# CAPÍTULO 2
# PARTE II

## 2.3 – Isolamento de Raízes pelo Método Gráfico

Isolar uma raiz real $\alpha$ de uma equação f(x) = 0 consiste em encontrar um intervalo [a, b] que contenha $\alpha$. Não temos um método eficiente para o isolamento de uma raiz, na verdade o único método de que dispomos é o método gráfico e este se aplica apenas as equações cujas funções associadas são diferença entre duas outras funções de gráficos conhecidos, como veremos logo mais.

O Método gráfico se baseia basicamente na utilização dos Teoremas 2.7 e 2.8, este último enunciaremos à seguir.

**Teorema 2.7**

Considere as funções f, g e h tais que f(x) = g(x) – h(x). Um número real $\alpha$ é uma raiz da equação f(x) = 0 se, e somente se, o gráfico de g intercepta o gráfico de h exatamente no ponto em que x = $\alpha$.

**EXEMPLO 23**

Dada a equação

$$e^x - x^3 = 0. \qquad (2.3)$$

A função associada a essa equação é $f(x) = e^x - x^3$.

Tomando $g(x) = e^x$ e $h(x) = x^3$ a representando geometricamente g e h é dada pela Figura 2.3.

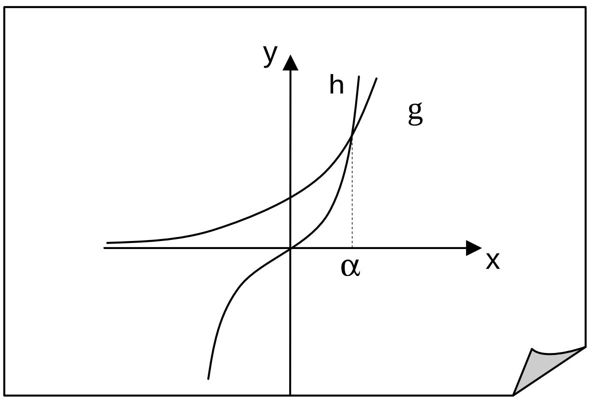



**Figura 2.3.** Representação geométrica de $e^x$ e $x^3$

Através de uma observação da representação geométrica podemos encontrar um possível intervalo que a raiz $\alpha$. Vamos escolher como possível isolamento da raiz o intervalo [0, 2] do Teorema 2.1 para verificar se fizemos uma boa escolha. Ou seja, se $\alpha \in [0, 2]$.

$$f(0) = e^0 - 0^3 = 1$$
$$f(2) = e^2 - 2^3 \cong -0,6109$$

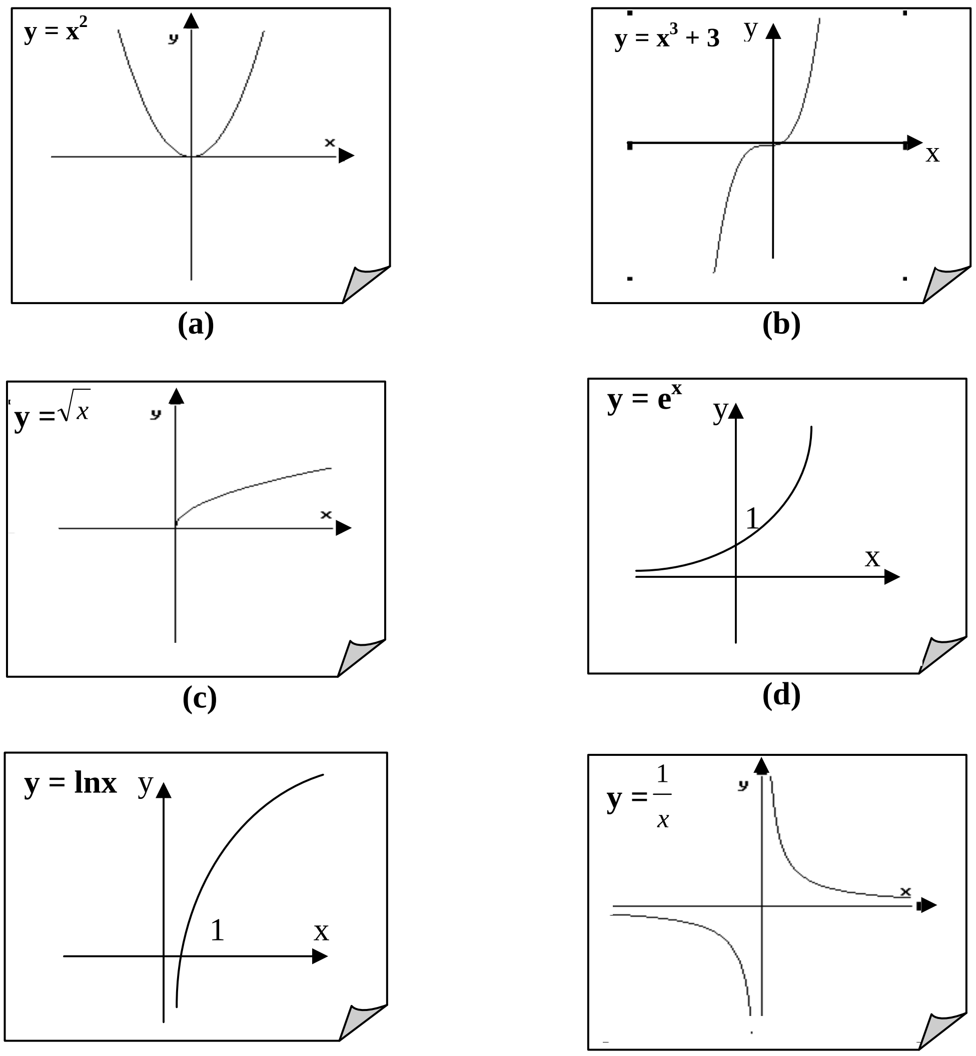
Como $f(0) \cdot f(2) < 0$, $\alpha \in [0,2]$.

