# CAPÍTULO 2
# PARTE I

# EQUAÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

## 2.1 Introdução a Equações

Considere f uma função, não constante, de uma variável real ou complexa, $f(x) = 0$ será denominada equação de uma variável.

**EXEMPLO 1**

$e^x + \text{sen}x = 0$ é uma equação associada a $f(x) = e^x + \text{sen}x$ .

Observe que a equação $f(x) = 0$ está associada às funções f e –f. pois $f(x) = 0$ é equivalente a $-f(x) = 0$.

**EXEMPLO 2**

$5x + \ln x = x^2$ è uma associação à $f(x) = x^2 - 5x - \ln x$ e a $-f(x) = -x^2 + 5x + \ln x$.

***Definição 2.1***

Um número real (ou complexo) $\alpha$ é denominado raiz da equação $f(x) = 0$ se, $f(\alpha) = 0$, isto é, a imagem de $\alpha$ pela função f for nula.

**EXEMPLO 3**

$\alpha = 1$ é uma raiz da equação $3x^2 + 2x - 5 = 0$, pois essa equação está associada a $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ e $f(\alpha) = f(1) = 0$.

**EXEMPLO 4**

$\alpha = 0$ é uma raiz da equação $e^x - \text{sen}x - 1 = 0$, pois $f(x) = e^x - \text{sen}x - 1$ esta equação está associada e $f(0) = 0$.

**EXEMPLO 5**

$\alpha = i$ é uma raiz da equação $x^2 + 1 = 0$, pois essa equação está associada a função $f(x) = x^2 + 1$ e $f(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Por definição, se o número real $\alpha$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$, então $f(\alpha) = 0$. Assim, o ponto $(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, 0)$. Isto significa, *geometricamente*, que o gráfico de f intercepta o eixo x (eixo das abscissas) em $x = \alpha$, como mostra a figura 2.1.

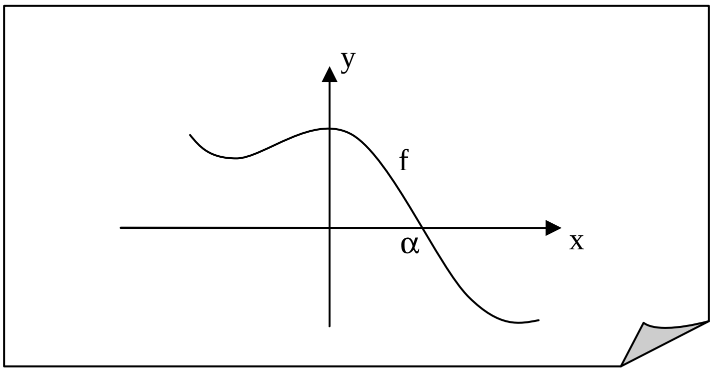


**Figura 2.1.** Representação geométrica de uma raiz α.

Assim, uma raiz é o ponto ao qual a representação geométrica do gráfico de f, intercepta o eixo x.

***Teorema 2.1***

Seja f uma função real, contínua no intervalo [a, b]. Se $f(a)\cdot f(b) < 0$ então, a equação $f(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo [a,b], isto é, existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$.

Geometricamente o Teorema 2.1 é bem claro, ele simplesmente afirma que, se f(a) e f(b) tem sinais contrários e f é contínua em [a,b] então, o deslocamento geométrico do gráfico de f, que liga o ponto (*a,f(a)*) ao ponto (*b,f(b)*) intercepta, necessariamente, o eixo x. Note a importância da hipótese de continuidade da função f.

