

APLICACIONES EN CÁLCULO DIFERENCIAL

Se pensó en realizar este folleto con el fin de apoyar el aprendizaje por medio de aplicaciones. Las aplicaciones en cálculo infinitesimal abarcan un amplio rango de disciplinas científicas, ejemplo de ello son: Administración y Economía, Ciencias Biológicas y Ciencias Físicas por citar algunas.

Este folleto se compone básicamente de dos partes: La primera es Problemas – Ejemplo y la segunda es Problemas – Ejercicio.

En la primera parte, se desarrollan las soluciones de un número determinado de problemas – ejemplo, tratando de manera clara, llegar al resultado. La segunda parte, es la que el alumno tiene que resolver, además que ambos tipos de problemas son análogos en esencia.

Las soluciones de los problemas – ejercicio no se incluyen en este folleto, ya que éstas, deben consultarse con el docente durante los periodos de clase que se les indique.

PRIMERA PARTE: PROBLEMAS – EJEMPLO

Ejemplo 1. Administración y Economía. Suponer que la utilidad p diaria (en dólares) al fabricar x artículos se modela por

$$p(x) = -0.01x^2 + 5x - 400, \text{ donde } 0 \leq x \leq 300.$$

determine el número x de artículos que da lugar a la utilidad máxima.

SOLUCIÓN:

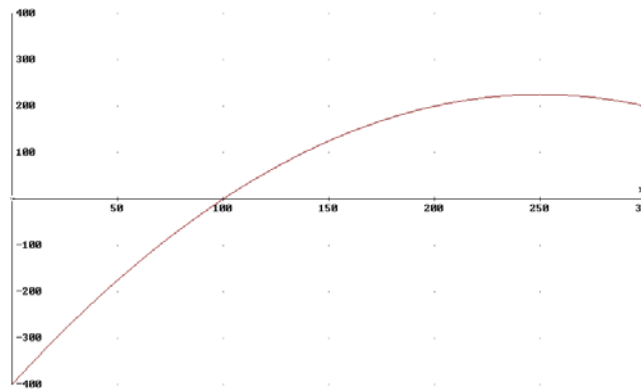
La producción de artículos se encuentra acotada por los límites naturales, donde el número de artículos no puede encontrarse fuera de ellos. Y para encontrar su número, que da la máxima utilidad, (aunque no sea necesario utilizar cálculo) calculemos la derivada

$$p'(x) = -0.02x + 5, \text{ donde } 0 \leq x \leq 300$$

y el lugar donde ocurre un extremo relativo es cuando $y' = 0$, es decir, cuando

$$-0.02x + 5 = 0$$

donde x tomar el valor de 250, pero, debemos verificar el intervalo cerrado, esto es cuando $x = 0$ y cuando $x = 300$, para encontrar un máximo o mínimo, vea la siguiente figura



$$p(0) = -400$$

$$p(250) = 225$$

$$p(300) = 200$$

y nos damos cuenta que cuando x es 250, el extremo es un máximo, por tanto, la respuesta de el número de artículos que da lugar a la máxima utilidad es cuando $x = 250$.

■

Ejemplo 2. Administración y Economía. Considere que el costo c (en dólares) de fabricar x artículos se modela por

$$c(x) = 400 + 10x + 0.01x^2.$$

entonces el costo por artículo, llamado “costo unitario”, se da por

$$cu(x) = \frac{c(x)}{x}, \text{ donde } x > 10.$$

hallar el número de artículos que maximizará este costo unitario $cu(x)$.

Ejemplo 3. Administración y Economía. La gerente de un restaurante observa que cuando al servicio de ensaladas se le pone un precio de \$2.50 (dólares), se atienden a 200 clientes en el mismo durante el almuerzo. No obstante, por cada dólar de aumento en el precio, se pierden 100 clientes. De manera análoga, por cada dólar de disminución en el precio, se ganan 100 clientes. Obtenga el aumento en el precio que maximizará el ingreso que se obtenga del servicio de ensaladas.

Ejemplo 4. Administración y Economía. El dueño de una tienda de comestibles planea su inventario de cereales secos y los pedidos los hace a cierto mayorista. Cada pedido consiste en varias cajas (cada una con 50 paquetes de cereal) a un costo de \$40.00 dólares cada una más un cargo por manejo de \$50.00 dólares por pedido. La tienda vende 500 cajas de cereal al año. Un costo de almacenamiento de \$5.00 dólares por caja por año cubre el seguro y el espacio ocupado por el cereal no vendido. Si el dueño de la tienda hace un pedido muy grande, pagará un cargo bajo por manejo, pero un costo grande de almacenamiento. Empero, varios embarques más pequeños reducirán los costos de almacenamiento, pero incrementarán los costos de pedido. El objetivo es hallar un tamaño óptimo de embarque, en alguna parte entre estos valores críticos, de modo que se minimicen los costos totales.