***Demonstração do Teorema 2.7***

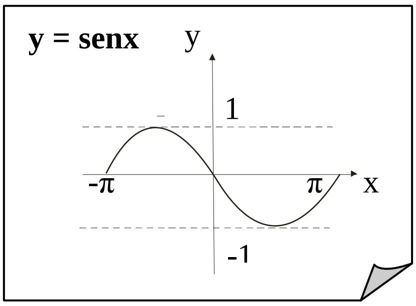
$f(x) = g(x) - h(x)$.
$\alpha$ é uma raiz de $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) - h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = h(\alpha) \Leftrightarrow$ o gráfico de g intercepta o gráfico de h em $x = \alpha$.
■

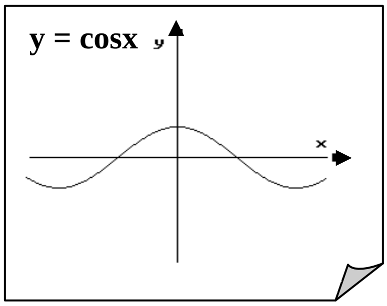
Para utilizarmos o método gráfico com eficiência é necessário conhecermos gráficos de funções que compõe e equação, e quanto mais gráficos conhecermos mais aplicações do Teorema 2.7 podemos fazer. Por esse motivo citaremos a seguir, gráficos de algumas funções que nos ajudará a isolar raiz pelo *método gráfico*, e o conhecimento desses gráficos é de extrema importância na continuidade deste capitulo.