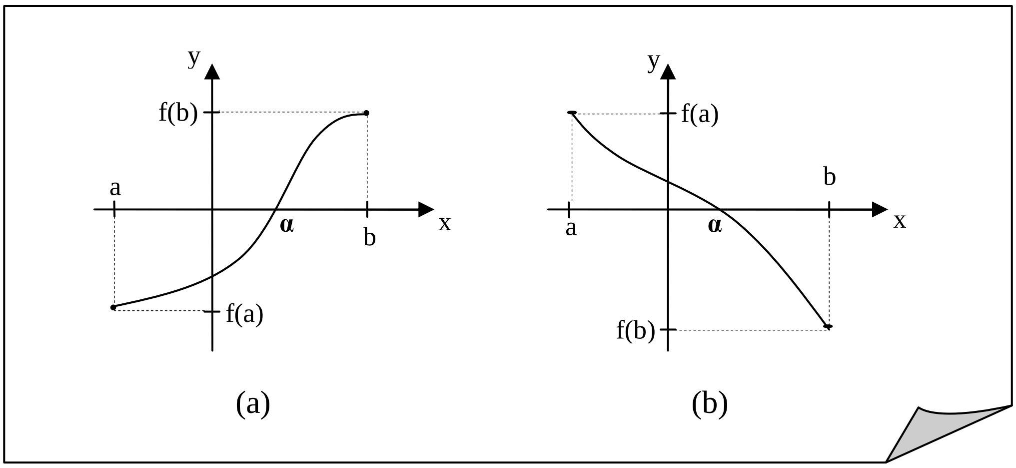


**Figura 2.2.** Interpretação geométrica do Teorema 2.1.

**EXEMPLO 6**

A equação $x^3 + e^x - 7 = 0$ possui pelo menos uma raiz no intervalo [0, 2], pois, $f(0) = -6 < 0$ e $f(2) = 2^3 + e^2 - 7 = e^2 + 1 > 0 \Rightarrow f(0)\cdot f(2) < 0$.

O Teorema 2.1 decorre imediatamente do *teorema do valor intermediário*, abordados em cursos de *cálculo diferencial de uma variável* [ref1], e a sua demonstração requer conceitos que fogem ao nosso objetivo. A recíproca desse teorema não é verdadeira, isto é, podemos ter $f(a)\cdot f(b) > 0$ e ainda existir raiz para $f(x) = 0$ no intervalo [a, b]. De fato, considere a função $f(x) = x^2 - 1$, $f(-2)\cdot f(2) = 1 > 0$ e ainda assim $\alpha = 1 \in [-2, 2]$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$.

O teorema 2.1 pode ser estendido para o caso em que f seja contínua no intervalo aberto (a,b) mas não esteja definida em pelo menos um dos extremos (a ou b). Essa extensão pode ser feita substituindo a por $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e b por $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. O exemplo 7 mostra uma situação que podemos fazer isso dessa idéia.

**EXEMPLO 7**

Dados $f(x) = \ln x + 1$ e o intervalo [0, 1]. Observe que f não está definida em 0 (zero). Logo, aplicamos o teorema 2.1 utilizando $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no lugar de f(0). Assim, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot f(1) = -\infty\cdot 1 = -\infty < 0$. Portanto, de acordo com idéia da extensão do Teorema 2.1, a equação $f(x) = 0$ tem raiz em [0, 1].

## 2.2 – Polinômios e Equações Polinomiais

***Definição 2.2***

Denominamos polinômio, na variável x, de grau n, toda função da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$. Sendo $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, \ldots, a_0$ constantes reais (ou complexas) denominadas coeficientes.

**EXEMPLO 8**

$p(x) = -3x^2 + 5x - 1$ é um polinômio, na variável x, de grau 2 com coeficientes: $a_0 = -1$, $a_1 = 5$ e $a_2 = -3$.

**EXEMPLO 9**

$q(x) = 0{,}1t + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^5$ é um polinômio na variável t, de grau 5, com coeficientes: $a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ e $a_5 = \frac{1}{3}$.

**EXEMPLO 10**

$r(x) = (1 + \boldsymbol{i})t^2 + 1$ sendo (***i*** é a unidade imaginária dos números complexos) é um polinômio de grau 2, com coeficientes: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = \boldsymbol{i} + 1$.

***Definição 2.3***

Se p(x) é um polinômio de grau n, então a equação p(x) = 0 é denominada equação polinomial de grau n.

**EXEMPLO 11**

$3x^7 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ é uma equação polinomial de grau 7, associada ao polinômio $p(x) = 3x^7 - \frac{1}{2}x - 1$.

Um polinômio da forma p(x) = k, onde k é uma constante real (ou complexa), não nula, é denominado polinômio constante cujo grau é **zero**. Se p(x) = 0, para todo x real (ou complexo) então p(x) é denominado polinômio nulo e seu **grau não está definido**.

***Definição 2.4***

Seja $\alpha$ uma raiz da equação polinomial p(x) = 0, dizemos que $\alpha$ tem multiplicidade m, se existir um polinômio *q(x)*, tal que $p(x) = q(x)(x - \alpha)^m$ e para todo polinômio $q_1(x)$ tivermos $p(x) \neq q_1(x)(x - \alpha)^{m+1}$.

