ГЛАВА 4

ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

Большинство решённых контактных задач и задач теории трещин имеет дело с напряжениями и перемещениями только в плоскости $z=0$. Некоторые решения этого типа были представлены в предыдущих главах. Существуют только несколько опубликованных *полных* решений (Sneddon, 1951; Elliott, 1949; Westmann, 1965), где явные выражения даны для поля перемещений и напряжений в простейших осесимметричных задачах (круглый штамп и круглая трещина). Явные выражения для поля перемещения около эллиптической трещины могут быть найдены в (Kassir and Sih, 1975). Знание полного решения очень важно для рассмотрения более сложных задач взаимодействий трещин, влияния внешних нагрузок на штампы и трещины, и т.д.

Мы представляем в этой главе *полное* решение задачи о круглой трещине в трансверсально изотропном упругом пространстве под действием произвольной нормальной и тангенциальной нагрузки. Все нужные функции Грина даны явно и в элементарных функциях. Приближённое аналитическое решение дано для плоской трещины произвольной формы. Точность решения высока, что достигнуто благодаря тому факту, что оно становится точным в случае эллиптической трещины. Вывод несингулярного основного интегрального уравнения позволяет нам рассмотреть очень близкие взаимодействия копланарных трещин. Некоторый материал, представленный в этой главе пока ещё не опубликованы. Остальная часть следует статьям (Fabrikant, 1987a, 1987b, 1987f, 1987g, 1988b, 1989).

4.1 Плоская трещина под действием произвольной нормальной нагрузки

Общее решение некоторых смешанных задач через три гармонические функции было дано в главе 2. Мы показываем здесь, что в случае плоской трещины под действием нормальной нагрузки, общее решение может быть выражено через только *одну* такую функцию. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное плоской трещиной S в плоскости $z=0$, с произвольным давлением p приложенным к обеим сторонам трещины. Благодаря симметрии, задача может быть сформулирована следующим образом: требуется найти решение системы дифференциальных уравнений (2.1.3) для полупространства $z\geq 0$, со смешанными граничными условиями на плоскости $z=0$:

$$\sigma_z=-p(x,y),\quad \text{для}\quad (x,y)\in S;\qquad w=0,\qquad \text{для}\qquad (x,y)\notin S;$$

$$\tau_z=0\,,\qquad \text{для}\qquad -\infty<(x,y)<\infty. \tag{4.1.1}$$

Эти условия могут быть удовлетворены представлением через одну гармоническую функцию. Положим, согласно (2.1.13),

$$F_1(z)=c_1F(z_1),\qquad F_2(z)=c_2F(z_2),\qquad F_3(z)=0\,. \tag{4.1.2}$$

Выражения типа $F_1(z)$ и $F(z_1)$, *и т.д.,* везде в книге понимаются как $F_1(x,y,z)$ и $F(x,y,z_1)$ соответственно. Подстановка (4.1.2) и последнего из выражений (2.1.12) в третье условие (4.1.1) даёт:

$$c_1=-c_2\gamma_1/m_1\gamma_2 \tag{4.1.3}$$

Мы можем представить функцию F как потенциал простого слоя, то—есть

$$F(\rho,\phi,z)\equiv F(z)=\int\!\!\int_S \frac{\omega(N)\,\mathrm{d}S}{R(M,N)}\,, \tag{4.1.4}$$

где ω обозначает перемещения сторон трещины $w(x,y,0)$, $R(M,N)$ — расстояние между точками $M(\rho,\phi,z)$ и $N(r,\psi,0)$, и область интегрирования есть одна из поверхностей трещины S. Выражение (4.1.4) удовлетворяет второму условию (4.1.1) тождественно, благодаря хорошо известному свойству потенциала простого слоя. Внутри трещины то же свойство даёт:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=0}=-2\pi\omega=-2\pi w(x,y,0) \tag{4.1.5}$$

Теперь выражения (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5), и (2.1.6) дают второе уравнение для c_1 и c_2:

$$-m_1 c_1/\gamma_1 - m_2 c_2/\gamma_2 = 1/2\pi \tag{4.1.6}$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из (4.1.3) и (4.1.6) в виде:

$$c_1 = -\frac{\gamma_1}{2\pi(m_1-1)}, \quad c_2 = -\frac{\gamma_2}{2\pi(m_2-1)}. \tag{4.1.7}$$

Потенциальные функции будут даны как

$$F_1(z) = -\frac{\gamma_1}{2\pi(m_1-1)}F(z_1), \quad F_2(z) = -\frac{\gamma_2}{2\pi(m_2-1)}F(z_2). \tag{4.1.8}$$

Подстановка (4.1.8) и (2.1.12) в первое условие (4.1.1) ведёт к основному интегральному уравнению:

$$p(N_0) = -\frac{1}{4\pi^2 H}\Delta\int\int_S \frac{\omega(N)\,\mathrm{d}S}{R(N_0,N)}, \tag{4.1.9}$$

где, как и раньше, $R(N_0,N)$ обозначает расстояние между двумя точками N_0 и N, и оба N_0, $N \in S$. Следующие тождества были использованы:

$$m_1 m_2 = 1, \qquad (m_1-1)/(m_1+1) = 2\pi A_{44}H(\gamma_1-\gamma_2). \tag{4.1.10}$$

Мы рассмотрим ниже круглую трещину более подробно. Мы вернёмся к случаю общей трещины в секции 4.8.

