Agora, estabeleceremos métodos numéricos para encontrar uma aproximação para cada raiz com uma precisão $\in$ estabelecida, denominada tolerância. Todos os métodos baseiam-se em uma aproximação inicial que pode ser escolhida de acordo com a análise e o isolamento da raiz.

Definição 2.7

Seja α uma raiz real da equação f(x) = 0, e $\in > 0$ um número real, dizemos que x_n é um número real aproximação de α com tolerância ϵ, se uma das três condições for satisfeitas:

i) $| x_n - \alpha | < \in$

ii) $\dfrac{| x_n - \alpha |}{|\alpha|} < \in$

iii) $| f(x_n) | < \in$

Definição 2.8

Dizemos que uma seqüência de números reais $x_0, x_1, x_2, ..., x_n,...$ converge para uma raiz $\alpha \in R$, se $\in > 0$ existir um inteiro n tal que um dos critérios da Definição 2.7 for satisfatória.

A Definição 2.7 estabelece critérios para medir a precisão de uma aproximação x_n para uma raiz α. É necessário escolher um dos critérios descritos para a aplicação de um método numérico. Observe que $| x_n - \alpha | < \in$ e $\dfrac{| x_n - \alpha |}{|\alpha|} < \in$ são, respectivamente, o erro absoluto e relativo cometido ao se tomar x_n por α, de acordo com o que foi estudado no capítulo 1. Assim, a tolerância $\in$ estabelecerá o erro máximo permitido.

Considere a equação $\frac{1}{10}\ln x = 0$ que tem como única raiz real o número α = 1, porém se tomarmos $x_n = 1000$ temos $|f(x_n)| = |1000| \cong 0{,}0000000007$ que é um valor pequeno mas 1000 não é uma boa aproximação para a raiz α = 1, isso mostra que o item iii') não é uma boa maneira de estimar uma aproximação para a raiz.

Nosso objetivo é encontrar uma boa aproximação para a raiz α, isso significa que em geral ao valor de α não conhecido e não temos um método eficiente para encontrá-lo. Assim, nenhum dos itens de Definição 2.7 poderá ser aplicado para analisar a precisão de certa aproximação. Neste caso, usamos em seu lugar as seguintes condições:

i') $| x_{n+1} - x_n | < \in$

ii’) $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n|} < \in$

As condições i’) e ii’) medem com uma boa precisão a aproximação que x_{n+1} se encontra de α, quando tomamos n suficientemente grande. Mesmo para n não muito grande, podemos observar o comportamento da seqüência x_0, x_1, ..., em termo da sua aproximação ou não de α, e com que velocidade se dá essa aproximação, quando for o caso.

A seguir descreveremos alguns métodos conhecidos para produzir uma aproximação para a raiz α com uma tolerância ∈.

2.6.1 Método da Bisseção

Seja f uma função contínua em um intervalo [a, b], de acordo com o Teorema 2.1 se f(a)·f(b) < 0 a equação f(x) = 0 tem raiz real no intervalo [a, b]. Admitindo que α seja a única raiz de f(x) = 0, no intervalo [a, b], descreveremos a seguir o *Método da Bisseção* para o cálculo de uma aproximação de α com tolerância ∈.

Este método baseia-se na utilização do intervalo [a, b] para determinar uma seqüência de subintervalos [a, b], n = $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$,..., todos contendo α. Uma aproximação de α poderá ser qualquer número $x_n \in$ [a, b] tal que um dos critérios estabelecidos na Definição 2.7 seja satisfeito. Como já citamos anteriormente, pelo desconhecimento α usaremos um dos seguintes critérios:

$$| a_n - b_n | < \in \text{ ou } \frac{| a_n - b_n |}{| a_n |} < \in \qquad (2.2)$$

A discursão desses critérios refere-se a convergência dos métodos eabordada futuramente.