**EXEMPLO 12**

Considere a equação $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$, é fácil verificar que $\alpha = 3$ é uma raiz dessa equação. Observe que $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$ e, assim satisfaz a primeira condição da Definição 2.4, isto é, q(x) = x e m = 2 é tal que $x^3 - 6x^2 + 9x = q(x)\cdot(x - \alpha)^m$. Por outro lado, suponha que exista $q_1(x)$ tal que $x^3 - 6x^2 + 9x = q_1(x)\cdot(x - 3)^3 \Rightarrow x\cdot(x - 3)^2 = q_1(x)\cdot(x - 3)^3 \Rightarrow x = q_1(x)\cdot(x - 3)$, para que essa igualdade ocorra, é necessário que o grau de $q_1(x)$ seja zero, pois o grau dos polinômios x e x - 3 é 1. Assim, $q_1(x) = k$ (k constante) isso implica que x = k (x - 3) para todo x, mas isso é impossível, basta escolhermos valores distintos para x, para verificarmos que não existe uma constante k, tal condição. Concluímos então que, nessas condições, não existe $q_1(x)$, isto é, $x^3 - 6x^2 + 9x \neq q_1(x)\cdot(x - 3)^3$, o que mostra a segunda condição da Definição 2.4. Portanto, $\alpha = 3$ tem multiplicidade 2.

Através do Exemplo 12, constatamos que a Definição 2.4 não é muito apropriada para o cálculo da multiplicidade de uma raiz, devido à dificuldade de se fatorar um polinômio. O teorema que enunciaremos a seguir torna o cálculo da multiplicidade bem simples.

***Teorema 2.2***

Seja $\alpha$ uma raiz da equação p(x) = 0. Se $p'(\alpha) = p''(\alpha) = \ldots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0$ e $p^{(m)}(\alpha) \neq 0$, isto é, as derivadas de p(x) até ordem m - 1, se anulam em $\alpha$, mas a de ordem m não, então $\alpha$ tem multiplicidade m.

**EXEMPLO 13**

Vamos resolver novamente o Exemplo 12, só que dessa vez utilizando o Teorema 2.2.

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x,$$

Logo,

$$p'(x) = 6x^2 – 12x + 9 \Rightarrow p(3) = 0$$

E

$$p''(x) = 6x –12 \Rightarrow p(3) = 6 \neq 0.$$

Como a derivada parou de se anular na segunda ordem 3 é uma raiz da equação p(x) = 0 com multiplicidade é 2.

**EXEMPLO 14**

Considere a equação $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$. 2 é uma raiz dessa equação., pois p(2) = 0, onde

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8,$$

Calculando as derivadas de p(x) obtemos,

$$p'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 36x – 20 \Rightarrow p'(2) = 0,$$

$$p''(x) = 12x^2 - 42x + 36 \Rightarrow p''(2) = 0,$$

E

$$p'''(x) = 24x – 42 \Rightarrow p'''(2) = 6 \neq 0,$$

Portanto, 2 é uma raiz de p(x) = 0 com multiplicidade 3., pois a derivada de p(x) deixa de se anular em 2, na derivada de 3 ordem.

***Teorema 2.3 (Teorema Fundamental da Álgebra)***

Se p(x) é um polinômio não constante, então a equação p(x) = 0 tem pelo menos uma raiz (não necessariamente real).

O Teorema 2.3 dá origem a outras afirmações importantes para o estudo da contagem de raízes de uma equação polinomial, como o Corolário 2.1 que é equivalente ao Teorema 2.3 e por isso é também chamado, por muitos, de teorema fundamental da álgebra.

***Corolário 2.1***

Se p(x) é um polinômio de grau n $\geq 1$, então a equação p(x) = 0 possui exatamente n raízes, contando sua multiplicidade.

**EXEMPLO 15**

De acordo com o Corolário 2.1 a equação $x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$, tem exatamente 5 raízes complexas (reais ou não), pois o grau dessa equação é 5.

***Teorema 2.4***

Seja p(x) um polinômio com coeficientes reais, se um número complexo $\alpha = a + b\mathbf{i}$ é uma raiz da equação polinomial p(x) = 0, então o seu conjugado $\bar{\alpha} = a - b\mathbf{i}$ também é.