Функции Грина для круглой трещины. Точное решение в элементарных функциях возможно, когда трещина круглая. Пусть a есть радиус трещины. Основное интегральное уравнение (4.1.9) может быть переписано в полярных координатах следующим образом (смотри секцию 2.8)

$$p(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi^2 H\rho}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{x\,\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}(x^2)$$

$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0{}^2-x^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\omega(\rho_0,\phi).$$

(4.1.11)

Интегральный оператор, обратный к (4.1.11), определен в (2.8.2):

$$\omega(\rho,\phi)=4H\int_\rho^a\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)p(\rho_0,\phi). \quad (4.1.12)$$

Другая форма решения может быть получена из (1.4.33), а именно,

$$\omega=\frac{2}{\pi}H\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{p(\rho_0,\phi_0)}{R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right)\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0, \quad (4.1.13)$$

где

$$R=[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2},\quad \eta=(a^2-\rho^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}/a.$$

(4.1.14)

В этой главе мы не ограничиваем наше внимание плоскостью $z=0$: наша цель — получение *полного* решения. Мы будем называть $F(\rho,\phi,z)$, как она определена в (4.1.4), главной потенциальной функцей, так как обе функции F_1 и F_2 становятся сразу известными, когда функция F найдена. Подстановка (4.1.13) в (4.1.4) позволяет нам выразить главную потенциальную функцию следующим образом:

$$F(\rho,\phi,z)=\frac{2}{\pi}H\int_0^{2\pi}\int_0^a K(\rho,\phi,z;\rho_0,\phi_0)\,p(\rho_0,\phi_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0, \quad (4.1.15)$$

где функция Грина K есть:

$$K(M;N_0)=K(\rho,\phi,z;\rho_0,\phi_0)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{1}{R(N,N_0)}\tan^{-1}\left[\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(M,N)}.$$

(4.1.16)

Здесь $R(\cdot,\cdot)$ обозначает расстояние между соответствующими точками: $M(\rho,\phi,z)$, $N(r,\psi,0)$, и $N_0(\rho_0,\phi_0,0)$. Хотя мы не можем вычислить интеграл (4.1.16) в элементарных функциях, все его производные могут быть выражены в элементарных функциях, благодаря фундаментальному интегралу полученному в секции 1.6. Используя (1.6.19), мы можем записать:

$$\frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{2\pi}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left[\frac{h}{R(M,N_0)}\right], \tag{4.1.17}$$

где

$$h = (a^2 - l_1^2)^{1/2}(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}/a\,, \tag{4.1.18}$$

и сокращённое обозначение l_1 везде в книге обозначает $l_1(a)$, согласно определению (0.18). Заметим, что h стремится к η, как она определена в (4.1.14), когда $z \to 0$ и $\rho < a$. Выражения (4.1.15) и (4.1.17) позволяют нам записать:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -4H\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{1}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left[\frac{h}{R(M,N_0)}\right]p(\rho_0,\phi_0)\rho_0 \mathrm{d}\rho_0 \mathrm{d}\phi_0. \tag{4.1.19}$$

Интеграл (4.1.19), хотя и выглядит трудным для вычисления даже для $p = \mathrm{const}$, может быть выражен в элементарных функциях для любой полиномиальной нагрузки. Это становится очевидным, если мы используем эквивалентное представление через $\mathcal{L}$–оператор (смотри 1.4.31):

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -8\pi H\int_{l_2(0)}^{l_2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^{g(x)}\frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)p(\rho_0,\phi). \tag{4.1.20}$$

Здесь

$$g(x) = x\left[1 + \frac{z^2}{\rho^2 - x^2}\right]^{1/2}, \tag{4.1.21}$$

и сокращение l_2 всюду в книге обозначает $l_2(a)$, как определено в (0.14). Используя замену переменных $x = l_2(t)$, $t = g(x)$, выражение (4.1.20) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -8\pi H \int_0^a \frac{\mathrm{d}l_2(t)}{[l_2^2(t)-\rho^2]^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right) p(\rho_0,\phi). \tag{4.1.22}$$

Функция F исчезает на бесконечности, она может быть определена из (4.1.22) в форме:

$$F(\rho,\phi,z) = -8\pi H \int_\infty^z \mathrm{d}z \int_0^a \frac{\mathrm{d}l_2(t)}{[l_2^2(t)-\rho^2]^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right) p(\rho_0,\phi). \tag{4.1.23}$$

Используя свойство

$$\frac{\partial l_2(t)}{\partial t} = -\frac{[l_2^2(t)-\rho^2]^{1/2}}{[\rho^2-l_1^2(t)]^{1/2}} \frac{\partial l_1(t)}{\partial z},$$

которое является следствием формулы (A4.1.28) и (A4.1.29) из Аппендикса A4.1, выражение (4.1.23) может быть модифицировано следующим образом:

$$F(\rho,\phi,z) = 8\pi H \int_0^a \mathrm{d}t \int_0^t \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \int_0^{l_1(t)} \frac{\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{y^2\rho_0}{t^2\rho}\right) p(\rho_0,\phi). \tag{4.1.24}$$