O processo se inicia tomando $[a_0, b_0]$ = [a, b], em seguida tomamos o x_0 como o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$, isto é, $x_0 = (a_0 + b_0)/2$ e calculamos $f(x_0)$. Se $f(a_0)\cdot f(x_0)<0$ então $\alpha \in [a_0, x_0]$ e tomamos $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$, caso contrário $\alpha \in [x_0, b_0]$ e tomamos $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$. Assim, obtemos um novo intervalo $[a_1, b_1]$ contendo α, cujo comprimento é metade do intervalo $[a_0, b_0]$ = [a, b]. Repetimos o processo com o intervalo $[a_1, b_1]$ e com todos os outros intervalos obtidos, até produzirmos uma seqüência de intervalos $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$,..., $[a_n, b_n]$,..., onde o comprimento de cada um, a partir de $[a_1, b_1]$, é metade do comprimento intervalo anterior. O processo termina quando tivermos um intervalo $[a_n, b_n]$ satisfazendo um dos critérios de (2.2).

EXEMPLO 26

Vamos encontrar uma raiz para equação $e^x - x^2 + 1 = 0$ com uma tolerância ∈ = 0,3, sobre o critério $| a_n - b_n | < \in$.

Pelo método gráfico podemos constatar que essa equação possui uma única raiz no intervalo [-2,-1], logo $[a_0, b_0]$ = [-2, -1]. O ponto médio desse intervalo é $x_1 = \frac{(-2-1)}{2}$ = -1,5. Calculando $f(x_0)$ temos, f(-1,5) ≅ -1,026869839 isso implica que f(-1,5)·f(-1) < 0, pois f(-1) ≅ 0,3678794411. Encontramos $[a_1, b_1]$ = [-1; -1,5] onde $| a_1 - b_1 |$ = 0,5 > ∈.

Repetimos o processo e calculamos o ponto médio de $[a_1, b_1]$, $x_2 = \frac{(-1{,}5-1)}{2}$ = -1,25. f(-1,25) ≅ -0,2759952031 e f(-1)·f(-1,25) < 0, obtemos então $[a_2, b_2]$ = [-1; -1,25], com $|a_2 - b_2| = 0{,}25 < \in$. Portanto, qualquer número do intervalo [-1; -1,25] é uma aproximação da raiz α com tolerância ∈ = 0, 3. Podemos tomar o próprio x_n = -1,25, x_2 = -1,25 como uma aproximação para α

Para facilitar o entendimento e a execução do método da bisseção, iremos descrevê-lo sempre através de uma tabela. A tabela 2.1 é uma descrição do Exemplo 26.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert a_n - b_n \rvert$
0	-2	-1	-1.5	-1,026869839	1
1	-1,5	-1	-1,25	-0.275995203	0,5
2	-1,25	-1	-	-	0,25

Tabela 2.1 – Aplicação do Método da Bisseção

Teorema 2.8 (Convergência do Método da Bisseção)

Seja f uma função contínua em [a, b], se α é a única raiz de f(x) = 0 no intervalo (a, b), então seqüência de números reais x_n, produzida pelo Método da Bisseção, converge para α.

Demonstração

Fazendo $[a, b] = [a_0, b_0]$, temos $x_0 = \frac{b_0 + a_0}{2}$.

$$|\alpha - x_0| < b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Como $x_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}$, temos:

$$|\alpha - x_1| < b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

E assim como, $x_n = \frac{b_n + a_n}{2}$ temos,

$$|\alpha - x_n| < b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

Observe que $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \to 0$ quando $n \to \infty$, logo x_n se aproxima de α quando n é suficientemente grande. Isto é, dado um número real ∈ > 0, encontramos um inteiro n > 0, tal que $|\alpha - x_n| < \in$. Com efeito, como $|\alpha - x_n| < \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$ é suficiente mostrar que existe n tal que $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \in$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \in \;\Leftrightarrow\; \frac{b_0 - a_0}{\in} \leq 2^{n+1} \Leftrightarrow$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros, obtemos:

$$\ln\frac{b_0 - a_0}{\in} \leq \ln(2^{n+1}) \Leftrightarrow \ln\frac{b_0 - a_0}{\in} \leq (n + 1)\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\ln\frac{b_0 - a_0}{\in}}{\ln 2} - 1 \qquad (2.3)$$

Portanto, basta tomar n como o primeiro inteiro satisfazendo a expressão (2.3) para termos $|\alpha - x_n| < \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \in$ ■

2.6.2 Método das Secantes

Este método produz uma seqüência de aproximações x_0, x_1,..., x_n,... para uma raiz α dessa equação. Devemos admitir que f(x) é contínua em [a,b] e que α é a única raiz da equação f(x) = 0 nesse intervalo.

