ГЛАВА 5

ПРИЛОЖЕНИЯ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Различные упругие контактные задачи, решённые в главах 2 и 3, имеют дело в основном с напряжениями и перемещениями в плоскости $z=0$. Мы концентрируемся здесь на *полном* решении. Решение называется полным, когда явные выражения даны для поля напряжений и перемещений во всём полупространстве. Полное решение, в совокупности с теоремой взаимности, позволяет нам решить более сложные задачи взаимодействия штампов, влияния внешних нагрузок на штампы, и так далее. Дано приближённое *аналитическое* решение неклассической контактной задачи. Значительная часть представленного здесь материала ещё не опубликована. Остальное следует статьям (Fabrikant, 1974a, 1986a, 1986c, 1986i, 1987h).

5.1 Контактная задача для гладкого штампа

Гладкий штамп прижимается к трансверсально изотропному упругому полупространству $z \geq 0$ нормальной силой P. Термин *гладкий* используется для обозначения штампа, который не вызывает сдвигающих напряжений под собой. Пусть S обозначает область контакта. Смешанные граничные условия на плоскости $z=0$ имеют вид:

$$\sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad (\rho,\phi) \notin S; \qquad w = \omega(\rho,\phi), \quad \text{для} \quad (\rho,\phi) \in S,$$

$$\tau_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty < (x,y) < \infty. \tag{5.1.1}$$

Как и в предыдущей главе, мы можем положить опять, что

$$F_1(z) = c_1 F(z_1), \quad F_2(z) = c_2 F(z_2), \quad F_3(z) = 0. \tag{5.1.2}$$

Подстановка (5.1.2) и (2.1.12) в третье условие (5.1.1) даёт:

$$c_1 = -c_2 \gamma_1 / m_1 \gamma_2. \tag{5.1.3}$$

Теперь нам нужно определить главную потенциальную функцию F так, что её вторая z—производная исчезает при $z=0$ вне области контакта. Сравнение с (4.1.4) приводит к

$$F(\rho,\phi,z) = F(M) = \int\!\!\int_S \ln[R(M,N) + z]\, \sigma(N)\, \mathrm{d}S_N. \tag{5.1.4}$$

Свойство потенциала простого слоя даёт внутри области контакта:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = -2\pi\sigma, \tag{5.1.5}$$

что совместно с (2.1.12) даёт второе уравнение для постоянных c_1 и c_2

$$2\pi A_{44}[(1+m_1)c_1 + (1+m_2)c_2] = 1. \tag{5.1.6}$$

Уравнения (5.1.3) и (5.1.6) определяют постоянные

$$c_1 = H\gamma_1/(m_1 - 1), \quad c_2 = H\gamma_2/(m_2 - 1). \tag{5.1.7}$$

Упрощения в (5.1.7) сделаны, благодаря свойствам (4.1.10).

Наконец, подстановка (5.1.2), (5.1.4) и (5.1.7) во второе из уравнений (2.1.6) даёт для $z=0$ хорошо известное основное интегральное уравнение упругой контактной задачи для гладкого штампа:

$$\omega(N_0) = H \int\!\!\int_S \frac{\sigma(N)}{R(N,N_0)}\, \mathrm{d}S_N. \tag{5.1.8}$$

Приближённое аналитическое решение (5.1.8) для штампа произвольной формы в плане будет дано позже. Мы рассматриваем более детально случай кругового штампа. Интегральное уравнение (5.1.8) может быть переписано для круговой области контакта радиуса a следующим образом (сравните с 1.4.5)

$$4H\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}L\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=\omega(\rho,\phi)$$

Его точное замкнутое решение есть (сравните с 1.4.10):

$$\sigma(\rho,\phi)=-\frac{1}{\pi^2H\rho}L(\rho)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}$$

$$\times L\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}L(\rho_0)\,\omega(\rho_0,\phi). \qquad (5.1.9)$$

Потенциальная функция F может быть найдена в два этапа. Прежде всего, мы имеет из (5.1.4):

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(r,\psi)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{[\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)+z^2]^{1/2}} \qquad (5.1.10)$$

Подстановка (5.1.9) в (5.1.10) даёт, после интегрирования (сравните с 1.4.21)

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{\pi^2H}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{R_0}{h}+\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right]\frac{z}{R_0^3}\omega(\rho_0,\phi_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0. \qquad (5.1.11)$$

Здесь $R_0=[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{1/2}$, и h определено в (4.1.18). Следующее интегрирование (5.1.11) по z даёт выражение для потенциальной функции непосредственно через заданные перемещения под штампом, а именно,

$$F(\rho,\phi,z)=\frac{1}{\pi^2H}\int_0^{2\pi}\int_0^a \mathcal{K}(\rho,\phi,z;\rho_0,\phi_0)\,\omega(\rho_0,\phi_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0, \qquad (5.1.12)$$

где

$$\mathcal{K}(\rho,\phi,z;\,\rho_0,\phi_0) = -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \frac{1}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}\left\{\ln[l_2 + (l_2^2-\rho^2)^{1/2}]\right.$$

$$\left. -2\Re\left(\frac{1}{(\zeta-1)^{1/2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\zeta-1)^{1/2}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\zeta-1)^{1/2}\right]\right)\right\}, \quad \zeta = \frac{\rho}{\rho_0}e^{i(\phi-\phi_0)} \tag{5.1.13}$$

Детали интегрирования представлены в Аппендиксе A4.3. Теперь все функции Грина, относящиеся к полям перемещений и напряжений, могут быть получены в элементарных функциях из (5.1.13) путём дифференцирования:

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial z} = \frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right], \tag{5.1.14}$$

$$\Lambda\mathcal{K} = \frac{q}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right] - \frac{1}{h\overline{q}}\left\{1 - \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\right.$$

$$\left. - \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\overline{\zeta}-1)^{1/2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\overline{\zeta}-1)^{1/2}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\overline{\zeta}-1)^{1/2}\right]\right\}, \tag{5.1.15}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial z^2} = \frac{1}{R_0^3}\left(1 - \frac{3z^2}{R_0^2}\right)\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right] + \frac{1}{h(R_0^2+h^2)}\left[\frac{z^2}{R_0^2} - \frac{\rho^2-l_1^2}{l_2^2-l_1^2}\right], \tag{5.1.16}$$

$$\Lambda\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial z} = -\frac{3zq}{R_0^5}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right] + \frac{z}{h(R_0^2+h^2)}\left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2-l_1^2} + \frac{q}{R_0^2}\right], \tag{5.1.17}$$

$$\Lambda^2\mathcal{K} = -\frac{3q^2}{R_0^5}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right] + \frac{1}{h(R_0^2+h^2)}\left[\frac{q^2}{R_0^2} - \frac{l_2^2-\rho^2}{l_2^2-l_1^2}e^{2i\phi}\right]$$

$$+\frac{3}{\overline{q}^2}\left\{\frac{1}{h} - \frac{1}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{(\overline{\zeta}-1)^{1/2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\overline{\zeta}-1)^{1/2}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\overline{\zeta}-1)^{1/2}\right]\right)\right\}$$

$$+\frac{e^{i\phi}}{\rho\overline{q}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}\left[1 - \frac{a^3\overline{\zeta}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}(a^2\overline{\zeta}-l_1^2)}\right]. \tag{5.1.18}$$

Следующие тождества были использованы для упрощения (5.1.14–5.1.18):

$$(l_2^2-\rho_0^2)(a^2-l_1^2)+a^2q\bar{q}=a^2(R_0^2+h^2),$$

$$(a^2\zeta-l_1^2)(a^2\bar{\zeta}-l_1^2)=(R_0^2+h^2)l_1^2a^2/\rho_0^2,$$

$$(l_2^2-\rho_0^2)(q\bar{q}\;+z^2)-q\bar{q}(a^2-\rho_0^2)=(l_2^2-a^2)(R_0^2+h^2). \tag{5.1.19}$$

Формулы (5.1.13–5.1.18) являются главными новыми результатами этой секции. Они дают полное решение для рассматриваемой контактной задачи в сочетании с формулами (2.1.6), (2.1.12), (5.1.2) и (5.1.7). Когда заданное перемещение может быть выражено как сумма степеней от x и y, полное решение элементарно. Различные примеры будут рассмотрены далее.

Упражнение 5.1

1. Выведите 5.1.13.
2. Проверьте формулы (5.1.14)–(5.1.18).
3. Докажите тождества (5.1.19).
4. Выведите общее решение для случая изотропии.

5.2 Плоский центрально нагруженный круговой штамп

Мы рассматриваем трансверсально изотропное упругое полупространство $z\geq 0$, под действием жёсткого кругового штампа радиуса a. Нагрузка на штамп статически эквивалентна центрально приложенной нормальной силе P. Обозначим осадку штампа $\omega=\mathrm{const}$. Решение интегрального уравнения (5.1.8) дано в (5.1.9), и в этом специальном случае принимает форму:

$$\sigma(\rho,\phi)=\frac{\omega}{\pi^2H(a^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{5.2.1}$$

Интегрирование последнего выражения по кругу $\rho\leq a$ связывает осадку штампа ω с приложенной силой P как

$$P=\frac{2\omega a}{\pi H}.$$

Подстановка (5.2.1) в (5.1.4) ведёт к интегралу, который может быть вычислен путём дифференцирования выражения для основной потенциальной функции (A4.1.1) по a. Результат есть:

$$F = \frac{2\omega}{\pi H}\left[z\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - (a^2 - l_1^2)^{1/2} + a\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right]. \qquad (5.2.2)$$

Соответствующее дифференцирование потенциальной функции (5.2.2) даёт полное решение:

$$u = \frac{2\omega a e^{i\phi}}{\pi\rho}\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k}{m_k - 1}\left[1 - \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{a}\right], \qquad (5.2.3)$$

$$w = \frac{2\omega}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{m_k - 1}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right), \qquad (5.2.4)$$

$$\sigma_1 = -\frac{4\omega A_{66}}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k - 1)}\frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2}, \qquad (5.2.5)$$

$$\sigma_2 = \frac{4\omega A_{66} e^{2i\phi}}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k}{(m_k - 1)}\left\{\frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2} - \frac{2a}{\rho^2}\left[1 - \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{a}\right]\right\}, \qquad (5.2.6)$$

$$\sigma_z = \frac{\omega}{\pi^2 H(\gamma_1 - \gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\gamma_k\frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2}, \qquad (5.2.7)$$

$$\tau_z = \frac{\omega e^{i\phi}}{\pi^2 H(\gamma_1 - \gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\frac{l_{1k}(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}. \qquad (5.2.8)$$

Эта задача была впервые решена Elliott (1949). Его решение в основном согласуется с нашим. Тот факт, что он использует обозначение ρ как упругий параметр и также как полярный радиус одновременно, несколько затрудняет сравнение.

Введём коэффициент концентрации напряжений как

$$k_1 = \lim_{\rho\to a}\{(a - \rho)^{1/2}\sigma_z\}, \quad \text{для} \quad z = 0. \qquad (5.2.9)$$

Подстановка (5.2.7) в (5.2.9) даёт:

$$k_1 = -\frac{\omega}{\pi^2 H\sqrt{2a}} = -\frac{P}{2\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}. \quad (5.2.10)$$

Асимптотическое поведение поля напряжений и перемещений около края штампа может быть выведено путём подстановки (4.7.1) и (5.2.10) в (5.2.3–5.2.8). В результате получим:

$$u = u_n = 2\pi H k_1 \sqrt{2r}\left[\frac{\gamma_1 S_1}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 S_2}{m_2 - 1}\right] + 0(1), \quad (5.2.11)$$

$$w = -2\pi H k_1 \sqrt{2r}\left[\frac{m_1 T_1}{m_1 - 1} + \frac{m_2 T_2}{m_2 - 1}\right] + 0(1), \quad (5.2.12)$$

$$\sigma_1 = 2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k (m_k - 1)} \frac{S_k}{Q_k} + 0(1), \quad (5.2.13)$$

$$\sigma_2 = -2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\gamma_k S_k}{(m_k - 1) Q_k} + 0(\sqrt{r}), \quad (5.2.14)$$

$$\sigma_z = \frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)}\left[\frac{\gamma_1 S_1}{Q_1} - \frac{\gamma_2 S_2}{Q_2}\right] + 0(1), \quad (5.2.15)$$

$$\tau_z = \tau_{zn} = -\frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)}\left[\frac{T_1}{Q_1} - \frac{T_2}{Q_2}\right] + 0(\sqrt{r}), \quad (5.2.16)$$

Сравнение (5.2.11–5.2.16) с (4.7.4–4.7.9) указывает, что они становятся идентичными, если мы формально заменим θ на $\pi - \theta$. Это легко объяснить. Контактная задача математически эквивалентна задаче о внешней трещине. Существует мнение, что асимптотическое поведение напряжений и перемещений около края произвольной плоской трещины с гладкой границей полностью определено тремя коэффициентами концентрации напряжений. Это означает, что асимптотики внутренней и внешней трещин должны быть одинаковы. Система локальных осей координат была введена в предыдущей секции, так что угол θ измерялся от направления вне круглой трещины. В случае контактной задачи ось *On* должна быть направлена в круг, и это сделает выражения (5.2.11–5.2.16) идентичными (4.7.4–4.7.9).

Упражнение 5.2

1. Найдите полное решение задачи о гладком плоском центрально нагруженном круговом штампе вдавливаемом в изотропное полупространство. *Ответ*:

$$u = \frac{\omega e^{i\phi}}{\pi(1-\nu)}\left\{-(1-2\nu)\left[\frac{a-(a^2-l_1^2)^{1/2}}{\rho}\right]+\frac{zl_1(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)}\right\},$$

$$w = \frac{2\omega}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)+\frac{z(a^2-l_1^2)^{1/2}}{2(1-\nu)(l_2^2-l_1^2)}\right],$$

$$\sigma_1 = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)}\left[(1+2\nu)\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{z^2[l_1^4-a^2(2a^2-\rho^2+2z^2)]}{(a^2-l_1^2)^{1/2}(l_2^2-l_1^2)^3}\right],$$

$$\sigma_2 = \frac{2\omega\mu e^{2i\phi}}{\pi(1-\nu)}\left\{-(1-2\nu)\left[\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}-\frac{2[a-(a^2-l_1^2)^{1/2}]}{\rho^2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{az(l_2^2-a^2)^{1/2}[2l_1^4+\rho^2(l_1^2+3l_2^2-6a^2)]}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)^3}\right\},$$

$$\sigma_z = \frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)}\left\{-\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{z^2[l_1^4+a^2(\rho^2-2a^2-2z^2)]}{(a^2-l_1^2)^{1/2}(l_2^2-l_1^2)^3}\right\},$$

$$\tau_z = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)}\frac{z\rho e^{i\phi}(a^2-l_1^2)^{1/2}(3l_2^2+l_1^2-4a^2)}{(l_2^2-l_1^2)^3}.$$

Совет: используйте формулы (5.2.3–5.2.8).

2. Перепишите результат Упражнения 1 в полярных координатах.

Ответ:

$$u_\rho = \frac{\omega}{\pi(1-\nu)}\left\{-(1-2\nu)\left[\frac{a-(a^2-l_1^2)^{1/2}}{\rho}\right]+\frac{zl_1(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)}\right\},$$

$$\sigma_\rho = \frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)}\left\{(1-2\nu)\frac{a-(a^2-l_1^2)^{1/2}}{\rho^2} - \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}\right.$$

$$\left. - \frac{az(l_2^2-a^2)^{1/2}[l_1^4-l_2^4+\rho^2(l_1^2+3l_2^2-4a^2)]}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)^3}\right\},$$

$$\sigma_\phi = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)}\left\{(1-2\nu)\frac{a-(a^2-l_1^2)^{1/2}}{\rho^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}[a^2-(1-2\nu)l_2^2]}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\right\},$$

$$\tau_{\rho z} = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)}\frac{z\rho(a^2-l_1^2)^{1/2}(3l_2^2+l_1^2-4a^2)}{(l_2^2-l_1^2)^3}.$$

5.3 Наклонный круговой штамп на упругом полупространстве

Случай плоского кругового штампа, вдавливаемого в трансверсально изотропное упругое полупространство нецентрально приложенной силой P может быть рассмотрен как суперпозиция двух задач: центрально нагруженный штамп, который был рассмотрен раньше, и штамп под действием опрокидывающего момента $\mathcal{M}$, который будет рассмотрен здесь. Пусть перемещения под штампом имеют вид:

$$\omega = b_x y - b_y x. \tag{5.3.1}$$

Здесь b_x и b_y являются углами наклона относительно осей Ox и Oy соответственно. Введём комплексный угол наклона

$$b = b_x + ib_y. \tag{5.3.2}$$

Выражение (5.3.1) может быть теперь переписано как

$$\omega(\rho,\phi) = \Im\{\bar{b}\rho e^{i\phi}\}. \tag{5.3.3}$$

Здесь $\Im$ обозначает мнимую часть. Подстановка (5.3.3) в (5.1.9) даёт:

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{2\Im\{\bar{b}\rho e^{i\phi}\}}{\pi^2 H(a^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{5.3.4}$$

Вычисление потенциальной функции (5.1.4) приводит к интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}} \ln(R_0+z)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{5.3.5}$$

Принимая во внимание что

$$\frac{\rho e^{i\phi}}{(a^2-\rho^2)^{1/2}} = -\Lambda(a^2-\rho^2)^{1/2},$$

интеграл в (5.3.5) может быть вычислен по частям, с результатом данным в (A4.1.5). Потенциальная функция примет форму:

$$F = \frac{2\Im\{\bar{b}\rho e^{i\phi}\}}{\pi H}\left[z\sin^{-1}\frac{a}{l_2} - (a^2-l_1^2)^{1/2}\left(1-\frac{l_1^2+2a^2}{3\rho^2}\right) - \frac{2a^3}{3\rho^2}\right]. \tag{5.3.6}$$

Все нужные производные могут быть взяты из Аппендикса A4.1, и мы можем записать полное решение:

$$u = \frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k}{m_k-1}\left\{b\left[z_k\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - (a^2-l_{1k}^2)^{1/2}\right]\right.$$

$$\left. - \bar{b}e^{2i\phi}\frac{2a^3-(l_{1k}^2+2a^2)(a^2-l_{1k}^2)^{1/2}}{3\rho^2}\right\}, \tag{5.3.7}$$

$$w = \frac{2}{\pi}(b_x y - b_y x)\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{m_k-1}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - \frac{a(l_{2k}^2-a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2}\right], \tag{5.3.8}$$

$$\sigma_1 = -\frac{8A_{66}}{\pi}(b_x y - b_y x)a^2\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k^2-(m_k+1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k-1)}\frac{(a^2-l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2(l_{2k}^2-l_{1k}^2)}, \tag{5.3.9}$$

$$\sigma_2 = \frac{2A_{66} i e^{i\phi}}{\pi} \sum_{k=1}^{2} \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left\{ b \frac{a l_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right.$$

$$\left. - \bar{b} e^{2i\phi} \left[\frac{4[(l_{1k}^2 + 2a^2)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} - 2a^3]}{3\rho^3} + \frac{a l_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right] \right\}, \tag{5.3.10}$$

$$\sigma_z = \frac{2(b_x y - b_y x)}{\pi^2 H(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^{2} (-1)^k \gamma_k \frac{a^2 (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 (l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}, \tag{5.3.11}$$

$$\tau_z = \frac{i}{\pi^2 H(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \left\{ b \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2} \right] \right.$$

$$\left. + \bar{b} e^{2i\phi} \frac{a l_{1k}^2 (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 (l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right\}. \tag{5.3.12}$$

Заметка. Некоторые интегралы от специальных функций могут теперь быть вычислены просто путём сравнения решения, полученного при помощи интегральных преобразований с соответствующим решением, полученным нашим методом. Например, сравнение (4.1.24) с формулами (1.42) и (1.43) из (Kassir and Sih, 1975) ведёт к

$$\int_0^\infty J_{n+1/2}(as)\, J_n(\rho s)\, e^{-sz} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} (a\rho)^{-n} \int_0^{l_1} \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Мы проверили численно, что последняя формула правильна также и для нецелых n. Существует огромное количество материала о Бесселевых функциях в литературе, так что трудно доказать, что последний результат являются новым, но вполне вероятно, он есть новый, так как наши обозначения l_1 и l_2 никто не использовал раньше. Вот другой пример, показывающий просто, насколько полезны эти обозначения. Пусть нам нужно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \sin ax\, J_1(\rho x)\, e^{-zx} \frac{dx}{x^2}. \tag{5.3.13}$$

Мы не смогли найти этот интеграл в таблицах, но мы нашли другой (Градштейн и Рыжик, 1963, формула 6.752.2)

$$\int_0^\infty \sin ax\, J_1(\rho x)\, e^{-zx} \frac{dx}{x} = \frac{a}{\rho}(1-r), \tag{5.3.14}$$

где параметр r является положительным корнем уравнения

$$a^2 = \frac{\rho^2}{1-r^2} - \frac{z^2}{r^2}. \tag{5.3.15}$$

Интеграл (5.3.13) может быть вычислен интегрированием обеих сторон (5.3.14) по z. Нам нужно получить явное выражение для r из алгебраичееского уравнения четвёртого порядка (5.3.15), подставить результат в (5.3.14) и интегрировать результат по z, что с первого взгляда не представляется возможным. Введение параметров l_1 и l_2 позволяет нам найти положительный корень (5.3.15) в очень простой форме, а именно, $r = (a^2 - l_1^2)^{1/2}/a$. Интегрирование по z может быть выполнено, используя (A4.2.3), и окончательный результат есть

$$\int_0^\infty \sin ax\, J_1(\rho x) e^{-zx} \frac{dx}{x^2} = \frac{(2a^2 - l_1^2)(l_2^2 - a^2)^{1/2} - 2a^2 z}{2a\rho} + \frac{\rho}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right). \tag{5.3.16}$$

Упражнение 5.3

1. Рассмотрите взаимодействие сосредоточенной нагрузки P_0, приложенной в произвольной точке (ρ,ϕ,z) в направлении Oz, с плоским круговым штампом радиуса a.

Решение:

Можно заключить из (5.2.4), что нормальное перемещение w в точке (ρ,ϕ,z), вызываемое единичной силой приложенной к штампу, есть

$$w = \frac{H}{a}\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{m_k - 1}\sin^{-1}(\frac{a}{l_{2k}}).$$

Приложение теоремы взаимности немедленно даёт осадку штампа ω, вызванную нагрузкой P_0

$$\omega = \frac{H}{a}P_0\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{m_k - 1}\sin^{-1}(\frac{a}{l_{2k}}).$$

Угол наклона штампа δ может быть получен в той же манере из (5.3.8). Результат равен

$$\delta = \frac{3H}{2a^3}P_0\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{m_k - 1}\left[\rho\sin^{-1}(\frac{a}{l_{2k}}) - \frac{l_{1k}(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}}\right].$$

Все другие параметры могут быть найдены аналогичным образом.

2. Исследуйте взаимодействие между плоским круговым штампом и произвольно расположенной тангенциальной силой $T = T_x + iT_y$.

Плоский штамп произвольной формы под действием нормальной центрально приложенной силы

Мы развиваем здесь общий метод решения неклассических контактных задач. Простое и достаточно точное взаимоотношение установлено между осадкой штампа и приложенной силой для произвольного плоского штампа. Специфические формулы выведены для штампа с основанием в форме полигона, треугольника, прямоугольника, ромба, кругового сектора и кругового сегмента. Все формулы проверены против известных решений в литературе, и их хорошая точность подтверждена.

Теория. Представление в этой секции будет сделано в терминах упругих контактных задач, но следует иметь в виду, что все результаты могут быть использованы в других технических дисциплинах. Мы описываем здесь идею аналитического подхода к упругим контактным задачам, которая позволяет нам вывести простые, но точные формулы для штампов различной формы. Основное интегральное уравнение дано в (5.1.8). Аналитический подход основан на интегральном представлении для величины обратной расстоянию, которая была выведена в (1.1.27).

Подстановка (1.1.27) в (5.1.8) даёт, после изменения порядка интегрирования:

$$w(\rho,\phi)=\frac{2}{\pi}H\int_0^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\phi_0\int_x^{a(\phi_0)}\frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0},\phi-\phi_0)}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0. \tag{5.4.1}$$

Рассмотрим плоский штамп, занимающий область S в плане. Граница области определена в полярных координатах как

$$\rho=a(\phi). \tag{5.4.2}$$

Пусть нормальное давление под штампом распределено согласно

$$\sigma=\frac{ca(\phi)}{\left[a^2(\phi)-\rho^2\right]^{1/2}} \tag{5.4.3}$$

где c есть постоянная, которая может быть определена из условия, что интеграл от σ по площади S должен дать приложенную силу P.

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{a(\phi)}\frac{ca(\phi)}{\left[a^2(\phi)-\rho^2\right]^{1/2}}\rho d\rho=c\int_0^{2\pi}a^2(\phi)d\phi=2Ac=P, \tag{5.4.4}$$

где A есть площадь S. Важно заметить, что сила P не зависит от положения начала системы координат. Это положение может быть определено из условия, что распределение напряжений (5.4.3) не должно давать никаких опрокидывающих моментов относительно начала координат, что ведёт к двум уравнениям:

$$\int_0^{2\pi}a^3(\phi)\cos\phi\, d\phi=0\,,\qquad \int_0^{2\pi}a^3(\phi)\sin\phi\, d\phi=0.$$

Левая сторона обоих уравнений пропорциональна x и y координатам центра тяжести, это означает, что начало системы полярных координат должно быть расположено в центре тяжести области контакта S. Мы получаем немедленно из (5.4.4), что:

$$\sigma = \frac{P\,a(\phi)}{2A\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}. \tag{5.4.5}$$

В случае плоского штампа $w = \delta = const$. Теперь подставляя (5.4.5) в (5.4.1), мы можем проверить, как близки к постоянной будут перемещения, вызываемые распределением напряжений (5.4.5). Интегрирование по ρ_0 даёт:

$$w(\rho,\phi) = \frac{HP}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|}\frac{x\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$\times\int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\phi_0)} F\left(1 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) d\phi_0. \tag{5.4.6}$$

Здесь F Обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Последующее вычисление нормального перемещения может быть выполнено отдельно для каждой гармоники. Нулевая гармоника имеет вид:

$$w_0 = \frac{HP}{2A}\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} a(\phi)\,d\phi. \tag{5.4.7}$$

Важно заметить, что вторая гармоника равна нулю для произвольного контура, и что все нечётные гармоники будут равны нулю, если нечётные гармоники не входят в выражение для $a(\phi)$. Выражение для четвёртой гармоники есть:

$$w_4 = \frac{HP}{2A}\frac{8}{35}\rho^3\int_0^{2\pi}\frac{e^{4i(\phi-\phi_0)}\,d\phi_0}{a^2(\phi_0)}. \tag{5.4.8}$$

Исследование последующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается.

Теперь рассмотрим более детально случай квадрата со стороной $2l$. Уравнение границы в этом случае есть $a(\phi) = l/\cos\phi$ для $-\pi/4 < \phi < \pi/4$, и аналогичная логика повторяется вне этого интервала. Мы можем вычислить несколько ненулевых гармоник:

$$w_0 = \frac{HP}{2A} 4\pi l \ln(1+\sqrt{2}), \quad w_4 = \frac{HP}{2A}\frac{32\rho^3 \cos 4\phi}{105 l^2}, \tag{5.4.9}$$

$$w_8 = -\frac{HP}{2A}\frac{64}{3465}\rho\cos 8\phi\left[(\frac{\rho}{l})^2 + \frac{12}{13}(\frac{\rho}{l})^4 + \frac{20}{13}(\frac{\rho}{l})^6\right],$$

$$w_{12} = \frac{HP}{2A}\rho\cos 12\phi\left[\frac{6\,\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(\frac{17}{2})}(\frac{\rho}{l})^2 + \frac{144\,\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{19}{2})}(\frac{\rho}{l})^4\right.$$

$$\left. + \frac{1200\,\Gamma(\frac{5}{2})\,\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{21}{2})}(\frac{\rho}{l})^6 + \frac{1680\,\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{23}{2})}(\frac{\rho}{l})^8 + \frac{3780\,\Gamma(\frac{11}{2})}{\Gamma(\frac{25}{2})}(\frac{\rho}{l})^{10}\right].$$

Если мы положим, что осадка штампа $\delta \approx w_0$, тогда оставшиеся гармоники могут быть названы невязкой решения. Прямые вычисления показывают, что ошибка меньше, чем 3% внутри круга $\rho \le l$. Ошибка невелика вне круга достигая 20% в вершине, и уменьшаясь очень быстро с расстоянием от вершины. Принимая во внимание изменение знака ошибки, ошибка в главном векторе сил будет ещё меньше, и мы можем положить взаимоотношение между осадкой штампа и главным вектором сил в форме (5.4.7), которое может быть переписано как:

$$\delta \approx \frac{HP}{g\sqrt{A}}, \tag{5.4.10}$$

где A есть площадь основания, и g есть безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрии штампа.

$$g = \frac{2\sqrt{A}}{\pi^2 r_a}, \tag{5.4.11}$$

где

$$r_a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\phi)\,\mathrm{d}\phi \tag{5.4.12}$$

может быть назван *средним радиусом* по отношению к центру тяжести. Если бы правильное распределение давления под штампом, требующееся для обеспечения $w = \delta$ можно было бы найти, то главный вектор сил P был бы связан с δ формулой:

$$\delta = \frac{HP}{g_1\sqrt{A}}.$$

Наше основное предположение — g из уравнения (5.4.10), которое мы можем вычислить, является хорошей аппроксимацией g_1. Наша задача теперь — найти значение g для штампов различных форм. Мы можем вычислить коэффициент g для квадрата из (5.4.9) как

$$g = \frac{1}{\pi \ln(1+\sqrt{2})} = 0.3611,$$

что очень близко к приближённому значению 0.3607 данному Максвеллом для ёмкости квадрата. Используя электростатическую аналогию, можно легко вывести, что наш коэффициент g связан с ёмкостью C плоской плиты соотношением:

$$g = \frac{C}{\sqrt{A}}. \tag{5.4.13}$$

Конечно, близость к результату Максвелла не означает, что наш результат такой уж точный. Значение g, которое представляется точным, было получено в (Noble, 1960) и (Solomon, 1964a), и равно 0.367, так что ошибка нашего результата есть 1.6%, что совсем неплохо. Теперь представляется разумным предположить, что формулы (5.4.10–5.4.12) действительны для произвольного плоского штампа, и нам нужно проверить, насколько они точны для каждого частного случая.