**EXEMPLO 16**

Considere a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$. Observe que $\alpha = 1 + \mathbf{i}$ é uma raiz dessa equação, pois $p(\alpha) = 0$. O Teorema 2.4 afirma que $\bar{\alpha} = 1 - \mathbf{i}$, também é uma raiz. Logo, de acordo com o Corolário 2.1, $\alpha$ e $\bar{\alpha}$ são as únicas raízes da equação dada.

O Teorema 2.4 deixa claro que as equações polinomiais associadas a polinômios com coeficiente reais têm sempre um número *par* de raízes complexas. Assim, se essas equações tiverem grau ímpar podemos afirmar (auxiliados também pelo Corolário 2.1) que tais equações possuem pelo menos uma raiz real.

Ainda se tratando de contagem das raízes de equações polinomiais, apresentaremos a *Regra de Sinal de Descartes* que é uma ferramenta de grande utilidade.

***Teorema 2.5 (Regra de Sinal de Descartes)***

Se os coeficientes de uma equação polinomial são reais e todas as suas raízes também são reais, então o número de raízes estritamente positivas (levando-se em conta as suas multiplicidades) é igual ao número de trocas de sinais na seqüência dos seus coeficientes. Se a equação também tem raiz complexa, então o número de trocas de sinais de seus coeficientes menos o número de raízes positivas é um número par.

Em geral não sabemos se uma equação polinomial tem ou não raízes complexas, mas de qualquer forma a regra de sinal de Descartes garante que os números de raízes positivas não é superior a troca de sinais dos seus coeficientes se for menor a diferença é por número par.

**EXEMPLO 17**

Considere a equação $x^5 - 2x^2 + 5x + 2 = 0$. Não sabemos se essa equação tem raiz complexa ou não, porém de acordo com a *Regra de* Sinal *de Descartes* podemos afirmar que o número de raízes reais positivas não supera o número de *troca de sinais* T = 2. Isto é, o número de raízes positivas dessa equação é 2 ou menor que 2 e além disso se for menor que 2 a diferença entre o número de raízes positivas e a troca de sinais deve ser um número par, o que nos faz concluir que o número de raízes positivas é 2 ou nenhuma.

Seja $\alpha$ uma raiz de uma equação polinomial p(x) = 0, isso implica que $p(\alpha) = 0$ e, equivalentemente $p(-(-\alpha)) = 0$, logo $-\alpha$ é uma raiz da equação polinomial p(-x) = 0. Assim, se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são as raízes negativas de p(x) então $-\alpha_1, -\alpha_2, ..., -\alpha_n$ são as raízes positivas de p(-x), ou seja o número de raízes negativas de p(x) é igual ao número de raízes positivas de p(-x). Usando este fato, podemos estimar o número possível de raízes negativas da equação polinomial p(x) = 0, através do número de raízes positivas da equação p(-x) = 0.

**EXEMPLO 18**

Considere a equação polinomial

$$-2x^6 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 1 = 0$$

O polinômio associado a essa equação é

$$p(x) = -2x^6 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$$

O número de troca de sinal dos coeficientes de p(x) é $T_1 = 3$, logo pela *Regra de Sinal de Descarte*, o número de raízes positivas da equação p(x) = 0 é 3 ou 1.

Como o número de raízes negativas de p(x) coincide com o número de raízes positivas de p(-x), podemos estimar a quantidade de raízes negativas de p(x) = 0, aplicando a *Regra de Sinal de Descartes* em p(-x).

$$p(-x) = -2x^6 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$$

O número de troca de sinais do polinômio p(-x) é $T_2 = 1$, logo o número de raízes positivas de p(-x) = 0 é 1 e portanto, o número de raízes negativas de p(x) = 0 também é 1.
Até agora enunciamos afirmações que nos possibilita estimular o número de raízes de equação polinomial, o teorema a seguir não faz referencia ao número de raízes, mas sim a grandeza dessas raízes, isto é, a limites sobre o valor das raízes.

***Teorema 2.6 (Teorema de Lagrange)***

Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ com coeficientes reais. Se $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$, então qualquer raiz $\alpha$ da equação p(x) = 0, não é maior que o número L, dado por,

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}$$

Onde: B é o maior dos módulos dos coeficientes negativos
k é o maior dos índices dos coeficientes negativos.