SOLUCIÓN:

Sea x el número de cajas en cada pedido (la cantidad por embarque), y el

Costo total = (Costos fijos) + (Costos por surtir el pedido) + (Costos de almacenamiento)

Costos fijos = (costo por caja) (el número de cajas por año)
= (40)(500)
= 20,000.

Costos por surtir el pedido = (Costo por embarque) (número de embarques)

Pero el número N de embarques está en función del tamaño x de los mismos por

(Número de embarques) (Tamaño del embarque) = Abastecimiento anual total

$Nx = 500$

O también

$$x = \frac{500}{N}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Costos por surtir el pedido} &= 50 \left(\frac{500}{x} \right) \\ &= \frac{25000}{x}\end{aligned}$$

Costos de almacenamiento = (Costo de almacenamiento por caja) (# medio de cajas existentes)

Suponiendo que entre uno y otro embarque la existencia decrece paulatinamente de x a 0, el número promedio de cajas en almacenamiento es $x/2$; por lo tanto

$$\text{Costos de almacenamiento} = 5 \left(\frac{x}{2} \right)$$

Y combinando los costos tenemos el modelo de costo total

$$C(x) = 20000 + \frac{25000}{x} + \frac{5x}{2}, \text{ donde } x > 0$$

cuya derivada es

$$C'(x) = -\frac{25000}{x^2} + \frac{5}{2}$$

y calculando el número crítico, tenemos que

$$x = 100$$

por tanto, 100 es el número de embarques que minimizaran los costos totales, y estos son

$$C(x) = 20500$$

■

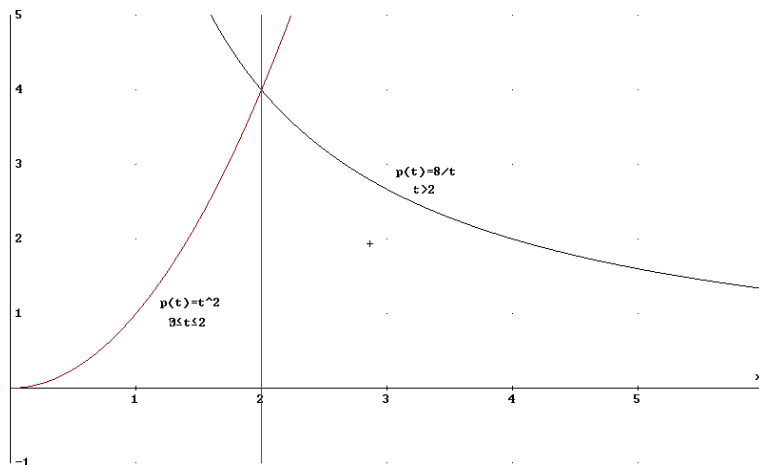
Ejemplo 5. Ciencias Biológicas. Tanto los biólogos como los psicólogos estudian las respuestas a diversos estímulos s . En ciertos animales, la respuesta al estímulo s se mide por la contracción del iris después de exponer el ojo a una luz brillante. Suponer que la respuesta se modela por

$$s(t) = \begin{cases} t^2, & \text{donde } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8}{t}, & \text{donde } t > 2 \end{cases},$$

ya que t es el tiempo (en segundos) después de que se concentra la luz sobre el ojo. ¿En qué instante se presenta la respuesta máxima?

SOLUCIÓN:

Veamos la grafica:



Ejemplo 6. Ciencias Biológicas. Investigadores de la fauna silvestre introducen a una isla cierta especie de faisán a un coto de caza. Se da a la población 3 años para que se establezca antes de permitir la cacería limitada. Suponer que la población p de faisanes (en cientos) en el tiempo t (en años) se modela por

$$p(t) = \begin{cases} t^2 - 2t + 4, & \text{donde } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{6}{t} + t + 2, & \text{donde } t > 3 \end{cases},$$

hallar los valores críticos en esta población.