Мы нашли в литературе только одну *общую* формулу типа (5.4.10), предложенной в статье Solomon (1964b). Его результат, выраженный через коэффициент g читается:

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}} \frac{I_0^{1/8}}{A^{1/4}}. \tag{5.4.14}$$

где I_0 обозначает полярный момент инерции. Можно легко проверить, что формула (5.4.14) точна для круга, так что мы можем ожидать, что она будет достаточно точна для областей с отношением длины к ширине недалеко от единицы, но ошибка может быть значительной для удлинённых областей. Например, в случае эллипса с полуосями a и b формула (5.4.14) даёт:

$$g = \frac{2^{7/8}}{\pi^{3/2}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^{1/8}.$$

Ошибка этой формулы может быть значительной для больших $\varepsilon = a/b$. Наши формулы (5.4.10–5.4.12) в случае эллипса точны.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим плоский штамп, с базой в форме полигона с n сторонами, с единственным ограничением, что функция $a(\phi)$, описывающая его границу, является непрерывной и однозначной. Начало системы координат расположено в центре тяжести, как и раньше. Мы нумеруем стороны полигона против часовой стрелки от 1 до n, $a_к$ обозначает длину k–ой стороны. Вершина, где стороны $a_к$ и $a_{к+1}$ пересекаются, пронумерована k+1. Ясно, что значение индекса равное n+1 понимается как 1. Мы обозначим расстояние от центра тяжести до k–ой вершины как $b_к$. Пусть $A_к$ есть площадь треугольника, образованного сторонами $a_к$, $b_к$ и $b_{к+1}$, полная площадь полигона A равна сумме $A_к$. Тогда формулы (5.4.11) и (5.4.12) дают следующее выражение для коэффициента g

$$g = \frac{2\sqrt{A}}{\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{A_k}{a_k}\ln\frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}}. \tag{5.4.15}$$

Формула Соломона (5.4.14) в этом случае даёт:

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{2A_k^3}{A^2 a_k^2}\left[1 + \frac{a_k^4 + 3(b_{k+1}^2 - b_k^2)^2}{48A_k^2}\right]\right\}^{1/8}. \tag{5.4.16}$$

В случае правильного полигона формулы (5.4.15) и (5.4.16) упрощаются:

$$g = \frac{4\sqrt{\tan(\pi/n)}}{\pi\sqrt{n}\,\ln\frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}}, \tag{5.4.17}$$

и

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}}\left[\frac{2\cos^2(\pi/n) + 1}{3n\sin(2\pi/n)}\right]^{1/8} \tag{5.4.18}$$

соответственно. Формулы (5.4.17) и (5.4.18), хотя выглядят различными, дают практически те же самые результаты во всём интервале $3 \le n < \infty$. Рассмотрим несколько частных значений n. Для равностороннего треугольника ($n=3$) формула (5.4.17) даёт g = 0.3673. Значение g, которое похоже является точным, может быть вычислено из (Solomon 1964a), и равно 0.3829, так что ошибка нашего результата равна 4.1%. Как мы видели ранее, ошибка (5.4.17) для квадрата есть 1.6%. Так как формула (5.4.17) в предельном случае $n \to \infty$ даёт точный результат для круга $g = 2/\pi^{3/2} = 0.35917$, мы можем ожидать, что ошибка (5.4.17) будет уменьшаться с ростом n. Для правильного пентагона $g = 0.3599$. Мы не нашли в литературе ничего, что можно было бы сравнить с этим результатом. Значение g для правильного гексагона равно 0.3595, что находится внутри границ данных в Pólya and Szegö (1951) $0.35917 < g < 0.3635$, и становится ясно, что максимум возможной ошибки действительно уменьшается с ростом n. Следует отметить, что значение g не изменяется значительно во всём интервале $3 \le n < \infty$.

Пример 2: Треугольник. В случае треугольного штамп со сторонами a_1, a_2 и a_3, формула (5.4.15) упрощается следующим образом:

$$g = \frac{6}{\pi\sqrt{A}}\left[\frac{1}{a_1}\ln\frac{b_1+b_2+a_1}{b_1+b_2-a_1} + \frac{1}{a_2}\ln\frac{b_2+b_3+a_2}{b_2+b_3-a_2} + \frac{1}{a_3}\ln\frac{b_3+b_1+a_3}{b_3+b_1-a_3}\right]^{-1}. \tag{5.4.19}$$

Параметры в (5.4.19) могут быть определены из хорошо известных геометрческих формул:

$$A = [p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)]^{1/2}, \quad p = (a_1+a_2+a_3)/2,$$

$$b_1 = \frac{1}{3}[2(a_1^2+a_3^2)-a_2^2]^{1/2}, \qquad b_2 = \frac{1}{3}[2(a_2^2+a_1^2)-a_3^2]^{1/2},$$

$$b_3 = \frac{1}{3}[2(a_3^2+a_2^2)-a_1^2]^{1/2}.$$

Мы не знаем ни одной статьи, где бы задача о призвольном треугольном штампе была бы решена, но некоторые частные случаи были рассмотрены, так что мы можем сравнить результаты. Когда $a_1 = a_2 = l$, и угол между этими двумя сторонами равен α, формула для коэффициента g может быть переписана в форме:

$$g = \frac{6}{\pi}\sqrt{\tan(\alpha/2)}\left[2\sin(\frac{\alpha}{2})\ln(\cot\frac{2\gamma-\alpha}{4}\cot\frac{\alpha}{4}) + \ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2})\right]^{-1}, \tag{5.4.22}$$

где $\gamma = \tan^{-1}(3\tan(\alpha/2))$.

Равнобедренный треугольник был рассмотрен Рвачёвым и Проценко (1977) которые дали приближённое выражение для распределения напряжений, но по какой–то причине, они не дали соотношения между главным вектором сил и осадкой штампа. Они представили однако график иллюстрирующий положение точки приложения силы P как функция угла α. Их график указывает на малую вариацию (около 0.01 высоты треугольника) координаты около центра тяжести. Мы думаем, что Рвачёв и Проценко не поняли, что эти вариации объясняются приближённым характером их метода, и что точное положение точки — в центре тяжести. Конечно, предыдущее заявление должно пониматься как недоказанная теорема, так как наш метод тоже приближённый.

Случай $\alpha = \pi/2$ был рассмотрен в Pólya and Szegö (1951) которые дали следующее границы для g: $0.35917 < g < 0.4282$. Окон и Харрингтон (1970) получили $g = 0.3867$ как наиболее вероятный результат. Наш результат есть $g = 0.374$, внутри допустимого интервала и отличается на 3.3% от результата Окона и Харрингтона. Следующие границы были установлены в Pólya and Szegö для треугольника со сторонами a, $a/2$ и $a\sqrt{3}/2$: $0.35917 < g < 0.517$. Наш результат $g = 0.3822$ расположен внутри этого интервала. Похоже, что нет другого источника, чтобы сравнить с этим результатом.

Пример 3: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольной базой, с полуосями a и b. Введём параметр $\varepsilon = a/b$. Формула (5.4.15) в этом случае сводится к

$$g = \frac{2}{\pi\left[\sqrt{\varepsilon}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sinh^{-1}\varepsilon\right]}. \tag{5.4.21}$$

Howe (1920) предложил приближённую формулу для ёмкости прямоугольника, которая может быть выражена через коэффициент g следующим образом:

$$g = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sinh^{-1}\varepsilon + \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3\varepsilon^2} - \frac{(\varepsilon^2+1)^{3/2}}{3\varepsilon^2}\right]}. \tag{5.4.22}$$

Результат Соломона (5.4.16) в этом случай принимает форму:

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}}\left[\frac{\varepsilon}{12} + \frac{1}{12\varepsilon}\right]^{1/8}. \tag{5.4.23}$$

Мы нашли в литературе некоторые численные результаты, которые похожи на более или менее точные. Бородачёв и Галин (1974) рассмотрели случай узкого прямоугольного штампа, и Noble (1960) исследовал эквивалентную задачу о распределении электрического заряда на прямоугольной пластине. Их данные, выраженные через коэффициент g, представлены ниже и сравнены с нашими результатами из (5.4.21) и с результатами Howe (5.4.22) и Solomon (5.4.23). Следующее соотношение может быть установлено между коэффициентом γ Бородачёва—Галина и нашим g: $\gamma = 1/2\pi g\sqrt{\varepsilon}$.

ε –	0.020	0.050	0.100	0.125	0.150	0.200	0.250	0.500	1.000
Бородачёв и Галин	0.7375	0.5661	0.4819	—	0.4458	0.4259	—	—	—
Noble	—	—	—	0.4543	—	—	0.4047	0.3762	0.3670
Формула (5.4.21)	0.8031	0.6072	0.5037	0.4771	0.4576	0.4306	0.4128	0.3742	0.3612
Howe (5.4.22)	0.6916	0.5317	0.4481	0.4268	0.4112	0.3899	0.3759	0.3462	0.3363
Соломон (5.4.23)	0.5402	0.4819	0.4423	0.4304	0.4211	0.4071	0.3969	0.3715	0.3613
Расхождение (%)									
Формула (5.4.21)	–8.9	–7.3	–4.5	–5.0	–2.6	–1.1	–2.0	0.5	1.6
Howe (5.4.22)	6.2	6.1	7.0	6.1	7.8	8.5	7.1	8.0	8.4
Соломон (5.4.23)	26.7	14.9	8.2	5.3	5.5	4.4	1.9	1.3	1.6

Несколько полезных заключений может быть сделано из представленных данных. Представляется логичным предположить, что ошибка приближённой формулы должна меняться монотонно (или иметь только один экстремум) по отношению к определённому параметру. Тот факт, что расхождение каждой формулы прыгает, когда база для сравнения движется с данных Noble к данным Бородачёва и Галина, указывает, что результаты по крайней мере одного автора не являются точными. Наша формула, похоже, лучше двух других в достаточно широком интервале отношений длины к ширине. Как и ожидалось, формула Соломона достаточно точна только тогда, когда отношение длины к ширине близко к единице. Ошибка формулы Howe (5.4.22) почти не меняется. Если это действительно так, то мы можем улучшить её точность весьма значительно путём умножения её на постоянную, скажем, 1.07.

Пример 4: Ромб. Пусть α будет углом в одной из вершин ромба. Формула (5.4.15) в этом случай даёт:

$$g = \frac{2}{\pi\sqrt{\sin\alpha}\,\ln\dfrac{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)+1}{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)-1}}. \tag{5.4.24}$$

Та же самая формула, выраженная через полуоси ромба a и b и параметр $\varepsilon = a/b$ имеет вид:

$$g = \frac{[2(\varepsilon + 1/\varepsilon)]^{1/2}}{\pi \ln \dfrac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}}. \tag{5.4.25}$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов, относящихся к штампу в форме ромба. В электрических науках, сходная задача о ёмкости ромбовидной пластнки была решена численно в Okon and Harrington (1970). Их результат, выраженный через коэффициент g, для ромба с отношением полуосей $a{:}b = 0.7{:}1.65$ равен $g = 0.3855$. Формула (5.4.25) даёт $g = 0.3744$, что отличается на 3% от результата Окона и Харрингтона. Они также рассмотрели ромб с отношением полуосей 1:2. Их результат, $g = 0.3705$, почти совпадает с нашим $g = 0.3698$.

Пример 5: Круговой сегмент. Пусть сегмент характеризуется радиусом r и углом 2α. Положение его центра тяжести определено как $x_c = kr$, где

$$k = \frac{2\sin^3\alpha}{3(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)}. \tag{5.4.26}$$

Уравнение границы сегмента по отношению к его центру тяжести принимает форму:

$$a(\phi) = r[-k\cos\phi + (1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}], \quad \text{для} \quad 0 \le \phi \le \pi-\gamma \quad \text{или} \quad \pi+\gamma \le \phi < 2\pi;$$

и

$$a(\phi) = r\frac{k-\cos\alpha}{\cos(\pi-\phi)} \quad \text{для} \quad \pi-\gamma \le \phi \le \pi+\gamma. \tag{5.4.27}$$

Подстановка (5.4.27) в (5.4.11–5.4.12) даёт:

$$g = \frac{2(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)^{1/2}}{\pi\left[2\mathrm{E}(k) - \mathrm{E}(\gamma,k) - k\sin\gamma + (k-\cos\alpha)\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2})\right]}. \tag{5.4.28}$$

где $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(k - \cos\alpha))$. Мы нашли только один численный пример, чтобы проверить точность формулы (5.4.28): Okon and Harrington (1970) вычислили ёмкость полукруга. Их результат, выраженный через коэффициент g, есть 0.3724. Формула (5.4.28) даёт 0.3714 с расхождением 0.3%.

Пример 6: Круговой сектор. Повторение процедуры, описанной в предыдущем параграфе, приводит к следующему результату для кругового сектора, характеризуемого углом 2α:

$$g = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi\left[\mathrm{E}(\gamma,k) - k\sin\gamma + k\sin\alpha\,\ln[\cot(\alpha/2)\cot((\gamma-\alpha)/2)]\right]}. \tag{5.4.29}$$

Здесь, $k = 2\sin\alpha/(3\alpha)$, и $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(\cos\alpha - k))$. Окон и Харрингтон (1970) получили $g = 0.3668$ для случая квадранта. Формула (5.4.29) для $\alpha = \pi/4$ даёт $g = 0.3639$, с расхождением 0.8%.

Дискуссия. Мы можем спросить, существует ли контур, отличный от эллипса, для которого выражение типа (5.4.5) будет *точным* решением интегрального уравнения (5.1.8). Выражение (5.4.6) обеспечивает достаточные условия:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{in(\phi-\phi_0)} F\left(1 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) \mathrm{d}\phi_0 \tag{5.4.30}$$

должен быть равен нулю для $n \neq 0$. Интеграл (5.4.30) исчезает для всех нечётных n, если $a(\phi)$ содержит только чётные гармоники. В случае чётных n, гипергеометрическая функция в (5.4.30) представляет конечный полином по $x/a(\phi)$ степени не выше, чем n–2, а это означает, что интеграл исчезнет, если $(a(\phi))^{-2}$ содержит гармоники не выше, чем вторая, что соответствует эллипсу. Вопрос, являются ли эти условия также необходимыми, требует дополнительного исследования.

Формула Соломона (5.4.14) может быть рассмотрена как частный случай от более общего, а именно

$$g = \frac{2}{\pi\sqrt{A}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a(\phi))^{\mathrm{m}} \mathrm{d}\phi\right]^{-1/2\mathrm{m}} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a(\phi))^{\mathrm{n}} \mathrm{d}\phi\right]^{1/2\mathrm{n}}. \tag{5.4.31}$$

для $m = 2$ и $n = 4$. Можно спросить, является ли этот выбор параметров m и n в каком–то смысле оптимальным. Прямые вычисления показывают, что для правильного полигона, $m = 1$ и $n = 9$ дают намного лучшую точность, чем (5.4.18). В случае прямоугольника $m = 1$ и $n = 7$ более точны, чем (5.4.23). Ясно, что формула, предложенная Соломоном (5.4.14) не является наилучшим частным случаем (5.4.31). Можно предложить множество формул типа (5.4.31), но это будет просто упражнение в аппроксимации кривых, что не входит в рамки данной книги.

Моссаковский (1972) рассмотрел случай плоского штампа, почти кругового в плане. Он предложил решение для контактных напряжений в форме:

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{F_0(\rho,\phi) + \alpha F_1(\rho,\phi) + \alpha^2 F_2(\rho,\phi) + \ldots}{\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}, \tag{5.4.32}$$

где α есть малый параметр. Выражение (5.4.32) имеет два существенных недостатка по сравнению с (5.4.3): (*i*) даже в случае эллипса, выражение (5.4.32) даёт бесконечный ряд вместо точного решения в замкнутой форме; (*ii*) решение (5.4.32) в точке $\rho = 0$ является функция ϕ, что не имеет физического смысла. Хотя метод Моссаковского может дать достаточно точную оценку для взаимоотношения между осадкой штампа и приложенной силой, его заявление, что он мог вычислить распределение напряжений под штампом является неправильным из–за неправильного предположения о сингулярности типа квадратного корня на границе штампа (например, в случае квадратного штампа).

Математически аналогичная задача проницания звука через отверстие общего вида в жёстком плоском экране была рассмотрена в (Fabrikant, 1986b). Тот же метод был использован для нахождения электрической ёмкости плоской плиты (Fabrikant, 1986k).

Упражнение 5.4

1. Подтвердите правильность (5.4.6).
2. Выведите (5.4.7).
3. Проверьте (5.4.15).
4. Выведите (5.4.19).
5. Обобщите теорию для случая неоднородного полупространства, с модулем упругости пропорциональным степенной функции глубины.

5.5 Наклонный плоский штамп общей формы

Приближённое аналитическое решение дано здесь для контактной задачи о плоском наклонном штампе произвольной формы в плане под действием нормальной нецентрально приложенной силы. Некоторые точные взаимоотношения установлены между опрокидывающим моментом и углом наклона произвольного плоского штампа. Специфические формулы выведены для штампа с подошвой в форме полигона, треугольника, прямоугольника, ромба, кругового сектора и кругового сегмента. Все формулы проверены против решений известных в литературе, и их точность подтверждена.

Теория. Рассмотрим плоский штамп с подошвой S, чья граница дана в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi).$$

где функция $a(\phi)$ ограничена и однозначна. Штамп прижат к упругому полупространству нормальной силой P приложенной в точке с декартовыми координатами x_0 и y_0. Эта нагрузка статически эквивалентна центрально приложенной силе P и двум опрокидывающим моментам $M_x = Py_0$ и $M_y = -Px_0$. Случай центрально приложенной силы был рассмотрен в предыдущей секции. Нам остаётся рассмотреть штамп под действием опрокидывающего момента, и наложить результаты. Повторяя процедуру секции 5.4, мы приходим к тому же основному интегральному уравнению, а именно,

$$w(\rho,\phi) = \frac{2}{\pi}H\int_0^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\phi_0\int_x^{a(\phi_0)}\frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0. \tag{5.5.1}$$

Пусть нормальное перемещение под штампом равно

$$w = \alpha_x y - \alpha_y x, \tag{5.5.2}$$

где α_x и α_y обозначают углы наклона относительно осей Ox и Oy соответственно. Необходимо получить соотношение между этими углами и опрокидывающими моментами.

Представим распределение нормального напряжения под штампом как

$$\sigma = \frac{a(\phi)\rho(p_1\cos\phi + p_2\sin\phi)}{\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}, \tag{5.5.3}$$

где p_1 и p_2 пока неизвестные постоянные. Используем условие, что интеграл от σ по площади S должен быть равен нулю. Так как p_1 и p_2

независимы, это ведёт к двум уравнениям:

$$\int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \cos\phi \, d\phi = 0\,, \qquad \int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \sin\phi \, d\phi = 0. \tag{5.5.4}$$

Уравнение (5.5.4) будет удовлетворено, если и только если начало координат расположено в центре тяжести области контакта. Направление осей координат будет овсуждено далее.

Взаимоотмошения между опрокидывающими моментами и параметрами p_1 и p_2 может быть установлено из условий статики:

$$M_x = Py_0 = \int\int_S \sigma y dS\,, \qquad M_y = -Px_0 = -\int\int_S \sigma x dS,$$

что приводит к

$$M_x = \frac{8}{3}(p_1 I_{xy} + p_2 I_x), \qquad M_y = -\frac{8}{3}(p_1 I_y + p_2 I_{xy}), \tag{5.5.5}$$

где I_x, I_y и I_{xy} — хорошо известные величины моментов инерции. Теперь необходимо найти взаимоотношения между параметрами p_1, p_2 и углами α_x, α_y. Это может быть сделано путём подстановки (5.5.3) в (5.5.1) которое, после интегрирования по ρ_0, даёт:

$$w(\rho,\phi) = H\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|}\frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$\times\int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\phi_0)} F\left(\frac{3-|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right)(p_1\cos\phi_0 + p_2\sin\phi_0) d\phi_0. \tag{5.5.6}$$

Здесь F обозначет гипергеометрическую функцию Гаусса. Дальнейшее вычисление нормального перемещения может быть выполнено отдельно для каждой гармоники. Заметим, что нулевая и все чётные гармоники от w будут равны нулю, если $a(\phi)$ содержит только чётные гармоники. Первая гармоника примет форму:

$$w_1(\rho,\phi) = \frac{\pi}{2}H\rho\int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi_0)(p_1\cos\phi_0 + p_2\sin\phi_0)\, a(\phi_0)\, d\phi_0,$$

что может быть упрощёно:

$$w_1(\rho,\phi) = \frac{\pi}{2} H\rho[(p_1 J_y + p_2 J_{xy})\cos\phi + (p_1 J_{xy} + p_2 J_x)\sin\phi], \tag{5.5.7}$$

где следующие параметры были введены:

$$J_x = \int_0^{2\pi} a(\phi)\sin^2\phi\, d\phi\,, \qquad J_y = \int_0^{2\pi} a(\phi)\cos^2\phi\, d\phi\,,$$

$$J_{xy} = \int_0^{2\pi} a(\phi)\sin\phi\cos\phi\, d\phi \tag{5.5.8}$$

Похоже, что эти параметры не были ранее использованы в технике, так что они не имеют общепринятых названий. Так как их тензорны свойства аналогичны моментам инерции, мы назовём J_x и J_y *линейными моментами двумерной области относительно осей Ox и Oy* соответственно; J_{xy} назовём *смешанным линейным моментом двумерной области.*

Важно отметить, что третья гармоника равна нулю для любого контура. Вот выражение для пятой гармоники

$$w_5(\rho,\phi) = \frac{128}{315} H\rho^4 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 5(\phi - \phi_0)}{a^2(\phi_0)} (p_1\cos\phi_0 + p_2\sin\phi_0) d\phi_0,$$

которое может быть преобразовано в

$$w_5(\rho,\phi) = \frac{64}{315} H\rho^4 \{[(A_{c6} + A_{c4})p_1 + (A_{s6} - A_{s4})p_2]\cos 5\phi$$

$$+ [(A_{s6} + A_{s4})p_1 + (A_{c4} - A_{c6})p_2]\sin 5\phi\}. \tag{5.5.9}$$

Здесь следующие геометрические характеристики области контакта были введены:

$$A_{c4} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 4\phi\, d\phi}{(a(\phi))^2}\,, \quad A_{c6} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 6\phi\, d\phi}{(a(\phi))^2}\,,$$

$$A_{s4} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 4\phi \, d\phi}{(a(\phi))^2}, \quad A_{s6} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 6\phi \, d\phi}{(a(\phi))^2}. \tag{5.5.10}$$

Исследование последующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается.

Теперь рассмотрим более детально случай квадрата со стороной $2l$. Уравнение его границы в этом случай есть $a(\phi) = l/\cos\phi$ для $-\pi/4 < \phi < \pi/4$, с соответственным повторением вне этого интервала. Мы можем вычислить первые две ненулевые гармоники:

$$w_1 = \pi H l \rho \ln(1 + \sqrt{2})(p_1 \cos\phi + p_2 \sin\phi),$$

$$w_5 = \frac{128 H \rho^4}{945 l^2}(p_1 \cos 5\phi + p_2 \sin 5\phi).$$

Так как амплитуда w_5 значительно меньше, чем амплитуда w_1, представляется естественным положить $w \approx w_1$, и назвать остальные гармоники ошибкой решения. Прямые вычисления показывают, что ошибка меньше, чем 3% внутри круга $\rho \le l$. Ошибка относительно невелика вне круга, дистигая 20% в вершине и быстро уменьшаясь с увеличением расстояния от вершины. Принимая во внимание знак ошибки меняется, мы можем заключить, что ошибка в интегральных характеристиках будет ещё меньше. Прямое сравнение (5.5.2) и (5.5.7) ведёт к

$$\alpha_x = \frac{\pi}{2} H(p_1 J_{xy} + p_2 J_x), \quad \alpha_y = -\frac{\pi}{2} H(p_1 J_y + p_2 J_{xy}). \tag{5.5.11}$$

Обращение (5.5.11) даёт:

$$p_1 = -\frac{2}{\pi H} \frac{J_{xy}\alpha_x + J_x\alpha_y}{J_x J_y - J_{xy}{}^2}, \qquad p_2 = \frac{2}{\pi H} \frac{J_y\alpha_x + J_{xy}\alpha_y}{J_x J_y - J_{xy}{}^2}. \tag{5.5.12}$$

Подстановка (5.5.12) в (5.5.5) окончательно даёт требуемое соотношение:

$$M_x = \frac{16}{3\pi H}(m_{11}\alpha_x + m_{12}\alpha_y), \qquad M_y = \frac{16}{3\pi H}(m_{21}\alpha_x + m_{22}\alpha_y) \tag{5.5.13}$$

где

$$m_{11}=\frac{J_y I_x - J_{xy} I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^{\ 2}}, \qquad m_{12}=\frac{J_{xy} I_x - J_x I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^{\ 2}},$$

$$m_{21}=\frac{J_{xy} I_y - J_y I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^{\ 2}}, \qquad m_{22}=\frac{J_x I_y - J_{xy} I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^{\ 2}}.$$

Ясно, что все эти результаты могут быть переписаны в матричной или тензорной форме. Можно проверить, что формулы (5.5.13) инвариантны по отношению к произвольному вращению осей. То же свойство справедливо для $m_{11}+m_{22}$ и $m_{12}-m_{21}$. Строго говоря, согласно теореме взаимности, m_{12} должно быть равно m_{21}, так что формулы (5.5.13) в общем случае не удовлетворяют этой теореме. Однако, мы можем заявить,что эта теорема удовлетворяется приближённо. Мы понимаем под этим следующее свойство, которое было проверено путём прямых вычислений, а именно, $|m_{12}-m_{21}|/m_{11} \ll 1$ и $|m_{12}-m_{21}|/m_{22} \ll 1$. Эта теорема будет удовлетворена точно для любой области, которая имеет по крайней мере одну ось симметрии, потому что в этом случае $m_{12}=m_{21}=0$, при условии, что оси координат совпадают с главными центральными осями области контакта. Так как мы не имеем численных данных для несимметричных областей, которые могли бы быть использованы, чтобы проверить точность (5.5.13), мы рассмотрим далее только случаи областей контакта с осью симметрии. В этом случае формулы (5.5.5), (5.5.11) и (5.5.13) упрощаются значительно, а именно,

$$M_x=\frac{8}{3} I_x p_2, \qquad M_y=-\frac{8}{3} I_y p_1, \tag{5.5.14}$$

$$\alpha_x=\frac{\pi}{2} H J_x p_2, \qquad \alpha_y=-\frac{\pi}{2} H J_y p_1, \tag{5.5.15}$$

$$M_x=\frac{16}{3\pi H}\frac{I_x}{J_x}\alpha_x, \qquad M_y=\frac{16}{3\pi H}\frac{I_y}{J_y}\alpha_y. \tag{5.5.16}$$

Возвращаясь назад к задаче нецентрально нагруженного плоского штампа и используя результаты секции 5.4, мы можем написать следующее выражение для распределения напряжений под штампом через приложенную силу P и координаты точки её приложения x_0 и y_0:

$$\sigma = \frac{P a(\phi)}{2A\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}\left[1 + \frac{3}{4}A\left(\frac{xx_0}{I_y} + \frac{yy_0}{I_x}\right)\right], \tag{5.5.17}$$

где A есть площадь S. Выражение, эквивалентное (5.5.17) может быть записано через нормальное перемещение δ и углы наклона α_x и α_y

$$\sigma = \frac{2a(\phi)}{\pi H\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}\left[\frac{\delta}{J_0} + \frac{\alpha_x y}{J_x} - \frac{\alpha_y x}{J_y}\right], \tag{5.5.18}$$

где

$$J_0 = \int_0^{2\pi} a(\phi)\, d\phi$$

Параметр J_0 может быть назван *полярным линейным моментом*, благодаря аналогии с моментами инерции и свойству $J_0 = J_x + J_y$. Следует отметить также, что J_0 пропорционально среднему полярному радиусу. Выражения (5.5.17) и (5.5.18) *точны* для эллипса. Мы ожидаем, что они будут достаточно точны в области близкой к началу координат для штампа произвольной формы в плане с по крайней мере одной осью симметрии, в то время, как ошибка может стать довольно значительной близко к границе области S.

Перепишем формулы (5.5.16) в виде:

$$M_x = \frac{A^{3/2}}{2\pi H} h_x \alpha_x, \qquad M_y = \frac{A^{3/2}}{2\pi H} h_y \alpha_y, \tag{5.5.19}$$

где

$$h_x = \frac{32 I_x}{3A^{3/2} J_x}, \qquad h_y = \frac{32 I_y}{3A^{3/2} J_y}. \tag{5.5.20}$$

Мы ввели коэффициенты h_x и h_y по двум причинам: так как они безразмерные, то они характеризуют форму S и не зависят от её размеров; оба h_x и h_y равны соответствующим коэффициентам магнитной поляризуемости, что упростит сравнение наших результатов с данными из технической литературы. Формулы (5.5.19) имеют преимущества перед эквивалентными (5.5.16): факторы, зависящие от формы S отделёны от факторов, зависящих от её размеров. Можно заключить из (5.5.19), что в случае, когда область S увеличена так, что её линейные размеры удвоены, её площадь увеличивается в четыре раза, и опрокидывающий момент должен быть умножен на 8, чтобы произвести тот же самый угол наклона. Это заключение не очень ясно из (5.5.16). Оставшаяся часть этой секции будет посвящёна вычислению коэффициентов h_x и h_y для штампов различных форм в плане. Несколько таких штампов рассмотрены. Каждая конфигурация связана с её главными центральными осями и имеет по крайней мере одну ось симметрии, совпадающей с осью Ox. Высокая точность формул (5.5.20) подтверждена путём сравнения с имеющимися в литературе численными решениями.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим полигон с n сторонами. Функция $a(\phi)$, описывающая его границу, однозначна и ограничена. Начало системы координат расположено в центре тяжести, как и раньше. Пронумеруем стороны полигона против часовой стрелки от 1 до n, $a_к$ обозначает длину k—ой стороны. Вершина, где пересекаются стороны $a_к$ и $a_{к+1}$, имеет номер k+1. Ясно, что значение индекса n+1 понимается как 1. Мы обозначим расстояние от центра тяжести до k—ой вершины $b_к$; $\psi_к$ обозначает угол между осью Ox и перпендикуляром к стороне $a_к$. Пусть $A_к$ есть площадь треугольника со сторонами $a_к$, $b_к$ и $b_{к+1}$, суммарная площадь полигона A равна сумме $A_к$.