**EXEMPLO 19**

Dada a equação $5x^4 - 8x^2 + x - 10 = 0$, temos $p(x) = 5x^3 - 8x^2 + x - 10$. Observe que $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$ (satisfaz as hipóteses do *Teorema de Lagrange*).
n = 4

$a_n = 5$
B = máx{|-8|, |-10|}= 10 e k = máx {1, 2}= 2
Logo,

$$L = 1 + \sqrt[4-2]{\frac{10}{5}} = 1 + \sqrt{2} \cong 2,5$$

Isso significar que nenhuma raiz da equação dada é maior que 2,5.

Observe que no Exemplo 19, o verdadeiro valor de L é o número irracional:

L = 2,4142135623730950488016887242097...

E mesmo assim tomamos 2,5 como a aproximação para L ao invés de 2,4 que seria o mais natural. Se tivéssemos escolhido o número 2,4 como uma aproximação, estaríamos correndo o risco de termos maior que 2,4 e menor que L como, por exemplo, a raiz poderia ser 2,405 que é menor que L, mas uma, não é menor que 2,4. Para evitar que ocorra um erro dessa natureza iremos escolher sempre o primeiro inteiro maior ou igual a L, que no caso do Exemplo 18, é o número 3.

**EXEMPLO 20**

A equação

$$40x^5 + 3x^3 - 2x = 0 \qquad (2.1)$$

Não satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange, pois $a_0 = 0$. Mas, $40x^5 + 3x^3 - 2x = x(40x^4 + 3x^2 – 2)$, logo uma das raízes dessa equação é zero e todas as outras são raízes da equação

$$4x^4 + 3x^2 – 2 = 0 \qquad (2.2)$$

Inclusive as positivas.
Aplicando Lagrange na equação (2.2)
n = 4
$a_n = 40$
B = 2
k = 0
Logo,

$$L = 1 + \sqrt[4-0]{\frac{40}{2}} = 1 + \sqrt[4]{20} \cong 3,11474 \cong 4.$$

Portanto, nenhuma raiz positiva da equação (2.1), que são as mesmas da equação (2.2), é maior que 4.

**EXEMPLO 21**

A equação

$$-70x^6 + 2x^5 - 6x + 1 = 0$$

Também não satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange, pois $a_n < 0$. Porém, as raízes da equação p(x) = 0 são as mesmas da equação –p(x) = 0, de fato, se p(α) = 0 (multiplicando ambos os membros por -1 temos) então - p(α) = 0, ou seja, α é uma raiz de –p(x) = 0. Assim, para encontrar uma cota superior ( o valor L do teorema 2.6) para as raízes de p(x) = 0, basta encontrar uma cota superior para as raízes da equação –p(x) = 0.

Se

$$p(x) = -70x^6 + 2x^5 - 6x + 1$$

Então

$$-p(x) = 70x^6 - 2x^5 + 6x - 1$$

Aplicando o Teorema de Lagrange em –p(x),

$$L = 1 + \sqrt[6-5]{\frac{2}{70}} = 1 + \frac{1}{35} \cong 1{,}0286 \cong 2$$

Portanto, uma cota superior para as raízes da equação p(x) = 0 é L = 3.

***Definição 2.5***

Seja p(x) um polinômio de grau n, definimos:

i) $p_1(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$

ii) $p_2(x) = p(-x)$

iii) $p_3(x) = x^n p\left(-\frac{1}{x}\right)$

***Proposição 2.1***

α é uma raiz da equação p(x) = 0, se e somente se,

a) $\frac{1}{\alpha}$ é uma raiz da equação $p_1(x) = 0$.

b) –α é uma raiz da equação $p_2(x) = 0$.

c) $-\frac{1}{\alpha}$ é uma raiz da equação $p_3(x) = 0$.

***Demonstração***

a) Seja α uma raiz de p(x) = 0. $p_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n p\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right) = p(\alpha) = 0$. Por outro lado, se $\frac{1}{\alpha}$ é uma raiz da equação $p_1(x) = 0$, então $p_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n p\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n p(\alpha) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$.

b) Considere $\alpha$ uma raiz da equação $p(x) = 0$. $p_2(-\alpha) = p(-(-\alpha)) = p(\alpha) = 0$. Reciprocamente, se $-\alpha$ é uma raiz da equação $p_2(x) = 0$, então $p_2(-\alpha) = 0 \Rightarrow p(-(-\alpha)) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$.

c) Admitindo que $\alpha$ seja uma raiz da equação $p(x) = 0$.$p_3\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n p = \left(-\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right)$ $p(-\alpha) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$. Reciprocamente, se $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ é uma raiz da equação $p_3(x) = 0$ $\Rightarrow p_3\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n p\left(-\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right) = 0 \Rightarrow p\left(-\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right) = 0 \Rightarrow p(-\alpha) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$.