**Figura 2.4. Representação Geométrica de Algumas funções.**

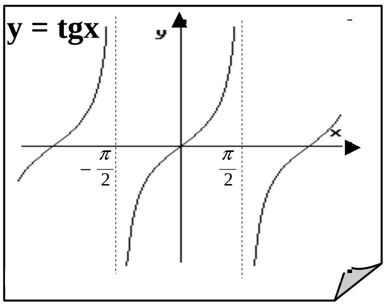


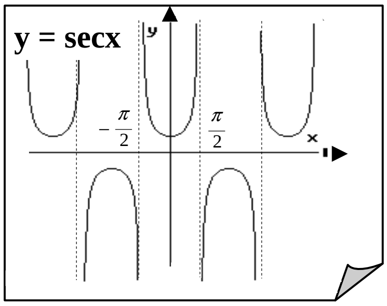
**π (e)** **(f)**



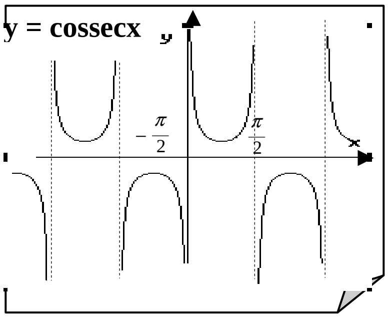



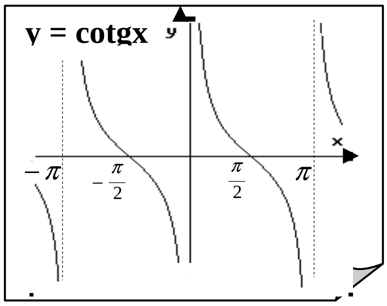

**(g)** **(h)**




**(i)** **(j)**




**(l)**

**(k)**

Além dos gráficos citados pela Figura 2.4 existem vários outros gráficos que também poderão ser utilizados no processo de isolamento de raiz, além disso, podemos construir novos gráficos pela *Translação* e *Reflexão* de gráficos conhecidos, como descreveremos a seguir.

## 2.4 - Translação de Gráficos

Quando deslocamos um gráfico horizontalmente ou verticalmente, isto é, na direção do eixo x ou y, sem alterar o seu formato e as suas dimensões estamos executando uma translação e com isso produzindo um novo gráfico. A seguir, descreveremos como isso pode ser feito:

**i)** ***Translação na direção do eixo x***

Considere a função y = f(x) cujo gráfico é dado pela Figura 2.5

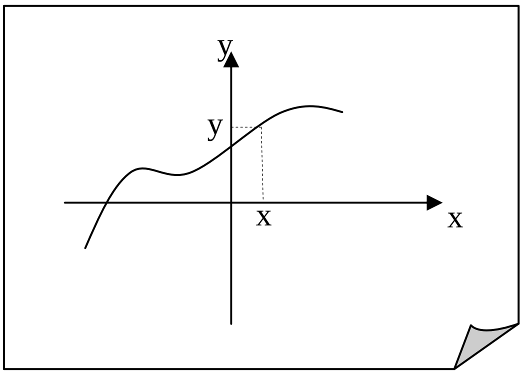



**Figura 2.5.** Representação geométrica de uma função f

Se $x_0 > 0$ é um número real, então $y = f(x - x_0)$ é uma translação da função f e seu gráfico pode ser visualizado pela Figura 2.6:

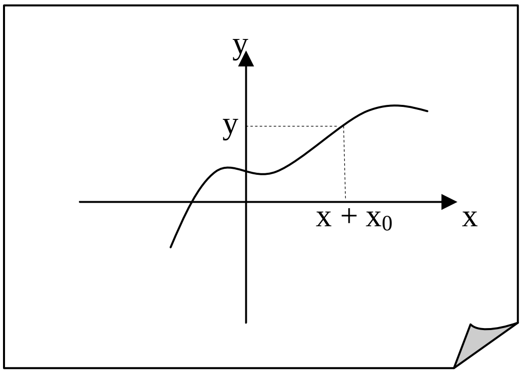



**Figura 2.6.** Translação de f na direção x

**ii)** ***Translação na direção do eixo y***

De modo análogo a Translação em x, consideremos uma função f cujo gráfico é dado pela Figura 2.7.

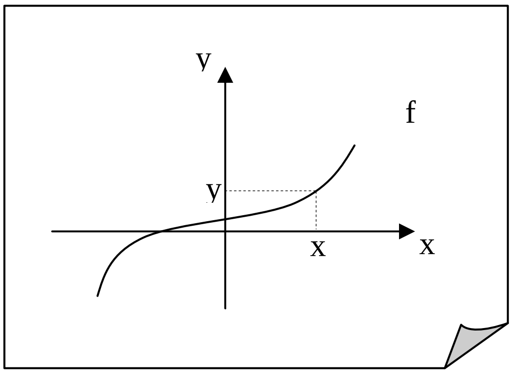



**Figura 2.7.** Representação geométrica de f

Se $y_0 > 0$ é um número real, o gráfico da função $y - y_0 = f(x)$, ou equivalentemente, $y = f(x) + y_0$ tem o formato mostrado na Figura 2.8.