Следующие выражения может быть получены для моментов инерции:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2A_k^3}{a_k^2}\left[\sin^2\psi_k + \frac{b_{k+1}^2 - b_k^2}{4A_k}\sin 2\psi_k + \frac{a_k^4 + 3(b_{k+1}^2 - b_k^2)^2}{48A_k^2}\cos^2\psi_k \right],$$

$$I_y = \sum_{k=1}^{n} \frac{2A_k^3}{a_k^2}\left[\cos^2\psi_k - \frac{b_{k+1}^2 - b_k^2}{4A_k}\sin 2\psi_k + \frac{a_k^4 + 3(b_{k+1}^2 - b_k^2)^2}{48A_k^2}\sin^2\psi_k \right]. \tag{5.5.21}$$

(5.5.22)

Линейные моменты могут быть вычислены в форме:

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_k^2}\Bigg[-\left(\frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}}\right)[a_k^2 - (b_k - b_{k+1})^2]\cos 2\psi_k$$

$$+ 4A_k\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right)\sin 2\psi_k + 2a_k \ln\frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}\cos^2\psi_k \Bigg], \tag{5.5.23}$$

$$J_y = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_k^2} \Bigg[\Big(\frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}}\Big)[a_k^2 - (b_k - b_{k+1})^2]\cos 2\psi_k$$

$$- 4A_k\Big(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\Big)\sin 2\psi_k + 2a_k \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k} \sin^2\psi_k \Bigg]. \tag{5.5.24}$$

Подстановка (5.5.21–5.5.24) в (5.5.20) даёт коэффициенты h_x и h_y для произвольного полигона. В случае правильного полигона $a_k = a$, $b_k = b = a/[2\sin(\pi/n)]$, $\psi_k = 2\pi(k-1)/n$, $A_k = [a^2\cot(\pi/n)]/4 = [b^2\sin(2\pi/n)]/2$, $A = nA_k$, и формулы (5.5.21–5.5.24) упрощаются:

$$I_x = I_y = \frac{na^4}{64}\cot\frac{\pi}{n}\Big[\cot^2\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + \frac{1}{3}\Big] = \frac{nb^4}{24}\sin\frac{2\pi}{n}\Big[2 + \cos\frac{2\pi}{n}\Big], \tag{5.5.25}$$

$$J_x = J_y = \frac{na}{4}\cot\frac{\pi}{n}\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)} = \frac{nb}{2}\cos\frac{\pi}{n}\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}. \tag{5.5.26}$$

Подставляя (5.5.25) и (5.5.26) в (5.5.20), мы получим:

$$h_x = h_y = \frac{16\big(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\big)}{9\Big(n^3\sin\frac{\pi}{n}\cos^3\big(\frac{\pi}{n}\big)\Big)^{1/2}\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}}. \tag{5.5.27}$$

Рассмотрим несколько частных значений n. Для равностороннего треугольника ($n = 3$) формула (5.5.27) даёт $h_x = h_y = 3^{1/4}16/[27\ln(2+\sqrt{3})] = 0.5922$. Мы не нашли никаких числовых данных, которые можно было бы сравнить с нашим результатом. В случае квадрата $n = 4$, и $h_x = h_y = 4/[9\ln(1+\sqrt{2})] = 0.5043$ что находится внутри интервала от 0.4973 до 0.5162, данного в Okon and Harrington (1981) и различается на 3% от результата de Smedt, (1979) который равен 0.5193. Так как формула (5.5.27) даёт точный результат для круга в предельном случае $n \to \infty$, а именно, $h_x = h_y = 8/(3\pi^{3/2}) = 0.4789$, мы должны ожидать, что ошибка (5.5.27) будет уменьшаться с ростом n. Значения коэффициентов для правильного гексагона равны $h_x = h_y = 40\sqrt{2}/(3^{1/4}81\ln 3) = 0.4830$, что отличается на 1.4% от результата 0.49 из Okon and Harrington (1981), и становится ясно, что максимум возможной ошибки действительно уменьшается с увеличением n. Следует отметить, что значения коэффициентов не изменяется значительно во всём интервале $3 \le n < \infty$.

Пример 2: Равнобедренный треугольник. В случае треугольника со сторонами $a_1 = a_2 = l$, и углом между ними равным α, формулы (5.5.20–5.5.23) дают:

$$I_x = \frac{1}{12} l^4 \sin\alpha \sin^2(\alpha/2), \qquad I_y = \frac{1}{36} l^4 \sin\alpha \cos^2(\alpha/2),$$

$$J_x = \frac{2}{3} l \cos\frac{\alpha}{2}\Big[\sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) - 2\sin\gamma$$

$$+ 2\sin^3(\frac{\alpha}{2}) \ln(\cot\frac{2\gamma-\alpha}{4}\cot\frac{\alpha}{4}) + \ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2})\Big],$$

$$J_y = \frac{2}{3} l \cos\frac{\alpha}{2}\Big[-\sin\alpha - \sin(\alpha+\gamma) + 2\sin\gamma$$

$$+ \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \ln(\cot\frac{2\gamma-\alpha}{4}\cot\frac{\alpha}{4})\Big],$$

с результатами для коэффициентов:

$$h_x = 8(\tan(\alpha/2))^{3/2}\Big\{3\Big[\sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) - 2\sin\gamma$$

$$+ 2\sin^3\frac{\alpha}{2} \ln(\cot\frac{2\gamma-\alpha}{4}\cot\frac{\alpha}{4}) + \ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2})\Big]\Big\}^{-1},$$

$$\tag{5.5.28}$$

$$h_y = 8\sqrt{\cot(\alpha/2)}\ \Big\{9\Big[-\sin\alpha - \sin(\alpha+\gamma) + 2\sin\gamma$$

$$+ \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \ln(\cot\frac{2\gamma-\alpha}{4}\cot\frac{\alpha}{4})\Big]\Big\}^{-1},$$

где $\gamma = \tan^{-1}(3\tan(\alpha/2))$.

Равнобедренный прямоугольный треугольник был рассмотрен в Okon and Harrington (1981), которые дали интервал между 0.9829 и 1.021 для одного из коэффициентов, который в наших обозначениях есть h_x. Наш результат для h_x равен 0.9255, что отличается меньше, чем 10% от ихнего. Вторая формула (5.5.28) даёт $h_y = 0.3995$, и мы не нашли в литературе ничего, чтобы сравнить с этим результатом.

Пример 3: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольным основанием и полуосями a_1 и a_2. Введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Формулы (5.5.21–5.5.24) в этом случае сводятся к

$$I_x = \frac{4}{3} a_1 a_2^{\,3}, \qquad I_y = \frac{4}{3} a_1^{\,3} a_2,$$

$$J_x = 4a_1 \sinh^{-1}\varepsilon, \qquad J_y = 4a_2 \sinh^{-1}(1/\varepsilon).$$

и формулы (5.5.20) дают:

$$h_x = \frac{4\varepsilon^{3/2}}{9\sinh^{-1}\varepsilon}, \quad h_y = \frac{4\varepsilon^{-3/2}}{9\sinh^{-1}(1/\varepsilon)}. \tag{5.5.29}$$

Коэффициенты магнитной поляризуемости были вычислены в de Smedt (1979) для прямоугольника с различными значениями ε. Здесь мы представляем его результаты вместе с результатами, данными формулой (5.5.29).

$\varepsilon=$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
de Smedt $h_x=$	0.1287	0.1881	0.2531	0.3249	0.4240	0.4436	0.5193
Формула (32) $h_x=$	0.1408	0.2001	0.2612	0.3265	0.4165	0.4341	0.5043
de Smedt $h_y=$	4.1070	2.0260	1.2600	0.8892	0.6426	0.6130	0.5193
Формула (32) $h_y=$	4.6876	2.1488	1.2701	0.8708	0.6228	0.5929	0.5043
Расхождение в h_x (%)	–9.4	–6.4	–3.2	–0.5	1.8	2.2	2.9
Расхождение в h_y (%)	–14.1	–6.1	–0.8	2.1	3.1	3.3	2.9

Наша формула (5.5.29) дала удовлетворительные результаты в достаточно широком диапазоне изменения ε. Приближённое выражение для распределения напряжений под штампом согласно (5.5.17) принимает форму:

$$\sigma = \frac{P\,a(\phi)}{8a_1 a_2\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}\left[1 + \frac{9}{4}\left(\frac{xx_0}{a_1^2} + \frac{yy_0}{a_2^2}\right)\right]. \tag{5.5.30}$$

Выражение (5.5.30) может быть использовано для анализа процесса движения приложенной силы P, скажем, вдоль оси Ox. Этот анализ может быть сделан, требуя, чтобы контактные напряжения исчезли на краю. Можно заключить из (5.5.17), что граница, на которой это преисходит, всегда будет прямая линия. Ясно из (5.5.30), что штамп будет в контакте с полупространством, пока $x_0 \le 4a_1/9$, после чего штамп начнёт отделяться от полупространства. Полагая, что новая область контакта тиже является прямоугольником (конечно, с различным отношением сторон), мы можем опять приложить формулы этой секции, чтобы проанализировать процесс далее. Если мы обозначим ширину зоны отделения c, следующее соотношение справедливо:

$$c = \frac{2}{5}(9x_0 - 4a_1), \quad \text{для} \qquad x_0 \ge \frac{4}{9}a_1.$$

Последняя формула показывает, например, что когда сила P приложена в $x_0 = 13a_1/18$ только половина штампа будет в контакте с полупространством. К сожалению, нет данных, чтобы проверить эти взаимоотношения. Дальнейший анализ проясняет, что ядро, внутри которого сила может быть приложена, не вызывая отделения от полупространства, является ромбом с полуосями $4a_1/9$ и $4a_2/9$ соответственно. Как известно, в случае кругового штампа ядро есть круг радиуса равного одной третьей радиуса штампа.

Результаты из (5.5.30) могут быть сравнёны с численными данными полученными в частном сообщении от де Смедта. Чтобы сделать сравнение возможным, мы должны положить $P = 0$, $M_x = 0$ в (5.5.30) и заменить M_y на (5.5.19), с результатом:

$$\sigma H = \frac{9\sqrt{\varepsilon}\, a(\phi)\, h_y x}{4a_1\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}. \tag{5.5.31}$$

Вычисления согласно (5.5.31) были сделаны для $\varepsilon = 0.5$ вдоль оси Ox, значение h_y было принято равным 0.8708 (смотри предыдущую Таблицу). Здесь представлены эти результаты в сравнении с полученными от де Смедта.

$x/a_1=$	0.0833	0.2500	0.3333	0.5000	0.5833	0.6667	0.7500	0.8333	0.9167
де Смедт $\sigma H=$	0.1143	0.3501	0.4759	0.7523	0.9367	1.1460	1.4304	1.8303	2.8182
Формула (31) $\sigma H=$	0.1159	0.3577	0.4898	0.7999	0.9950	1.2392	1.5709	2.0886	3.1777
Расхождение (%)	−1.3	−2.2	−2.9	−6.3	−6.2	−8.1	−9.8	−14.1	−12.8

Так как численный метод де Смедта также является приближённым, мы используем слово *расхождение* вместо слова *ошибка* в таблицах в этой и соседних секциях. Мы можем также сравнить те же значения вдоль оси

Oy. Можно использовать формулу, аналогичную (5.5.31), заменяя все x на y и меняя местами a_1 и a_2, значение h_x было принято равным 0.3265. Результаты получились такие:

y/a_2=	0.1667	0.3333	0.5000	0.6667	0.8333
де Смедт σH=	0.1756	0.3663	0.6011	0.9014	1.6413
наш результат σH=	0.1756	0.3673	0.5998	0.9292	1.5662
Расхождение (%)	0.0	–0.3	0.2	–3.1	4.6

Согласование вполне удовлетворительное.

Пример 4: Ромб. Пусть α обозначает угол в одном из вершин ромба, и l есть сторона ромба. Формулы (5.5.21–5.5.24) в этом случаей дают:

$$I_x = \frac{1}{6} l^4 \sin\alpha \sin^2(\frac{\alpha}{2}), \quad I_y = \frac{1}{6} l^4 \sin\alpha \cos^2(\frac{\alpha}{2}), \quad A = l^2 \sin\alpha,$$

$$J_x = 2l\sin\alpha \left[\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \ln\frac{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)+1}{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)-1} \right],$$

$$J_y = 2l\sin\alpha \left[-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} + \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \ln\frac{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)+1}{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)-1} \right].$$

Коэффициенты определены как:

$$h_x = \frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}{9(\sin\alpha)^{3/2} \left[\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \ln\frac{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)+1}{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)-1} \right]},$$

$$h_y = \frac{8\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9(\sin\alpha)^{3/2} \left[-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} + \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \ln\frac{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)+1}{\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)-1} \right]}. \tag{5.5.32}$$

Те же формулы могут быть выражены через полуоси ромба a и b и их отношение $\varepsilon = b/a$, давая

$$h_x = \frac{2\sqrt{2\varepsilon}\,(1+\varepsilon^2)}{9\left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \right]},$$

$$h_y = \frac{2\sqrt{2}\,(1+\varepsilon^2)}{9\varepsilon^{3/2}\left[\varepsilon - 1 + \dfrac{1}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \ln \dfrac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right]}. \qquad (5.5.33)$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов, относящихся к штампу с ромбовой подошвой. В электрических науках, математически эквивалентная задача о коэффициентах магнитной поляризуемости ромба была решена численно в статье de Smedt (1979). Здесь мы представляем его результаты в сравнении с данными из формулы (5.5.33).

ε=	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
де Смедт h_x=	0.1181	0.1729	0.2341	0.3052	0.4101	0.4323	0.5193
Формула (5.5.33) h_x=	0.1078	0.1627	0.2258	0.2986	0.4026	0.4230	0.5043
де Смедт h_y=	6.1820	2.7060	1.5240	0.9946	0.6703	0.6323	0.5193
Формула (5.5.33) h_y=	4.5987	2.1982	1.3254	0.9095	0.6388	0.6052	0.5043
Расхождение h_x (%)	8.7	5.9	3.6	2.2	1.8	2.1	2.9
Расхождение h_y (%)	25.6	18.8	13.0	8.6	4.7	4.3	2.9

Ухудшение точности (5.5.33) для малых значений ε может быть объяснёно ошибочным предположением о сингулярности типа квадратного корня в (5.5.3), которое особенно неверно для областей с острыми углами.

Распределение напряжения под штампом может быть выражено согласно (5.5.17) как

$$\sigma = \frac{P\,a(\phi)}{2A\left[a^2(\phi)-\rho^2\right]^{1/2}}\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\right)\right].$$

Дальнейший анализ последнего выражения проясняет, что ядро, внутри которого сила может быть приложенная, не вызывая отделения от полупространства, есть прямоугольник с полуосями $2a/9$ и $2b/9$ соответственно. В случае $\varepsilon = 1$, ромб превращается в квадрат, и все результаты согласуются с Примером 3.

Пример 5: Круговой сегмент. Пусть радиус r и угол 2α являются параметрами сегмента. Положение его центра тяжести определено как $x_c = kr$, где k дано в (5.4.26). Уравнение границы сегмента по отношению к его центру тяжести принимает форму (5.4.27).

Вычисление площади и моментов (5.5.21–5.5.24) даёт:

$$A = r^2(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha), \quad I_x = \frac{1}{4}Ar^2(1 - k\cos\alpha), \quad I_y = \frac{1}{4}Ar^2(1+3k\cos\alpha - 4k^2), \tag{5.5.34}$$

$$J_x = \frac{2}{3}r\left\{-k\sin^3\gamma + (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\pi-\gamma,k)\right.$$

$$\left. + \frac{2k^2-1}{k^2}\mathrm{E}(\pi-\gamma,k) + 3(k - \cos\alpha)\left[-\sin\gamma + \ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2})\right]\right\},$$

$$J_y = \frac{2}{3}r\left\{\sin\gamma\left[k\sin^2\gamma - 3\cos\alpha - (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\cos\gamma\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\pi-\gamma,k) + \frac{1+k^2}{k^2}\mathrm{E}(\pi-\gamma,k)\right\}, \tag{5.5.35}$$

где $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(k - \cos\alpha))$, и функции $\mathrm{F}(\cdot,\cdot)$ и $\mathrm{E}(\cdot,\cdot)$ обозначают неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Подстановка в (5.5.20) ведёт к

$$h_x = \frac{4(1 - k\cos\alpha)}{\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]^{1/2}}\left\{-k\sin^3\gamma + (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\pi-\gamma,k)\right.$$

$$\left. + \frac{2k^2-1}{k^2}\mathrm{E}(\pi-\gamma,k) + 3(k - \cos\alpha)\left[-\sin\gamma + \ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2})\right]\right\}^{-1},$$

$$h_y = \frac{4(1 + 3k\cos\alpha - 4k^2)}{\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]^{1/2}}\left\{\sin\gamma\left[k\sin^2\gamma - 3\cos\alpha - (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\cos\gamma\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\pi-\gamma,k) + \frac{1+k^2}{k^2}\mathrm{E}(\pi-\gamma,k)\right\}^{-1}. \tag{5.5.36}$$

Мы можем использовать этот результат для исследования случая кругового штампа под действием нормальной силы P, приложенной на расстоянии $x_0 > r/3$ от центра. Из классической теории мы знаем, что штамп должен отделяться от полупространства. Полагая, что область контакта после отделения есть круговой сегмент, можно получить следующее взаимоотношение между координатой x_0 и размерами сегмента, характеризующимися углом α

$$x_0 = r\,\frac{(1-k)(1+4k)}{3(k-\cos\alpha)}\,. \tag{5.5.37}$$

Последнее выражение точно в двух предельных случайс: для полного круга $\alpha = \pi$ уравнение даёт $x_0 = r/3$, и для $\alpha \to 0$ мы имеем $x_0 = r$. Задача наклонного кругового штампа была рассмотрена численно в книге Рвачёва и Проценко (1977). Здесь мы сравниваем результаты.

α (град.)=	158.4	108.1	102.0
Рвачёв *и др.* x_0=	0.3583	0.5833	0.6250
Формула (5.5.37) x_0=	0.3543	0.5418	0.5750
Расхождение (%)	1.1	7.1	8.0

Согласие результатов должно считаться удивительно хорошим, особенно принимая во внимание что Рвачёв и Проценко рассмотривали области контакта не в форме сегмента, а более сложной формы.

Пример 6: Крест. Рассмотрим штамп полученный путём ортогонального пересечения двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$. Введём параметр $\varepsilon = b/a$. Площадь и моменты примут вид:

$$A = 4a^2\varepsilon(2-\varepsilon)\,, \qquad I_x = I_y = \frac{4}{3}a^4\varepsilon(1+\varepsilon^2-\varepsilon^3),$$

$$J_x = J_y = 4a\left[\ln[\varepsilon + (1+\varepsilon^2)^{1/2}] + \varepsilon\ln\frac{1+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{(1+\sqrt{2})\varepsilon}\right]. \tag{5.5.38)}$$

Коэффициенты будут определены как

$$h_x = h_y = \frac{4\varepsilon(1+\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{9\varepsilon(2-\varepsilon)^{3/2}}\left[\ln[\varepsilon + (1+\varepsilon^2)^{1/2}] + \varepsilon\ln\frac{1+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{(1+\sqrt{2})\varepsilon}\right]^{-1}. \tag{5.5.39}$$

Значения $h = h_x = h_y$ были вычислены из (5.5.39) и сравнёны с данными de Smedt (1979). Результаты представлены ниже:

$\varepsilon=$	0.1000	0.2000	0.3333	0.4000	0.5000	0.6000	0.7500	0.8000	1.0000
де Смедт $h=$	1.5910	0.8720	0.6255	0.5725	0.5267	0.5069	0.4985	0.4997	0.5193
Формула (5.5.39) $h=$	1.7382	0.8758	0.6006	0.5465	0.5049	0.4890	0.4893	0.4926	0.5043
Расхождение (%)	–9.3	–0.4	4.0	4.5	4.1	3.5	1.9	1.4	2.9

Принимая во внимание сложность формы, мы должны считать согласование результатов удивительно хорошим, не только количественно, но и качественно: обе совокупности результатов демонстрируют плоский минимум вблизи $\varepsilon = 0.75$.

Дискуссия. Следует отметить, что изменеие порядка интегрирования, которое вело к (5.5.1), действительно только внутри круга $\rho \le min\{a(\phi)\}$. Тем не менее, мы можем получить из (5.5.1) *точное* решение для эллипса достаточно точные формулы для штампов различной формы, как это было показано в предыдущих примерах.

Точность формул (5.5.20) может быть улучшена, принимая во внимание пятую гармонику (5.5.9) в комбинации с вариационным подходом (Noble, 1960). Следующий функционал принимает максимальное значение на точном решении (5.1.8)

$$I(\sigma) = \frac{2}{H}\int\!\!\int_S \sigma(M)w(M)\mathrm{d}S_\mathrm{M} - \int\!\!\int_S \sigma(M)\left[\int\!\!\int_S \frac{\sigma(N)}{R(M,N)}\mathrm{d}S_\mathrm{N}\right]\mathrm{d}S_\mathrm{M}. \tag{5.5.40}$$

Принимая

$$H\int\!\!\int_S \frac{\sigma(N)}{R(M,N)}\mathrm{d}S_\mathrm{N} \approx w_1 + w_5, \tag{5.5.41}$$

и подставляя (5.5.3), (5.5.7), (5.5.9), и (5.5.41) в (5.5.40), мы получаем после интегрирования по ρ

$$I = \int_0^{2\pi} (a(\phi))^4 \left\{ (p_1\cos\phi + p_2\sin\phi)\left[\frac{4}{3H}(\alpha_\mathrm{x}\sin\phi - \alpha_\mathrm{y}\cos\phi) \right.\right.$$

$$- \frac{\pi}{3}(p_1 J_\mathrm{y} + p_2 J_\mathrm{xy})\cos\phi - \frac{\pi}{3}(p_1 J_\mathrm{xy} + p_2 J_\mathrm{x})\sin\phi - \frac{2\pi}{63}(a(\phi))^3([p_1(A_\mathrm{c6} + A_\mathrm{c4})$$

$$\left.\left. + p_2(A_\mathrm{s6} - A_\mathrm{s4})]\cos5\phi + [p_1(A_\mathrm{s6} + A_\mathrm{s4}) + p_2(A_\mathrm{c4} - A_\mathrm{c6})]\sin5\phi)\right]\right\}\mathrm{d}\phi. \tag{5.5.42}$$

Рассматривая функционал I как функцию p_1 и p_2, условия экстремума

$$\frac{\partial I}{\partial p_1}=0, \qquad \frac{\partial I}{\partial p_2}=0,$$

дают два линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных p_1 и p_2. Полное решение довольно громоздко. Здесь мы представляем окончательный результат для коэффициентов h_x и h_y, которые действительны только для областей, имеющих по крайней мере одну ось симметрии, и главные центральные оси приняты за координатные оси:

$$h_x=\frac{32I_x}{3A^{3/2}J_x(1+\eta_x)}, \qquad h_y=\frac{32I_y}{3A^{3/2}J_y(1+\eta_y)}, \tag{5.5.43}$$

где поправочные члены

$$\eta_x=\frac{(B_{c4}-B_{c6})(A_{c4}-A_{c6})}{84I_xJ_x}, \qquad \eta_y=\frac{(B_{c4}+B_{c6})(A_{c4}+A_{c6})}{84I_yJ_y}, \tag{5.5.44}$$

параметры A_{c4} и A_{c6} определены в (5.5.10), и

$$B_{c6}=\int_0^{2\pi}(a(\phi))^7\cos 6\phi\, d\phi, \qquad B_{c4}=\int_0^{2\pi}(a(\phi))^7\cos 4\phi\, d\phi.$$

Так как выражение (5.5.41) приближённое, нет никакой гарантии, что (5.5.43) будет более точным, чем (5.5.20). Мы выполнили необходимые вычислений для прямоугольника. Вот результаты в сравнении с данными de Smedt (1979)

$\varepsilon=$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
де Смедт $h_x=$	0.1287	0.1881	0.2531	0.3249	0.4240	0.4436	0.5193
Формула (5.5.43) $h_x=$	0.1405	0.1988	0.2577	0.3207	0.4165	0.4376	0.5331
де Смедт $h_y=$	4.1070	2.0260	1.2600	0.8892	0.6426	0.6130	0.5193
Формула (5.5.43) $h_y=$	4.5293	2.0985	1.2479	0.8714	0.6463	0.6190	0.5331
Расхождение в h_x (%)	−9.2	−5.7	−1.8	1.3	1.8	1.3	−2.7
Расхождение в h_y (%)	−10.5	−3.6	1.0	2.0	−0.6	−1.0	−2.7

Сравнение с аналогичными данными, вычисленными по формуле (5.5.29), показывает, что поправочные члены η_x и η_y в этом частном случае уменьшают расхождение, как положительное, так и отрицательное. Мы однако опять предостерегаем, что нет никакой гарантии, что это будет действительно для произвольной области. Например, вот данные вычислений для ромба

ε=	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
де Смедт h_x=	0.1181	0.1729	0.2341	0.3052	0.4101	0.4323	0.5193
Формула (5.5.43) h_x=	0.2268	0.1860	0.2351	0.3031	0.4058	0.4264	0.5091
де Смедт h_y=	6.1820	2.7060	1.5240	0.9946	0.6703	0.6323	0.5193
Формула (5.5.43) h_y=	8.5600	2.5916	1.4196	0.9408	0.6490	0.6138	0.5091
Расхождение h_x (%)	–92.0	–7.6	–0.4	0.7	1.0	1.4	2.0
Расхождение h_y (%)	–38.5	4.2	6.8	5.4	3.2	2.9	2.0

Сравнение с данными, вычисленными по формуле (5.5.33), показывают, что расхождение уменьшилось для $\varepsilon \geq 0.2$ в то время, как для $\varepsilon = 0.1$ оно подпрыгнуло в противоположном направлении на –92%. Основной причиной для этого является скачок в значениях коэффициентов η_x и η_y, когда ε становится очень маленьким. Следующее правило может быть предложено для пользователя, желающего улучшить точность: когда значение поправочных коэффициентов η_x и η_y не превышает, скажем, 0.2, их включение обычно улучшает точность, в противном случае, формулы (5.5.43) использовать не следует.

Представляется целесообразным дать решение (5.5.42) для случая, когда область контакта не имеет осей симметрии, и только первая гармоника перемещения w_1 принята во внимание. Результат есть

$$p_1 = \frac{\alpha_x(c_{22}I_{xy} - c_{12}I_x) + \alpha_y(c_{12}I_{xy} - c_{22}I_y)}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$
$$p_2 = \frac{\alpha_x(c_{11}I_x - c_{12}I_{xy}) + \alpha_y(c_{12}I_y - c_{11}I_{xy})}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \tag{5.5.45}$$

где

$$c_{11} = \frac{\pi H}{2}(J_y I_y + J_{xy} I_{xy}), \qquad c_{22} = \frac{\pi H}{2}(J_x I_x + J_{xy} I_{xy}),$$

$$c_{12} = \frac{\pi H}{4}(J_{xy}(I_x + I_y) + I_{xy}(J_x + J_y))$$

Формулы (5.5.45) отличаются от эквивалентных (5.5.12) выведенных раньше. В отсутствии каких–нибудь численных данных для области общего вида, невозможно сказать, являются ли формулы (5.5.45) более точными, чем

(5.5.12), но они явно сложнее. Отметим, что в случае области с осью симметрии оба (5.5.45) и (5.5.12) упрощаются к одним и тем же уравнениям (5.5.15).

Можно заметить определённую аналогию между выведенными формулами и теорией изгиба Сент—Венана. Эта аналогия становятся более заметной, если, например, мы перепишем уравнение (5.5.17) в форме:

$$\sigma = \frac{a(\phi)}{2\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}\left[\frac{P}{A} + \frac{3}{4}\left(\frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y}\right)\right].$$

Мы думаем, что эта аналогия не случайна, так как метод, использованный в этой секции, также может быть назван полуобратным. Метод может быть развит далее в полную теорию упругих контактных задач Сент—Венановского типа, который сможет сочетать простоту и точность достаточную для инженера.

Математически тождественная задача о магнитной поляризуемости малых отверстий была решена в (Fabrikant, 1987j).

Упражнение 5.5

1. Найдите моменты инерции и J—моменты для кругового сектора характеризуемого радиусом r и полярным углом 2α.

Ответ:

$$I_x = \frac{1}{4}r^4\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right), \quad I_y = r^4\,\frac{9\alpha^2 + 9\alpha\sin\alpha\cos\alpha - 16\sin^2\alpha}{36\alpha},$$

$$J_x = \frac{2}{3}r\left\{\frac{2k^2-1}{k^2}\mathrm{E}(\gamma,k) - k\sin^3\gamma - (1-k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\gamma,k)\right.$$

$$\left. + 3k\sin\alpha\left[\cos\alpha + \cos(\alpha+\gamma) + \sin^2\alpha\ln\left(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\right]\right\},$$

$$J_y = \frac{2}{3}r\left\{k\sin\gamma(\sin^2\gamma - 3) + (1-k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma - \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\gamma,k)\right.$$

$$+\frac{1+k^2}{k^2}\mathrm{E}(\gamma,k)+3k\sin\alpha\left[\cos^2\alpha\ln(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma-\alpha}{2})-\cos\alpha-\cos(\alpha+\gamma)\right]\Bigg\}.$$

Здесь $k=2\sin\alpha/(3\alpha)$, и $\gamma=\tan^{-1}(\sin\alpha/(\cos\alpha-k))$.

2. Найдите коэффициенты формы h_x и h_y для кругового сектора, описанного в Упражнении 1.
Ответ:

$$h_x=\frac{2(2\alpha-\sin2\alpha)}{\alpha^{3/2}}\Bigg\{\frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\gamma,k)-k\sin^3\gamma-(1-k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma$$

$$+\frac{2k^2-1}{k^2}\mathrm{E}(\gamma,k)+3k\sin\alpha\left[\cos\alpha+\cos(\alpha+\gamma)+\sin^2\alpha\ln(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma-\alpha}{2})\right]\Bigg\}^{-1},$$

$$h_y=\frac{4(9\alpha^2+9\alpha\sin\alpha\cos\alpha-16\sin^2\alpha)}{9\alpha^{5/2}}\Bigg\{k\sin\gamma(\sin^2\gamma-3)$$

$$+(1-k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma-\frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{F}(\gamma,k)+\frac{1+k^2}{k^2}\mathrm{E}(\gamma,k)$$

$$+3k\sin\alpha\left[-\cos\alpha-\cos(\alpha+\gamma)+\cos^2\alpha\ln(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma-\alpha}{2})\right]\Bigg\}^{-1}.$$

3. Проверьте (5.5.4).

4. Выведите (5.5.7).

5. Подтвердите правильность (5.5.14)–(5.5.16).

5.6 Неплоский штамп общей формы в плане

В этой секции мы анализируем упругие контактные задачи для неплоского штампа не эллиптической формы в плане под действием нормальной силы. Основание штампа представляется квадратичной поверхностью. Некоторые общие взаимоотношения установлены между приложенной силой и осадкой штампа. Специфические формулы выведены для штампа, чья форма в плане представляет полигон, прямоугольник, ромб и крест. Пример конечного жёсткого цилиндра, лежащего на его образующей и прижатого к упругому полупространству рассмотрен в деталях. Метод позволяет нам иметь сингулярные напряжения на краях цилиндра и нулевые напряжения на остальной части границы контактной области. Последнее условие служит для нахождения ширины области контакта. Все формулы проверены путём ставнения с ранее опубликованными решениями, и хорошая точность подтверждена для достаточно широкого диапазона отношений длины к ширине.

Теория. Рассмотрим штамп с неплоской базой и произвольной формой в плане. Штамп придавлен к упругому полупространству нормальной силой P. Пусть граница области контакта S дана в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi),$$

где функция $a(\phi)$ ограничена и однозначна. Здесь мы полагаем, что область контакта задана. Случай, когда область контакта неизвестна (или частично неизвестна), будет обсуждаться далее. Основание штампа является квадратичной поверхностью. Это ограничение не является существенным. Метод может быть приложен также к поверхностям более высокого порядка. Трансформированное интегральное уравнение дано в (5.5.1).