■

Suponha que $\alpha_m$ seja a menor raiz positiva de p(x), é fácil verificar que $\frac{1}{\alpha_m}$ é a maior raiz positiva de $p_1(x)$. Se $L_1$ é uma cota superior para as raízes positivas da equação $p_1(x) = 0$ então,

$$\frac{1}{\alpha_m} < L_1 \Rightarrow \alpha_m > \frac{1}{L_1}$$

Logo, $\frac{1}{L_1}$ é uma **cota inferior** para as raízes positivas de $p(x) = 0$, isto é, toda raiz positiva de $p(x) = 0$ é maior ou igual a $\frac{1}{L_1}$ .

Seja $\alpha_M$ a maior raiz positiva da equação $p_2(x) = 0$, logo $-\alpha_M$ é menor raiz negativa de p(x). Se $L_2$ é uma cota superior para as raízes positivas de $p_2(x) = 0$ temos,

$$L_2 > \alpha_M \Rightarrow -L_2 < -\alpha_M$$

E assim, **$-L_2$** é uma **cota inferior** para as raízes negativas da equação $p(x) = 0$, isto é, toda raiz negativa de $p(x) = 0$ é maior que $-L_2$.

Considere agora $\alpha_M$ sendo a maior raiz positiva da equação polinomial $p_3(x) = 0$, isso implica que $-\frac{1}{\alpha_M}$ é a maior raiz negativa de p(x). Se $L_3$ é uma cota superior para as raízes positivas de $p_3(x)$ então,

$$\alpha_M < L_3 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_M} > \frac{1}{L_3} \Rightarrow -\frac{1}{\alpha_M} < -\frac{1}{L_3}$$

Logo, $-\frac{1}{L_3}$ é uma **cota superior** para as raízes negativas da equação $p(x) = 0$, isto é, toda raiz negativa de $p(x) = 0$ é maior que $-\frac{1}{L_3}$.

Em resumo, se $\alpha^-$ e $\alpha^+$ são, respectivamente, raízes negativas e positivas da equação polinomial p(x) = 0 então:

$$\alpha^- \in [-L_2, -\frac{1}{L_3}]$$

$$\alpha^+ \in [\frac{1}{L_1}, L]$$

**EXEMPLO 22**

Vamos encontrar um intervalo que contenha todas as raízes positivas e outro que contenha todas as raízes negativas da equação polinomial

$$3x^5 - 2x^3 - 6x^2 + 2 = 0.$$

Sendo, $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 6x^2 + 2$, encontramos:

$$p_1(x) = x^5\left[3\left(\frac{1}{x}\right)^5 - 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] = 2x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 3$$

$$p_2(x) = p(-x) = -3x^5 + 2x^3 - 6x^2 + 2 \Rightarrow -p_2(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 2$$

$$p_3(x) = x^5\left[3\left(-\frac{1}{x}\right)^5 - 2\left(-\frac{1}{x}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] = 2x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 3$$

Calculando as cotas superiores, L, $L_1$, $L_2$ e $L_3$ dos respectivos polinômios p(x), $p_1(x)$, $-p_2(x)$ e $p_3(x)$, obtemos:

$$L = 1 + \sqrt[5-3]{\frac{6}{3}} = 1 + \sqrt{2} \cong 2{,}414 \cong 3$$

$$L_1 = 1 + \sqrt[5-3]{\frac{6}{2}} \cong 1 + \sqrt{3} \cong 1{,}732 \cong 2$$

$$L_2 = 1 + \sqrt[5-3]{\frac{2}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 1{,}667 \cong 2$$

$$L_3 = 1 + \sqrt[5-3]{\frac{6}{2}} \cong 1 + \sqrt{3} \cong 1{,}732 \cong 2$$

Portanto,

$$\alpha^- \in [-2, -\frac{1}{2}] \text{ e } \alpha^+ \in [\frac{1}{2}, 3]$$

## 2.3 EXERCÍCIOS

1) Verifique se $\xi$ é uma raiz da equação indicada

a) $e^x - \text{sen}x - 1 = 0, \quad \xi = 0$
b) $\ln(x - \pi) + x - \pi - 1 = 0, \quad \xi = \pi + 1$

c) $e^x - 16 = 0$, $\xi = 4\ln 2$
d) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$, $\xi = -2i$
e) $tg(x - \pi) + \ln x - \pi^2 - 1 = 0$, $\xi = \pi - 1$