Ejemplo 7. Se desea construir un canalón de desagüe, a partir de una lámina rectangular donde la longitud de la lámina no se toma en cuenta. El ancho de la lámina es de 20 cm, y de van a hacer dos dobleces tal como se muestra en la figura siguiente



Calcula las dimensiones de la sección transversal para que el canalón de desagüe transporte la máxima cantidad de agua.

Ejemplo 8. Un hombre construye una granja, a 500 yardas de una carretera estatal. La tubería del alcantarillado más cercana se encuentra a 800 yardas sobre esta carretera. El costo para hacer la conexión a la alcantarilla es de \$2.00 dólares por yarda de la casa a cualquier punto p sobre la carretera, y de \$1.00 dólar por yarda del punto p a la alcantarilla a lo largo de la misma. ¿Dónde debe localizarse el punto p para minimizar el costo de la construcción de esta tubería?

Ejemplo 9. un derrame de petróleo en el océano se esparce en un área, con espesor uniforme de 1 pulgada. Supóngase que el petróleo esta fluyendo con un gasto constante de 200 pies cúbicos por minuto. Halle la rapidez a la cual crece el radio de la mancha aceitosa en el momento en el que el radio es de 10 pies, y cuando es de 500 pies.

SOLUCIÓN:

Es conveniente medir la distancia en pies y el tiempo en minutos. Suponiendo que la mancha de aceite es circular, puede describirse su volumen V en términos del radio r y el espesor de 1 pulgada. La rapidez del flujo del petróleo se expresa como

$$\frac{dV}{dt} = 200 \text{ (pies cúbicos por minuto)}$$

y el volumen del petróleo, viene dado por

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS – EJERCICIO

Resuelva los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Administración y Economía. Una persona estima que su riqueza w (en millones de pesos) en el tiempo t (en años), durante un período de 30 años, queda establecida por la función

$$w(t) = t^3 - 5t^2 - 3t + 100, 0 \leq t \leq 30.$$

¿Cuándo será máxima y cuándo será mínima esta riqueza?

Ejercicio 2. Administración y Economía. El precio p (en pesos) de cierto artículo en el tiempo t (en meses) esta dado por

$$p(t) = 80 + 180t - t^3, 0 \leq t \leq 12.$$

determina cuándo está creciendo este precio y cuándo está decreciendo. Después de trazar la gráfica de $p(t)$, ¿puede decidir el lector cuándo el precio será máximo? ¿Y cuándo un mínimo?

Ejercicio 3. Administración y Economía. Un fabricante ofrece un descuento sobre pedidos del tamaño máximo 180. El precio por artículo es de $20 - 0.1x$ (en dólares) para un pedido de tamaño x ($0 \leq x \leq 180$).

- Obtener la función $r(x)$ que modela el ingreso proveniente de un pedido de x artículos.
- Hallar el valor de x que maximiza a $r(x)$.
- Suponer que el costo de fabricar x artículos es $c(x) = 10x + 100$. Determinar el valor de x que maximizará la utilidad $p(x) = r(x) - c(x)$. Considerar que la utilidad e ingresos máximos (obtenidos en b) se presentan en valores diferentes de x .

Ejercicio 4. Administración y Economía. En la actualidad, el precio del boleto de entrada a un cine es de \$7 (dólares), y tiene un promedio de 150 espectadores por función. Cada descuento de 10¢ en el precio da como resultado 15 espectadores adicionales. De manera análoga, un aumento de 10¢ en el precio del boleto reduce la asistencia promedio en 15 espectadores.

- Si x representa el aumento en el precio de entrada, demostrar que $-7 \leq x \leq 1$ son los límites naturales para x .
- Verificar que el ingreso resulte por aumento en el precio de x dólares se modela por la función $r(x) = (7 + x)(150 - 150x)$.
- Hallar el precio del boleto que maximizará el ingreso.
- Si la capacidad máxima del cine es de 250 personas, determinar el precio óptimo del boleto.

Ejercicio 5. Administración y Economía. Suponer que en un centro cívico se realiza un concierto semanal de música clásica. En la actualidad, la venta de boletos a \$20 dólares atrae un promedio de 3000 aficionados. Si los precios se elevaran o se redujeran en \$1 dólar, la asistencia promedio disminuiría o aumentaría, respectivamente, en 100.

- Si x representa el aumento en el precio del boleto, determinar los límites naturales para x .
- Obtener el ingreso $r(x)$ proveniente del aumento de x en el precio.
- Hallar el precio del boleto que maximizará el ingreso.
- Considerar que cada aficionado gasta un promedio de \$4 en lo que se expende allí. Determinar el precio óptimo del boleto al agregar esta información.