Пусть нормальное перемещение под штампом есть:

$$w = g_0 + g_x y^2 + g_{xy} xy + g_y x^2, \tag{5.6.1}$$

где g_0 обозначает осадку штампа, и g_x, g_y и g_{xy} являются известными постоянными, определеными геометрией основания штампа. Пусть распределение давления под штампом есть

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{a(\phi)[\alpha_0 + \rho^2(\alpha_x \sin^2\phi + \alpha_{xy}\sin\phi\cos\phi + \alpha_y\cos^2\phi)]}{\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}, \tag{5.6.2}$$

где α_0, α_x, α_y и α_{xy} — пока неизвестные постоянные. Мы используем условие, что интеграл от σ по S должен быть равен P. Это приводит к выражению

$$P = 2\alpha_0 A + \frac{8}{3}(\alpha_x I_x + \alpha_{xy} I_{xy} + \alpha_y I_y), \tag{5.6.3}$$

где A есть площадь области контакта S; и I_x, I_y и I_{xy} — осевые моменты инерции и смешанный момент инерции соответственно. Положение начала координат может быть определено из условия, что опрокидывающие моменты, вызываемые напряжениями (5.6.2), должны исчезать. Эти условия дают следующую систему уравнений:

$$\int_0^{2\pi} a^3(\phi)[\alpha_0 + \frac{3}{4}a^2(\phi)(\alpha_x \sin^2\phi + \alpha_{xy}\sin\phi\cos\phi + \alpha_y\cos^2\phi)]\sin\phi\, d\phi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} a^3(\phi)[\alpha_0 + \frac{3}{4}a^2(\phi)(\alpha_x \sin^2\phi + \alpha_{xy}\sin\phi\cos\phi + \alpha_y\cos^2\phi)]\cos\phi\, d\phi = 0. \tag{5.6.4}$$

Мы будем называть точку, координаты которой удовлетворяют (5.6.4), *центром штампа*. Когда область контакта имеет одну ось симметрии, центр штампа расположен на этой оси. В случае двух осей симметрии, центр штампа совпадает с центром тяжести. Теперь необходимо связать α_0, α_x, α_y, и α_{xy} с параметрами g_0, g_x, g_y, и g_{xy}. Это может быть сделано подстановкой (5.6.2) в (5.5.1) что даёт, после интегрирования по ρ_0,

$$w(\rho,\phi) = H\alpha_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|} \frac{x\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\phi_0)} F\left(\frac{2-|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) d\phi_0$$

$$+ H \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|} \frac{x^3\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\phi_0)} F(\frac{4-|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1;$$

$$1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)})(\alpha_x \sin^2\phi_0 + \alpha_{xy}\sin\phi_0\cos\phi_0 + \alpha_y\cos^2\phi_0)\, d\phi_0.$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Дальнейшее вычисление нормальных перемещений может быть выполнено отдельно для каждой гармоники. Отметим, что все нечётные гармоники w исчезают, если $a(\phi)$ содержит только чётные гармоники. Нулевая гармоника примет вид:

$$w_0(\rho,\phi) = \frac{\pi}{4}H\int_0^{2\pi}\left[2\alpha_0 + (a^2(\phi_0) + \frac{1}{2}\rho^2)\right.$$
$$\left.\times(\alpha_x\sin^2\phi_0 + \alpha_{xy}\sin\phi_0\cos\phi_0 + \alpha_y\cos^2\phi_0)\right]a(\phi_0)d\phi_0, \tag{5.6.5}$$

что может быть упрощёно как

$$w_0(\rho,\phi) = \frac{\pi}{4}H\left[2\alpha_0 J_0 + \alpha_x B_x + \alpha_{xy}B_{xy} + \alpha_y B_y + \frac{\rho^2}{2}(\alpha_x J_x + \alpha_{xy}J_{xy} + \alpha_y J_y)\right], \tag{5.6.6}$$

где J—моменты были определены в предыдущей секции, и следующие дополнительные параметры были введены:

$$B_x = \int_0^{2\pi} a^3(\phi)\sin^2\phi\, d\phi, \qquad B_y = \int_0^{2\pi} a^3(\phi)\cos^2\phi\, d\phi,$$
$$B_{xy} = \int_0^{2\pi} a^3(\phi)\sin\phi\cos\phi\, d\phi. \tag{5.6.7}$$

Так как тензорные свойства B—моментов аналогичны свойствам моментов инерции, мы будем называть B_x и B_y *кубическими моментами двумерной области относительно осей Ox и Oy* соответственно, B_{xy} будем называть *смешанным кубическим моментом двумерной области относительно осей Ox и Oy*.

Вот выражение для второй гармоники:

$$w_2(\rho,\phi) = \frac{3}{8}\pi H\rho^2\int_0^{2\pi}(\alpha_x\sin^2\phi_0 + \alpha_{xy}\sin\phi_0\cos\phi_0 + \alpha_y\cos^2\phi_0)a(\phi_0)\cos2(\phi-\phi_0)d\phi_0,$$

которое может быть модифицировано как

$$w_2(\rho,\phi) = \frac{3}{8}\pi H\rho^2\{-\alpha_x[(C_{xxxx} - C_{xxyy})\cos2\phi + 2C_{xxxy}\sin2\phi] + \alpha_y[(C_{yyyy}$$

$$-C_{xxyy})\cos 2\phi + 2C_{xyyy}\sin 2\phi] + \alpha_{xy}[(C_{xyyy} - C_{xxxy})\cos 2\phi + 2C_{xxyy}\sin 2\phi]\}. \tag{5.6.8}$$

Здесь следующие геометрические характеристики области контакта были введены:

$$C_{xxxx} = \int_0^{2\pi} a(\phi)\sin^4\phi d\phi, \qquad C_{xxxy} = \int_0^{2\pi} a(\phi)\sin^3\phi\cos\phi d\phi,$$

$$C_{xxyy} = \int_0^{2\pi} a(\phi)\sin^2\phi\cos^2\phi d\phi, \qquad C_{xyyy} = \int_0^{2\pi} a(\phi)\sin\phi\cos^3\phi d\phi,$$

$$C_{yyyy} = \int_0^{2\pi} a(\phi)\cos^4\phi d\phi. \tag{5.6.9}$$

C—моменты будем называть *линейными моментами четвёртого порядка.* Их взаимоотношения с J—моментами легко установить, например, $J_x = C_{xxxx} + C_{xxyy}$, $J_{xy} = C_{xyyy} + C_{xxxy}$, и так далее. Важно отметить, что параметр α_0 не входит в (5.6.8), и параметры α_x, α_{xy} и α_y отсутствуют в выражении для четвёртой гармоники. Исследование следующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается. В случае эллипса они исчезают, таким образом превращая решение в *точное.* Представляется натуральным положить $w \approx w_0 + w_2$, и оставшиеся гармоники могут называться ошибкой решения. Мы должны принимать во внимание, что чередование знака ошибки приведёт к более значительному уменьшению ошибки интегральных характеристик, как главный вектор P. Теперь мы имеем приближённое выражение для перемещения под штампом

$$w = \frac{\pi}{4}H\Big\{2\alpha_0 J_0 + \alpha_x B_x + \alpha_{xy}B_{xy} + \alpha_y B_y + x^2\Big[-\alpha_x(C_{xxxx} - 2C_{xxyy})$$

$$+ \alpha_{xy}(2C_{xyyy} - C_{xxxy}) + \alpha_y(2C_{yyyy} - C_{xxyy})\Big] + y^2\Big[\alpha_x(2C_{xxxx} - C_{xxyy})$$

$$+ \alpha_{xy}(2C_{xxxy} - C_{xyyy}) - \alpha_y(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})\Big] + 6xy\Big[\alpha_x C_{xxxy} + \alpha_{xy}C_{xxyy} + \alpha_y C_{xyyy}\Big]\Big\}. \tag{5.6.10}$$

Сравнение (5.6.1) и (5.6.10) ведёт к следующей системе уравнений

$$\frac{\pi}{4}H(2\alpha_0 J_0 + \alpha_x B_x + \alpha_{xy} B_{xy} + \alpha_y B_y) = g_0,$$

$$\frac{\pi}{4}H\left[\alpha_x(2C_{xxxx} - C_{xxyy}) + \alpha_{xy}(2C_{xxxy} - C_{xyyy}) - \alpha_y(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})\right] = g_x$$

$$\frac{\pi}{4}H\left[-\alpha_x(C_{xxxx} - 2C_{xxyy}) + \alpha_{xy}(2C_{xyyy} - C_{xxxy}) + \alpha_y(2C_{yyyy} - C_{xxyy})\right] = g_y,$$

$$\frac{3\pi}{2}H\left[\alpha_x C_{xxxy} + \alpha_{xy} C_{xxyy} + \alpha_y C_{xyyy}\right] = g_{xy}. \tag{5.6.11}$$

Последние 3 уравнения (5.6.11) могут быть решены относительно α_x, α_y, и α_{xy}. В случае упругой контактной задачи, когда g_0 задано, значение α_0 может быть найдено из первого уравнения (5.6.11), после чего приложенная сила P определена по (5.6.3), и решение закончено. Когда приложенная сила P дана, значение α_0 может быть определено из (5.6.3), после чего осадка штампа g_0 дана первым уравнением (5.6.11).

Значительные упрощение имеют место, когда область контакта S имеет по крайней мере одну ось симметрии. В этом случае $C_{xxxy} = C_{xyyy} = B_{xy} = 0.$ Последнее уравнение (5.6.11) становится несвязанным с предыдущими тремя. Решения могут быть тогда записаны явно

$$\alpha_x = \frac{4[g_x(2C_{yyyy} - C_{xxyy}) + g_y(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})]}{3\pi H(C_{xxxx}C_{yyyy} - C^2_{xxyy})},$$

$$\alpha_y = \frac{4[g_x(C_{xxxx} - 2C_{xxyy}) + g_y(2C_{xxxx} - C_{xxyy})]}{3\pi H\,(C_{xxxx}C_{yyyy} - C^2_{xxyy})},$$

$$\alpha_{xy} = \frac{2g_{xy}}{3\pi H\,C_{xxyy}}. \tag{5.6.12}$$

Подстановка (5.6.12) в первое уравнение (5.6.11) даёт:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi H J_0}\left[g_0 - \frac{g_x\beta_x + g_y\beta_y}{3(C_{xxxx}C_{yyyy} - C^2_{xxyy})}\right], \tag{5.6.13}$$

где

$$\beta_x = B_x(2C_{yyyy} - C_{xxyy}) + B_y(C_{xxxx} - 2C_{xxyy}),$$

$$\beta_y = B_x(C_{yyyy} - 2C_{xxyy}) + B_y(2C_{xxxx} - C_{xxyy}).$$

Выражения (5.6.2), (5.6.3), (5.6.12), и (5.6.13) дают полное и *точное* решение для эллипса. Мы покажем, что они будут достаточно хороши для произвольного штампа. Мы ожидаем, что формула (5.6.2) будет достаточно точной вблизи начала координат, в то время как ошибка может стать весьма значительной вблизи границы области S.

Представляется удобным обсудить следующие частные случаи: $g_0 = 2\pi\sqrt{A}$, $g_x = g_y = g_{xy} = 0$; $g_y = 2\pi/\sqrt{A}$, $g_x = g_{xy} = g_0 = 0$; и случай $g_x = 2\pi/\sqrt{A}$, $g_y = g_{xy} = g_0 = 0$. В каждом случае мы должны вычислить интеграл:

$$p = \frac{H}{A}\int\int_S \sigma \mathrm{d}S,$$

который пропорционален среднему значению σ, и является безразмерным, таким образом характеризуя форму S и будучи независимы от её размеров. Мы обозначим эти параметры p_0, p_y и p_x для каждого случая соответственно. На это имеются 2 причины: *i*) они в точности соответствуют параметрам, которые были использованы в теории распространения звука через отверстия, так что будет легко сравнивать численные результаты; *ii*) табулирование этих параметров для различных форм значительно упростит решение любой частной контактной задачи. Действительно. взаимоотношение между приложенной силой P и осадкой штампа g_0 может быть записано как

$$P = \frac{A}{2\pi H}\left[\frac{p_0}{\sqrt{A}}g_0 + \sqrt{A}(p_y g_y + p_x g_x)\right].$$

Последнее выражение указывает, что знание коэффициентов формы и площади штампа достаточны для вывода взаимоотношения между приложенной силой и осадкой штампа. Формулы (5.6.3), (5.6.12) и (5.6.13) ведут к следующему выражению для параметров p_0, p_y и p_x:

$$p_0 = \frac{8\sqrt{A}}{J_0}, \qquad p_y = \frac{8\{8J_0[I_x(C_{yyyy} - 2C_{xxyy}) + I_y(2C_{xxxx} - C_{xxyy})] - 3A\beta_y\}}{9A^{3/2}J_0(C_{xxxx}C_{yyyy} - C^2_{xxyy})}.$$

$$p_x = \frac{8\{8J_0[I_x(2C_{yyyy} - C_{xxyy}) + I_y(C_{xxxx} - 2C_{xxyy})] - 3A\beta_x\}}{9A^{3/2}J_0(C_{xxxx}C_{yyyy} - C^2_{xxyy})}. \tag{5.6.14}$$

Дальнейшие упрощения имеют место, когда область S обладает такой симметрией, что все моменты относительно оси Ox равны аналогичным моментам относительно оси Oy. В этом случае

$$p_y = p_x = \frac{8(8I_0J_0 - 3AB_0)}{3A^{3/2}J_0^2}, \tag{5.6.15}$$

где моменты с индексом 0 обозначают соответствующие полярные моменты. Формула (5.6.13) также упрощается следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi HJ_0}\left[g_0 - \frac{B_0}{J_0}(g_x + g_y)\right]. \tag{5.6.16}$$

Формулы (5.6.2), (5.6.3), (5.6.12) и (5.6.13) являются основными результатами этой секции. Упругие контактные задачи для широкого набора планформ могут теперь быть решены при помощи простого вычисления геометрических характеристик (моментов) области контакта.

Несколько примеров рассмотрено далее. Мы представляем только необходимые вычисления моментов. Области контакта полагаются заданными. Более сложный случай, когда область контакта частично неизвестна, обсуждается в контексте задачи о жёстком катке на упругом полупространстве.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим полигон с n сторонами. Общие обозначения его параметров то же самое, как и в предыдущей секции, где моменты инерции и J—моменты были вычислены. Здесь представлены остальные моменты.

C—моменты могут быть вычислены по следующим формулам:

$$C_{xxxx} = \sum_{k=1}^{n} -q_k \cos 2\psi_k - u_k \cos 4\psi_k + v_k \sin 4\psi_k + 4 s_k \sin\psi_k \cos^3\psi_k + 2 t_k \cos^4\psi_k,$$

$$C_{xxxy} = \sum_{k=1}^{n} v_k \cos 4\psi_k + u_k \sin 4\psi_k + s_k \cos^2\psi_k (1 - 4\sin^2\psi_k)$$

$$+ \frac{1}{2} q_k \sin 2\psi_k - 2 t_k \sin\psi_k \cos^3\psi_k, \tag{5.6.17}$$

$$C_{xxyy} = \sum_{k=1}^{n} u_k \cos 4\psi_k - v_k \sin 4\psi_k - \frac{1}{2} s_k \sin 4\psi_k + 2 t_k \sin^2\psi_k \cos^2\psi_k, \tag{5.6.18}$$

$$C_{xyyy} = \sum_{k=1}^{n} -v_k \cos 4\psi_k - u_k \sin 4\psi_k - s_k \sin^2\psi_k (1 - 4\cos^2\psi_k)$$

$$+ \frac{1}{2} q_k \sin 2\psi_k - 2 t_k \sin^3\psi_k \cos\psi_k, \tag{5.6.19}$$

$$C_{yyyy} = \sum_{k=1}^{n} q_k \cos 2\psi_k - u_k \cos 4\psi_k + v_k \sin 4\psi_k - 4 s_k \sin^3\psi_k \cos\psi_k + 2 t_k \sin^4\psi_k, \tag{5.6.20}$$

где

$$t_k = \frac{A_k}{a_k} \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}, \qquad s_k = 4 \frac{A_k^2}{a_k^2} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right),$$

$$q_k = \frac{A_k}{a_k^2} \left(\frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}} \right) [a_k^2 + (b_k - b_{k+1})^2]. \tag{5.6.21}$$

$$u_k = \frac{A_k}{12 a_k^4} \left\{ \left[\frac{b_{k+1}^2 - b_k^2 + a_k^2}{b_{k+1}} \right]^3 + \left[\frac{b_k^2 - b_{k+1}^2 + a_k^2}{b_k} \right]^3 \right\},$$

$$v_k = \frac{16 A_k^4}{3 a_k^4} \left[\frac{1}{b_{k+1}^3} - \frac{1}{b_k^3} \right]. \tag{5.6.22}$$

Следующие формулы может быть выведены для кубических моментов

$$B_x = \sum_{k=1}^{n} -j_k\cos 2\psi_k + r_k\sin 2\psi_k + 2f_k\cos^2\psi_k,$$

$$B_y = \sum_{k=1}^{n} j_k\cos 2\psi_k - r_k\sin 2\psi_k + 2f_k\sin^2\psi_k,$$

$$B_{xy} = \sum_{k=1}^{n} (j_k - f_k)\sin 2\psi_k + r_k\cos 2\psi_k, \qquad (5.6.23)$$

где

$$j_k = \left(\frac{2A_k}{a_k}\right)^3 \ln\frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}, \qquad r_k = \left(\frac{2A_k}{a_k}\right)^2 (b_{k+1} - b_k),$$

$$f_k = \frac{1}{4}(b_k + b_{k+1})A_k\left[1 + \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{a_k}\right)^2\right] + \frac{1}{4}j_k. \qquad (5.6.24)$$

Подстановка (5.6.17–5.6.24) в (5.6.2, 5.6.3, 5.6.12 и 5.6.13) даёт полное решение для произвольного полигона. В случае правильного полигона, значительные упрощения имеют место. Моменты инерции и J—моменты принимают вид (5.5.25) и (5.5.26), и остальные моменты определены следующим образом:

$$B_x = B_y = \frac{nb^3}{4}\left[\sin\frac{2\pi}{n} + \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right)\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}\right], \qquad (5.6.25)$$

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{3nb}{8}\cos\frac{\pi}{n}\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}$$

$$C_{xxyy} = \frac{nb}{8}\cos\frac{\pi}{n}\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)} \qquad (5.6.26)$$

Заметим, что формулы (5.6.26) действительны для любого правильного полигона, кроме квадрата, из—за того факта, что суммирование тригонометрического ряда

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^4(k-1)\frac{2\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n}\cos^4(k-1)\frac{2\pi}{n} = \frac{3n}{8}, \qquad (5.6.27)$$

недействительно для квадрата. C—моменты для квадрата со стороной $2l$ могут быть выражены как

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = l\left[4\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right], \qquad C_{xxyy} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,l. \tag{5.6.28}$$

Формулы (5.6.3, 5.6.12, и 5.6.13) упрощаются для правильного полигона:

$$\alpha_x = \frac{4(5g_x + g_y)}{3\pi H J_0}, \qquad \alpha_y = \frac{4(g_x + 5g_y)}{3\pi H J_0}, \qquad \alpha_{xy} = \frac{16 g_{xy}}{3\pi H J_0}. \tag{5.6.29}$$

Опять, следует заметить, что формулы (5.6.29) не действительны для квадрата. Следующие формулы действительно для любого правильного полигона, включая квадрат.

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi H J_0}\left[g_0 - \frac{B_0}{J_0}(g_x + g_y)\right],$$

$$P = \frac{4}{\pi H J_0}\left[A g_0 + \left(\frac{8}{3}I_0 - \frac{A B_0}{J_0}\right)(g_x + g_y)\right]. \tag{5.6.30}$$

Безразмерные коэффициенты p_y и p_x принимают вид:

$$p_y = p_x = \frac{8\sqrt{2}}{(n\sin\frac{2\pi}{n})^{1/2} n\cos\frac{\pi}{n}\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}}\left[\frac{23+7\cos\frac{2\pi}{n}}{36} - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\ln\frac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}}\right]. \tag{5.6.31}$$

Рассмотрим несколько частных значений n. Для равностороннего треугольника ($n = 3$) формула (5.6.31) даёт $p_y = p_x = 0.3782$. Мы не нашли численные данные в литературе, чтобы сравнить с этим результатом. В случае квадрата, $n = 4$, и $p_y = p_x = 0.2697$. Результат де Смедта равен 0.2645, с расхождением меньше, чем 2%. Так как формула (5.6.31) в предельном случае $n \to \infty$ даёт точный результат для круга $p_y = p_x = 4/(3\pi^{3/2}) = 0.2394$, мы ожидаем, что ошибка формулы (5.6.31) будет уменьшаться с увеличением n. Значение коэффициентов для правильного шестиугольника равно 0.2443, и опять, мы не нашли в литературе ничего, чтобы сравнить с этим результатом.

Пример 2: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольным основанием, a_1 и a_2 обозначают его полуоси вдоль направлений Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Формулы (5.6.17–5.6.24) в этом случай сводятся к

$$I_x = \frac{4}{3} a_1 a_2{}^3, \qquad I_y = \frac{4}{3} a_1{}^3 a_2\,,$$
$$J_x = 4a_1 \sinh^{-1}\varepsilon\,, \qquad J_y = 4a_2 \sinh^{-1}(1/\varepsilon). \tag{5.6.32}$$

$$C_{xxxx} = 4a_1(\sinh^{-1}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}), \qquad C_{xxyy} = 4a_1 \frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}},$$

$$C_{yyyy} = 4a_2(\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}). \tag{5.6.33}$$

$$B_x = 2a_1^3\left[\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2} - \sinh^{-1}\varepsilon + 2\varepsilon^3 \sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right],$$

$$B_y = 2a_1^3\left[\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon^3 \sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}) + 2\sinh^{-1}\varepsilon\right]. \tag{5.6.34}$$

Коэффициенты p_y и p_x были вычислено de Smedt (1979) для прямоугольника с различными значениями параметра ε. Здесь мы представляем его результаты вместе с данными вычисленными нашим методом.

ε=	0.1000	0.2000	0.3330	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт p_y=	2.9980	1.3730	0.7942	0.5229	0.3491	0.2645
наш метод p_y=	3.2809	1.3959	0.7782	0.5100	0.3485	0.2697
Расхождение в p_y (%)	–9.4	–1.7	2.0	2.5	0.2	–2.0
де Смедт p_x=	0.0376	0.0639	0.0982	0.1399	0.2022	0.2645
наш метод p_x=	0.0284	0.0577	0.0963	0.1431	0.2086	0.2697
Расхождение в p_x(%)	24.6	9.7	1.9	–2.3	–3.2	–2.0

Наши формулы дают удовлетворительные результаты для широкого набора параметра ε. Распределение напряжений согласно (5.6.3) может быть сравнёно с численными данными, полученными частным образом от де Смедта. Вычисления были сделаны для $\varepsilon = 0.5$, $g_y = 2\pi/\sqrt{A}$, $H = 1$, $g_0 = g_x = 0$. Вот результаты вдоль оси *Ox,* в сравнении с результатами де Смедта

x/a_1=	0.0000	0.2500	0.3333	0.5000	0.5833	0.6667	0.7500	0.8333	0.9167
де Смедт σ=	–0.4715	–0.3933	–0.3249	–0.1238	0.0452	0.2515	0.5456	0.9462	2.0580
наш метод σ=	–0.4731	–0.3953	–0.3314	–0.1290	0.0232	0.2273	0.5141	0.9602	1.8556
Расхождение(%)	–0.3	–0.5	–2.0	–4.2	48.8	9.6	5.8	–1.5	9.8

Аналогичные результаты вдоль оси Oy даны ниже

y/a_2=	0.0000	0.1667	0.3333	.5000	.6667	.8333
де Смедт σ=	−0.4715	−0.4765	−0.4774	−0.4837	−0.5063	−0.5311
наш метод σ=	−0.4731	−0.4744	−0.4791	−0.4907	−0.5198	−0.6138
Расхождение (%)	−0.3	0.5	−0.3	−1.4	−2.7	−15.6

Как мы предсказывали, расхождение становится значительным близко к границе.

Пример 3: Ромб. Пусть a_1 и a_2 обозначают его полуоси вдоль Ox и Oy соответственно. Мы обозначим его сторону $l=(a_1^2+a_2^2)^{1/2}$, и введём параметр $\varepsilon=a_2/a_1$. Формулы (5.6.17–5.6.24) в этом случае дают:

$$I_x=\frac{l^4\varepsilon^3}{3(1+\varepsilon^2)^2},\qquad I_y=\frac{l^4\varepsilon}{3(1+\varepsilon^2)^2},\qquad A=\frac{2l^2\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)}.$$

$$J_x=\frac{4l\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)}\left[\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right],$$

$$J_y=\frac{4l\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)}\left[-\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right]. \tag{5.6.35}$$

$$B_x=\frac{2l^3\varepsilon^3}{(1+\varepsilon^2)^3}\left[\frac{\varepsilon^3+4\varepsilon-3}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{2-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right],$$

$$B_y=\frac{2l^3\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^3}\left[\frac{1+4\varepsilon^2-3\varepsilon^3}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{\varepsilon^2(2\varepsilon^2-1)}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right]. \tag{5.6.36}$$

$$C_{xxxx}=\frac{4l\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}\left[\frac{2-\varepsilon+5\varepsilon^2-4\varepsilon^3}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{\varepsilon^4}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right],$$

$$C_{yyyy}=\frac{4l\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}\left[\frac{-4+5\varepsilon-\varepsilon^2+2\varepsilon^3}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right],$$

$$C_{xxyy}=\frac{4l\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}\left[\frac{1-2\varepsilon-2\varepsilon^2+\varepsilon^3}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}+\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)}\ln\frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right]. \tag{5.6.37}$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов для штампа с основанием в форме ромба. Математически эквивалентная задача распространения звука через отверстие в форме ромба была решена численно в de Smedt (1979). Здесь мы представляем его результаты в сравнении с данными, вычисленными нашим методом:

$\varepsilon=$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y=$	4.6520	1.8890	0.9844	0.5933	0.3655	0.2631
наш метод $p_y=$	3.7425	1.6605	0.9192	0.5770	0.3661	0.2697
Расхождение (%)	19.6	12.1	6.6	2.7	−0.2	−2.5
де Смедт $p_x=$	0.0314	0.0549	0.0862	0.1270	0.1923	0.2631
наш метод $p_x=$	0.1944	0.1435	0.1345	0.1532	0.2050	0.2697
Расхождение (%)	−518.4	−161.3	−56.0	−20.6	−6.6	−2.5

Хотя наши результаты удовлетворительны для p_y, они неприемлемы для p_x, когда $\varepsilon \le 0.5$. Несмотря на большую относительную ошибку p_y и p_x для малых ε, есть основания верить, что точность решения различных контактных задач будет весьма удовлетворительна по следующим причинам: разные знаки в расхождении будут компенсировать суммарную ошибку; член с p_0 обычно доминирует в реальных контактных задачах, и он обычно определяет суммарную ошибку решения. Мы увидим далее, что в случае жёсткого цилиндрического катка наша теория работает хорошо для значений ε далеко от единицы. Альтернативный подход, который использует вариационный принцип и несколько улучшает точность, будет обсуждаться далее.

Пример 4: Крест. Рассмотрим штамп с конфигурацией полученной путём ортогонального пересечения двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$, $(a \ge b)$. Введём параметр $\varepsilon = b/a$. Площадь и некоторые моменты даны в предыдущей секции. Остальные моменты даны ниже:

$$B_x = B_y = 2a^3\left\{2\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2} + \ln[\varepsilon + (1+\varepsilon^2)^{1/2}] + \varepsilon^3\left[\ln\frac{1+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon(1+\sqrt{2})} - \sqrt{2}\right]\right\}. \tag{5.6.38}$$

Сравнение между нашими результатами и данными в de Smedt (1979) представлены в таблице:

$\varepsilon=$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y=p_x=$	0.9675	0.4854	0.3271	0.2671	0.2523	0.2645
наш метод $p_y=p_x=$	1.6943	0.6765	0.3716	0.2683	0.2517	0.2697
Расхождение(%)	−75.1	−39.4	−13.6	−0.5	0.3	−2.0

Принимая во внимание сложность формы, мы должны считать результаты сравнения удивительно хорошими, не только количественно, но и качественно: оба набора данных демонстрируют плоский минимум вблизи

$\varepsilon = 0.75$. Расхождение становится слишком большим для $\varepsilon \le 0.3$. Мы покажем далее, что вариационный подход несколько улучшает результаты.

Пример 5: Жёсткий каток. Рассмотрим жёсткий прямой цилиндр длины $2l$ и радиуса r_0 лежащий на своей образующей и прижатый к упругому полупространству нормальной центрально приложенной силой P. Этот случай соответствует $g_x = g_{xy} = 0$ и $g_y = -1/(2r_0)$. Все ранее выведенные формулы остаются действительными здесь. Формулы (5.6.12) дают:

$$\alpha_x = -\frac{2(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})}{3\pi r_0 H(C_{xxxx}C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)},$$

$$\alpha_y = -\frac{2(2C_{xxxx} - C_{xxyy})}{3\pi r_0 H(C_{xxxx}C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)}, \qquad \alpha_{xy} = 0. \tag{5.6.39}$$

Полагая область контакта близкой к прямоугольнику, мы можем использовать формулы (5.6.32–5.6.34) для всех нужных моментов. Мы обозначим ширину области контакта $2b$. В ранее рассмотренных контактных задачах область контакта была задана. Здесь, мы имеем часть области контакта неизвестной. Его длина $2l$ предписана, и напряжения должны быть сингулярны при $y = \pm l$, в то время, как его ширина $2b$ пока неизвестна и должна быть найдена из условия, что напряжения должны исчезнуть при $x = \pm b$.

Мы определим α_0 из условия

$$\alpha_0 = -\alpha_y b^2. \tag{5.6.40}$$

Возвращаясь назад к (5.6.2), мы можем видеть, что условие (5.6.40) обеспечит, что σ исчезнет вдоль части эллипса (смотри Рис. 5.6.1)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{\alpha_x y^2}{\alpha_y b^2} = 1, \tag{5.6.41}$$

в то время, как напряжения будут оставаться сингулярными при $y = \pm l$. Прямые вычисления показывают, что полуось эллипса вдоль Oy по крайней мере в несколько раз длиннее другой полуоси, таким образом делая часть эллипса (5.6.41) очень близкой к прямой линии и оправдывая наше предположение о прямоугольной форме области контакта. Отношение полуосей эллипса достигает минимума для квадрата, где оно равно 2.4612. В этом смысле, случай $l = b$ является наименее точным и будет рассмотрен

Рис. 5.6.1. Геометрия задачи о жёстком катке.

более детально далее.