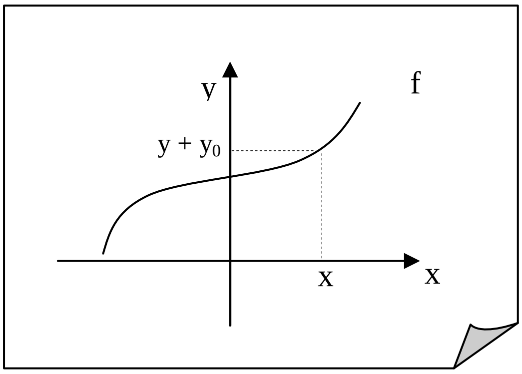



**Figura 2.8.** Translação de f na direção y

**Resumo:**

Se $y = f(x)$ é uma função, $x_0$ e $y_0$ são dois números reais, então:

i) Geometricamente $y = f(x - x_0)$ é um deslocamento de $y = f(x)$, na direção do eixo x, com grandeza $x_0$. O deslocamento é para a direita se $x_0 > 0$ e para a esquerda se $x_0 < 0$.
ii) Geometricamente de $y - y_0 = f(x)$, ou seja, $y = f(x) + y_0$ é um deslocamento de $y = f(x)$, na direção do eixo y, com grandeza $y_0$. O deslocamento será para cima se $y_0 > 0$ e para baixo se $y_0 < 0$

**EXEMPLO 24**

Esboçar o gráfico das funções $f(x) = \ln(x - 2)$ e $g(x) = x^3 + 3$.

**Solução**: Note que f(x) é uma translação (deslocamento) do gráfico da função $y = \ln x$, na direção do eixo x, para a direita e de grandeza $x = 2$. E, g(x) é uma translação do gráfico de $y = x^3$, na direção do eixo y, para cima e de grandeza 3. Observando o gráficos das respectivas funções, na Figura 2.4 itens e) e b), e fazendo as devidas translações. Temos esboços dos gráficos propostos na Figura 2.9.

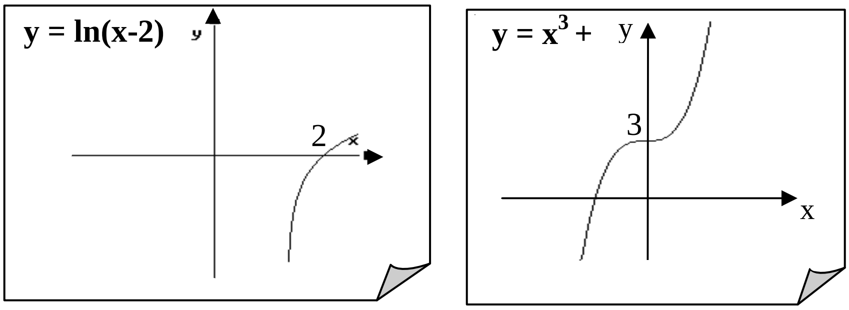



**Figura 2.9.** Esboços de gráficos com uso de translação.

## 2.5 – Reflexão

A Reflexão do gráfico de uma função f pode ser feita em torno de uma reta fixada ou até mesmo em torno de uma outra curva, porém, para facilitar e preservar as propriedades de funções nós estudaremos as reflexões em torno dos eixos x e y.

***i)*** ***Reflexão em torno do eixo x***

A reflexão em torno do eixo x é feita trocando - se cada ponto (x, y) do gráfico f pelo ponto (x, -y), isto é, troca-se y por –y e obtém-se um novo gráfico, veja Figura 2.10.

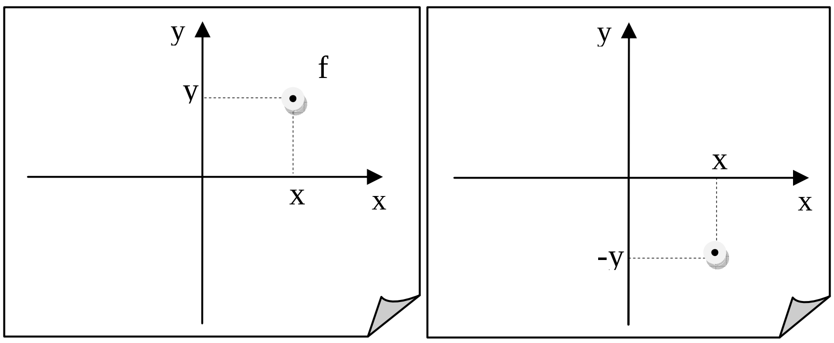



**Figura 2.10.** Gráfico de f e de sua reflexão em torno de x

***ii)*** ***Reflexão em torno do eixo y***

A reflexão em torno do eixo y é feita trocando cada ponto (x, y) do gráfico pelo ponto (-x, y), isto é, troca-se x por –x e obtém-s um novo gráfico, veja a figura 2.11.