Выражение (4.1.24) удобно для точного вычисления потенциальной функции F и доказывает, что она может быть выражена в элементарных функциях для произвольной полиномиальной нагрузки. Простая замена переменных даёт другую формулу, эквивалентную (4.1.24):

$$F(\rho,\phi,z) = 8\pi H \int_0^a t\mathrm{d}t \int_0^t \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \int_{l_2(t)}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) p(\rho_0,\phi). \tag{4.1.25}$$

Мы можем продолжать теперь с остальными производными функции Грина K, определённую в (4.1.16). Дифференцирование (4.1.16) даёт:

$$\Lambda K(\rho,\phi,z;\rho_0,\phi_0) = -\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}}{R^3(M,N)} \tan^{-1}\left[\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right] \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(N,N_0)}.$$

(4.1.26)

Этот интеграл вычислен в Аппендиксе А4.3. Используя (А4.3.11), мы можем написать:

$$\Lambda K(\rho,\phi,z;\,\rho_0,\phi_0)=\frac{2\pi}{\bar{q}}\left[\frac{z}{R_0}\tan^{-1}\frac{h}{R_0}-\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}}\tan^{-1}\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right], \tag{4.1.27}$$

где Λ дана в (2.1.5), h определён в (4.1.18), и

$$\bar{q}=\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}, \qquad \bar{s}=(a^2-\rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2},$$

$$R_0=R(M,N_0)=[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{1/2}. \tag{4.1.28}$$

Остальные производные, которые будут нужны для полного решения, имеют вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}K(\rho,\phi,z;\,\rho_0,\phi_0)=2\pi\left\{\frac{z}{R_0^3}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)-\frac{h}{z[R_0^2+h^2]}\left[\frac{\rho^2-l_1^2}{l_2^2-l_1^2}-\frac{z^2}{R_0^2}\right]\right\}, \tag{4.1.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda K(\rho,\phi,z;\,\rho_0,\phi_0)=2\pi\left\{\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^3}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{h}{R_0^2+h^2}\left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2}\right]\right\}, \tag{4.1.30}$$

$$\Lambda^2 K(\rho,\phi,z;\,\rho_0,\phi_0)=2\pi\left\{\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{\bar{q}\,\bar{s}}\left(\frac{2}{\bar{q}}-\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\right.$$

$$-\frac{z(3R_0^2-z^2)}{\bar{q}^2R_0^3}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)+\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2}\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{q}\,\bar{s}^2[l_2^2-\rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)}]}$$

$$\left.-\frac{zh}{R_0^2+h^2}\left[\frac{q}{\bar{q}R_0^2}-\frac{\rho^2 e^{2i\phi}}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-\rho^2)}\right]\right\}. \tag{4.1.31}$$

Этим заканчивается общее решение задачи о круглой трещине под действием произвольного давления. Формулы (4.1.17) и (4.1.24–4.1.31) представляют собой главные результаты этой секции.

Упражнение 4.1

1. Докажите тождество (4.1.10).

2. Подтвердите справедливость (4.1.19).

3. Проверьте вывод (4.1.27)–(4.1.31).

4. Найдите функции Грина для полу–бесконечной плоской трещины в трансверсально изотропном пространстве под действием нормальной нагрузки.

Совет: рассмотрите предельный случай (4.1.24–4.1.31), когда радиус $a \to \infty$, и начало координат двигается из центра круга к его границе.

4.2 Круглая трещина под действием сосредоточенной силы

Рассмотрим круглую трещину, открываемую двумя равными сосредоточенными силами P приложенными в противоположных направлениях в точках $(\rho_0,\phi_0,0^{\pm})$, $\rho_0 < a$. Формулы (2.1.6), (2.1.12), (4.1.8), (4.1.17), и (4.1.24–4.1.31) дают полное решение для поля перемещений и напряжений в элементарных функциях, а именно,

$$u = \frac{2}{\pi} HP\left[\frac{\gamma_1}{m_1 - 1} f_1(z_1) + \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} f_1(z_2)\right], \tag{4.2.1}$$

$$w = \frac{2}{\pi} HP\left[\frac{m_1}{m_1 - 1} f_2(z_1) + \frac{m_2}{m_2 - 1} f_2(z_2)\right], \tag{4.2.2}$$

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)}\left\{\left[\frac{\gamma_1}{(m_1 + 1)\gamma_3^2} - \frac{1}{\gamma_1}\right] f_3(z_1)\right.$$

$$\left. - \left[\frac{\gamma_2}{(m_2 + 1)\gamma_3^2} - \frac{1}{\gamma_2}\right] f_3(z_2)\right\}, \tag{4.2.3}$$

$$\sigma_2 = \frac{4}{\pi} H A_{66} P \left[\frac{\gamma_1}{m_1 - 1} f_4(z_1) + \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} f_4(z_2) \right], \tag{4.2.4}$$