2) Verifique se o número $\xi$ é uma raiz da equação polinomial dada, caso seja dê a sua multiplicidade:

a) $5x^5 - 35x^4 + 90x^3 - 110x^2 + 65x - 15 = 0$, $\xi = 1$
b) $5x^5 + 10x^4 - 45x^3 - 110x^2 + 20x + 120 = 0$, $\xi = -2$
c) $8x^5 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$, $\xi = -7$
d) $x^9 - 7\sqrt{2}\, x^8 + 40x^7 - 56\sqrt{2}\, x^6 + 56x^5 + 56\sqrt{2}\, x^4 - 224x^3 + 160\sqrt{2}\, x^2 - 112x + 16\sqrt{2} = 0$ $\xi = \sqrt{2}$

3) Justifique o fato de cada equação não ter raiz real no intervalo dado
a) $3x^7 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$, $[0, \infty]$
b) $-5x^5 - 6x^3 - 2x + 1 = 0$, $[-\infty,0]$
c) $x^6 + 2x^4 + 5x^2 + 6 = 0$, $[-\infty,\infty]$
d) $-x^8 - x^2 - 1 = 0$, $[-\infty,\infty]$

4) Usando a regra de sinal de descartes, verifique o número possível de raízes reais positivas e negativas de cada equação.

a) $3x^5 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$
b) $5x^6 - 4x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$
c) $-3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
d) $3x^3 - 5x + 6 = 0$
e) $x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6 = 0$
f) $x^7 - 5x^3 + 3x - 8 = 0$
g) $5x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

5) Para cada equação encontre um intervalo [a,b], com a e b inteiros, que contenha todas as raízes reais da equação $p(x) = 0$, onde:

a) $p(x) = 3x^6 + 5x^3 - 2x^2 + x - 6$
b) $p(x) = -9x^5 + 2x^3 + 5x^2 + x$
c) $p(x) = 8x^7 + 5x^5 - 3x + 5$
d) $p(x)=-6x^6-5x^4 + 442x^3 - x^2$
e) $p(x) = 3x^6 + 2x^3 + 3x + 4$

6) Encontre um intervalo que contenha todas as raízes positivas, e outro que contenha todas as raízes negativas.

a) $x^6 - 445x^3 - 2x^2 + x - 6 = 0$
b) $-3x^5 + 2x^3 + x = 0$
c) $3x^5 - 6x^3 - 5x^2 - 8x - 10 = 0$
d) $2x^6 - 112x^3 - 30x - 400 = 0$

7) Mostre que a equação tem raiz real no intervalo dado.

a) $\text{sen}(x) - 2x^2 + 1 = 0$, [-1, 0]
b) $\dfrac{x^2+1}{x-3} + x = 0$, [-1, 3 [
c) $\text{tg}(x - 2) + \ln(x) - 1 = 0$, [2,3]
d) $e^{x+1} - 3x - 10 = 0$, [-4,-3]

***Respostas de Alguns Exercícios***:

1) a) $\xi$ é raiz b) $\xi$ é raiz c) $\xi$ é raiz d) $\xi$ é raiz e) $\xi$ **não** raiz
2) a) $\xi = 1$ é uma raiz de multiplicidade 4 b) $\xi = -2$ é uma raiz de multiplicidade 3
c) $\xi = -7$ não é raiz d) $\xi = \sqrt{2}$ é uma raiz de multiplicidade 8
5) a) [-3, 3] b) [-2, 2] c) [-2, 2]
d) [0, 6] não há raiz negativa e) [-2, 0] não há raiz positiva
6) a) $\xi^- \in [-3, 0]$ e $\xi^+ \in [0, 9]$ c) $\xi^- \in [-3, 0]$ e $\xi^+ \in [0, 6]$