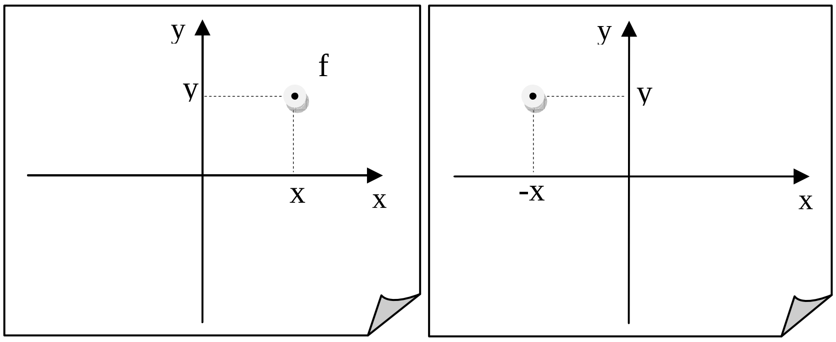



**Figura 2.11.** Gráfico de f e de sua reflexão em torno de y

Note que os eixos x e y funcionam como um espelho, e os gráficos das novas funções obtidas de f é como se fosse uma imagem refletida, por isso essas novas funções são chamadas de *reflexões* em relação ao respectivo eixo.

**EXEMPLO 25**

Vamos esboçar os gráficos das funções f(x) = $\sqrt{-x}$ e g(x) = – $e^x$. Observe que f e g são reflexões das respectivas funções: y = $\sqrt{x}$ e y = $e^x$ em torno de y e x, respectivamente. Portanto, utilizando os gráficos c) e d) da Figura 2.4, com suas devidas reflexões obtemos os gráficos de f e g, como mostra a Figura 2.12.

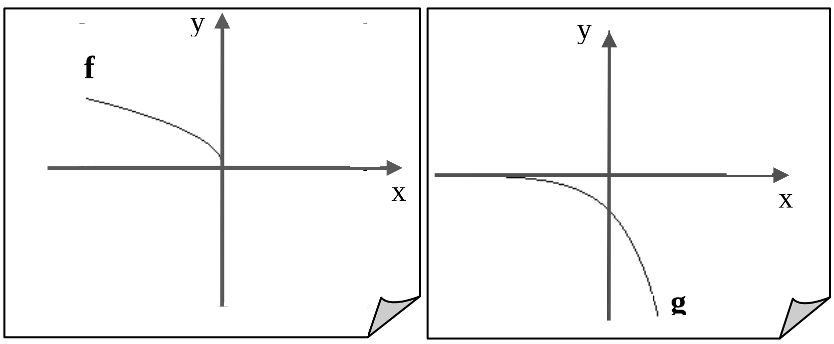



**Figura 2.12.** Gráfico de f e g

Com os recursos de Translação e Reflexão estudados, aumentamos consideravelmente o número de funções que poderemos esboçar seu gráfico. O Exemplo 26 mostrará como podemos construir gráficos de funções aparentemente complicadas, utilizando Translações e Reflexões de gráficos conhecidos.

**EXEMPLO 26**

Vamos esboçar o gráfico da função f(x) = $\sqrt{-x+2}-1$

**Solução:**

a) A função f origina-se de y = $\sqrt{x}$ , através dos seguintes passos:

i. De y = $\sqrt{x}$ (figura (a)), obtemos y = $\sqrt{x}$ + 2 usando translação em x com $x_0 = 2$.