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_1 f_3(z_1) - \gamma_2 f_3(z_2) \right], \tag{4.2.5}$$

$$\tau_z = \frac{P}{\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[f_5(z_1) - f_5(z_2) \right], \tag{4.2.6}$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{\bar{\bar{q}}} \left[\frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1} \frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z}{R_0} \tan^{-1} \frac{h}{R_0} \right], \tag{4.2.7}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \operatorname{sign}(z) \tag{4.2.8}$$

$$f_3(z) = \left\{ -\frac{z}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{h}{z(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2} \right] \right\}, \tag{4.2.9}$$

$$f_4(z) = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{q}\,\bar{s}} \left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2}{\bar{\bar{q}}} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right)$$

$$+ \frac{z(3R_0^2 - z^2)}{\bar{q}^2 R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) - \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{q}\,\bar{s}^2 [l_2^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi - \phi_0)}]}$$

$$+ \frac{zh}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{q}{\bar{\bar{q}} R_0^2} - \frac{\rho^2 e^{2i\phi}}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho^2)} \right], \tag{4.2.10}$$

$$f_5(z) = -\left\{ \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2} \right] \right\}. \tag{4.2.11}$$

Мы напоминаем, что $R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Выражение для σ_z (4.2.5) упрощается, когда $z = 0$ и $\rho > a$, а именно,

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{(\rho^2-a^2)^{1/2}[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]}. \tag{4.2.12}$$

Определяя коэффициент концентрации напряжений

$$k_1 = \lim_{\rho\to a}\{(\rho-a)^{1/2}\sigma_z\},$$

следующий результат может быть получен из (4.2.12):

$$k_1 = \frac{P}{\pi^2(2a)^{1/2}}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}. \tag{4.2.13}$$

Мы можем написать для произвольно распределённого давления:

$$k_1 = \frac{1}{\pi^2(2a)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}p(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)},$$

который соответствует хорошо известному результату (Черепанов, 1974).

Упражнение 4.2

1. Выведите решение (4.2.1)–(4.2.6) для случая изотропного тела.
2. Проверьте вывод формул (4.2.7)–(4.2.11).

4.3 Сосредоточенная нагрузка вне круглой трещины

Рассмотрим трансверсально изотропное пространство, ослабленное круглой трещиной радиуса a в плоскости $z=0$. Пусть сосредоточенная сила P приложена в произвольной точке (ρ,ϕ,z) в направлении оси Oz. Стороны трещины свободны от напряжений. Нам требуется найти открывающие перемещения трещины и коэффициент концентрации напряжений первого мода k_1.

Рассмотрим вторую систему в равновесии: две единичные сосредоточенные силы Q приложенные нормально к сторонам трещины в противоположных направлениях в точках $(\rho_0,\phi_0,0^{\pm})$. Обозначим нормальное перемещение в пространстве, вызываемое силами Q как w_Q; в то время, как

w_P есть открывающее перемешение трещины, вызываемые силами P. Приложение теоремы взаимности к этим двум системам даёт:

$$Qw_P = Pw_Q,$$

который даёт открывающие перемещение трещины в виде:

$$w_P(\rho_0,\phi_0) = \frac{2}{\pi} HP\left[\frac{m_1}{m_1-1} f_2(z_1) + \frac{m_2}{m_2-1} f_2(z_2)\right], \tag{4.3.1}$$

с f_2 определенным в (4.2.8). Коэффициент концентрации напряжений может быть определен как

$$k_1(\phi_0) = \frac{1}{8\pi H} \lim_{\rho_0 \to a} \frac{w_P(\rho_0,\phi_0)}{(a-\rho_0)^{1/2}}$$

$$= \frac{P}{2(2a)^{1/2}\pi^2}\left[\frac{m_1}{m_1-1} f_6(z_1) + \frac{m_2}{m_2-1} f_6(z_2)\right],$$

где

$$f_6(z) = (a^2 - l_1^2)^{1/2}/r_a^2, \quad r_a^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos(\phi-\phi_0) + z^2. \tag{4.3.2}$$

Коэффициент концентрации напряжений исчезает с z стремящимся к нулю для $\rho \geq a$.

В случае изотропного тела, выражение (4.3.1) превращается в

$$w_P(\rho_0,\phi_0) = \frac{P}{\pi^2\mu}\left\{\frac{1-\nu}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left[\frac{h}{R_0^2+h^2}\left(\frac{\rho^2-l_1^2}{l_2^2-l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2}\right) - \frac{z^2}{R_0^3}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right]\right\}. \tag{4.3.3}$$

Здесь μ есть модуль сдвига, и ν есть коэффициент Пуассона. Соответствующее выражение для коэффициента концентрации напряжений примет вид:

$$k_1(\phi_0) = \frac{P(a^2-l_1^2)^{1/2}}{(8a)^{1/2}\pi^2 r_a^2}\left[1 + \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{z^2}{r_a^2} - \frac{\rho^2 - l_1^2}{2(l_2^2 - l_1^2)}\right)\right].$$

(4.3.4)

В случае осевой симметрии $\rho = 0$, и формулы (4.3.3–4.3.4) упрощаются следующим образом:

$$w_P(\rho_0,\phi_0) = \frac{P}{\pi^2\mu}\left\{\left[\frac{1-\nu}{(\rho_0^2+z^2)^{1/2}} + \frac{z^2}{(\rho_0^2+z^2)^{3/2}}\right]\tan^{-1}\left(\frac{a^2-\rho_0^2}{\rho_0^2+z^2}\right)^{1/2}\right.$$

$$\left. + \frac{z^2(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{2(\rho_0^2+z^2)(a^2+z^2)}\right\},$$

$$k_1 = \frac{Pa^{1/2}}{2\pi^2\sqrt{2}(a^2+z^2)}\left[1 + \frac{1}{1-\nu}\frac{z^2}{a^2+z^2}\right],$$

что согласуется с результатами Collins (1962), который рассмотрел только осесимметричный случай.