Формулы (5.6.3), (5.6.13) и (5.6.39) теперь дают следующие выражения для приложенной силы P и осадки штампа g_0:

$$P = \frac{8}{3}(\alpha_x I_x + \alpha_y I_y) - 2\alpha_y b^2 A, \tag{5.6.42}$$

$$g_0 = \frac{1}{4}\pi H[\alpha_x B_x + \alpha_y (B_y - 2J_0 b^2)], \tag{5.6.43}$$

где α_x и α_y определены в (5.6.39) и моменты в (5.6.32–5.6.34), и это заканчивает решение. Мы нашли только один технический рапорт (Kalker, 1972) где некоторые формулы были представлены для случая очень узкой области контакта с параметром $\varepsilon = l/b \gg 1$. Эти формулы в наших обозначениях примут вид:

$$P = \frac{l^3}{2\varepsilon^2 r_0 H}\left[1 + \frac{1 - \ln 2}{2\ln(4\varepsilon) + 1}\right], \tag{5.6.44}$$

$$g_0 = \frac{l^2}{4 r_0 \varepsilon^2}\left[2\ln(4\varepsilon) + 1\right]. \tag{5.6.45}$$

Мы получили частным образом от Калкера некоторые результаты, полученные его численным методом. Хотя его компьютерная программа не даёт значение параметра ε, мы ухитрились сравнить результаты путём следующей процедуры. Полагая равенство его осадки штампа с нашей (5.6.43), мы можем найти значение ε, которое, будучи подставленным в (5.6.42) позволяет нам сравнить приложенные силы. Результаты сравнения даны в Таблице 5.6.1. Согласование результатов в широком диапазоне

Таблица 5.6.1. Сравнение нашего метода с численными результатами Калкера

параметр ε	осадка штампа g^*	сила P^* (Калкер)	сила P^* формула (5.6.42)	расхождение (%)
23.31	0.2501E–03	0.5379E–04	0.6251E–04	–16.20
10.77	0.1000E–02	0.2590E–03	0.2891E–03	–11.65
6.799	0.2250E–02	0.6618E–03	0.7174E–03	–8.409
4.879	0.4000E–02	0.1298E–02	0.1377E–02	–6.118
3.757	0.6251E–02	0.2200E–02	0.2296E–02	–4.389
2.511	0.1225E–01	0.4934E–02	0.5019E–02	–1.729
1.843	0.2026E–01	0.9110E–02	0.9114E–02	–0.4892E–01
1.282	0.3603E–01	0.1853E–01	0.1835E–01	0.9399
0.9653	0.5633E–01	0.3240E–01	0.3208E–01	1.015
0.6741	0.1003	0.6748E–01	0.6719E–01	0.4326
0.4174	0.2263	0.1925	0.1952	–1.393
0.3018	0.4041	0.4122	0.4216	–2.279
0.2359	0.6351	0.7499	0.7717	–2.908
0.1933	0.9212	1.231	1.272	–3.335
0.1633	1.265	1.882	1.952	–3.703
0.1411	1.670	2.734	2.844	–4.043
0.1239	2.139	3.817	3.982	–4.323
0.1101	2.679	5.173	5.411	–4.612
0.9884E–01	3.297	6.847	7.185	–4.942
0.8939E–01	4.000	8.890	9.362	–5.306
0.6806E–01	6.771	18.40	19.30	–4.901

изменения параметра ε должно считаться очень хорошим, принимая во внимание приближённый характер нашей теории, и также тот факт, что программа Калкера игнорирует сингулярность напряжений на краях катка. Такое хорошее согласование позволяет нам заявить, что формулы (5.6.42–5.6.43) дают достаточно точное аналитическое решение задачи о жёстком катке на упругом полупространстве. Особенно удивительно, что наш метод показывает наибольшую точность вблизи $\varepsilon = 1$, несмотря на тот факт, что наше предположение о прямоугольной области контакта является наименее точным в этом случае. Мы сравнили результаты распределения напряжений по (5.6.2) с численными результатами Калкера. Типичная картина представили ниже для $r_0/l = 20$, $\varepsilon = 0.9653$, $H = 1$, $y/l = 0.1$.

$x/l=$	0.1200	0.3600	0.6000	0.8400
Калкер $\sigma=$	0.7967E−02	0.7420E−02	0.6226E−02	0.3352E−02
наш метод $\sigma=$	0.7960E−02	0.7513E−02	0.6528E−02	0.4675E−02
расхождение(%)	0.09	−1.25	−4.84	−39.49

Как было предсказано, относительная ошибка становится весьма значительной близко к границе области контакта. Аналогичное поведение наблюдается вдоль линии параллельной оси Ox:

$y/l=$	0.1000	0.3000	0.5000	0.7000	0.9000
Калкер $\sigma=$	0.7967E−02	0.8146E−02	0.8623E−02	0.9498E−02	0.1819E−01
наш метод $\sigma=$	0.7960E−02	0.8177E−02	0.8762E−02	0.1018E−01	0.1570E−01
расхождение (%)	0.09	−0.38	−1.61	−7.17	13.67

Представляется интересным сравнить численные результаты Калкера с его приближёнными формулами (5.6.44–5.6.45). Это сравнение дано в Таблице 5.6.2. Мы ожидали, что формулы Калкера будут более точны для больших

Таблица 5.6.2. Сравнение формул Калкера с его численными результатами

параметр ε	осадка штампа g^*	сила P^* Калкер	сила P^* формула (5.6.44)	расхождение (%)
22.34	0.2501E−03	0.5379E−04	0.5163E−04	4.018
10.27	0.1000E−02	0.2590E−03	0.2459E−03	5.054
6.456	0.2250E−02	0.6618E−03	0.6243E−03	5.658
4.621	0.4000E−02	0.1298E−02	0.1223E−02	5.743
3.551	0.6251E−02	0.2200E−02	0.2079E−02	5.511
2.368	0.1225E−01	0.4934E−02	0.4706E−02	4.621
1.734	0.2026E−01	0.9110E−02	0.8838E−02	2.987
1.197	0.3603E−01	0.1853E−01	0.1873E−01	−1.103
0.8848	0.5633E−01	0.3240E−01	0.3471E−01	−7.126
0.5772	0.1003	0.6748E−01	0.8364E−01	−23.95

ε с точностью уменьшающейся с ε. Это не так: ошибка почти постоянна в интервале $2<\varepsilon<22$, она уменьшается к нулю вблизи $\varepsilon=1$, после чего ошибка меняет знак и быстро увеличивается. Это означает, что формулы Калкера (5.6.44–5.6.45) не точны асимптотически, или что его численная процедура имеет ошибку около 5%.

Дискуссия. Альтернативный метод может быть предложен, используя вариационный подход (Noble 1960). Мы можем использовать опять функционал (5.5.40), который становится стационарным на точном решении (5.1.8). Мы примем:

$$H\int\int_S \frac{\sigma(N)}{R(M,N)} dS_N \approx w_0 + w_2, \tag{5.6.46}$$

где σ определена в (5.6.2) и $w_0 + w_2$ дано в (5.6.10). Подстановка (5.6.1), (5.6.2), (5.6.10) и (5.6.46) в (5.5.40) делает возможным рассмотреть функционал I как функцию α_0, α_x, α_y и α_{xy}. Условия экстремума

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial\alpha_x} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial\alpha_y} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial\alpha_{xy}} = 0,$$

дают четыре линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_0, α_x, α_y, и α_{xy}. Полное решение довольно громоздко. Здесь мы представляем систему уравнений для коэффициентов α_0, α_x, и α_y, которые действительны только для областей, имеющих по крайней мере одну ось симметрии.

$$c_{11}\alpha_0 + c_{12}\alpha_x + c_{13}\alpha_y = 4[Ag_0 + \frac{4}{3}(I_x g_x + I_y g_y)],$$

$$c_{12}\alpha_0 + c_{22}\alpha_x + c_{23}\alpha_y = \frac{16}{3}[I_x g_0 + \frac{1}{5}(D_{xxxx} g_x + D_{xxyy} g_y)],$$

$$c_{13}\alpha_0 + c_{23}\alpha_x + c_{33}\alpha_y = \frac{16}{3}[I_y g_0 + \frac{1}{5}(D_{xxyy} g_x + D_{yyyy} g_y)]. \tag{5.6.47}$$

Здесь

$c_{11} = 2\pi H J_0 A,$

$$c_{12} = \frac{1}{2}\pi H[B_x A + \frac{4}{3} I_x(2J_0 + 2C_{xxxx} - C_{xxyy}) - \frac{4}{3} I_y(C_{xxxx} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{13} = \frac{1}{2}\pi H[B_y A + \frac{4}{3} I_y(2J_0 + 2C_{yyyy} - C_{xxyy}) - \frac{4}{3} I_x(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{22} = \frac{4}{15}\pi H[5B_x I_x + D_{xxxx}(2C_{xxxx} - C_{xxyy}) - D_{xxyy}(C_{xxxx} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{23} = \frac{2}{15}\pi H[5(B_x I_y + B_y I_x) - D_{xxxx}(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})$$

$$+ 2D_{xxyy}(C_{xxxx} + C_{yyyy} - C_{xxyy}) - D_{yyyy}(C_{xxxx} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{33}=\frac{4}{15}\pi H[5B_yI_y+D_{yyyy}(2C_{yyyy}-C_{xxyy})-D_{xxyy}(C_{yyyy}-2C_{xxyy})]. \tag{5.6.48}$$

D—моменты введены аналогично (5.6.9) как

$$D_{xxxx}=\int_0^{2\pi}a^6(\phi)\sin^4\phi d\phi,\quad D_{xxyy}=\int_0^{2\pi}a^6(\phi)\sin^2\phi\cos^2\phi d\phi,$$

$$D_{yyyy}=\int_0^{2\pi}a^6(\phi)\cos^4\phi d\phi. \tag{5.6.49}$$

Ясно, что решение, использующее вариационный подход, более громоздко, чем ранее полученное решение. Остаётся под вопросом, будет ли это решение более точным. Одно преимущество следует отметить: матрица (5.6.48) симметрична (как и требуется по теореме взимности), в то время как матрица (5.6.11) в общем случае не симметрична.

Сравним результаты для нескольких частных конфигураций. Прежде всего, рассмотрим правильный полигон. В представленных далее таблицах слово *простое* относится к ранее описанному методу, в то время как слово *вариационный* относится к решению уравнений (5.6.47). В случае правильного полигона, нам нужны только полярные D—моменты.

$$D_0=\frac{1}{5}b^6 n\sin\frac{2\pi}{n}\left[1+\frac{4}{3}\cos^2(\frac{\pi}{n})+\frac{8}{3}\cos^4(\frac{\pi}{n})\right].$$

Вот результаты вычислений для правильного полигона с n сторонами

n=	3	4	5	6	7	9	∞
простое p_y=p_x=	0.3782	0.2697	0.2502	0.2443	0.2420	0.2403	0.2394
вариационный p_y=p_x=	0.3409	0.2612	0.2472	0.2429	0.2412	0.2401	0.2394
Расхождение (%)	9.9	3.2	1.2	0.6	0.3	0.1	0.0

Оба метода работают хорошо. Если мы будем считать результат де Смедта для квадрата, 0.2645, как точный, тогда это может быть индикатором, что вариационный подход несколько более точный. В предельном случае $n\to\infty$ оба метода дают точный результат для круга.

D—моменты для прямоугольника примут вид:

$$D_{xxxx}=\frac{24}{5}a_1a_2^5,\ D_{yyyy}=\frac{24}{5}a_1^5a_2,\ D_{xxyy}=\frac{8}{3}a_1^3a_2^3.$$

Вот численные результаты полученные для прямоугольника:

ε=	0.1000	0.2000	0.3330	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт p_y=	2.9980	1.3730	0.7942	0.5229	0.3491	0.2645
вариационный p_y=	3.4239	1.4523	0.8023	0.5166	0.3437	0.2612
Расхождение (%)	−14.2	−5.8	−1.0	1.2	1.5	1.2
де Смедт p_x=	0.0376	0.0639	0.0982	0.1399	0.2022	0.2645
вариационный p_x=	0.0316	0.0588	0.0939	0.1370	0.1997	0.2612
Расхождение (%)	15.9	7.9	4.3	2.1	1.2	1.2

Опять, общее впечатление, что вариационный подход более точен, но не всегда. Например, расхождение в p_y для $\varepsilon = 0.1$ увеличилось по сравнению с результатом простого метода. Мы оставляем пользователю решать, стоит ли несколько лучшая точность вариационного подхода болших усилий и более громоздких вычислений.

Математически эквивалентная задача аналитического определения квадратичных членов в низкочастотном разложениии, относящимся к распространению звука через отверстие в жёстком экране, рассмотрена в (Fabrikant, 1986d).

Упражнение 5.6

1. Найдите D—моменты для ромба, с полуосями a_1 и a_2.
Ответ:

$$D_{xxxx} = \frac{4}{5} a_1 a_2^5, \quad D_{yyyy} = \frac{4}{5} a_1^5 a_2, \quad D_{xxyy} = \frac{2}{15} a_1^3 a_2^3.$$

2. Найдите *вариационное* решение для ромба и сравните результаты с данными де Смедта, и с *простым* решением.
Ответ: смотри Таблицу ниже

ε=	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт p_y=	4.6520	1.8890	0.9844	0.5933	0.3655	0.2631
вариационный p_y=	−0.5952	3.3549	0.9465	0.5580	0.3534	0.2612
Расхождение (%)	112.8	−77.6	3.8	6.0	3.3	0.7
де Смедт p_x=	0.0314	0.0549	0.0862	0.1270	0.1923	0.2631
вариационный p_x=	0.0090	0.1464	0.1110	0.1400	0.1971	0.2612
Расхождение (%)	71.5	−166.7	−28.8	−10.2	−2.5	0.7

Заключение: расхождение уменьшилось для $\varepsilon > 0.33$, но результаты неприемлемы для $\varepsilon < 0.33$.

3. Найдите D–моменты для штампа с основанием в форме креста.
Ответ:

$$D_{xxxx} = D_{yyyy} = \frac{24}{5} a^6 \varepsilon (1 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5), \qquad D_{xxyy} = \frac{8}{3} a^6 \varepsilon^3 (2 - \varepsilon^3).$$

4. Найдите *вариационное* решение для креста и сравните его с данными де Смедта, и с *простым* решением.
Ответ: смотри Таблицу ниже

ε=	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт p_y=p_x=	0.9675	0.4854	0.3271	0.2671	0.2523	0.2645
вариационный p_y=p_x=	1.4346	0.5822	0.3397	0.2606	0.2482	0.2612
Расхождение (%)	–48.3	–19.9	–3.9	2.4	1.6	1.2

Заключение: Сравнение этой таблицы с данными из простого решения ведёт к тому же мнению: результаты становятся более точными в широком диапазоне изменеия параметра ε, но теория не работает для очень малых ε.

5. Примените теорию к случаю катка, с параметром $\varepsilon = 1$.

Ответ:

$$\sigma = \frac{a(\phi) l \left[\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \left[1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - 1}{2\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - 1} \frac{y^2}{l^2} \right]}{\pi H r_0 \ln(1+\sqrt{2}) [3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}] \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}$$

$$\approx \frac{0.4869 a(\phi)\, l \left[1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{(2.4612 l)^2} \right]}{\pi H r_0 \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}$$

$$P = \frac{2 l^3 [12 \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}]}{9 \pi H r_0 \ln(1+\sqrt{2})\, [3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}]} \approx \frac{1.878 l^3}{\pi H r_0},$$

$$g_0 = \frac{l^2[13\ln^2(1+\sqrt{2}) - 6\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) + 2]}{4r_0(1+\sqrt{2})\,[3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}]} \approx \frac{1.06558 l^2}{r_0}$$

5.7 Плоский гибкий штамп общей формы в плане под действием сдвигающей нагрузки

Рассмотрена следующая смешанная граничная задача для трансверсально изотропного упругого полупространства: однороное тангенциальное перемещение задано на конечной области общей формы, и остальная часть границы свободна от напряжений. Задача может быть интерпретирована как задача о внешней трещине, с отдалённой сдвигающей нагрузкой или как контакная задача о гибком штампе подверженному тангенциальному перемещению. Мы используем термин *гибкий* для обозначения особого типа штампа, который не производит никакого нормального давления. Общее взаимоотношение установлено между приложенной сдвигающей силой и перемещением. Сравнение с опубликованными в литературе результатами подтверждают удовлетворительную точность нашей теории.

Теория. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$, со следующими граничными условиями предписанными в плоскости $z = 0$:

$$\sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty<(x,y)<\infty; \qquad \tau = 0, \quad \text{для} \quad (x,y)\notin S;$$

$$u = u(x,y), \quad \text{для} \quad (x,y)\in S. \tag{5.7.1}$$

Здесь S обозначает область контакта в упругих контактных задачах, или шейку трещины для случая внешних задач теории трещин. Пусть граница области S выражается в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi), \tag{5.7.2}$$

где $a(\phi)$ однозначная ограниченная функция. Основное интегральное уравнение может быть переписано из (2.6.2) следующим образом:

$$\frac{G_1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(\phi)_0}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)}{R}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0+\frac{G_2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(\phi)_0}\frac{q\,\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)}{\bar{q}R}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0=u(\rho,\phi).$$

(5.7.3)

Здесь черта сверху обозначает комплексно—сопряжённое значение, и

$$q=\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0},\qquad R^2=q\bar{q}. \tag{5.7.4}$$

Подход основан на интегральном представлении величины, обратной расстоянию между двумя точками установленной в (1.1.27). Нам также нужно интегральное представление ядра во втором члене выражения (5.7.3). Оно было выведено в (2.5.6). Мы рассматриваем далее только случай, где в правой стороне (5.7.3) $u=\text{const}$. Подстановка (1.1.27) и (2.5.6) в (5.7.3) даёт после изменения порядка интегрирования и сохранения только нулевой гармоники:

$$\frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi_0\int_0^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^{a(\phi_0)}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{2i\phi_0}d\phi_0\int_0^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^{a(\phi_0)}\frac{\rho_0^2-2x^2}{\rho_0(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)d\rho_0=u.$$

(5.7.5)

Мы полагаем распределение сдвигающих напряжений в форме

$$\tau=\frac{ca(\phi)}{[a^2(\phi)-\rho^2]^{1/2}}, \tag{5.7.6}$$

где c есть комплексная константа. Эта нагрузка статически эквивалентна результирующей силе $T=T_x+iT_y$. Интегрирование (5.7.6) по S даёт:

$$T=2Ac, \tag{5.7.7}$$

где A есть площадь области S. Интересно отметить, что соотношение (5.7.7) не зависит от положения начала системы координат. Это положение может быть определёно из условия, что сдвигающие напряжения не должны производить крутящего момента. Это ведёт к двум уравнениям:

$$\int_0^{2\pi}(a(\phi))^3\cos\phi\,\mathrm{d}\phi=0,\qquad\int_0^{2\pi}(a(\phi))^3\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=0.\tag{5.7.8}$$

Мы можем заметить, что левая сторона каждого уравнения (5.7.8) пропорциональна x или y координате центра тяжести. Это означает, что начало системы координат должно быть расположено в центре тяжести области S. Направление осей будет обсуждаться далее.

Теперь нам нужно получить соотношение между тангенциальной силой T и перемещением u. Это может быть достигнуто подстановкой (5.7.6—5.7.7) в (5.7.5), что даёт после интегрирования по ρ_0:

$$u=\frac{\pi}{8A}\left[G_1T\int_0^{2\pi}a(\phi_0)\mathrm{d}\phi_0+G_2\overline{T}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2i\phi_0}a(\phi_0)\mathrm{d}\phi_0\right].\tag{5.7.9}$$

Комплексное выражение (5.7.9) эквивалентно двум действительным, а именно,

$$u_x=\frac{\pi}{8A}\{T_x[G_1J_0-G_2(J_x-J_y)]+2T_yG_2J_{xy}\},$$

$$u_y=\frac{\pi}{8A}\{2T_xG_2J_{xy}+T_y[G_1J_0-G_2(J_y-J_x)]\},\tag{5.7.10}$$

J—моменты были введены в (5.5.8) и некоторые из них были вычислены в секции 5.6. Теперь можно легко вывести специфические формулы для штампов рзличных форм. Мы оставляем это упражнение читателю.

Заметим, что изменение порядка интегрирования в (5.7.5) действительно только внутри круга $\rho=\min(a(\phi))$, тем не менее, решение, данное в (5.7.9) является *точным* в случае эллипса. Это можно легко объяснить. Хорошо известно (Willis, 1970), что распределение напряжений по эллипсу, данное полиномом, умноженным на $a(\phi)/[a^2(\phi)-\rho^2]^{1/2}$, приводит к полиномиальному перемещению. В нашем случае, перемещение постоянно. Так как выражение (5.7.9) даёт точные значения интегралов в (5.7.3) для $\rho=0$, результат становится точным по всему эллипсу. Действительно, формула (5.7.10) даёт для эллипса с полуосями a и b ($a\geq b$)

$$u_x=\frac{1}{2a}\left[G_1\mathrm{K}+G_2\left(\frac{(2-k^2)\mathrm{K}-2\mathrm{E}}{k^2}\right)\right]T_x,$$

$$u_y = \frac{1}{2a}\left[G_1 \mathrm{K} - G_2\left(\frac{(2-k^2)\mathrm{K} - 2\mathrm{E}}{k^2}\right)\right] T_y,$$

где K и E полные эллиптические интегралы первого и второго рода с аргументом $k = (1-(b/a)^2)^{1/2}$. В изотропном случае $G_1 = (2-\nu)/(2\pi\mu)$, $G_2 = \nu/(2\pi\mu)$, и последний результат совпадает с Mindlin (1949).

Мы можем всегда выбрать направление осей координат так, чтобы J_{xy} исчезло. В этом случае формулы (5.7.9) упрощаются следующим образом:

$$u_x = \frac{\pi}{8A}[G_1 J_0 - G_2(J_x - J_y)]\, T_x, \qquad u_y = \frac{\pi}{8A}[G_1 J_0 - G_2(J_y - J_x)]\, T_y. \tag{5.7.11}$$

Так как выражения (5.7.10) и (5.7.11) *точны* для эллипса, мы можем ожидать, что они будут достаточно точны для произвольной области S. Это предположение было оправдано в предыдущих секциях, когда сравнивалось с численными результатами известными в опубликованной литературе.

Чтобы проверить точность нашего метода, некоторые вычисления были выполнены Калкером. Уравнения (5.7.11) могут быть переписаны как

$$T_x = C_x u_x, \qquad T_y = C_y u_y,$$

с

$$C_x = \frac{8A}{\pi[G_1(J_x + J_y) - G_2(J_x - J_y)]}, \qquad C_y = \frac{8A}{\pi[G_1(J_x + J_y) + G_2(J_x - J_y)]}. \tag{5.7.12}$$

Значения C_x и C_y, вычисленные согласно формулам (5.7.12), даны в таблице ниже в сравнении с числовыми результатами Калкера.

$\varepsilon=$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
C_x наш метод	5.16	6.12	6.87	8.1	9.19	10.67
C_x Калкер	4.644	5.650	6.445	7.766	8.904	10.43
Расхождение (%)	10.	7.7	6.2	4.1	3.1	2.3
C_y наш метод	4.32	5.32	6.13	7.56	8.85	10.67
C_y Калкер	3.991	5.044	5.904	7.373	8.667	10.43
Расхождение (%)	7.6	5.2	3.7	2.5	2.1	2.3

Вычисления были сделаны для изотропного тела, с модулем сдвига $\mu = 0.5$, и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Точность вычислений оценивалась путём подсчёта C_x и C_y для эллипса, где точное решение хорошо известно. Точное решение было около 4% *выше* численного результата Калкера. Все наши результаты тоже выше числовых результатов. Если мы предположим, что общее поведение ошибок для прямоугольника то же, что и для эллипса (это означает, например, что наш 10% расхождения переводится в $10–4=6(\%)$ ошибки), тогда наши формулы могут считаться удивительно точными в широком диапазоне изменения параметра ε. Мы ожидаем, что ошибка нашего метода будет увеличиваться монотонно с уменьшением ε, так как предположенное распределение напряжений (5.7.6) менее реалистично для узкого прямоугольника, чем для квадрата. Тот факт, что расхождение C_y с числовыми результатами не изменяется монотонно, указывает на некоторые дефекты в числовой процедуре Калкера. Мы также сравнили распределение сдвиговых напряжений согласно (5.7.6), (5.7.7) и (5.7.12) для квадрата с $a_1=4$, вдоль линии $y=0.5$. Тангенциальное перемещение u_x было положено равным единице, и $u_y=0$. Сравнение дано в таблице ниже:

$x=$	0.5	1.5	2.5	3.5
τ наш метод	0.084	0.090	0.107	0.172
τ Калкер	0.0863	0.0923	0.105	0.222
Расхождение (%)	–2.6	–2.5	1.7	–29.

Принимая во внимание приблизительную основу обоих методов, согласование результатов должно считаться удивительно хорошим, кроме точек вблизи границу, где ни один метод не претендует на точность.

Калкер сделал вычисления для креста, с $a=4$ и $\varepsilon=0.5$. Остальные параметры были приняты такими же, как и для прямоугольника. Его результат $C_x=C_y=9.033$, наш результат равен 9.26, с расхождением 2.4%. Мы также сравнили распределение сдвигающих напряжений вдоль линии $y=0.5$. Тангенциальное перемещение u_x было положено равным единице и $u_y=0$. Сравнение дано в таблице ниже.

$x=$	0.5	1.5	2.5	3.5
τ наш метод	0.0996	0.104	0.124	0.199
τ Калкер	0.0997	0.106	0.120	0.254
Расхождение (%)	–0.08	–1.9	2.9	–27.

Согласование результатов хорошее, кроме точек близко к границе.

Дискуссия. Мы даём здесь качественный анализ общего решения. Перепишем уравнения (5.7.11) следующим образом:

$$u_x = \frac{\pi G_1 J_0}{8A}[1-\kappa]T_x, \qquad u_y = \frac{\pi G_1 J_0}{8A}[1+\kappa]T_y, \qquad \kappa = \frac{G_2(J_x - J_y)}{G_1 J_0}. \tag{5.7.13}$$

Прежде всего, рассмотрим случай $J_x = J_y$. Мы имеем из (5.7.13), что $\kappa = 0$, и поэтому упругая податливость будет одинаковой в любом направлении. Благодаря тому факту, что круг имеет наибольшее значение J_0 из всех областей, имеющих ту же площадь A, мы можем заключить, что наименьшая сила требуется для сдвига круговой области. Численное сравнение с квадратом показывает, что отношение линейных полярных моментов квадрата к моментам для круга равно $(2/\sqrt{\pi})\ln(1+\sqrt{2}) = 0.9945$, что очень близко к единице. Принимая во внимание, что наша теория имеет приближённый характер, весьма удивительно, что разница всё–же заметна. Сравнение креста с кругом показывает, что упругая податливость становится произвольно малой, когда $\varepsilon \to 0$.

Мы теперь деформируем область S таким образом, что J_x становится неравной J_y, оставляя площадь области постоянной. Формулы (5.7.13) показывают, что в этом случае становится легче двигать область в направлении длины, чем в направлении ширины (длина всегда больше ширины). В частном случае иглы , предельное значение для κ равно G_2/G_1; в случае изотропии, $(G_2/G_1) = \nu/(2-\nu) \le 1/3$. Следует отметить, что для $G_2 = 0$, упругая податливость не зависит от направления сдвига. В случае изотропии, это соответствует коэффициенту Пуассона равным нулю.

Упражнение 5.7

1. Проверьте инвариантность формул (5.7.10) относительно вращения осей.

2. Найдите взаимоотношение между сдвигающей силой и переносным движением эллиптического штампа, когда его полуоси $a < b$.

Ответ: $$u_x = \frac{1}{2a}\left[G_1 \mathrm{K}(k_1) - G_2\left(\frac{(2-k^2)\mathrm{K}(k_1) - 2\mathrm{E}(k_1)}{k_1^2}\right)\right]T_x,$$

$$u_y = \frac{1}{2a}\left[G_1 \mathrm{K}(k_1) + G_2\left(\frac{(2-k^2)\mathrm{K}(k_1) - 2\mathrm{E}(k_1)}{k_1^2}\right)\right]T_y.$$

3. Найдите тангенциальную податливость крестовидного штампа, с длинной стороной $2a$ и отношением сторон ε.

Совет: используйте (5.7.12) и (5.5.38)

4. Найдите тангенциальную податливость в направлении осей симметрии для ромбовидного штампа.

5.8 Задача Рейсснера—Сагоци для областей общего вида

Задача кручения трансверсально изотропного упругого полупространства штампом общей формы в плане рассмотрена здесь. Приближённое аналитическое решение получено при помощи общего метода. Общее взаимоотношение установлено между крутящим моментом и углом поворота. Некоторые частные формулы выведены для штампов с базой в форме полигона, прямоугольника, и креста.

Теория. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство. Гибкий штамп общей формы S в плане сцеплён с поверхностью полупространства. Крутящий момент M_z приложен к штампу, производя угол кручения ω. Нам требуется найти взаимоотношение между крутящим моментом и углом кручения. Математическая формулировка задачи приводит к следующим смешанным граничным условиям в плоскости $z=0$:

$$\sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty < (x,y) < \infty; \quad \tau_{zx} = 0 \ \text{и} \ \tau_{yz} = 0, \quad \text{для} \quad (x,y) \notin S;$$

$$u_x = -\omega y \ \text{и} \ u_y = \omega x, \quad \text{для} \quad (x,y) \in S. \tag{5.8.1}$$

Здесь S обозначает область, подверженную кручению, и ω есть угол кручения.

Введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + \mathrm{i}u_y$, и комплексные сдвигающие напряжения $\tau = \tau_{zx} + \mathrm{i}\tau_{yz}$. Пусть граница области S выражается в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi), \tag{5.8.2}$$

где $a(\phi)$ есть однозначная ограниченная функция. Основное интегральное уравнение дано в (5.7.3). Подход основан на интегральных представлениях установленных в (1.1.27) и (2.5.6). Подстановка (1.1.27) и (2.5.6) в (5.7.3) даёт, после изменения порядка интегрирования и сохранения только первой гармоники:

$$u = \frac{2}{\pi\rho} G_1 \int_0^{\rho} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi_0)\, \mathrm{d}\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\tau(\rho_0, \phi_0)\, \mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{\pi\rho}G_2\left\{-e^{i\phi}\int_0^{\rho}\frac{x^2 dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}e^{i\phi_0}d\phi_0\int_x^{a(\phi_0)}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+e^{-i\phi}\int_0^{\rho}\frac{x^2 dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}e^{3i\phi_0}d\phi_0\int_x^{a(\phi_0)}\frac{3\rho_0^2-4x^2}{\rho_0^2(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\tau(\rho_0,\phi_0)d\rho_0\right\}. \tag{5.8.3}$$

Отметим, что изменение порядка интегрирования в (5.8.3) действительно только внутри круга $\rho=\min[a(\phi)]$, и тот факт, что мы игнорировали все гармоники, кроме первой. Тем не менеее, будет показано далее, что результаты *точны* для эллипса, и ожидаются быть достаточно точными для широкого набора неэллиптических форм.

Пусть распределение сдвигающих напряжений под штампом имеет вид:

$$\tau=\tau_{zx}+i\tau_{yz}=\frac{a(\phi)\,\rho(iq_y\cos\phi-q_x\sin\phi)}{[a^2(\phi)-\rho^2]^{1/2}}, \tag{5.8.4}$$

где q_y и q_x — пока неизвестные константы. Мы используем условие, что в случае чистого кручения, главный вектор должен быть равен нулю, это означает, что интеграл от τ по S равен нулю. Так как q_y и q_x независимы, это ведёт к двум уравнениям, а именно,

$$\int_0^{2\pi}(a(\phi))^3\cos\phi\,d\phi=0,\qquad \int_0^{2\pi}(a(\phi))^3\sin\phi\,d\phi=0\,. \tag{5.8.5}$$

Заметим, что левая сторона каждого уравнения (5.8.5) пропорциональна x или y координате центра тяжести. Это означает, что начало системы координат должно быть расположено в центре тяжести области контакта. Ориентация осей будет обсуждаться далее.