Ejercicio 6. Administración y Economía. Un motel que cobra alrededor de \$15 dólares, llena todas sus 100 habitaciones diariamente. Por cada \$1 dólar de aumento en el precio, se rentan 5 habitaciones menos. Cada cuarto ocupado cuesta \$3 dólares por día debido a los servicios. Establecer la tarifa que maximizará la utilidad diaria.

Ejercicio 7. Administración y Economía. Una agencia de viajes ofrece un “paquete” a \$600 dólares por persona, si toman las vacaciones 100 personas o menos. Si van más de 100, entonces el precio por cada una de ellas se reduce en \$5 multiplicado por el número de personas mayor de 100. En el viaje pueden participar un máximo de 200 personas. ¿Cuánta gente se necesita en el recorrido para que la agencia de viajes obtenga el máximo ingreso?

Ejercicio 8. Administración y Economía. Una tienda de artículos deportivos vende cada año 1000 pares de cierto zapato para correr. Al pedirse, el zapato cuesta \$20 dólares el par y existe un cargo adicional por manejo de \$30 dólares. Un costo de \$0.50 dólares por par, por año, cubre el almacenamiento de los zapatos no vendidos. Hallar el número de zapatos por pedido que minimiza los costos totales del inventario. Recuerde que no se puede hacer un pedido de una fracción de un par de zapatos.

Ejercicio 9. Ciencias Biológicas. La población de mosquitos p (en millares de ellos) en cierta zona pantanosa, durante el mes de agosto, se expresa por

$$p(x) = 100 + 30x + \frac{7}{2}x^2 - x^3, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

donde x es el número de pulgadas de lluvia en ese mes. Determinar el intervalo de valores de la precipitación pluvial para los que esta población es creciente y aquéllos para los cuales es decreciente. Trazar la gráfica de $p(x)$ y determinar la lluvia para la cual la población es máxima.

Ejercicio 10. Ciencias Biológicas. Suponer que t meses después de que empieza cierta epidemia de gripe, la fracción f de la población que ha contraído el virus se modela por

$$f(t) = \frac{t}{(1+t)^3}; \quad t \geq 0.$$

- a) Hallar el tiempo t en el que la epidemia alcanza su máximo.
- b) Determinar la porción máxima de la población que será infectada por este virus gripal.

Ejercicio 11. Ciencias Biológicas. La cantidad de leche m (en decenas de litros) que una vaca produce se estima por la función

$$m(x) = 3x^{2/3} - x, \quad 0 \leq x \leq 10$$

y x es el nivel de hormonas inyectadas a la vaca por día. Determinar qué nivel de hormonas dará la cantidad máxima de leche producida.

Ejercicio 12. Ciencias Biológicas. Suponer que un agricultor estima que el número de manzanas n que cada uno de sus árboles dará se expresa por

$$n(x) = 60x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 60$$

y x es el número de esos árboles plantados en cada acre.

- a) Hallar un modelo para la cosecha total $y(x)$, donde la cosecha total es igual al número de manzanas por árbol por el número de árboles.
- b) Obtener el número x de árboles que maximice la cosecha total.

Ejercicio 13. Ciencias Biológicas. Un agricultor estima que un árbol promedio produce 300 manzanas si no se plantan más de 16 árboles en cierta área. Por cada árbol adicional plantado, la cosecha disminuye en 10 manzanas por árbol. ¿Cuántos árboles debe plantar el agricultor en ésta área para obtener una cosecha máxima?

Ejercicio 14. Ciencias Biológicas. Suponga que la producción e diaria de huevos (en millares) en una granja se modela por la función

$$e(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{4}, 0 \leq x \leq 2.5$$

y x representa el número (en millares) de gallinas. ¿Cuántas gallinas se necesitan para maximizar la producción de huevo?

Ejercicio 15. Ciencias Biológicas. Los especialistas en el medio ambiente hallan que en el tiempo t (en años) después de haberse iniciado una campaña de limpieza, la cantidad a de contaminante en un río se modela por la función

$$a(t) = t + \frac{1}{100t + 1}, 0 \leq t \leq 1.$$

¿Cuándo alcanzó su mínimo la cantidad de contaminante?