Упражнение 4.3

1. Проверьте (4.3.2)

2. Выведите полное решение для случая произвольной сосредоточенной силы, приложенной вне круглой трещины в трансверсально изотропном пространстве.

4.4 Плоская трещина под действием произвольной сдвигающей нагрузки

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное плоской трещиной S в плоскости $z = 0$, с произвольной сдвигающей нагрузкой приложенной к обеим сторонам трещины антисимметрично. Задача может быть сформулирована следующим образом: найти решение системы дифференциальных уравнений (2.1.3) для полупространства $z \geq 0$, удовлетворяющее смешанным граничным условиям на плоскости $z = 0$:

$$\tau_z = -\tau(x,y), \quad \text{для} \quad (x,y) \in S; \qquad u = 0, \quad \text{для} \quad (x,y) \notin S;$$

$$\sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty < (x,y) < \infty. \qquad (4.4.1)$$

Решение этой задачи невозможно представить в форме (4.1.2). Более сложное представление необходимо, а именно,

$$F_1 = c_1(\Lambda\overline{\chi}_1 + \overline{\Lambda}\chi_1)\,, \quad F_2 = c_2(\Lambda\overline{\chi}_2 + \overline{\Lambda}\chi_2)\,, \quad F_3 = c_3(\Lambda\overline{\chi}_3 - \overline{\Lambda}\chi_3). \tag{4.4.2}$$

Здесь c_1, c_2 и c_3 пока неизвестные постоянные; χ_1, χ_2, и χ_3 пока неизвестные комплексные гармонические функции. Черта сверху обозначает комплексно сопряжённое значение везде в данной книге. Вводя обозначение $z_k = z/\gamma_k$, для $k = 1, 2, 3$, мы положим также, что

$$\chi_1(z) = \chi(z_1), \quad \chi_2(z) = \chi(z_2), \quad \chi_3(z) = \chi(z_3). \tag{4.4.3}$$

Эти предположения позволяют нам свести задачу к отысканию только *одной* гармонической функции, что намного легче, чем поиск трёх функций. Подставляя (4.4.3) в третье уравнение (2.1.12), мы получаем первое уравнение для отыскания постоянных, а именно,

$$c_1 + m_2 c_2 = 0. \tag{4.4.4}$$

Третье условие в (4.4.1) таким образом удовлетворено. Подстановка (4.4.2) в (2.1.6) даёт:

$$u = c_1(\Lambda^2\overline{\chi}_1 + \Delta\chi_1) + c_2(\Lambda^2\overline{\chi}_2 + \Delta\chi_2) + \mathrm{i}c_3(\Lambda^2\overline{\chi}_3 - \Delta\chi_3), \tag{4.4.5}$$

где дифференциальные операторы Λ и Δ определены в (2.1.5). Когда $z = 0$, уравнение (4.4.5) превращается в

$$u = (c_1 + c_2 + \mathrm{i}c_3)\Lambda^2\overline{\chi} + (c_1 + c_2 - \mathrm{i}c_3)\Delta\chi. \tag{4.4.6}$$

Представляется удобным положить

$$c_1 + c_2 + \mathrm{i}c_3 = 0. \tag{4.4.7}$$

Это предположение упрощает (4.4.6) следующим образом:

$$u = (c_1 + c_2 - \mathrm{i}c_3)\Delta\chi, \tag{4.4.8}$$

и делает возможным представление

$$\chi(M) = \int\!\!\int_S \ln[R(M,N) + z]\, u(N)\, \mathrm{d}S_N\,. \tag{4.4.9}$$

Представление (4.4.9) удовлетворяет второму условию (4.4.1) тождественно, и внутри трещины следующее уравнение становится справедливым:

$$c_1 + c_2 - \mathrm{i}c_3 = 1/2\pi. \tag{4.4.10}$$

Решение системы уравнений (4.4.4), (4.4.7), и (4.4.10) даёт:

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi(m_1 - 1)}, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi(m_2 - 1)}, \quad c_3 = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}. \tag{4.4.11}$$

Подстановка (4.4.2) и (4.4.11) в последнее выражение (2.1.12) даёт следующее выражение для тангенциального напряжения:

$$\tau_z = -\frac{A_{44}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{m_1+1}{m_1-1}(\Lambda^2\overline{\chi}_1 + \Delta\chi_1)\right.$$

$$\left. + \frac{m_2+1}{m_2-1}(\Lambda^2\overline{\chi}_2 + \Delta\chi_2) + (\Lambda^2\overline{\chi}_3 - \Delta\chi_3)\right]. \tag{4.4.12}$$

Выражение (4.4.12) упрощается для $z = 0$:

$$\tau_z = -\frac{A_{44}}{4\pi}\left[\left(\frac{m_1+1}{(m_1-1)\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3}\right)\Lambda^2\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial z} + \left(\frac{m_2+1}{(m_2-1)\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_3}\right)\Delta\frac{\partial\chi}{\partial z}\right]. \tag{4.4.13}$$

Наконец, удовлетворение первому условию (4.4.1) даёт основное интегро—дифференциальное уравнение:

$$\tau(N_0) = -\frac{1}{2\pi^2(G_1^2 - G_2^2)}\left[G_1\Delta\int\!\!\int_S \frac{u(N)}{R(N,N_0)}\,\mathrm{d}S_N + G_2\Lambda^2\int\!\!\int_S \frac{\overline{u}(N)}{R(N,N_0)}\,\mathrm{d}S_N\right], \tag{4.4.14}$$

где упругие константы G_1 и G_2 определены в (2.1.9).