Взаимоотношения между крутящим моментом M_z и параметрами q_y и q_x могут быть установлены условий статики:

$$M_z=\iint_S\tau_{yz}x\,dS-\iint_S\tau_{zx}y\,dS,$$

которые ведут к

$$M_z = \frac{8}{3}(q_y I_y + q_x I_x). \tag{5.8.6}$$

где I_x и I_y моменты инерции.

Следующий шаг: связать q_y и q_x с углом кручения ω. Это может быть сделано подстановкой (5.8.4) в (5.8.3), что даёт, после интегрирования по ρ_0:

$$u = \frac{\pi}{4} G_1 \rho \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi_0)(\mathrm{i} q_y \cos\phi_0 - q_x \sin\phi_0)\, d\phi_0$$

$$- \frac{\pi}{8} G_2 \rho e^{i\phi} \int_0^{2\pi} a(\phi_0)(-\mathrm{i}\bar{q}_y \cos\phi_0 - \bar{q}_x \sin\phi_0) e^{i\phi_0}\, d\phi_0$$

$$+ \frac{3\pi}{8} G_2 \rho e^{-i\phi} \int_0^{2\pi} a(\phi_0)(-\mathrm{i}\bar{q}_y \cos\phi_0 - \bar{q}_x \sin\phi_0) e^{3i\phi_0}\, d\phi_0. \tag{5.8.7}$$

Черта над буквой везде обозначает комплексно сопряжённое значение. Выражение (5.8.7) может также быть переписано следующим образом:

$$u = \frac{\pi}{4} G_1 \rho [(\mathrm{i} q_y J_y - q_x J_{xy})\cos\phi + (\mathrm{i} q_y J_{xy} - q_x J_x)\sin\phi]$$

$$- \frac{\pi}{8} G_2 \rho e^{i\phi}[-\bar{q}_y(\mathrm{i} J_y - J_{xy}) - \bar{q}_x(J_{xy} + \mathrm{i} J_x)]$$

$$+ \frac{3\pi}{8} G_2 \rho e^{-i\phi}\{-\mathrm{i}\bar{q}_y[4C_{yyyy} - 3J_y + \mathrm{i}(3J_{xy} - 4C_{xxxy})]$$

$$- \bar{q}_x[4C_{xyyy} - 3J_{xy} + \mathrm{i}(3J_x - 4C_{xxxx})]\} \tag{5.8.8}$$

J—моменты были введены в (5.5.8), и C—моменты определены в (5.6.9). Подстановка последних двух условий (5.8.1) в (5.8.8) даёт:

$$\omega(-y + \mathrm{i}x) = \frac{\pi}{4} G_1 [(\mathrm{i} q_y J_y - q_x J_{xy})x + (\mathrm{i} q_y J_{xy} - q_x J_x)y]$$

$$- \frac{\pi}{8} G_2 (x + \mathrm{i}y)[-\bar{q}_y(\mathrm{i} J_y - J_{xy}) - \bar{q}_x(J_{xy} + \mathrm{i} J_x)]$$

$$+\frac{3\pi}{8}G_2(x-\mathrm{i}y)\{-\mathrm{i}\bar{q}_\mathrm{y}[4C_{\mathrm{yyyy}}-3J_\mathrm{y}+\mathrm{i}(3J_{\mathrm{xy}}-4C_{\mathrm{xxxy}})]$$

$$-\bar{q}_\mathrm{x}[4C_{\mathrm{xyyy}}-3J_{\mathrm{xy}}+\mathrm{i}(3J_\mathrm{x}-4C_{\mathrm{xxxx}})]\} \tag{5.8.9}$$

Разделение членов в (5.8.9), относящихся к x и y приведёт к двум линейным алгебраическим уравнениям для неизвестных q_y и q_x. В общем случае, параметры q_y и q_x являются комплексными, и их нахождение требует решения системы 4 линейных алгебраических уравнений. Эти уравнения могут быть упрощёны, если положить $J_{\mathrm{xy}}=0$. Удовлетворить этому условию легко: нужно просто выбрать направление координатных осей соответственно. В случае симметрии, эти оси будут совпадать с главными осями инерции. Для простоты, мы положим также, что $C_{\mathrm{xyyy}}=C_{\mathrm{xxxy}}=0$, что всегда будет выполняться, если область S имеет по крайней мере одну ось симметрии. Благодаря этим предположениям, выражение (5.8.9) даёт только два уравнения с действительными коэффициентами, а именно,

$$\frac{\pi}{4}G_1q_\mathrm{y}J_\mathrm{y}+\pi G_2[q_\mathrm{y}(\frac{5}{4}J_\mathrm{y}-\frac{3}{2}C_{\mathrm{yyyy}})+q_\mathrm{x}(\frac{3}{2}C_{\mathrm{xxxx}}-J_\mathrm{x})]=\omega,$$

$$\frac{\pi}{4}G_1q_\mathrm{x}J_\mathrm{x}+\pi G_2[q_\mathrm{y}(\frac{3}{2}C_{\mathrm{yyyy}}-J_\mathrm{y})+q_\mathrm{x}(\frac{5}{4}J_\mathrm{x}-\frac{3}{2}C_{\mathrm{xxxx}})]=\omega. \tag{5.8.10}$$

Решение (5.8.10) есть:

$$q_\mathrm{y}=\frac{4\omega[G_1+3G_2(3-4c_\mathrm{x})]}{\pi(G_1+G_2)J_\mathrm{y}[G_1+3G_2(3-2c_\mathrm{x}-2c_\mathrm{y})]},$$

$$q_\mathrm{x}=\frac{4\omega[G_1+3G_2(3-4c_\mathrm{y})]}{\pi(G_1+G_2)J_\mathrm{x}[G_1+3G_2(3-2c_\mathrm{x}-2c_\mathrm{y})]}. \tag{5.8.11}$$

Здесь следующие параметры были введены:

$$c_\mathrm{x}=C_{\mathrm{xxxx}}/J_\mathrm{x},\ \ c_\mathrm{y}=C_{\mathrm{yyyy}}/J_\mathrm{y}. \tag{5.8.12}$$

Подставляя (5.8.11) в (5.8.6), найдём взаимоотношение между крутящим моментом и углом кручения в форме:

$$M_\mathrm{z}=\frac{32\omega[(G_1+9G_2)(I_\mathrm{y}/J_\mathrm{y}+I_\mathrm{x}/J_\mathrm{x})-12G_2(c_\mathrm{x}I_\mathrm{y}/J_\mathrm{y}+c_\mathrm{y}I_\mathrm{x}/J_\mathrm{x}]}{3\pi(G_1+G_2)[G_1+3G_2(3-2c_\mathrm{x}-2c_\mathrm{y})]}.$$

(5.8.13)

Легко проверить, что решение (5.8.11) и (5.8.13) является *точным* для эллипса. Действительно, рассмотрим эллипс с полуосями a и b ($a \geq b$). Необходимые геометрические характеристики равны:

$$J_x = 4b[\mathrm{E}(k) - (1-k^2)\mathrm{K}(k)]/k^2, \qquad J_y = 4b[\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)]/k^2,$$

$$C_{xxxx} = 4b[2(2k^2-1)\mathrm{E}(k) + (1-k^2)(2-3k^2)\mathrm{K}(k)]/(3k^4),$$

$$C_{yyyy} = 4b[(2+k^2)\mathrm{K}(k) - 2(1+k^2)\mathrm{E}(k)]/(3k^4), \qquad k = [1-(b/a)^2]^{1/2}. \tag{5.8.14}$$

Здесь $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Подстановка (5.8.14) в (5.8.11) и (5.8.13) даёт:

$$q_y = \frac{\omega\{G_1k^2[\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + G_2[(8-7k^2)\mathrm{E}-(1-k^2)(8-3k^2)\mathrm{K}]\}}{\pi b(G_1+G_2)\{G_1(\mathrm{K}-\mathrm{E})[\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + G_2[k^2\mathrm{K}(\mathrm{K}+\mathrm{E})-(\mathrm{K}-\mathrm{E})(\mathrm{K}+3\mathrm{E})]\}},$$

$$q_x = \frac{\omega\{(G_1k^2-8G_2)[\mathrm{K}-\mathrm{E}] + G_2k^2[5\mathrm{K}-\mathrm{E}]}{\pi b(G_1+G_2)\{G_1(\mathrm{K}-\mathrm{E})[\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + G_2[k^2\mathrm{K}(\mathrm{K}+\mathrm{E})-(\mathrm{K}-\mathrm{E})(\mathrm{K}+3\mathrm{E})]\}}, \tag{5.8.15}$$

$$M_z = \frac{2\omega a^3\{G_1k^2\mathrm{E} - G_2[8(1-k^2)(2-k^2)\mathrm{K} - (k^4-16k^2+16)\mathrm{E}]\}}{3(G_1+G_2)\{G_1(\mathrm{K}-\mathrm{E})[\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + G_2[k^2\mathrm{K}(\mathrm{K}+\mathrm{E})-(\mathrm{K}-\mathrm{E})(\mathrm{K}+3\mathrm{E})]\}}. \tag{5.8.16}$$

Сокращения E и K в (5.8.15) и (5.8.16) обозначают $\mathrm{E}(k)$ и $\mathrm{K}(k)$ соответственно. Те же результаты могут быть получены прямой подстановкой (5.8.4) в (5.7.3), с точным вычислением интегралов, используя соответствующие формулы из Аппендикса A5.1. В случае изотропии, $G_1 = (2-\nu)/(2\pi\mu)$, $G_2 = \nu/(2\pi\mu)$, и формулы (5.8.15) и (5.8.16) упрощаются следующим образом:

$$q_y = \frac{\mu\omega\{k^2[\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + 2\nu(1-k^2)[2\mathrm{E}-(2-k^2)\mathrm{K}]\}}{b\{[\mathrm{K}-\mathrm{E}][\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + \nu\mathrm{E}[2\mathrm{E}-(2-k^2)\mathrm{K}]\}},$$

$$q_x = \frac{\mu\omega\{k^2[\mathrm{K}-\mathrm{E}] + 2\nu[2\mathrm{E}-(2-k^2)\mathrm{K}]\}}{b\{[\mathrm{K}-\mathrm{E}][\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + \nu\mathrm{E}[2\mathrm{E}-(2-k^2)\mathrm{K}]\}}, \tag{5.8.17}$$

$$M_z = \frac{2\pi\mu\omega a^3\{k^4\mathrm{E} + 4\nu(1-k^2)[2\mathrm{E}-(2-k^2)\mathrm{K}]\}}{3\{[\mathrm{K}-\mathrm{E}][\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}] + \nu\mathrm{E}[2\mathrm{E}-(2-k^2)\mathrm{K}]\}}. \tag{5.8.18}$$

Формулы (5.8.17) и (5.8.18) согласуются с соответствующими результатами Миндлина (1949). Некоторые опечатки обнаружены в соответствующей формуле (Kassir and Sih, 1968). Результат Виллиса (1970) ошибочен, так как он показывает, что параметры q_y и q_x не зависят от упругих констант, что явно неправильно.

В случае, когда $J_x = J_y$ и $c_x = c_y$, формулы (5.8.11) и (5.8.13) упрощаются значительно, а именно,

$$q_y = q_x = \frac{8\omega}{\pi J_0(G_1+G_2)}, \qquad M_z = \frac{64 I_0 \omega}{3\pi J_0(G_1+G_2)} \tag{5.8.19}$$

Формулы (5.8.11) и (5.8.13) являются основными результатами этой секции. Они точны для эллипса, и есть причины верить, что они будут достаточно точными для штампа произвольной формы. Вывод специфических формул для различных форм оставлен читателю.

Пример 1: Правильный полигон. Рассмотрим штамп в форме правильного полигона с n сторонами. Необходимые моменты были вычислены в секции 5.6. Мы можем использовать выражения (5.8.19), с результатом:

$$q_y = q_x = \frac{8\omega}{\pi n b(G_1+G_2)\cos\dfrac{\pi}{n}\ln\dfrac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}},$$

$$M_z = \frac{32\omega b^3 \sin(\pi/n)[2+\cos(2\pi/n)]}{9\pi(G_1+G_2)\ln\dfrac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}}. \tag{5.8.20}$$

В предельном случае $n\to\infty$, формулы (5.8.20) дают результат для круглого штампа:

$$q_y = q_x = \frac{4\omega}{\pi^2 b(G_1+G_2)}, \qquad M_z = \frac{16\omega b^3}{3\pi(G_1+G_2)} \tag{5.8.21}$$

Введём параметр жёсткости

$$D = M_z(G_1+G_2)/\omega = 64 I_0/(3\pi J_0), \tag{5.8.22}$$

который является геометрической характеристикой области S. Если мы возьмём отношение жёсткости правильного полигона D_p к жёсткости D_c

круга с той же площадью, результат будет:

$$\frac{D_\mathrm{p}}{D_\mathrm{c}} = \frac{2\sin(\pi/n)[2+\cos(2\pi/n)]}{3\ln\dfrac{1+\sin(\pi/n)}{1-\sin(\pi/n)}}. \tag{5.8.23}$$

Элементарный анализ формулы (5.8.23) показывает, что равносторонний треугольник имеет жёсткость 1.24 раза выше, чем круг той же площади. Соответствующее отношение для квадрата равно 1.05, и дальнейшее увеличение n делает жёсткость полигона практически неразличимой от круга. Можно доказать теорему, что из всех односвязных областей, имеющих ту же площадь, круг имеет наименьшую жёсткость. Это противоположно соответствующей теореме в Сент—Венановской теории кручения стержней, где круг имеет наибольшую жёсткость. Это можно легко объяснить, так как в кручении полупространства требуется повернуть не только воображаемый стержень, но и всё, что его окружает тоже.

Пример 2: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольной базой, где a_1 и a_2 полуоси прямоугольника вдоль осей Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Площадь и нужные моменты были вычислены в секции 5.6. Формулы (5.8.11) и (5.8.13) для прямоугольника принимают форму:

$$q_\mathrm{y} = \frac{\omega[(G_1-3G_2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}\sinh^{-1}\varepsilon + 4G_2\varepsilon]}{\pi a_1\varepsilon(G_1+G_2)\{(G_1-3G_2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}\sinh^{-1}\varepsilon\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+2G_2[\varepsilon\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+\sinh^{-1}\varepsilon]\}},$$

$$q_\mathrm{x} = \frac{\omega[(G_1-3G_2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}\sinh^{-1}(1/\varepsilon) + 4G_2]}{\pi a_1(G_1+G_2)\{(G_1-3G_2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}\sinh^{-1}\varepsilon\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+2G_2[\varepsilon\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+\sinh^{-1}\varepsilon]\}}, \tag{5.8.24}$$

$$M_\mathrm{z} = \frac{32\omega a_1^3\{(G_1-3G_2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}[\varepsilon^3\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+\sinh^{-1}\varepsilon] + 4G_2\varepsilon(1+\varepsilon^2)\}}{9(G_1+G_2)\{(G_1-3G_2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}\sinh^{-1}\varepsilon\,\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+2G_2[\varepsilon\sinh^{-1}(1/\varepsilon)+\sinh^{-1}\varepsilon]\}}. \tag{5.8.25}$$

Чтобы проверить точность нашей теории, вычисления были выполнены Калкером для прямоугольника с $a_1 = 4$ и различных значений ε. Полупространство было взято изотропным с модулем сдвига $\mu = 0.5$, и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Величина $C_\mathrm{z} = M_\mathrm{z}/\omega$ была вычислена, используя универсальную программу, разработанную Калкером. Наши результаты согласно (5.8.25), в сравнении с числовыми результатами Калкера, представлены в таблице ниже.

ε=	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
C_z наш метод	48.3	62.9	77.9	113.7	160.6	258.
C_z Калкер	36.74	51.29	66.47	102.4	148.4	241.
Расхождение (%)	23.9	17.5	14.7	9.9	7.6	6.6

Точность числовой процедуры оценивалась вычислением C_z для эллипса, где точное решение хорошо известно. Точное решение было около 7% *выше* числового результата Калкера. Все наши результаты тоже выше Калкеровых. Если мы положим характер ошибок для прямоугольника таким же, как и для эллипса, тогда наши формулы должны считаться удивительно точными в широком диапазоне изменения ε.

Мы также сравнили распределение сдвигающих напряжений согласно (5.8.4), и (5.8.24) для прямоугольника с $a_1 = 4$ и $\varepsilon = 0.3$, вдоль прямой $x = 0.5$. Угол кручения был взят равным единице. Сдвигающее напряжение представлено в полярной форме. Сравнение для модуля $|\tau|$ и его аргумента $arg(\tau)$ в градусах дано в таблице ниже:

y=	0.15	0.45	0.75	1.05
$\lvert\tau\rvert$ наш метод	0.139	0.219	0.375	0.806
$\lvert\tau\rvert$ Калкер	0.145	0.228	0.366	1.11
Расхождение (%)	–1.9	–4.2	2.3	–37.7
$arg(\tau)$ наш метод	112.57	141.27	154.3	161.03
$arg(\tau)$ Калкер	112.14	140.72	152.94	161.15

Согласование аргумента τ очень хорошее. Согласование модуля удовлетворительно, кроме точек близких к границе, где ни один из методов не претендует на точность. Тот факт, что расхождение не меняется монотоннно указывает на некоторые дефекты в числовой процедуре Калкера.

Пример 3: Крест. Рассмотрим штамп с конфигурацией, полученной путём ортогонального пересечения двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$ ($a \geq b$). Введём параметр $\varepsilon = b/a$. Площадь и моменты даны в секции 5.5.

Формулы (5.8.11) и (5.8.13) в этом случае дают:

$$q_y = q_x = \frac{\omega}{\pi a(G_1+G_2)\left[\ln(\varepsilon + (1+\varepsilon^2)^{1/2}) + \varepsilon \ln\frac{1 + (1+\varepsilon^2)^{1/2}}{(1+\sqrt{2})\varepsilon}\right]},$$

$$M_z = \frac{64\omega a^3\varepsilon(1+\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{9\pi(G_1+G_2)\left[\ln[\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}]+\varepsilon\ln\dfrac{1+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{(1+\sqrt{2})\varepsilon}\right]}.$$

Калкер сделал вычисления для креста с $a=4$ и $\varepsilon=0.5$. Остальные числовые данные были взяты такими же, как и для прямоугольника. Его результат $C_z=154.7$, наш результат равен 167.9, с расхождением 7.9%. Принимая во внимание предполагаемую ошибку программы Калкера около 7%, наш результат может считаться очень точным.

Мы также сравнили распределение сдвигающих напряжений вдоль прямой $y=0.5$. Угол кручения был принят равным единице. Сравнение результатов дано в таблице ниже:

$x=$	0.5	1.5	2.5	3.5
$\lvert\tau\rvert$ наш метод	0.120	0.280	0.535	1.12
$\lvert\tau\rvert$ Калкер	0.118	0.287	0.512	1.47
Расхождение (%)	1.5	–2.5	4.4	–23.
$arg(\tau)$ наш метод	135.	108.4	101.3	98.13
$arg(\tau)$ Калкер	135.	108.0	101.1	98.72

Согласование хорошее, кроме точек близких к границе.

Упражнение 5.8

1. Установите справедливость (5.8.3).

2. Выведите (5.8.8).

3. Проверьте (5.8.11) и (5.8.13).

4. Рассмотрите кручение полупространства ромбовидным штампом.

5. Сравните жёсткость на кручение прямоугольного штампа с жёсткостью на кручение ромбовидного штампа, имеющего ту же площадь и тот же параметр ε.

5.9 Взаимодействие между штампами под действием нормальной нагрузки

Установлена общая теорема, которая связывает силы, действующие на систему произвольных штампов, с их обобщёнными перемещениями через систему линейных алгебраических уравнений. Теорема приложена к случаю произвольно расположенных эллиптических штампов. Рассмотрены несколько специфических примеров.

Теория. Рассмотрим систему N произвольных штампов, вдавленных в упругое полупространство $z\geq 0$. Пусть S_n есть область контакта для n—ного штампа, и P_{n} — нормальная сила, действующая на n—ный штамп. Мы пренебрегаем силами трения между штампами и полупространством. Требуется найти взаимоотношения между обобщёнными перемещениями штампов и действующими силами. Граничные условия для нашей задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} &w = w_{\mathrm{n}}(M) \quad \text{для} \quad M \in S_n, \\ &\sigma_{\mathrm{z}}(M) = 0 \quad \text{для} \quad M \notin S_n, \quad n = 1,2,...,N, \end{aligned} \tag{5.9.1}$$

где w обозначает нормальное перемещение точки на границе $z=0$, и σ обозначает нормальное давление. Заданная функция w_{n} определена формой основания штампа. Используя известное решение задачи Буссинеска и принцип наложения, мы можем записать:

$$w(Q) = H\sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{N}}\int\!\!\int_{\mathrm{S_n}} \frac{\sigma_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{n}})}{R(T_{\mathrm{n}},Q)}\mathrm{d}S_n. \tag{5.9.2}$$

Подстановка граничных условий (5.9.1) в (5.9.2) ведёт к системе N интегральных уравнений. Точное решение этих уравнения неизвестно даже для случая нескольких кругов. Мы покажем далее, что нам не нужно знать эти решения, если нас интересуют только интегральные характеристики. Мы можем выделить, без потери общности, первый штамп, и рассмотреть соответствующее интегральное уравнение

$$w_1(Q_1) = H\int\!\!\int_{\mathrm{S_1}} \frac{\sigma_1(T_1)}{R(T_1,Q_1)}\mathrm{d}S_1 + H\sum_{\mathrm{n=2}}^{\mathrm{N}}\int\!\!\int_{\mathrm{S_n}} \frac{\sigma_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{n}})}{R(T_{\mathrm{n}},Q_1)}\mathrm{d}S_n. \tag{5.9.3}$$

Положим, что функции σ_0, σ_{x} и σ_{y} известны и удовлетворяют соответственно следующие интегральные уравнения внутри S_1:

$$\iint_{S_1} \frac{\sigma_0(Q_1)}{R(T_1,Q_1)}\,\mathrm{d}S_1 = 1, \tag{5.9.4}$$

$$\iint_{S_1} \frac{\sigma_x(Q_1)}{R(T_1,Q_1)}\,\mathrm{d}S_1 = x, \tag{5.9.5}$$

$$\iint_{S_1} \frac{\sigma_y(Q_1)}{R(T_1,Q_1)}\,\mathrm{d}S_1 = y. \tag{5.9.6}$$

Умножение обеих сторон (5.9.3) на $\sigma_0(Q_1)$ и интегрирование по площади S_1 даёт:

$$\iint_{S_1} \sigma_0(Q_1)\, w_1(Q_1)\,\mathrm{d}S_1 = H\iint_{S_1} \sigma_0(Q_1)\mathrm{d}S_1 \iint_{S_1} \frac{\sigma_1(T_1)}{R(T_1,Q_1)}\,\mathrm{d}S_1 +$$

$$+H\sum_{n=2}^{N}\iint_{S_1} \sigma_0(Q_1)\mathrm{d}S_1 \iint_{S_n} \frac{\sigma_n(T_n)}{R(T_n,Q_1)}\,\mathrm{d}S_n. \tag{5.9.7}$$

Изменяя порядок интегрирования в (5.9.7) и принимая во внимание тот факт, что σ_0 удовлетворяет (5.9.4), следующий результат может быть получен:

$$\iint_{S_1} \sigma_0(Q_1)\, w_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 = H\left[P_1 + \sum_{n=2}^{N}\iint_{S_n} w_{1n}(T_n)\sigma_n(T_n)\mathrm{d}S_n\right], \tag{5.9.8}$$

где P_1 есть главный вектор сил, действующих на первый штамп, и

$$w_{1n}(T_n) = \iint_{S_1} \frac{\sigma_0(Q_1)}{R(T_n,Q_1)}\,\mathrm{d}S_1, \tag{5.9.9}$$

который пропорционален нормальному перемещению в области S_n вызываемому плоским штампом в S_1 под действием единичной силы. Используя теорему о среднем, которая справедлива, если σ_n не меняет знак, мы получим линейное алгебраическое уравнение

$$\int\limits_{S_1}\int \sigma_0(Q_1)\, w_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 = H\left[P_1 + \sum_{n=2}^{N} w_{1n}(C_n)P_n\right] \tag{5.9.10}$$

Точное положение точки C_n неизвестно, но тот факт, что $C_n \in S_n$ позволяет только ограниченную вариацию внутри S_n, и во многих случаях даёт достаточно близкую верхнюю и нижнюю границы для отыскиваемых параметров. Используя то же самую процедуру, $N-1$ добавочных линейных алгебраических уравнений могут быть выведены для остальных штампов. Эта система уравнений даёт необходимые взаимоотношения между нормальными перемещениями штампов и приложенными силами.

Теперь мы выведем аналогичные взаимоотношения для угловых перемещений. Умножение обеих сторон (5.9.3) на $\sigma_x(Q_1)$ и интегрирование по площади S_1 даёт:

$$\begin{aligned}\int\limits_{S_1}\int \sigma_x(Q_1)\mathrm{w}_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 &= H\int\limits_{S_1}\int \sigma_x(Q_1)\mathrm{d}S_1\int\limits_{S_1}\int \frac{\sigma_1(T_1)}{R(T_1,Q_1)}\mathrm{d}S_1 + \\ &+ H\sum_{n=2}^{N}\int\limits_{S_1}\int \sigma_x(Q_1)\mathrm{d}S_1\int\limits_{S_n}\int \frac{\sigma_n(T_n)}{R(T_n,Q_1)}\mathrm{d}S_n.\end{aligned} \tag{5.9.11}$$

Изменяя порядок интегрирования в (5.9.11) и принимая во внимание, что σ_x удовлетворяет (5.9.5), следующие результаты могут быть получены:

$$\int\limits_{S_1}\int \sigma_x(Q_1)w_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 = H\left[-M_{1y} + \sum_{n=2}^{N}\int\limits_{S_n}\int x\alpha_{1n}(T_n)\sigma_n(T_n)\mathrm{d}S_n\right], \tag{5.9.12}$$

где M_{1y} есть опрокидывающий момент, действующий на первый штамп относительно оси Oy, и

$$\alpha_{1n}(T_n) = \frac{1}{x}\int\limits_{S_1}\int \frac{\sigma_x(Q_1)}{R(T_n,Q_1)}\mathrm{d}S_1. \tag{5.9.13}$$

Если σ_n не меняет знак, мы можем использовать опять теорему о среднем:

$$\int\!\!\int_{S_1} \sigma_x(Q_1)w_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 = H\left[-M_{1y} + \sum_{n=2}^{N}\alpha_{1n}(A_n)x_n P_n\right] \tag{5.9.14}$$

где $A_n(x_n,y_n) \in S_n$. Добавочные $N-1$ уравнений, связывающие повороты штампов относительно оси Oy с соответствующими опрокидывающими моментами могут быть получены аналогичным образом.

Умножим обе стороны (5.9.3) на $\sigma_y(Q_1)$ и проинтегририем по области S_1. Процедура приводит к уравнению:

$$\int\!\!\int_{S_1} \sigma_y(Q_1)w_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 = H\left[M_{1x} + \sum_{n=2}^{N}\int\!\!\int_{S_n} y\beta_{1n}(T_n)\sigma_n(T_n)\mathrm{d}S_n\right], \tag{5.9.15}$$

где M_{1x} есть опрокидывающий момент относительно оси Ox, действующий на первый штамп, и

$$\beta_{1n}(T_n) = \frac{1}{y}\int\!\!\int_{S_1} \frac{\sigma_y(Q_1)}{R(T_n,Q_1)}\mathrm{d}S_1. \tag{5.9.16}$$

Как и ранее, приложение теоремы о среднем даёт:

$$\int\!\!\int_{S_1} \sigma_y(Q_1)w_1(Q_1)\mathrm{d}S_1 = H\left[\mathrm{M}_{1x} + \sum_{n=2}^{N}\beta_{1n}(B_n)y_n P_n\right]. \tag{5.9.17}$$

Три системы линейных алгебраических уравнения типа (5.9.10), (5.9.14) и (5.9.17) являются основными результатами этой секции. Ясно, что каждое уравнение может быть интерпретировано в терминах взаимной работы. Чтобы их использовать, нужно знать нормальные перемещения внутри областей контакта для каждого штампа под действием трёх типов нагрузки, что в настоящий момент известно только для эллиптических штампов. Этот частный случай рассмотрен ниже.

Приложение к эллиптическим штампам. Рассмотрим взаимодействие системы N плоских эллиптических штампов расположенных произвольно на трансверсально изотропном упругом полупространстве. Пусть a_n и b_n являются большой и малой полуосями n—ного эллипса; X_n и Y_n определяют его центр, и θ_n являются углом между осью Ox и большой полуосью a_n; и P_n есть нормальная сила, действующая на n—ный штамп.

Функции σ_0, σ_x и σ_y имеют форму (Лурье, 1955):

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi b_1 \mathrm{K}(k_1)}\left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2}\right]^{-1/2}$$

$$\sigma_x = \frac{x}{2\pi b_1 \mathrm{D}(k_1)}\left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2}\right]^{-1/2}$$

$$\sigma_y = \frac{y}{2\pi b_1 \mathrm{B}(k_1)}\left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2}\right]^{-1/2}$$

Граничные условия (5.9.1) в этом случае принимают вид:

$$w_n = \delta_n - \alpha_n x + \beta_n y, \quad \text{для} \quad n = 1,2,\dots,N. \tag{5.9.18}$$

Подстановка (5.9.18) в (5.9.10), (5.9.14) и (5.9.17) даёт соответственно:

$$\frac{a_1}{\mathrm{K}(k_1)}\delta_1 = H\left[P_1 + \sum_{n=2}^{N}\frac{F(\phi_{1n},k_1)}{\mathrm{K}(k_1)}P_n\right], \tag{5.9.19}$$

$$\frac{a_1^3}{3\mathrm{D}(k_1)}\alpha_1 = H\left[M_{1y} - \sum_{n=2}^{N}\alpha_{1n}x_n P_n\right], \tag{5.9.20}$$

$$\frac{a_1 b_1^2}{3B(\mathrm{k}_1)}\beta_1 = H\left[\mathrm{M}_{1x} + \sum_{n=2}^{N}\beta_{1n}y_n P_n\right], \tag{5.9.21}$$

где

$$\alpha_{1n} = \frac{F(\phi_{1n},k_1) - E(\phi_{1n},k_1)}{\mathrm{K}(k_1) - \mathrm{E}(k_1)}, \tag{5.9.22}$$

$$\beta_{1n} = \frac{E(\phi_{1n},k_1) - (1-k_1^2)F(\phi_{1n},k_1) - k_1^2(\rho_{1n}^2 - 1)^{1/2}/\rho_{1n}(\rho_{1n}^2 - k_1^2)^{1/2}}{\mathrm{E}(k_1) - (1-k_1^2)\mathrm{K}(k_1)}, \tag{5.9.23}$$

$$\mathrm{B}(k_1) = \frac{\mathrm{E}(k_1) - (1 - k_1^2)\,\mathrm{K}(k_1)}{k_1^2}, \tag{5.9.24}$$

$$\mathrm{D}(k_1) = \frac{\mathrm{K}(k_1) - \mathrm{E}(k_1)}{k_1^2}. \tag{5.9.25}$$

Здесь $\mathrm{K}(k_1)$, $F(\phi_{1n},k_1)$, $\mathrm{E}(k_1)$, $E(\phi_{1n},k_1)$ обозначают полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; и ρ_{1n}, ϕ_{1n} определены как

$$\phi_{1n} = \sin^{-1}(\frac{1}{\rho_{1n}}), \qquad \rho_{1n} = [L + (L^2 - k_1^2 x_n^2/a_1^2)^{1/2}]^{1/2},$$

$$L = \frac{1}{2}[k_1^2 + (x_n^2 + y_n^2)/a_1^2],$$

где x_n и y_n координаты некоторой точки внутри S_n, и k_1 есть эксцентричность первого эллипса

$$k_1 = [1 - b_1^2/a_1^2]^{1/2}.$$

Каждое уравнение (5.9.19), (5.9.20) и (5.9.21) представляет первое из системы N уравнений. Когда действующие силы известны, эти три системы уравнений определяют нормальные и угловые перемещения штампов. В случае, где перемещения известны, три системы линейных алгебраических уравнений должны быть решены относительно P_n, M_{nx} и M_{ny}. Важно отметить также, что каждое уравнение системы действительно в осях координат, расположенных в центре соответствующего эллипса.