Iniciamos tomando [a, b] = [x_0, x_1], isto é, x_0 = a, x_1 = b; x_2 é obtido pela intersecção da reta determinada pelos pontos (x_0, f(x_0)) e (x_1, f(x_1)) com o eixo x. De modo análogo encontramos x_3, pela intersecção da reta determinada pelos pontos (x_1, f(x_1)) e (x_2, f(x_2)) com o eixo x. Repetindo o processo produzimos a seqüência x_0, x_1,..., x_n,... como mostra a Figura 2.14.

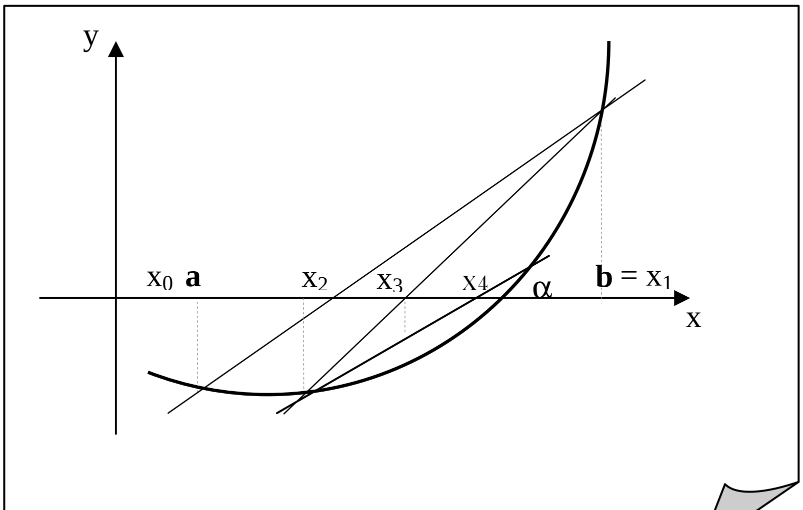

Figura 2.14. Método das Secantes

Considere os pontos (x_{n-1}, f(x_{n-1})) e (x_n, f(x_n)) obtidos após n aplicações do procedimento descrito anteriormente. Encontraremos x_{n+1} pela intersecção da reta r, determinada por (x_{n-1}, f(x_{n-1})) e (x_n, f(x_n)) com o eixo x.

A reta r, isto é, a reta determinada pelos pontos (x_{n-1}, $f(x_{n-1})$) e (x_n, $f(x_n)$) é dada por:

$$r:\ y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

A intersecção de r com o eixo x é feita tomando $y = 0$ e $x = x_{n+1}$. Fazendo isso obtemos:

$$-f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) \Leftrightarrow$$

$$x_{n+1} - x_n = -f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Portanto,

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 1, 2, \ldots}$$

EXEMPLO 27

Encontre uma solução aproximada para a equação $x^3 - \ln(-x) = 0$, com tolerância 10^{-2}.

Solução

Pelo método gráfico vemos que a equação dada tem uma única raiz real e se encontra no intervalo [-1, 0]. Como verificação, calculamos $(f(-1) = -1 \times \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty) = -\infty$.