Функции Грина в случае сдвигающей нагрузки. Интегро—дифференциальное уравнение (4.4.14) было решено точно для круглой трещины в секции 2.7. Замкнутое решение имеет вид: (смотри 2.7.53)

$$u(\rho,\phi) = \frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\frac{\eta}{R} - \frac{G_2^2}{G_1^2}\frac{(3-\overline{t})\,\eta}{a^2(1-\overline{t})^2}\right]\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 \mathrm{d}\rho_0 \mathrm{d}\phi_0$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{q}{R\bar{q}}\tan^{-1}\frac{\eta}{R}+\frac{\eta\,[(q/\bar{q})-t\mathrm{e}^{2i\phi_0}]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})}\right]\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0\,,$$

(4.4.15)

где R и η определены в (4.1.14), q определено в (4.1.28), черта сверху обозначает комплексно сопряжённое значение, и

$$t=\frac{\rho\rho_0}{a^2}\,\mathrm{e}^{i(\phi-\phi_0)}. \tag{4.4.16}$$

Потенциальная функция может быть найдена подстановкой (4.4.15) и (4.4.9) в (4.4.2) и вычислением получившихся интегралов. Это выглядит, с первого взгляда, довольно трудно, тем не менее, далее будет показано, что все функции Грина могут быть выражены в элементарных функциях. Заметим следующее свойство:

$$\Lambda\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\!\left(\frac{\eta}{R}\right)-\frac{(3-t)\,\eta}{a^2(1-t)^2}\right]$$

$$=-\bar{\Lambda}\left[\frac{q}{R\bar{q}}\tan^{-1}\frac{\eta}{R}+\frac{\eta\,[(q/\bar{q})-t\mathrm{e}^{2i\phi_0}]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})}\right]. \tag{4.4.17}$$

Введём следующее обозначение:

$$E_1(N,N_0)=\frac{1}{R(N,N_0)}\tan^{-1}\!\left(\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right),$$

$$E_2(N,N_0)=\frac{(3a^2-r\rho_0\mathrm{e}^{i(\psi-\phi_0)})\,(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a(a^2-r\rho_0\mathrm{e}^{i(\psi-\phi_0)})^2},$$

$$E_3(N,N_0)=\frac{r\mathrm{e}^{i\psi}-\rho_0\mathrm{e}^{i\phi_0}}{R(N,N_0)(r\mathrm{e}^{-i\psi}-\rho_0\mathrm{e}^{-i\phi_0})}\tan^{-1}\!\left(\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right)$$

$$+\frac{a(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})(a^2-r\rho_0 e^{-i(\psi-\phi_0)})}\left[\frac{re^{i\psi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{re^{-i\psi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}-\frac{r\rho_0}{a^2}e^{i(\psi+\phi_0)}\right].$$

(4.4.18)

Здесь точки N и N_0 характеризуются цилиндрическими координатами $(r,\psi,0)$ и $(\rho_0,\phi_0,0)$ соответственно. Заметим, следующее взаимоотношения симметрии:

$$E_1(N,N_0)=E_1(N_0,N),\quad E_2(N,N_0)=\overline{E}_2(N_0,N),$$

$$E_3(N,N_0)=E_3(N_0,N). \qquad (4.4.19)$$

Пусть $R(M,N)$ обозначает расстояние между точками $M(\rho,\phi,z)$ и $N(r,\psi,0)$. Используя (4.4.17) мы можем написать

$$\int\int_S \Lambda[E_1(N,N_0)-E_2(N,N_0)]\frac{\mathrm{d}S_N}{R(M,N)}=-\int\int_S \overline{\Lambda}E_3(N,N_0)\frac{\mathrm{d}S_N}{R(M,N)}.$$

(4.4.20)

Интегрирование по частям в (4.4.20) ведёт к важному свойству:

$$\int\int_S [E_1(N,N_0)-E_2(N,N_0)]\Lambda\left(\frac{1}{R(M,N)}\right)\mathrm{d}S_N=-\int\int_S E_3(N,N_0)\overline{\Lambda}\left(\frac{1}{R(M,N)}\right)\mathrm{d}S_N.$$

(4.4.21)

Ещё два свойства могут быть получены путём приложения Λ и $\overline{\Lambda}$ к обоим сторонам формулы (4.4.21), а именно,

$$\int\int_S [E_1(N,N_0)-E_2(N,N_0)]\Lambda^2\left(\frac{1}{R(M,N)}\right)\mathrm{d}S_N=-\int\int_S E_3(N,N_0)\Delta\left(\frac{1}{R(M,N)}\right)\mathrm{d}S_N,$$

(4.4.22)

$$\int\int_S [E_1(N,N_0)-E_2(N,N_0)]\Delta\left(\frac{1}{R(M,N)}\right)\mathrm{d}S_N=-\int\int_S E_3(N,N_0)\overline{\Lambda}^2\left(\frac{1}{R(M,N)}\right)\mathrm{d}S_N.$$

(4.4.23)

Свойства (4.4.21–4.4.23) позволят нам заменить вычисление различных интегралов от E_3, которые выглядят очень трудными, вычислением интегралов от выражений, содержащих E_1 и E_2, и некоторые из них уже были вычислены (4.1.27–4.1.31), в то время, как оставшиеся могут быть вычислены относительно легко (смотри Аппендикс А4.4).