Пример 1: Двое равных эллиптических штампов. Рассмотрим случай, где $N = 2$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $X_1 = Y_1 = 0$, $X_2 = l$, $Y_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Если мы также имеем $P_1 = P_2 = P$ тогда, благодаря симметрии системы, система уравнений, эквивалентных (5.9.19), сводится к одному уравнению, а именно,

$$\frac{a}{\mathrm{K}(k)}\delta = H\left[P + \frac{F(\phi,k)}{\mathrm{K}(k)}P\right], \tag{5.9.26}$$

с немедленным результатом:

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{F(\phi,k)}{K(k)}}, \qquad (5.9.27)$$

где $P_0 = \delta a / H K(k)$ обозначает силу, которая даёт осадку штампа равную δ, когда эта сила действует на изолированный штамп. Уравнение (5.9.27) показывает, что взаимодействие между штампами уменьшает значение силы, необходимой для обеспечения требуемой осадки. Верхние и нижние границы для P могут быть получены из (5.9.27), принимая

$$\phi = \sin^{-1}\left[\frac{a}{l-a}\right], \qquad \text{и} \qquad \phi = \sin^{-1}\left[\frac{a}{l+a}\right]. \qquad (5.9.28)$$

соответственно. Мы рассмотрим также центральную оценку для P, определённую как

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right). \qquad (5.9.29)$$

Рисунок 5.9.1 даёт график отношения P/P_0 как функция от l/a для $a = 2$, $b = 1$. Сплошная линия даёт верхнюю границу, штриховая линия даёт нижнюю границу и кружки дают центральную оценку. Легко убедиться, что максимально возможная ошибка центральной оценки меньше, чем 9% для $l/a > 3.5$, она меньше, чем 5% для $l/a > 5$, она меньше, чем 2% для $l/a > 8$, и она меньше, чем 1% для $l/a > 12$. Так как не существует точных решений для этого случая, трудно сказать, какова настоящая ошибка центральной оценки, но есть основания верить, что эта ошибка намного меньше, чем указано выше. Эта уверенность основана на сравнении центральной оценки для двух равных *круглых* штампов с численным решением Kobayashi (1939). Значения отношения P/P_0 для различных $d = l/a$ даны в Таблице 5.9.1.

Если мы примем решение Кобаяши, как точное, то максимальная ошибка центральной оценки не превосходит 0.4% во всём интервале $2 \le d < \infty$. Даже если мы предположим, что точность в случае двух эллиптических штампов в 10 раз хуже, чем точность в случае круговых штампов, это всё ещё даст нам максимальную ошибку 4%, что очень даже неплохо. Имея это в виду, мы будем вычислять только центральную оценку в последующих примерах.

Если нормальные силы приложены в центрах штампов, тогда углы наклонов штампов будут определёны согласно (5.9.20) и (5.9.21) как

Рис. 5.9.1. Взаимодействие между двумя эллиптическими штампами.

Таблица 5.9.1 Сравнение двух решений

d	верхняя граница	нижняя граница	центральная оценка	результат Кобаяши	ошибка (%)
2.0	0.82213	0.50000	0.75000	0.75272	0.36
2.2	0.83172	0.61457	0.76900	0.77014	0.15
2.4	0.84030	0.66379	0.78517	0.78545	0.04
2.6	0.84804	0.69940	0.79915	0.79898	–0.02
2.8	0.85505	0.72728	0.81136	0.81096	–0.05
3.0	0.86143	0.75000	0.82213	0.82162	–0.06
3.5	0.87515	0.79241	0.84427	0.84370	–0.07
4.0	0.88638	0.82213	0.86143	0.86093	–0.06
5.0	0.90367	0.86143	0.88638	0.88602	–0.04
7.0	0.92611	0.90367	0.91637	0.91619	–0.02
10.0	0.94522	0.93381	0.94005	0.93999	–0.007
∞	1.	1.	1.	1.	0.0

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = -\frac{3\mathrm{D}(k)}{a_1^3} H\alpha_{12} lP, \qquad \beta_1 = \beta_2 = 0, \tag{5.9.30}$$

где

$$\alpha_{12} = \frac{F(\phi,k) - \mathrm{E}(\phi,k)}{\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)}, \qquad k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}, \tag{5.9.31}$$

и ϕ определено в (5.9.29).

В случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, должны существовать опрокидывающие моменты, приложенные к штампам. Их значения могут быть определены из (5.9.20) как

$$M_{1y} = -M_{2y} = \alpha_{12} lP. \tag{5.9.32}$$

Пример 2: Четыре равных эллиптических штампов. Рассмотрим конфигурацию, оказанную на Рис. 5.9.2. Пусть равные вертикальные силы

Рис. 5.9.2. Геометрия четырёх взаимодействующих штампов

P приложены к каждому штампу. Штампы пронумерованы по часовой стрелке, начиная со штампа с центром в начале координат. Благодаря симметрии системы, достаточно рассмотреть только одно уравнение из каждой системы (5.9.19–5.9.21). Результат есть

$$\frac{a}{\mathrm{K}(k)}\delta = HP\left[1 + \frac{F(\phi_{12},k)}{\mathrm{K}(k)} + \frac{F(\phi_{13},k)}{\mathrm{K}(k)} + \frac{F(\phi_{14},k)}{\mathrm{K}(k)}\right], \tag{5.9.33}$$

$$\frac{a^3}{3\mathrm{D}(k)}\alpha_1 = H\left[M_{1y} - Pl(\alpha_{13} + \alpha_{14})\right], \tag{5.9.34}$$

$$\frac{ab^2}{3\mathrm{B}(k)}\beta_1 = H\left[\mathrm{M}_{1x} + Pc(\beta_{12} + \beta_{13})\right], \tag{5.9.35}$$

где α_{1n} и β_{1n} определены в (5.9.22) и (5.9.23) соответственно, и

$$\phi_{1n} = \sin^{-1}(\frac{1}{\rho_{1n}}), \qquad \text{для} \quad n = 2,3,4; \tag{5.9.36}$$

$$\rho_{12} = \left[1 + (c^2 - b^2)/a^2\right]^{1/2}, \qquad \rho_{14} = \frac{l}{a}$$

$$\rho_{13} = \left[L + (L^2 - k^2l^2/a^2)^{1/2}\right]^{1/2}, \qquad L = \frac{1}{2}\left[k^2 + (l^2 + c^2)/a^2\right], \tag{5.9.37}$$

Когда силы и опрокидывающие моменты известны, уравнения (5.9.33–5.9.35) определяют нормальные и угловые перемещения штампов

Математически эквивалентная проблема диффузии через перфорированную мембрану была решена в (Fabrikant, 1985a, 1987k).

Упражнение 5.9

1. Рассмотрите взаимодействие между четырьмя эллиптическими штампами, описанное на Рис. 5.9.2. Найдите опрокидывающие моменты, если штампы не могут наклоняться.

Ответ: $M_{1x} = -Pc(\alpha_{12} + \alpha_{13})$, $\quad M_{1y} = Pl(\alpha_{13} + \alpha_{14})$.

2. Найдите предельный вид формул (5.9.22–5.9.25) для случая круглых штампов.

Ответ: $\alpha_{1n} \to \beta_{1n} \to \frac{2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\left[\frac{a_1}{r_{1n}}\right] - \frac{a_1}{r_{1n}}\left[1 - \frac{a_1^2}{r_{1n}^2}\right]^{1/2}\right\}$,

$$\mathrm{B}(k_1) \to \mathrm{D}(k_1) \to \pi/4\,, \quad \frac{F(\phi_{1n}, k_1)}{\mathrm{K}(k_1)} \to \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left[\frac{a_1}{r_{1n}}\right],$$

и уравнения (5.9.19–5.9.21) примут вид:

$$\frac{2}{\pi}a_1\delta_1 = H\left[P_1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{N} P_n \sin^{-1}\left(\frac{a_1}{r_{1n}}\right)\right],$$

$$\frac{4a_1^3}{3\pi}\alpha_1 = H\left[M_{1y} - \sum_{n=2}^{N}\alpha_{1n}x_n P_n\right],$$

$$\frac{4a_1^3}{3\pi}\beta_1 = H\left[M_{1x} + \sum_{n=2}^{N}\beta_{1n}y_n P_n\right],$$

где a_1 есть радиус первого штампа и r_{1n} есть расстояние между центром первого штампа и точкой внутри S_n.

3. Найдите обобщённые перемещения эллиптического штампа, вызванные несколькими сосредоточенными силами, приложенными нормально вне штампа.
Совет: Рассмотрим процедуру сжатия площадей S_n, $n = 2,3,...,N$. Точность уравнений (5.9.19–5.9.21) будет увеличиваться. В предельном случае $S_n \to 0$ формулы (5.9.19–5.9.21) дают *точное* решение задачи о нескольких сосредоточенных силах действующих вне эллиптического штампа.

4. Рассмотрите взаимодействие нескольких штампов на неоднородном упругом полупространстве с модулем упругости пропорциональным степенной функции глубины.

5.10 Взаимодействие между гибкими штампами под действием сдвигающих нагрузок

Смешанная граничная задача для трансверсально изотропного упругого полупространства рассмотрена для случая, где однородные тангенциальные перемещения предписаны на нескольких областях произвольной формы, и остальная часть границы полупространства свободна от напряжений. Задача может быть интерпретирована или как взаимодействие между двумя упругими полупространствами, соединёнными через несколько областей и находящимися под действием отдалённого сдвига, или как контактная задача о нескольких гибких штампах, соединённых с полупространством, с различными тангенциальными перемещениями предписанными на них. Общая теорема установлена ниже, которая связывает тангенциальные силы, действующие на каждую область, с их обобщёнными перемещениями через систему линейных алгебраических уравнений. Теорема приложена к случаю произвольно расположенных элиптических областей, подверженных однородному сдвигу. Рассмотрено несколько специфических примеров.

Теория. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть тангенциальные перемещения заданы на нескольких односвязных областях S_n, в то время, как остальная часть границы полупространства свободна от напряжений. Математическая формулировка граничных условий на плоскости $z = 0$ есть:

$$u_x = u_x(x,y), \quad u_y = u_y(x,y), \quad \text{для} \quad (x,y) \in S_n,$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \text{для} \quad (x,y) \notin S_n, \quad n = 1,2,\ldots,N. \tag{5.10.1}$$

Граничная задача (5.10.1) может быть интерпретирована или как взаимодействие между несколькими гибкими штампами S_n сцеплёнными с полупространством и подверженными тангенциальным перемещениям, или как случай двух упругих полупространств, соединённых через S_n и подверженных отдалённому сдвигу. Первая интерпретация являются более общей, так как тангенциальные перемещения каждого штампа могут быть независимы друг от друга.

Мы будем называть S_n областью контакта для n—ного штампа. Штампы полагаются гибкими, так что они не вызывают никаких нормальных давлений. Пусть T_{nx} и T_{ny} компоненты тангенциальной силы, приложенной к n—ному штампу. Нам нужно найти взаимоотношения между обобщёнными перемещениями штампов и действующими силами.

Введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + \mathrm{i}u_y$, и комплексные тангенциальные напряжения $\tau = \tau_{zx} + \mathrm{i}\tau_{yz}$. Благодаря принципу суперпозиции, основное интегральное уравнение может быть переписано из (5.7.5) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\int\int_{S_n}\frac{\tau(\xi,\eta)}{R}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \frac{G_2}{2}\int\int_{S_n}\frac{q\,\bar{\tau}(\xi,\eta)}{\bar{q}R}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\} = u(x,y). \tag{5.10.2}$$

Здесь

$$q = x - \xi + \mathrm{i}(y-\eta), \quad \bar{q} = x - \xi - \mathrm{i}(y-\eta), \quad R^2 = q\bar{q}. \tag{5.10.3}$$

Подстановка граничных условий (5.10.1) в (5.10.2) ведёт к системе N интегральных уравнений. Точное решение этих уравнений неизвестно даже для случая нескольких кругов. Мы покажем далее, что нам и не нужно знать эти решения, если нас интересуют только взаимоотношения между приложенными силами и перемещениями штампов. Мы можем выделить, без потери общности, первый штамп и рассмотреть соответствующее интегральное уравнение

$$u_1(x_1,y_1) = \frac{G_1}{2}\int\limits_{S_1}\int \frac{\tau_1(\xi,\eta)}{R_{11}}\,d\xi d\eta + \frac{G_2}{2}\int\limits_{S_1}\int \frac{q_{11}\,\bar{\tau}_1(\xi,\eta)}{\bar{q}_{11}\,R_{11}}\,d\xi d\eta$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\int\limits_{S_n}\int \frac{\tau_n(\xi,\eta)}{R_{1n}}\,d\xi d\eta + \frac{G_2}{2}\int\limits_{S_n}\int \frac{q_{1n}\,\bar{\tau}_n(\xi,\eta)}{\bar{q}_{1n}\,R_{1n}}\,d\xi d\eta\right\}. \qquad (5.10.4)$$

Здесь u_n обозначает тангенциальное перемещение n—ного штампа, τ_n есть тангенциальные напряжения под штампом, точка $(x_n,y_n)\in S_n$, и

$$q_{kn} = x_k - \xi_n + i(y_k - \eta_n), \qquad \bar{q}_{kn} = x_k - \xi_n - i(y_k - \eta_n),$$

$$R_{kn} = (q_{kn}\bar{q}_{kn})^{1/2}, \quad (\xi_n,\eta_n)\in S_n. \qquad (5.10.5)$$

Для простоты, мы не пишем индексы в ξ_n и η_n в (5.10.4) и далее. Это не должно вызывать путаницу для читателя.

Уравнение (5.10.4) может быть переписано как

$$u_1(x_1,y_1) = \frac{G_1}{2}\Delta\int\limits_{S_1}\int R_{11}\tau_1(\xi,\eta)\,d\xi d\eta - \frac{G_2}{2}\Lambda^2\int\limits_{S_1}\int R_{11}\bar{\tau}_1(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\Delta\int\limits_{S_n}\int R_{1n}\tau_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta - \frac{G_2}{2}\Lambda^2\int\limits_{S_n}\int R_{1n}\bar{\tau}_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right\}.$$

(5.10.6)

Пусть мы знаем функцию τ_0, которая удовлетворяет следующему интегральному уравнению внутри S_1

$$\int\limits_{S_1}\int \tau_0(\xi,\eta)R\,d\xi d\eta = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6,$$

(5.10.7)

где a_1, … ,a_6 комплексные константы. Можно проверить, что

$$\Delta\iint_{S_1} \tau_0(\xi,\eta)R_{11}\,d\xi d\eta = 2a_1 + 2a_2 = d_1 = \mathrm{const},$$

$$\Lambda^2\iint_{S_1} \tau_0(\xi,\eta)R_{11}\,d\xi d\eta = 2a_1 - 2a_2 + 2ia_3 = -c_1 = \mathrm{const}, \tag{5.10.8}$$

это означает, что функция τ_0 превращает в констаты первые два интеграла в выражение (5.10.4). Это важное качество будет использоваться в последующих выводах. Умножение обеих сторон (5.10.4) на τ_0 и интегрирование по поверхности S_1 даёт:

$$\iint_{S_1} u_1(x_1,y_1)\,\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1 = \frac{G_1}{2}\iint_{S_1}\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1\iint_{S_1}\frac{\tau_1(\xi,\eta)}{R_{11}}d\xi d\eta$$

$$+\frac{G_2}{2}\iint_{S_1}\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1\iint_{S_1}\frac{q_{11}\,\bar{\tau}_1(\xi,\eta)}{\bar{q}_{11}R_{11}}d\xi d\eta$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\iint_{S_1}\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1\iint_{S_n}\frac{\tau_n(\xi,\eta)}{R_{1n}}d\xi d\eta\right.$$

$$\left.+\frac{G_2}{2}\iint_{S_1}\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1\iint_{S_n}\frac{q_{1n}\,\bar{\tau}_n(\xi,\eta)}{\bar{q}_{1n}R_{1n}}d\xi d\eta\right\}. \tag{5.10.9}$$

Изменяя порядок интегрирования в (5.10.9) и принимая во внимание свойство (5.10.8), следующий результат может быть получен:

$$\iint_{S_1} u_1(x_1,y_1)\,\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1 = \frac{G_1}{2}d_1T_1 + \frac{G_2}{2}c_1\bar{T}_1$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\iint_{S_n}\tau_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\iint_{S_1}\frac{\tau_0(x_1,y_1)}{R_{1n}}dx_1dy_1\right.$$

$$+\frac{G_2}{2}\int\int_{S_n}\bar{\tau}_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\int\int_{S_1}\frac{q_{1n}\,\tau_0(x_1,y_1)}{\bar{q}_{1n}R_{1n}}\,dx_1dy_1\Bigg\}. \tag{5.10.10}$$

где T_1 есть комплексное представление для тангенциальной силы, действующей на первый штамп. Введём обозначение

$$\Phi(\xi,\eta)=\int\int_{S_1}\frac{\tau_0(x_1,y_1)}{R_{1n}}\,dx_1dy_1,\qquad \Psi(\xi,\eta)=\int\int_{S_1}\frac{q_{1n}\,\tau_0(x_1,y_1)}{\bar{q}_{1n}R_{1n}}\,dx_1dy_1\,. \tag{5.10.11}$$

Теперь выражение (5.10.10) может быть переписано как

$$\int\int_{S_1}u_1(x_1,y_1)\,\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1=\frac{G_1}{2}d_1T_1+\frac{G_2}{2}c_1\bar{T}_1$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\int\int_{S_n}\Phi(\xi,\eta)\,\tau_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\frac{G_2}{2}\int\int_{S_n}\Psi(\xi,\eta)\,\tau_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right\}. \tag{5.10.12}$$

Используя теорему о среднем, мы получим линейное алгебраическое уравнение для сил T_n, приложенных к каждому штампу.

$$\int\int_{S_1}u_1(x_1,y_1)\,\tau_0(x_1,y_1)\,dx_1dy_1=\frac{G_1}{2}d_1T_1+\frac{G_2}{2}c_1\bar{T}_1$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{G_1}{2}\Phi(x_n,y_n)\,T_n+\frac{G_2}{2}\Psi(\xi_n,\eta_n)\,\bar{T}_n\right\}. \tag{5.10.13}$$

Точное местоположение точек (x_n,y_n) и (ξ_n,η_n) неизвестно, но тот факт, что они принадлежат области S_n, позволяет ограниченную вариацию и во многих случаях даёт достаточно близкие верхние и нижние границы для отыскиваемых параметров. Тем же самым методом $N-1$ добавочных линейных алгебраических уравнений могут быть выведены для остальных штампов. Эта система уравнений обеспечивает необходимые взаимоотношения между тангенциальными перемещениями штампов и приложенными силами, и представляет основные результаты этой секции. Ясно, что каждое уравнение может быть интерпретировано в терминах взаимной работы. Чтобы использовать уравнения (5.10.13), нам нужно знать явное выражение для τ_0, которое в настоящее время известно только для эллиптического штампа.

Приложение к эллиптическим штампам. Рассмотрим взаимодействие N гибких эллиптических штампов, произвольно расположенных на упругом полупространстве, с однородным тангенциальным перемещением $u_n = \mathrm{const}$ предписанным в S_n. Пусть a_n и b_n являются большой и малой полуосями n—ного эллипса; X_n и Y_n определяют его центр, θ_n есть угол между осью Ox и большой полуосью a_n; и T_n есть тангенциальная сила, действующая на n—ный штамп. Функция τ_0 для первого штампа есть:

$$\tau_0(x,y) = \left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2}\right]^{-1/2}. \tag{5.10.14}$$

Подстановка (5.10.14) в (5.10.10) даёт после вычисления интегралов (смотри детали в Аппендиксе А5.1):

$$2a_1u_1 = G_1\mathrm{K}(k_1)T_1 + G_2[(2-k_1^2)\mathrm{K}(k_1) - 2\,\mathrm{E}(k_1)]\overline{T}_1/k_1^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left\{G_1\int\!\!\int_{S_n} D_{1n}\tau_n \mathrm{d}S_n + (G_2/k_1^2)\int\!\!\int_{S_n} L_{1n}\bar{\tau}_n\mathrm{d}S_n - \mathrm{i}(G_2/k_1^2)\int\!\!\int_{S_n} M_{1n}\bar{\tau}_n\mathrm{d}S_n\right\}, \tag{5.10.15}$$

где

$$D_{1n} = [F(\phi_{1n},k_1) - F(\psi_{1n},k_1)],$$

$$L_{1n} = \{(2-k_1^2)[F(\phi_{1n},k_1) - F(\psi_{1n},k_1)] - 2[\mathrm{E}(\phi_{1n},k_1) - \mathrm{E}(\psi_{1n},k_1)]\},$$

$$M_{1n} = [(1-k_1^2\sin^2\phi_{1n})^{1/2} - (1-k_1^2\sin^2\psi_{1n})^{1/2}]. \tag{5.10.16}$$

Здесь $k_1 = (1-b_1^2/a_1^2)^{1/2}$, $\mathrm{K}(k_1)$, $\mathrm{F}(\phi_{1n},k_1)$, $\mathrm{E}(k_1)$, $\mathrm{E}(\phi_{1n},k_1)$ обозначают полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; ψ_{1n} и ϕ_{1n} определены согласно формулам (А5.1.20–А5.1.21) из Аппендикса А5.1, а именно,

$$\phi_{1n} = \tan^{-1}\frac{x_n y_n + (a_1^2 y_n^2 + b_1^2 x_n^2 - a_1^2 b_1^2)^{1/2}}{y_n^2 - b_1^2},$$

$$\psi_{1n} = \tan^{-1}\frac{x_n y_n - (a_1^2 y_n^2 + b_1^2 x_n^2 - a_1^2 b_1^2)^{1/2}}{y_n^2 - b_1^2}. \tag{5.10.17}$$

В случае, когда $\phi_{1n} < \psi_{1n}$, оно должно быть заменёно на $\pi + \phi_{1n}$. Мы помним, что точка $(x_n, y_n) \in S_n$. Если теорема о среднем справедлива, уравнение (5.10.15) преобразуется в

$$\begin{aligned}
2a_1 u_1 &= G_1 \mathrm{K}(k_1) T_1 + G_2[(2 - k_1^2)\mathrm{K}(k_1) - 2\mathrm{E}(k_1)]\overline{T}_1 / k_1^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\Bigg\{ G_1[F(\phi_{1n}, k_1) - F(\psi_{1n}, k_1)]T_n + (G_2/k_1^2)[(2 - k_1^2)(F(\phi_{1n}, k_1) \\
&- F(\psi_{1n}, k_1)) - 2(\mathrm{E}(\phi_{1n}, k_1) - \mathrm{E}(\psi_{1n}, k_1))]\overline{T}_n \\
&- \mathrm{i}(G_2/k_1^2)[(1 - k_1^2 \sin^2\phi_{1n})^{1/2} - (1 - k_1^2 \sin^2\psi_{1n})^{1/2}]\,\overline{T}_n \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.10.18}$$

Важно отметить, что в случае симметричной конфигурации, некоторые члены в (5.10.18) исчезают; параметры ϕ_{1n} и ψ_{1n} не обязательно совпадают с той же самой точкой $(x_n,\ y_n)$; они интерпретируются как размытые параметры, которые могут принимать любое значение, соответствующее $(x_n,\ y_n) \in S_n$. Уравнение (5.10.18) представляет собой первое из системы N линейных алгебраических уравнений с размытыми коэффициентами, которые могут быть получены таким же образом, как и первое. Решение тоже может быть интерпретировано как размытая область. Анализ этой области позволит нам найти верхнюю и нижнюю границу для отыскиваемых параметров. Как мы увидим далее, в некоторых случаях вариация между верхней и нижней границей становится достаточно малой, что позволяет нам получить достаточно точное решение задачи.

Когда действующие силы известны, система уравнений определяет тангенциальные перемещения штампов. В случае, когда перемещения известны, система линейных алгебраических уравнений должна быть решена относительно сил T_n. Важно также заметить, что каждое уравнение в системе действительно в координатах с началом в центре эллипса.

Пример: Два равных эллиптических штампов. Рассмотрим случай, где $N = 2$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $X_1 = Y_1 = 0$, $X_2 = l$, $Y_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Пусть тангенциальные перемещения заданы $u_1 = u_2 = u$, где u действительно. Благодаря симметрии системы, мы можем также положить $T_1 = T_2 = T$, и $\Im[T] = 0$ (то—есть приложенная сила направлена вдоль оси Ox). Принимая во внимание свойства

$$D_{1n}(x,y) = D_{1n}(-x,y) = D_{1n}(x,-y) = D_{1n}(-x,-y),$$

$$L_{1n}(x,y) = L_{1n}(-x,y) = L_{1n}(x,-y) = L_{1n}(-x,-y),$$

$$M_{1n}(x,y) = -M_{1n}(-x,y) = -M_{1n}(x,-y) = M_{1n}(-x,-y), \tag{5.10.19}$$

мы имеем

$$\iint\limits_{S_n} M_{1n}\tau \mathrm{d}S_n = 0, \tag{5.10.20}$$

и система уравнений, эквивалентных (5.10.15), сводится к только одному уравнению, а именно,

$$2au = 2\{G_1\mathrm{K}(k)T + (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{K}(k) - 2\mathrm{E}(k)]\overline{T}\}$$

$$-\{G_1\mathrm{F}(k,\phi)T + (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{F}(k,\phi) - 2\mathrm{E}(k,\phi)]\overline{T}\}, \tag{5.10.21}$$

где, благодаря симметрии, ϕ определено как

$$\phi = \cos^{-1}\left[\frac{b}{(x^2 - a^2 + b^2)^{1/2}}\right] \tag{5.10.22}$$

Введём обозначение:

$$T_0 = \frac{2au}{G_1\mathrm{K}(k) + (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{K}(k) - 2\mathrm{E}(k)]} \tag{5.10.23}$$

где T_0 может быть интерпретировано как сила, необходимая для сдвига изолированного штампа на величину u. Уравнение (5.10.21) может быть переписано следующим образом:

$$T = \frac{T_0}{2-B}, \quad B = \frac{G_1 \mathrm{F}(k,\phi) + (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{F}(k,\phi) - 2\mathrm{E}(k,\phi)]}{G_1 \mathrm{K}(k) + (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{K}(k) - 2\mathrm{E}(k)]} \tag{5.10.24}$$

Так как $B \geq 0$, мы можем заключить, что взаимодействие между штампами уменьшает силу, необходимую для обеспечения заданного перемещения u, по сравнению с изолированным штампом. Верхняя и нижняя граница для T могут быть получены из (5.10.24), принимая

$$\phi = \cos^{-1}\left\{\frac{b}{[(l+a)^2 - a^2 + b^2]^{1/2}}\right\},$$

and

$$\phi = \cos^{-1}\left\{\frac{b}{[(l-a)^2 - a^2 + b^2]^{1/2}}\right\}. \tag{5.10.25}$$

соответственно. Мы также рассмотрим центральную оценку для T, определённую как

$$\phi = \cos^{-1}\left\{\frac{b}{(l^2 - a^2 + b^2)^{1/2}}\right\}.$$

Мы можем рассмотреть аналогичным образом случай, когда перемещение предписано в направлении оси Oy путём формальной замены u на $\mathrm{i}u$, и T на $\mathrm{i}T$ в выражении (5.10.21). Результат имеет вид:

$$T = \frac{T_0}{2-C}, \qquad C = \frac{G_1 \mathrm{F}(k,\phi) - (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{F}(k,\phi) - 2\mathrm{E}(k,\phi)]}{G_1 \mathrm{K}(k) - (G_2/k^2)[(2-k^2)\mathrm{K}(k) - 2\mathrm{E}(k)]}. \tag{5.10.26}$$

Рисунок 5.10.1 даёт график отношения T/T_0 в зависимости от l/a для $a = 2$, $b = 1$, $(G_2/G_1) = 1/3$, с тангенциальными перемещениями вдоль оси Ox. Верхняя и нижняя граница дана кружками; центральная оценка дана сплошной линией. Как можно видеть, максимально возможная ошибка центральной оценки меньше, чем 15% для $l/a \geq 2.5$, она меньше, чем 10% для $l/a \geq 3$, она меньше, чем 7% для $l/a > 3.5$, и она меньше, чем 5% для $l/a \geq 4$. Так как точное решение не существует в этом случае, трудно сказать, насколько велика настоящая ошибка центральной оценки, но есть основания верить, что намного меньше, чем было указано выше. Эта вера

Рис. 5.10.1. Взаимодействие между двумя эллиптическими штампами, со сдвигающей нагрузкой в направлении оси *Ox*

основана на тех же аргументах, как и в секции 5.9.

Рисунок 5.10.2 даёт тот же самый график для случая, когда тангенциальные перемещения предписаны в направлении *Oy*. Соответствующие максимальные ошибки равны 12%, 7%, 5%, и 3.5%. Можно заметить, что точность центральной оценки здесь значительно лучше, чем в певом случае. Этого следовало ожидать, так как взаимодействие в случае перемещений, предписанных в направлении оси *Ox*, сильнее чем во втором случае.