Ejercicio 16. Ciencias Físicas. La eficiencia m respecto al combustible (en millas por galón) de cierto automóvil conducido a la velocidad v (en millas por hora) se modela por

$$m(v) = \frac{3000v}{v^2 + 2500}.$$

determinar el valor de la velocidad v que maximizará la eficiencia de este automóvil respecto al combustible.

Ejercicio 17. Ciencias Físicas. Una compañía que fabrica juegos pirotécnicos afirma que sus cohetes vuelan de modo que su distancia s (en pies) por encima del piso, en el tiempo t (en segundos) queda establecido por la función

$$s(t) = 96t - 16t^2, 0 \leq t \leq 6.$$

¿Hasta qué altura llegarán estos cohetes?

Ejercicio 18. Ciencias Físicas. Suponer que los astrónomos emplean la función

$$s(t) = t^3 - 48t + 200, t \geq 0$$

para modelar la distancia (en miles de millas) de un meteorito que se está acercando a la Tierra en el tiempo t (meses).

- a) Determinar el tiempo en el que el meteorito se encuentra más cercano a la Tierra.
- b) ¿Qué tan cerca llega dicho meteorito?

Ejercicio 19. Ciencias Físicas. La distancia s de un proyectil dirigido a su blanco en el instante t (en segundos) se estima por la función

$$s(t) = t^3 - 12t + 18.$$

Hallar la velocidad y la aceleración de este proyectil y luego trazar la gráfica de $s(t)$. ¿Cuándo estará el proyectil más cerca de su blanco?

Ejercicio 20. Ciencias Sociales. Una estudiante de preparatoria encuentra que cuando estudia t horas dos días antes para un examen, su calificación c se modela por

$$c(t) = 8.1t^2 - 0.9t^3.$$

Determinar el tiempo de estudio que maximizará su calificación y cuál será ésta.

Ejercicio 21. El campamento de un vaquero está a 2 millas de un río recto. Dicho vaquero está a 4 millas del río, y a 10, río abajo de su campamento. Si el citado vaquero tiene que dar de beber a su caballo antes de regresar al campamento, ¿cuáles caminos rectos debe tomar el vaquero para recorrer una distancia mínima?

Ejercicio 22. Una fotografía tiene un trozo de madera de 24 pulgadas de largo y 1 pulgada de ancho, a partir del cual se desea hacer un marco rectangular. ¿Cómo se debe cortar esta madera de modo que el marco encierre el área máxima?

Ejercicio 23. Una hoja cuadrada de cartón tiene lados de 16 pulgadas de longitud. Se va a hacer una caja sin tapa a partir de este trozo de material cortando un cuadrado (del mismo tamaño) en cada esquina y, a continuación, doblando hacia arriba los lados. ¿Cuál debe ser el tamaño de este cuadrado para que la caja tenga el volumen máximo?

Ejercicio 24. Debe hacerse una caja rectangular sin tapa de una hoja de cartón cuyas dimensiones son 8 pulgadas por 15 pulgadas, cortando un cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser el tamaño de este cuadrado para que la caja tenga el volumen máximo?

Ejercicio 25. Una compañía fabrica una caja de cartón de modo que la base y la tapa son cuadrados. Si la caja debe contener 10 pies cúbicos, hallar las dimensiones que minimicen la cantidad total de cartón (área superficial) necesaria para hacerla.

Ejercicio 26. Una caja con base y tapa cuadradas tiene un área superficial de 10 pies cuadrados. Determinar las dimensiones que maximizan el volumen de la caja y determinar también cuál va a ser el volumen máximo.

Ejercicio 27. Una compañía empacadora fabrica latas cilíndricas que contienen 22 pulgadas cúbicas (12 onzas). Hallar las dimensiones de una lata que minimizarán la cantidad de metal (área superficial) en la misma.

Ejercicio 28. Una compañía empacadora fabrica latas cilíndricas que contienen 22 pulgadas cúbicas (12 onzas). Hallar las dimensiones de una lata que minimizarán la cantidad de metal (área superficial) en la misma. Suponga que el metal de la tapa de la lata cuesta 0.3¢ (de dólar) por pulgada cuadrada y todo el resto cuesta 0.1¢ por pulgada cuadrada. Determinar las dimensiones de la lata que minimizarán el costo del metal. Comparar la respuesta que obtenga con las dimensiones de una lata de cerveza o refresco que conozca.

Ejercicio 29. Una sierra circular corta tablones rectangulares a partir de troncos con sección transversal circular. Hallar las dimensiones del rectángulo máximo de ese tipo que puede inscribirse en un círculo de radio R .