Введём обозначения:

$$X = \Lambda\bar{\chi} + \bar{\Lambda}\chi, \qquad Y = \Lambda\bar{\chi} - \bar{\Lambda}\chi. \tag{4.4.24}$$

Чтобы получить полное решение, нам будут нужны следующие выражения для различных производных X и Y: тангенциальные перемещения определены через ΛX и ΛY; нормальные перемещения определены через $\partial X/\partial z$; поле напряжений может быть вычислен через $\partial^2 X/\partial z^2$, $\Lambda^2 X$, $\Lambda^2 Y$, $\Lambda(\partial X/\partial z)$, $\Lambda(\partial Y/\partial z)$. Все нужные функции Грина могут быть выражены как различные производные двух основных функций, а именно,

$$K_1(M,N_0) = \int\int_S E_1(N,N_0)\ln[R(M,N)+z]\,\mathrm{d}S_N,$$

$$K_2(M,N_0) = \int\int_S E_2(N,N_0)\ln[R(M,N)+z]\,\mathrm{d}S_N. \tag{4.4.25}$$

Мы переписываем формулу (4.4.15) как

$$u(N) = \frac{G_1}{\pi}\int\int_S [E_1(N,N_0) - \frac{G_2^2}{G_1^2}\bar{E}_2(N,N_0)]\,\tau(N_0)\,\mathrm{d}S_{N_0}$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int\int_S E_3(N,N_0)\,\bar{\tau}(N_0)\,\mathrm{d}S_{N_0}. \tag{4.4.26}$$

Подставляя (4.4.9) и (4.4.26) в (4.4.24) и используя свойства (4.4.21–4.4.23), мы получим следующие результаты:

$$X = \frac{G_1 - G_2}{\pi}\left[\bar{\Lambda}\int\int_S\left(K_1 + \frac{G_2}{G_1}\bar{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S + \Lambda\int\int_S\left(K_1 + \frac{G_2}{G_1}K_2\right)\bar{\tau}\;\mathrm{d}S\right],$$

$$Y = \frac{G_1 + G_2}{\pi}\left[-\bar{\Lambda}\int\int_S\left(K_1 - \frac{G_2}{G_1}\bar{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S + \Lambda\int\int_S\left(K_1 - \frac{G_2}{G_1}K_2\right)\bar{\tau}\;\mathrm{d}S\right].$$

Нам только будут нужны следующие производные X и Y для полного решения:

$$\Lambda X=\frac{G_1-G_2}{\pi}\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda^2\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.27}$$

$$\Lambda Y=\frac{G_1+G_2}{\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda^2\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.28}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{G_1-G_2}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\Lambda}\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.29}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{G_1+G_2}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\overline{\Lambda}\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda X=\frac{G_1-G_2}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda^2\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda Y=\frac{G_1+G_2}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda^2\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.32}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}=\frac{G_1-G_2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\overline{\Lambda}\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.33}$$

$$\Lambda^2 X=\frac{G_1-G_2}{\pi}\Lambda\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda^2\iint\limits_S\left(K_1+\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.34}$$

$$\Lambda^2 Y=\frac{G_1+G_2}{\pi}\Lambda\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}\overline{K}_2\right)\tau\,\mathrm{d}S+\Lambda^2\iint\limits_S\left(K_1-\frac{G_2}{G_1}K_2\right)\overline{\tau}\,\mathrm{d}S\right],\tag{4.4.35}$$

Все интегралы в (4.4.27–4.4.35) вычислены в элементарных функциях в Аппендиксе А4.4 и в (4.1.27–4.1.31).

Полученные выше результаты могут быть приложены к решению задачи о круглой трещине под действием тангенциальной сосредоточенной нагрузки. Решение даст нам все функции Грина, относящиеся к случаю. Рассмотрим бесконечное трансверсально изотропное пространство ослабленное круглой трещиной радиуса a в плоскости $z=0$. Пусть две равные сосредоточенные силы $T=T_x+iT_y$ приложены к сторонам трещины антисимметрично в точках $N_0(\rho_0,\phi_0,0^{\pm})$. Ранее полученные результаты дают полное решение в элементарных функциях:

$$u=\frac{\gamma_1\gamma_2 H}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{m_k-1}\left\{-\left[f_2(z_k)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_7(z_k)\right]T+\left[f_{16}(z_k)+\frac{G_2}{G_1}f_8(z_k)\right]\bar{T}\right\}$$

$$+\frac{\beta}{\pi}\left\{\left[f_2(z_3)-\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_7(z_3)\right]T+\left[f_{16}(z_3)-\frac{G_2}{G_1}f_8(z_3)\right]\bar{T}\right\}, \tag{4.4.36}$$