Дискуссия. Целесообразно рассмотреть некоторые предельные случаи. В случае круглого штампа, эксцентричность $\kappa_1 \to 0$, и формула (5.10.15) упрощается:

$$2a_1u_1 = \frac{\pi}{2}G_1T_1 + \sum_{\mathrm{n}=2}^{\mathrm{N}}\left\{G_1\int\!\!\int_{S_\mathrm{n}} \sin^{-1}\left[\frac{a_1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]\tau_\mathrm{n}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.$$

$$\left. + G_2\int\!\!\int_{S_\mathrm{n}} \frac{a_1(x^2+y^2-a_1^2)^{1/2}}{(x-\mathrm{i}y)^2}\bar{\tau}_\mathrm{n}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}. \tag{5.10.27}$$

Рис. 5.10.2. Взаимодействие между двумя эллиптическими штампами, со сдвигающей нагрузкой в направлении оси Oy

Здесь мы использовали интегралы (A5.1.22–A5.1.23). Взаимодействие двух равных круглых штампов под действием нагрузки T в направлении Ox ведёт к следующему выражению для центральной оценки:

$$2au = \frac{\pi}{2} G_1 T + \left[G_1 T \sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) + G_2 \frac{a(l^2 - a^2)^{1/2}}{l^2} \bar{T} \right]. \qquad (5.10.28)$$

Вводя опять обозначение

$$T_0 = \frac{4au}{\pi G_1},$$

следующий результат может быть получен из (5.10.28)

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) + \frac{G_2}{G_1} \frac{a(l^2 - a^2)^{1/2}}{l^2} \right]} \qquad (5.10.29)$$

Если тангенциальные перемещения предписаны в направлении оси Oy, мы получим:

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) - \frac{G_2}{G_1}\frac{a(l^2-a^2)^{1/2}}{l^2}\right]} \tag{5.10.30}$$

Все результаты действительны для случая изотропного тела, если принять $G_1 = (2-\nu)/(2\pi\mu)$ и $G_2 = \nu/(2\pi\mu)$, где μ есть модуль сдвига и ν есть коэффициент Пуассона.

Упражнение 5.10

1. Проверьте (5.10.6).

2. Выведите (5.10.12).

3. Рассмотрите взаимодействие двух равных эллиптических штампов, когда их большие полуоси взаимно перпендикулярны.

4. Найдите обобщённые перемещения эллиптического штампа, вызванные действием нескольких сосредоточенных сил, приложенных тангенциально вне штампа.

Совет: Рассмотрите процедуру сжатия областей S_n, $n = 2,3,...,N$, в точки. Точность уравнений (5.10.18) будет увеличиваться. В предельном случае $S_n \to 0$, формула (5.10.18) даёт *точное* решение задачи о нескольких сосредоточенных силах, действующих вне эллиптического штампа.

5.11 Контактная задача для шероховатого штампа

Термин *шероховатый* штамп используется здесь как противоположный термину *гладкий* штамп, указывая на штамп, который производит сдвигающее напряжение в своём основании. Рассмотрим круглый штамп, с основанием общего вида, вдавливаемый в трансверсально изотропное упругое полупространство. Штамп находится под действием нормальной осевой силы P и тангенциальной силы $T = kP$, действующей направлении Ox, где k является коэффициентом трения. Пусть область контакта есть круг радиуса a. Сдвигающее напряжение τ_{zx} полагается пропорциональным давлению σ, а именно, $\tau_{zx} = k\sigma$. Основное интегральное уравнение примет вид (согласно (2.2.13)):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} = \frac{w(\rho,\phi)}{H} - \alpha k \Re \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}. \tag{5.11.1}$$

Здесь $w(\rho,\phi)$ есть осадка штампа. Мы перепишем (5.11.1) в операторной форме:

$$\mathcal{N}\sigma = \frac{w}{H} - \alpha k \mathcal{M}\sigma, \tag{5.11.2}$$

где $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ интегральные операторы в левой и правой сторонах (5.11.1) соответственно.

Значения α и k для реальных тел меньше единицы, поэтому их произведение удобно использовать в качестве малого параметра. Пусть следующее разложение справедливо:

$$\sigma(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha k)^n \sigma_n(\rho,\phi). \tag{5.11.3}$$

Подставляя (5.11.3) в (5.11.2) и приравнивая члены с одинаковыми степенями малого параметра, следующая бесконечная система интегральных уравнений может быть получена:

$$\mathcal{N}\sigma_0 = \frac{w}{H}, \qquad \mathcal{N}\sigma_1 = -\mathcal{M}\sigma_0, \ldots, \qquad \mathcal{N}\sigma_n = -\mathcal{M}\sigma_{n-1}, \ldots \tag{5.11.4}$$

Оператор $\mathcal{N}^{-1}$, обратный к $\mathcal{N}$ известен из (1.4.10), так что мы можем записать формальное решение задачи следующим образом:

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha k)^n (-\mathcal{N}^{-1}\mathcal{M})^n \mathcal{N}^{-1}\left(\frac{w}{H}\right). \tag{5.11.5}$$

Пример. Рассмотрим случай плоского круглого штампа. Пусть ω являются осадкой в его центре, и δ есть его угол наклона относительно оси Oy. Тогда

$$w(\rho,\phi) = \omega + \delta\rho\cos\phi. \tag{5.11.6}$$

Подстановка (5.11.6) в первое из уравнений (5.11.4) даёт:

$$\sigma_0(\rho,\phi) = \frac{1}{\pi^2 H}\frac{\omega + 2\delta\rho\cos\phi}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}, \qquad (5.11.7)$$

что есть, фактически, решение для наклонного *гладкого* штампа. Подстановка (5.11.7) во второе из уравнений (5.11.4) даёт второй член разложения:

$$\sigma_1(\rho,\phi) = \frac{2}{\pi^3 H}\left\{\frac{\omega a \ln[(a^2-\rho^2)^{1/2}/a]}{\rho(a^2-\rho^2)^{1/2}}\cos\phi + \delta\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{1/2} + \frac{a}{(a^2-\rho^2)^{1/2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{a^3\ln[(a^2-\rho^2)^{1/2}/a]}{\rho^2(a^2-\rho^2)^{1/2}} + \frac{a}{2(a^2-\rho^2)^{1/2}}\right)\cos 2\phi\right]\right\}. \qquad (5.11.8)$$

Процедура может быть продолжена, и дальнейшие члены разложения могут быть получены. Это оставлено заинтересованному читателю. Главный вектор P и опрокидывающий момент M могут быть получены интегрированием суммы (5.11.7) и (5.11.8) следующим образом:

$$P = \frac{2a}{\pi H}\left(\omega + \frac{\alpha k}{\pi}a\delta\right), \qquad M = \frac{2a^2}{\pi H}\left(\frac{2}{3}a\delta - \frac{\alpha k}{\pi}\omega\right). \qquad (5.11.9)$$

Если точка приложения нормальной силы P сдвинута вдоль оси Ox на расстояние b от центра штампа, тогда $M = Pb$, и следующее соотношение может быть установлено между осадкой штампа ω и углом наклона δ:

$$\delta = \frac{b + (\alpha k/\pi)a}{(2/3)a - (\alpha k/\pi)b}\frac{\omega}{a}. \qquad (5.11.10)$$

Формула (5.11.10) показывает, что штамп наклоняется даже в случае центрального нагружения. Аналогичный эффект может быть обнаружен в случае сцеплённого штампа (Глава 3) и в двумерных контактных задачах (Мусхелишвили, 1946). Чтобы предотвратить наклон штампа, нормальная сила должна быть приложена в точке $x = -\alpha k a/\pi$.

Упражнение 5.11

1. Проверьте (5.11.5).

2. Выведите (5.11.7)–(5.11.8).

3. Установите (5.11.9).

4. Найдите поправочный член в выражении для P (5.11.9), вызываемый σ_2.

Ответ: $P = \dfrac{2a}{\pi H}\left[\omega\left(1-\dfrac{1}{6}\alpha^2 k^2\right)+\dfrac{\alpha k}{\pi}a\delta\right]$.

5. Найдите нормальное перемещение w вне штампа, принимая во внимание первые два члена в разложении решения.

Ответ: $$w = \frac{2}{\pi}\left[\omega\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) + \delta\left(\rho\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) - \frac{a}{\rho}(\rho^2-a^2)^{1/2}\right)\cos\phi\right]$$

$$+\frac{4\alpha k}{\pi^2}\left\{\omega\left[\frac{a}{\rho}\cos^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) + \frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}}{\rho}\ln\frac{\rho}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\right]\cos\phi\right.$$

$$+\delta(\rho^2-a^2)^{1/2}\ln\frac{\rho}{(\rho^2-a^2)^{1/2}} + \frac{\delta}{\rho^2}\left[\frac{2}{3}a^3\cos^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right.$$

$$\left.\left.+(\rho^2-a^2)^{1/2}\left(\frac{\rho^2+2a^2}{3}\ln\frac{\rho}{(\rho^2-a^2)^{1/2}} - \frac{a^2}{6}\right)\right]\cos 2\phi\right\}.$$

6. Попробуйте найти точное замкнутое решение задачи.

Аппендикс А5.1

Метод вычисления нескольких интегралов по эллиптической области представлен здесь. Мы вводим обозначения:

$$R = [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}$$

$$Z_0 = \left[1-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right]^{1/2}$$

Нам нужно вычислить следующий интеграл:

$$I = \iint_S \frac{f(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}, \tag{A5.1.1}$$

где S есть эллипс с полуосями a и b ($a \geq b$), и f — известная функция. Мы используем метод Ростовцева (1961), несколько модифицированный для упрощения вычислений. Введём новую систему полярных координат (r,θ), с началом координат в точке (x,y), а именно,

$$x_0 = x + r\cos\theta, \qquad y_0 = y + r\sin\theta. \tag{A5.1.2}$$

Прежде всего, рассмотрим случай, когда $(x,y) \in S$. Подстановка (A5.1.2) в (A5.1.1) даёт:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ab\,\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}} \int_0^{r_1} \frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\,\mathrm{d}r}{[(r_1 - r)(r + r_2)]^{1/2}}, \tag{A5.1.3}$$

где r_1 и $-r_2$ корни алгебраических уравнений:

$$\frac{(x + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y + r\sin\theta)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

а именно,

$$r_{1,2} = \frac{(Q^2 + PZ)^{1/2} \mp Q}{P}, \qquad Q = \frac{x\cos\theta}{a^2} + \frac{y\sin\theta}{b^2},$$

$$P = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}, \qquad Z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{A5.1.4}$$

Теперь мы можем представить интеграл (A5.1.3) как сумма двух, согласно схеме:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_1} \mathrm{d}r = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_1} \mathrm{d}r + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_1} \mathrm{d}r. \tag{A5.1.5}$$

Сделаем формальную замену θ на $\pi+\theta$ во втором интеграле из (A5.1.5). Принимая во внимание, что $r_1(\theta) = r_2(\pi + \theta)$, преобразование (A5.1.5) делается следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_1} \mathrm{d}r = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_1} \mathrm{d}r + \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_2} \mathrm{d}r = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_1} \mathrm{d}r + \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-r_2}^{0} \mathrm{d}r. \tag{A5.1.6}$$

В последнем члене (А5.1.6) мы сделали формальную замену r на $-r$. Принимая во внимание, что выражение $f(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)$ остаётся неизменённым с заменой θ на $\pi+\theta$ и r на $-r$, два интеграла в (А5.1.6) могут быть объединены в один, и окончательный результат будет иметь вид:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{ab\,\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{1/2}}\int_{-r_2}^{r_1}\frac{f(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\mathrm{d}r}{[(r_1-r)(r+r_2)]^{1/2}},\qquad (\text{A5.1.7})$$

Мы вспоминаем интеграл

$$\int_{-r_2}^{r_1}\frac{r^{\mathrm{n}}\mathrm{d}r}{[(r_1-r)(r+r_2)]^{1/2}}=r_1^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(n+1-k)\,\Gamma(k+1)}\left[-\frac{r_2}{r_1}\right]^{\mathrm{k}}.$$

(A5.1.8)

Теперь различные интегралы могут быть вычислены довольно легко. Вот результаты, которые использованы в основном тексте этой книги

$$\iint_S\frac{\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi\int_0^{\pi}\frac{ab\,\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{1/2}}=2\pi b\mathrm{K}(k),\qquad (\text{A5.1.9})$$

$$\iint_S\frac{q\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{\bar{q}RZ_0}=\pi\int_0^{\pi}\frac{ab\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{1/2}}=2\pi b[(2-k^2)\mathrm{K}(k)-2\mathrm{E}(k)]/k^2.$$

(A5.1.10)

Теперь рассмотрим случай, когда точка $(x,y)\notin S$. В этом случае подстановка (А5.1.2) в (А5.1.1) даёт:

$$I=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{ab\,\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{1/2}}\int_{-r_2}^{r_1}\frac{f(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\,\mathrm{d}r}{[(r_1-r)(r+r_2)]^{1/2}},$$

(A5.1.11)

где α_1 и α_2 углы между осью Ox и двумя прямыми, проходящими через точку (x,y) касательно к эллипсу. Мы можем найти эти углы, используя классические формулы дифференциальной геометрии. Параметрическое уравнение эллипса может быть записано:

$$X = a\cos t,\quad Y = b\sin t. \tag{A5.1.12}$$

Уравнение прямых проходящих через точку (x,y) касательно к эллипсу есть

$$\frac{y - b\sin t}{b\cos t} = \frac{x - a\cos t}{-a\sin t}. \tag{A5.1.13}$$

Уравнение (A5.1.13) может быть решено относительно $\sin t$, и два решения имеют вид:

$$(\sin t)_{1,2} = \frac{b[a^2 y \mp x(x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2)^{1/2}]}{x^2b^2 + y^2a^2}. \tag{A5.1.14}$$

Это даёт следующие два выражения для $\cos t$:

$$(\cos t)_{1,2} = \frac{a[b^2 x \pm y(x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2)^{1/2}]}{x^2b^2 + y^2a^2}. \tag{A5.1.15}$$

Теперь мы можем записать:

$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{y - b\sin t}{x - a\cos t}. \tag{A5.1.16}$$

Подстановка (A5.1.14–A5.1.15) в (A5.1.16) даёт:

$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{xy \mp (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)^{1/2}}{x^2 - a^2}. \tag{A5.1.17}$$

Мы можем теперь вычислить интегралы:

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{ab\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}} = \pi b[\mathrm{F}(\phi,k) - \mathrm{F}(\psi,k)], \tag{A5.1.18}$$

$$\iint_S \frac{q\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{\bar{q}RZ_0} = \pi\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{ab\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}}$$

$$= \pi b\{(2-k^2)[\mathrm{F}(\phi,k)-\mathrm{F}(\psi,k)]-2[\mathrm{E}(\phi,k)-\mathrm{E}(\psi,k)]$$

$$-2\mathrm{i}[(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}-(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}\}/k^2. \tag{A5.1.19}$$

Здесь

$$\tan\phi = \cot\alpha_1 = \frac{xy+(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)^{1/2}}{y^2-b^2}. \tag{A5.1.20}$$

$$\tan\psi = \cot\alpha_2 = \frac{xy-(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)^{1/2}}{y^2-b^2}. \tag{A5.1.21}$$

В предельном случае круга, $b \to a$, $k \to 0$, и формулы (A5.1.18–A5.1.19) примут вид:

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0} = 2\pi a\sin^{-1}\frac{a}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \tag{A5.1.22}$$

$$\iint_S \frac{q\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{\bar{q}RZ_0} = 2\pi a^2\frac{(x^2+y^2-a^2)^{1/2}}{(x-\mathrm{i}y)^2}. \tag{A5.1.23}$$

Более сложные интегралы могут быть вычислены тем же методом.
Вот некоторые дополнительные интегралы, где x и y расположены внутри области S.

$$\iint_S \frac{x_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b^3\frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{1-k^2}\mathbf{E}-\mathbf{K}\right]+\pi b x^2\frac{1}{k^4}\left[2\mathbf{K}-(2+k^2)\mathbf{E}\right]+\pi b y^2\frac{1}{k^4}\left[2\mathbf{E}-(2-k^2)\mathbf{K}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0y_0\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0} = 2\pi b\,xy\frac{1-k^2}{k^4}\left[\frac{2-k^2}{1-k^2}\mathbf{E}-2\mathbf{K}\right]$$

$$\iint_S \frac{y_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b^3\frac{1}{k^2}\left[\mathbf{K}-\mathbf{E}\right]+\pi b x^2\frac{1-k^2}{k^4}\left[2\mathbf{E}-(2-k^2)\mathbf{K}\right]$$

$$+\pi b y^2\frac{1}{k^4}\left[2(1-k^2)^2\mathbf{K}-(2-3k^2)\mathbf{E}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0^3 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b^3 x \frac{1}{k^4}\left[\frac{2-k^2}{1-k^2}\mathbf{E} - 2\mathbf{K}\right] + \pi b\, xy^2 \frac{1}{k^6}\left[(-8+5k^2)\mathbf{K} + (8-k^2)\mathbf{E}\right]$$

$$+\pi b\, x^3 \frac{1}{3k^6}\left[(8-3k^2+k^4)\mathbf{K} - (8+k^2+2k^4)\mathbf{E}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0^2 y_0 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b^3 y \frac{1}{k^4}\left[(2-k^2)\mathbf{K} - 2\mathbf{E}\right]$$

$$+\pi b\, x^2 y \frac{1}{k^6}\left[(-8+9k^2-k^4)\mathbf{K} + (8-5k^2-k^4)\mathbf{E}\right]$$

$$+\pi b\, y^3 \frac{1}{3k^6}\left[(8-11k^2+3k^4)\mathbf{K} - (8-7k^2)\mathbf{E}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0 y_0^2 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b^3 x \frac{1}{k^4}\left[(2-k^2)\mathbf{K} - 2\mathbf{E}\right]$$

$$+\pi b\, xy^2 \frac{1}{k^6}\left[(8-15k^2+7k^4)\mathbf{K} + (-8+11k^2-2k^4)\mathbf{E}\right]$$

$$+\pi b\, x^3 \frac{1}{3k^6}\left[(8-9k^2+k^4)\mathbf{E} - (8-13k^2+5k^4)\mathbf{K}\right]$$

$$\iint_S \frac{y_0^3 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b^3 y \frac{1}{k^4}\left[(2-k^2)\mathbf{E} - 2(1-k^2)\mathbf{K}\right]$$

$$+\pi b\, y^3 \frac{1}{3k^6}\left[(8-17k^2+11k^4)\mathbf{E} + (-8+21k^2-19k^4+6k^6)\mathbf{K}\right]$$

$$+\pi b\, x^2 y \frac{1}{k^6}\left[(8-19k^2+14k^4-3k^6)\mathbf{K} - (8-15k^2+7k^4)\mathbf{E}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0^4 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x^4 \frac{1}{12k^8}\left[(-48+8k^2-4k^4-6k^6)\mathrm{E} + (48-32k^2+5k^4+3k^6)\mathrm{K}\right]$$

$$+\pi b x^2 y^2 \frac{1}{2k^8}\left[(48-16k^2-k^4)\mathrm{E}-(48-40k^2+4k^4)\mathrm{K}\right]$$

$$+\pi b y^4 \frac{1}{4k^8}\left[(16-16k^2+3k^4)\mathrm{K}-(16-8k^2)\mathrm{E}\right]$$

$$+\pi b^3 x^2 \frac{1}{2k^6}\left[\frac{8-5k^2-k^4}{1-k^2}\mathrm{E}-(8-k^2)\mathrm{K}\right]+\pi b^3 y^2 \frac{1}{2k^6}\left[(8-3k^2)\mathrm{K}-\frac{8-7k^2}{1-k^2}\mathrm{E}\right]$$

$$+\pi b^5 \frac{1}{4k^4(1-k^2)}\left[\frac{-2+4k^2}{1-k^2}\mathrm{E}+(2-3k^2)\mathrm{K}\right]$$

$$\int\int_S \frac{x_0^3 y_0 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x^3 y \frac{1}{3k^8}\left[(48-40k^2-2k^6)\mathrm{E}-(1-k^2)(48-16k^2+k^4)\mathrm{K}\right]$$

$$+\pi b x y^3 \frac{1}{k^8}\left[(1-k^2)(16-8k^2)\mathrm{K}-(16-16k^2+k^4)\mathrm{E}\right]$$

$$+\pi b^3 x y \frac{1}{k^6}\left[(8-5k^2)\mathrm{K}-(8-k^2)\mathrm{E}\right]$$

$$\int\int_S \frac{x_0^2 y_0^2 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x^4 \frac{(1-k^2)}{12k^8}\left[(48-16k^2-k^4)\mathrm{E}-(48-40k^2+4k^4)\mathrm{K}\right]$$

$$+\pi b x^2 y^2 \frac{1}{2k^8}\left[(-48+72k^2-20k^4-2k^6)\mathrm{E}+(1-k^2)(48-48k^2+5k^4)\mathrm{K}\right]$$

$$+\pi b y^4 \frac{1}{12k^8}\left[(48-80k^2+31k^4)\mathrm{E}-(1-k^2)(48-56k^2+12k^4)\mathrm{K}\right]$$

$$+\pi b^3 x^2 \frac{1}{2k^6}\left[(8-7k^2+k^4)\mathrm{K}-(8-3k^2)\mathrm{E}\right]$$

$$+\pi b^3 y^2 \frac{1}{2k^6}\left[(8-5k^2)\mathrm{E}-(8-9k^2+2k^4)\mathrm{K}\right]+\pi b^5 \frac{1}{4k^4}\left[\frac{2-k^2}{1-k^2}\mathrm{E}-2\mathrm{K}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0 y_0^3 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x^3 y \frac{(1-k^2)}{k^8}\Big[(1-k^2)(16-8k^2)\mathrm{K}-(16-16k^2+k^4)\mathrm{E}\Big]$$

$$+\pi bxy^3\frac{1}{3k^8}\Big[(48-104k^2+64k^4-6k^6)\mathrm{E}-(1-k^2)(48-80k^2+33k^4)\mathrm{K}\Big]$$

$$+\pi b^3 xy\frac{1}{k^6}\Big[(8-7k^2)\mathrm{E}-(1-k^2)(8-3k^2)\mathrm{K}\Big]$$

$$\iint_S \frac{y_0^4 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x^4 \frac{(1-2k^2+k^4)}{4k^8}\Big[(16-16k^2+3k^4)\mathrm{K}-(16-8k^2)\mathrm{E}\Big]$$

$$+\pi b x^2 y^2\frac{(1-k^2)}{2k^8}\Big[(48-80k^2+31k^4)\mathrm{E}-(1-k^2)(48-56k^2+12k^4)\mathrm{K}\Big]$$

$$+\pi b y^4\frac{1}{12k^8}\Big[(-48+136k^2-132k^4+50k^6)\mathrm{E}+(1-k^2)(48-112k^2+85k^4-24k^6)\mathrm{K}\Big]$$

$$+\pi b^3 x^2\frac{(1-k^2)}{2k^6}\Big[(8-k^2)\mathrm{E}-(8-5k^2)\mathrm{K}\Big]$$

$$+\pi b^3 y^2\frac{1}{2k^6}\Big[(-8+11k^2-2k^4)\mathrm{E}+(1-k^2)(8-7k^2)\mathrm{K}\Big]+\pi b^5\frac{1}{4k^4}\Big[(2+k^2)\mathrm{K}-(2+2k^2)\mathrm{E}\Big]$$

Вот случай где x и y расположены вне области S:

$$\iint_S \frac{x_0 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x\frac{1}{k^2}\Big[[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi bx\left[\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right]+\pi by\frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{\Delta(\psi)}-\frac{1}{\Delta(\phi)}\right]$$

$$\iint_S \frac{y_0 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b y\frac{1}{k^2}\Big[[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]-(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]\Big]$$

$$-\pi by\left[\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right]+\pi bx\frac{1-k^2}{k^2}\left[\frac{1}{\Delta(\psi)}-\frac{1}{\Delta(\phi)}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi bx^2\frac{1}{2k^4}\left[-(2+k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]+2[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]\right]$$

$$+\pi bx^2\frac{1}{2k^2}\left[(2+k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi bxy\frac{1-k^2}{k^4}\left[\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)-\frac{3-k^2}{1-k^2}\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi by^2\frac{1}{2k^4}\left[2[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]-(2-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]\right]$$

$$+\pi by^2\frac{1}{2k^2}\left[-2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right]$$

$$-\pi b^3\frac{1}{2(1-k^2)}\left[\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right]$$

$$\iint_S \frac{x_0y_0\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi bx^2\frac{1-k^2}{2k^4}\left[-3\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi bxy\frac{1-k^2}{k^4}\left[\left(2+\frac{k^2}{1-k^2}\right)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]-2[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]\right]$$

$$+\pi bxy\frac{1-k^2}{k^2}\left[\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}-\frac{2-k^2}{1-k^2}\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi by^2\frac{1-k^2}{2k^4}\left[3\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)-\frac{1}{\Delta^3(\phi)}+\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right]+\pi b^3\frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right]$$

$$\iint_S \frac{y_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi bx^2\frac{1-k^2}{2k^4}\left[2[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]-(2-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]\right]$$

$$+\pi b x^2\frac{1-k^2}{2k^2}\left[-2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi bxy\frac{1-k^2}{k^4}\left[(k^2-1)(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\phi)})+(3-2k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b y^2\frac{1}{2k^4}\left[(3k^2-2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]+2(1-k^2)^2[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]\right]$$

$$+\pi b y^2\frac{1}{2k^2}\left[(2-3k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-(1-k^2)\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right]$$

$$-\pi b^3\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right]$$

$$\iint\limits_S\frac{x_0^3\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi b x^3\frac{1}{6k^6}\left[(8-3k^2+k^4)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-(8+k^2+2k^4)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\right]+$$

$$+\pi b x^3\frac{1}{6k^4}\left[(8+k^2+2k^4)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+\right.$$

$$\left.+(-7+6k^2+k^4)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)+3(1-k^2)^2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b x^2 y\frac{1}{2k^6}\left[(9k^2-15)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-k^2)(10-3k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)^2\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi bxy^2\frac{1}{2k^6}\left[(-8+5k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-(8-k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\right]$$

$$+\pi bxy^2\frac{1}{2k^4(1-k^2)}\left[(-8+3k^2+2k^4)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+\right.$$

$$\left.+(7-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]+$$

$$+\pi b y^3\frac{1}{6k^6}\left[3(5-3k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+(10-8k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)+3(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi x b^3\frac{1}{2k^4(1-k^2)}\Big[-2[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]+(2-k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi x b^3\frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left[(-2+k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi y b^3\frac{1}{2k^4}\left[3\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)-\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$\int\!\!\int_S \frac{x_0^2 y_0\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi b x^3\frac{1}{6k^6}\left[-3(1-k^2)(5-k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-k^2)^2(10-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)^3\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b x^2 y\frac{1}{2k^6}\Big[-(8-k^2)(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]+(8-5k^2-k^4)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi b x^2 y\,\frac{1}{2k^4}\left[(8-9k^2+3k^4)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+\right.$$

$$\left.+(7-k^2)(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)^2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b x y^2\frac{1-k^2}{2k^6}\left[(15-3k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)-(10-6k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)+\right.$$

$$\left.+3(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b y^3\frac{1}{6k^6}\Big[(8-3k^2)(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-(8-7k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi b y^3\frac{1}{6k^4}\left[(8-7k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-7(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)+\right.$$

$$+3(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\Bigg]$$

$$+\pi x b^3\frac{1}{2k^4}\left[(3-k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)-(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi y b^3\frac{1}{2k^4}\Big[(2-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-2[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi y b^3\frac{1}{2k^2}\left[2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$\iint\limits_S\frac{x_0y_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi b x^3\frac{1-k^2}{6k^6}\Big[-(8-5k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]+(8-k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi b x^3\frac{1-k^2}{6k^4}\Bigg[-(8-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+7(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)^2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\Bigg]$$

$$+\pi b x^2 y\frac{1-k^2}{2k^6}\Bigg[(15-12k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)-(1-k^2)(10-4k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)+3(1-k^2)^2\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\Bigg]$$

$$+\pi b x y^2\frac{1}{2k^6}\Big[(8-7k^2)(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]+(-8+11k^2-2k^4)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi b x y^2\frac{1}{2k^4}\Bigg[(8-11k^2+2k^4)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-$$

$$-(7-5k^2)(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)+3(1-k^2)^2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\Bigg]$$

$$+\pi b y^3\frac{1-k^2}{6k^6}\left[-3(5-4k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+(10-9k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi x b^3 \frac{1}{2k^4}\left[(2-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-2[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\right]$$

$$+\pi x b^3 \frac{1}{2k^2}\left[2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi y b^3 \frac{1}{2k^4}\left[-(3-k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$\int\int_S \frac{y_0^3 \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0}{RZ_0} = \pi b x^3 \frac{(1-k^2)^2}{6k^6}\left[3(5-2k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)-(1-k^2)(10-2k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)+3(1-k^2)^2\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b x^2 y \frac{1-k^2}{2k^6}\left[(8-k^2)(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]-(8-7k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\right]$$

$$+\pi b x^2 y \frac{1-k^2}{2k^4}\left[(8-7k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)-(7-3k^2)(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right.$$

$$\left.+3(1-k^2)^2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b x y^2 \frac{(1-k^2)^2}{2k^6}\left[-(15-6k^2)\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+(10-7k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)-3(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)}-\frac{1}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi b y^3 \frac{1}{6k^6}\left[-(8-13k^2+6k^4)(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]+(8-17k^2+11k^4)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\right]$$

$$+\pi b y^3 \frac{1}{6k^4}\left[(-8+17k^2-11k^4)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)(7-8k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)-\right.$$

$$\left.-3(1-k^2)^2\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^5(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^5(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi x b^3 \frac{1-k^2}{2k^4}\left[-3\left(\frac{1}{\Delta(\phi)}-\frac{1}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)}-\frac{1}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

$$+\pi y b^3 \frac{1}{2k^4}\Big[-2(1-k^2)[\mathrm{F}(\phi)-\mathrm{F}(\psi)]+(2-k^2)[\mathrm{E}(\phi)-\mathrm{E}(\psi)]\Big]$$

$$+\pi y b^3 \frac{1}{2k^2}\left[-(2-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right)+(1-k^2)\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta^3(\phi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta^3(\psi)}\right)\right]$$

В интегралах выше, сокращения $\mathrm{F}(\phi)$, $\mathrm{E}(\phi)$, $\mathrm{F}(\psi)$, $\mathrm{E}(\psi)$ были использованы для обозначения $\mathrm{F}(\phi,k)$, $\mathrm{E}(\phi,k)$, $\mathrm{F}(\psi,k)$, $\mathrm{E}(\psi,k)$ соответственно. $\Delta(\phi)$ обозначает

$$(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}$$

В случае круга радиуса a и x, y внутри области S, мы имеем:

$$\iint_S \frac{x_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 a\frac{1}{16}\Big[4a^2+5x^2-y^2\Big]$$

$$\iint_S \frac{x_0 y_0\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 a\frac{3}{8}xy$$

$$\iint_S \frac{y_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 a\frac{1}{16}\Big[4a^2-x^2+5y^2\Big]$$

$$\iint_S \frac{x_0^3\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 ax\frac{1}{32}\Big[6a^2+7x^2-3y^2\Big]$$

$$\iint_S \frac{x_0^2 y_0\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 ay\frac{1}{32}\Big[2a^2+9x^2-y^2\Big]$$

$$\iint_S \frac{x_0 y_0^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 ax\frac{1}{32}\Big[2a^2-x^2+9y^2\Big]$$

$$\iint_S \frac{y_0^3\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{RZ_0}=\pi^2 ay\frac{1}{32}\Big[6a^2-3x^2+7y^2\Big]$$