ii. De y =

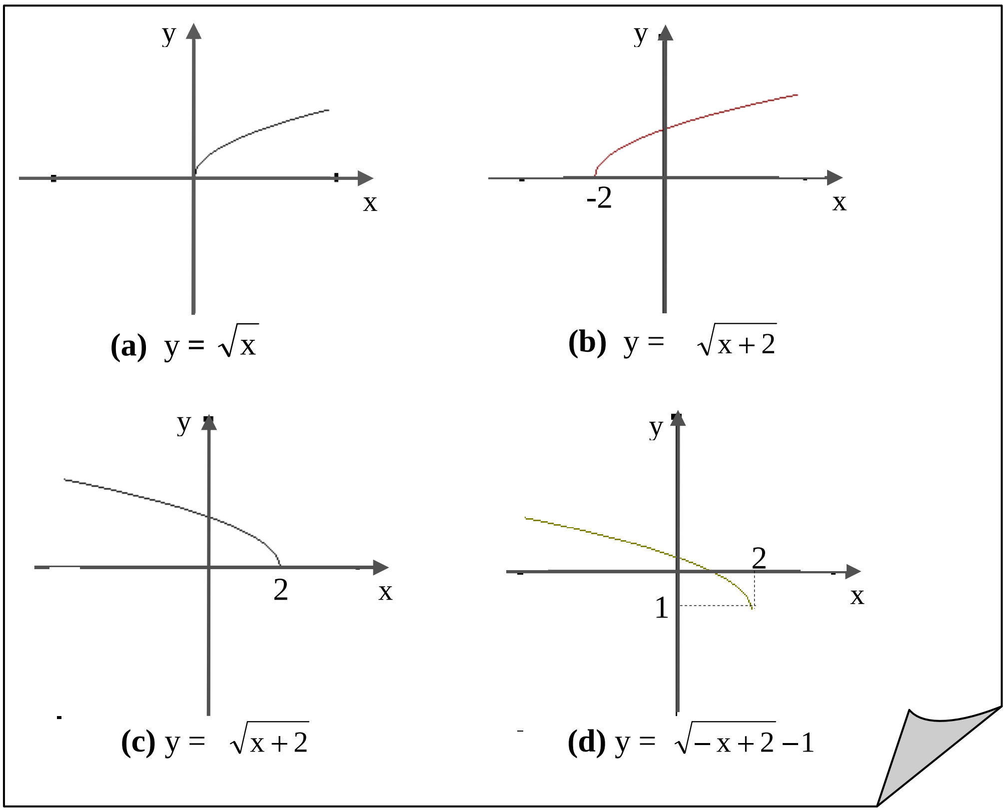



**Figura 2. 13.** Construção do gráfico de f usando Translação e Reflexão

**Observação:** Na construção de gráficos usando Translação e Reflexão, alguns cuidados devem ser tomados:

- **Faça sempre a translação em x antes da reflexão em y**. Com efeito, considere y = f(x), se fizermos à reflexão em y primeiro, obtemos y = f(–x) e em seguida a translação em x, de grandeza $x_0$, resultará em y = f(– (x – $x_0$)) = f (– x + $x_0$) ≠ f (– x – $x_0$) que em geral, é o resultado esperado.
- **Faça a reflexão em x antes da translação em y**. Com efeito, considere y = f(x), se fizermos a translação em y primeiro, obtemos y = f(x) + $y_0$ em seguida a reflexão em x resulta em –y = f(x) + $y_0$, que é equivalente a y = –f(x) – $y_0$ ≠ -f(x) + $y_0$ que em geral é o resultado esperado.

## 2.6 Exercícios

Em cada um dos exercícios, utilize o método gráfico, para verificar a existência e o número de raízes de cada equação. Nos casos onde existir um número finito de raízes encontre, para cada raiz, um intervalo [a, b], de comprimento 1, que a contenha.

1) $e^x + x^2 - 2 = 0$

2) $\ln x - 2x + 1 = 0$

3) $x^3 - \ln x - 5 = 0$

4) $\text{tg}x + 4x^2 - 2x - 2 = 0$

5) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$

6) $\text{sen}(x+1) - e^{-x+1} + 3 = 0$

7) $e^{x+1} - \text{tg}x = 0$

8) $\sqrt{x-2} + \ln(x-3) + 2 = 0$

9) $-\sqrt{-x+1} + \sqrt{x+2} - 2 = 0$

10) $-(x-1)^2 - 2(x-1) - \cos(-x+2) - 4 = 0$

**Respostas:**
1) [-2, -1] e [0, 1] 2) Não possui raiz real 3) [0, 1]
4) [-1, 0] 5) [-1, 0] 6) [-1, 0] 7) infinitas raízes, uma dela está em [-10, -9]
8) [3, 4] 9) [-2, -1] e [0, 1] 10) não tem raiz real.