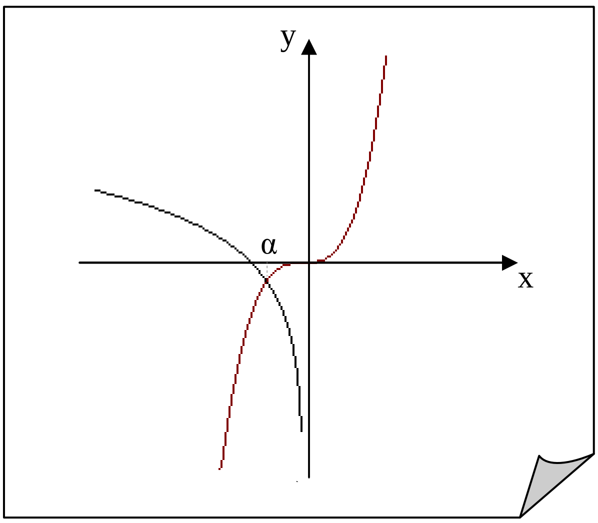

Figura 2.15. Utilização do Método Gráfico

Como a função $f(x) = x^3 - \ln(-x)$ não está definida em [-1, 0], podemos tomar um intervalo aproximado desse, mas com o cuidado de que a raiz ainda permaneça nele, como por exemplo, o intervalo [-1; 0,1].

Aplicando o método das secantes, temos: $x_0 = -1$, $x_1 = 0,1$ e

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 0,1 - f(-0,1)\ \frac{-0,1-(-1)}{f(-0,1)-f(-1)} = -0,7274036638$$

Utilizando uma estimativa para erro dada por i'), isto é, $E_n = | x_{n+1} - x_n |$, temos

$$E_2 \cong 0,6274036638$$

Como $E_2 > \in = 10^{-2}$ repetimos o processo para $x_3, x_4, ..., x_n$, com $E_n \le 10^{-2}$. A Tabela 2.2 mostra o todo o processo descrito.

n	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{f(x_n)}$	$\mathbf{f(x_{n+1})-f(x_n)}$	$\mathbf{E_n}$
0	-1	-1	-	-
1	-0,1	2,3015851	3,3015851	0,9
2	-0,7274037	-0,0666074	-2,3681924	0,6274036
3	-0,7097574	-0.0147122	0,0518952	0,0176463
4	-0,7047547			0,0050027

Tabela 2.2. Utilização dos Método das Secantes

Portanto, uma aproximação para a raiz da equação dada é $x_4 = -0,7047547$, com erro estimado, em $E_4 \cong 0,0050027$.

2.6.3 Método de Newton

O método de Newton é parecido com o método das Secantes, porém ao invés de tomarmos retas secantes, isto é, retas que passam por dois pontos do gráfico de f, tomamos retas tangentes ao gráfico de f, em cada ponto $(x_i, f(x_i))$, i = 0, 1, ... , onde o valor inicial x_0 deve ser bem escolhido e, para cada x_n conhecido encontramos x_{n+1} pela intersecção da reta tangente a $(x_n,f(x_n))$ com o eixo x. A figura 2.16 mostra geometricamente a utilização desse método.

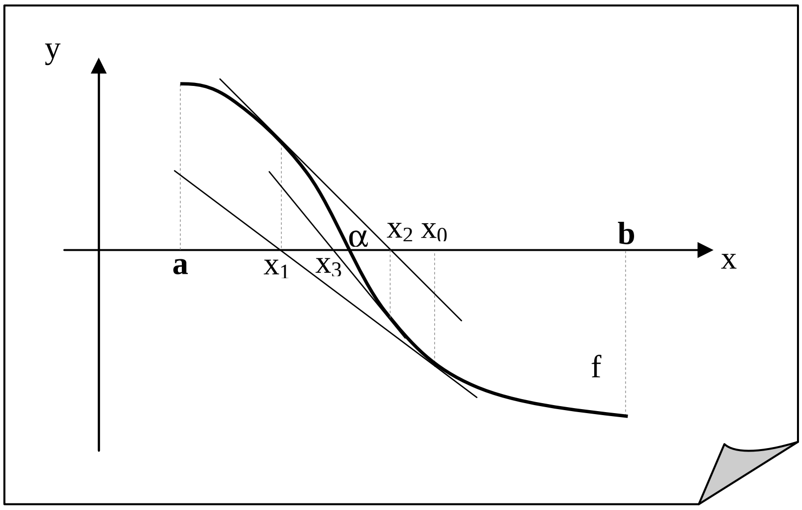

Figura 2.16. Representação do Método de Newton

O método de Newton exige que a função tenha derivada não nula em x_0, x_1, ... x_n. Considerando que essas condições sejam satisfeitas, a reta tangente a f no ponto (x_n, $f(x_n)$) é:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

A intersecção dessa reta com o eixo x, resulta no ponto (x_{n+1}, 0) é dada por:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \Leftrightarrow$$
$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1,2,...$$

Observação:

1) O método de Newton apesar de ser mais eficiente que os demais métodos estudados, ele exige muito da função, ou seja, f deve ter derivada de primeira ordem não nula em [a, b].
2) Como já dissemos anteriormente, o x_0 deve ser bem escolhido para que o método funcione corretamente, uma condição suficiente, porém não necessária, para a convergência da seqüência produzida no método de Newton é que $f''(x_0) \times f(x_0) > 0$.

EXEMPLO 28

Resolveremos a mesma equação do Exemplo 27, porém utilizando o método de Newton.

A equação é $x^3 - \ln(-x) = 0$. Um intervalo que contém a raiz é [-1, 0].

Vamos escolher x_0. Tentaremos $x_0 = -1$.

$$f''(x) = 6x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(-1) = -5 \text{ e } f(-1) = -1$$

Logo,

$$f''(-1) \times f(-1) = 5 > 0$$

Portanto, $x_0 = -1$ é uma boa escolha. Agora é só substituir na seqüência de recorrência do método de Newton para encontrarmos as outras aproximações, e assim produzimos os resultados dados pela Tabela 2.3.

n	**x_n**	**$f(x_n)$**	**$f'(x_n)$**	**E_n**
0	-1	-1	4	-
1	-0,75	-0,1341929	3,0208333	0,25
2	-0,7055775	-0,0025258	2,9107976	0,0444225
3	-0,7047098			0,0008677

Tabela 2.3. Utilização dos Método de Newton.

Portanto, uma aproximação para a raiz da equação dada é $x_3 = -0{,}7047098$, com erro estimado, em $E_3 \cong 0{,}0008677$.

2.6 Exercícios

Em cada exercício encontre, se existir, uma raiz aproximada para a equação dada, com tolerância $\in$ especificada, utilizando cada um dos métodos estudados.

1) $e^x + x^2 - 2 = 0$, $\in = 0{,}01$

2) $\ln x - 2x + 1 = 0$, $\in = 0{,}05$

3) $x^3 - \ln x - 5 = 0$, $\in = 0{,}01$

4) $\text{tg}x + 4x^2 - 2x - 2 = 0$, $\in = 0{,}01$

5) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$, $\in = 0{,}001$

6) $\text{sen}(x+1) - e^{-x+1} + 3 = 0$, $\in = 0{,}2$

7) $e^{x+1} - \text{tg}x = 0$, $\in = 0{,}08$

8) $\sqrt{x-2} + \ln(x-3) + 2 = 0$, $\in = 0{,}25$

9) $-\sqrt{-x+1}+\sqrt{x+2}-2=0$, $\in = 0{,}025$

10) $-(x-1)^2 - 2(x-1) - \cos(-x+2) - 4 = 0$, $\in = 10^{-1}$

Respostas:

(Obs: Existem várias soluções possíveis com a tolerância especificada, para saber se sua resposta está correta, subtraia o resultado encontrado do resultado abaixo, o módulo da diferença deve ser inferior a tolerância).

1) 0,5372744798 e -1,315973773 2) Não possui raiz real 3) 0,006737950025
4) x = -0,6082397699 5) -0,3247179463 6) -0,2943284809
7) infinitas raízes, algumas delas são: 0,8016014695; -0,6082397699; -1,466272951; 1,724649010
8) 3,048605704 9) não tem raiz real 10) não tem raiz real.