$$w=\frac{2}{\pi}H\gamma_1\gamma_2\,\Re\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{(m_k-1)\gamma_k}\left[\bar{f}_1(z_k)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_9(z_k)\right]T, \tag{4.4.37}$$

$$\sigma_1=\Re\left\{\frac{2\gamma_1\gamma_2}{\pi^2(\gamma_1-\gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{\gamma_3^2(m_k+1)}-\frac{1}{\gamma_k^2}\right]\left[\bar{f}_5(z_k)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{10}(z_k)\right]T\right\}, \tag{4.4.38}$$

$$\sigma_2=-\frac{2}{\pi}A_{66}H\gamma_1\gamma_2\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{m_k-1}\left\{\left[f_5(z_k)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{13}(z_k)\right]T\right.$$

$$\left.+\left[f_{11}(z_k)+\frac{G_2}{G_1}f_{12}(z_k)\right]\bar{T}\right\}-\frac{1}{\pi^2\gamma_3}\left\{\left[-f_5(z_3)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{13}(z_3)\right]T\right.$$

$$\left.+\left[f_{11}(z_3)-\frac{G_2}{G_1}f_{12}(z_3)\right]\bar{T}\right\}, \tag{4.4.39}$$

$$\sigma_z=\Re\left\{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\pi^2(\gamma_1-\gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left[\bar{f}_5(z_k)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{10}(z_k)\right]T\right\}, \tag{4.4.40}$$

$$\tau_z = \frac{\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(\gamma_1-\gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^k}{\gamma_k}\left\{\left[f_3(z_k)+\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{14}(z_k)\right]T+\left[-f_4(z_k)+\frac{G_2}{G_1}f_{15}(z_k)\right]\bar{T}\right\}$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\left\{\left[f_3(z_3)-\frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{14}(z_3)\right]T+\left[f_4(z_3)+\frac{G_2}{G_1}f_{15}(z_3)\right]\bar{T}\right\}. \qquad (4.4.41)$$

Здесь $\Re$ обозначает действительную часть комплексного числа, упругие постоянные определены в (2.1.9), и функции f с индексом меньше, чем 6, даны формулами (4.2.7–4.2.11), и остальные функции вычислены в Аппендиксе А4.4, а именно,

$$f_7(z) = \frac{ha^2}{s^2}\left[\frac{3}{s^2}-\frac{t}{l_2^2-a^2t}-\frac{3(l_2^2-a^2)^{1/2}}{s^3}\tan^{-1}\left(\frac{s}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\right], \qquad (4.4.42)$$

$$f_8(z) = \frac{1}{\bar{q}}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\left\{\frac{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{e^{i\phi}}{\rho}\left[\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\left(1+\frac{\rho^2}{l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}}\right)-1\right]\right\}, \qquad (4.4.43)$$

$$f_9(z) = -\rho e^{i\phi}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a^3}\left\{\frac{1}{t}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)+\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(1-t)(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t(1-t)^{3/2}}\tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\right\}, \qquad (4.4.44)$$

$$f_{10}(z) = -\frac{h\rho e^{i\phi}(3l_2^2-a^2t)}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-a^2t)^2}, \qquad (4.4.45)$$

$$f_{11}(z) = \frac{1}{\bar{q}}\left\{\frac{3R_0^4+6R_0^2z^2-z^4}{R_0^3\bar{q}^2}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)-(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\left[\frac{z}{\bar{s}}\left(\frac{8}{\bar{q}^2}-\frac{4\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2\bar{q}}\right.\right.\right.$$

$$
+\frac{3\rho_0^2 e^{2i\phi_0}}{\bar{s}^4}\Bigg)\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)-\frac{e^{i\phi}}{\rho}\left(\frac{2e^{i\phi}}{\rho}+\frac{3}{\bar{\bar{q}}}\right)
$$

$$
-\frac{3(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}^2}\left(\tan^{-1}\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}-\tan^{-1}\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\Bigg]
$$

$$
+\frac{ha^2e^{i\phi}}{\rho\bar{s}^2}\left[\frac{2\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2}-\frac{2e^{i\phi}}{\rho}-\frac{2}{\bar{\bar{q}}}+\left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2}-\frac{2}{\bar{\bar{q}}}\right)\frac{(l_2^2-a^2)\bar{t}}{l_2^2-a^2\bar{t}}\right]
$$

$$
-\frac{h}{R_0^2+h^2}\left[\frac{\bar{q}\rho e^{3i\phi}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{e^{i\phi}(l_2^2-\rho^2)}{\rho\bar{q}}-\frac{z^2q}{R_0^2\bar{\bar{q}}}+2e^{2i\phi}\right]\Bigg\}, \tag{4.4.46}
$$

$$
f_{12}(z)=\frac{1}{\bar{\bar{q}}}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Bigg\{\frac{3(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}^2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\right]
$$

$$
-\frac{e^{2i\phi}(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(l_2^2-l_1^2)}\left[\frac{l_2^2+\rho^2}{l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}}+\frac{2\rho^2(l_2^2-a^2)}{(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}+1\right]
$$

$$
+\frac{e^{i\phi}}{\rho}\left[\frac{3}{\bar{\bar{q}}}+\frac{2e^{i\phi}}{\rho}-\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\left(\frac{l_2^2+2\rho^2}{\bar{q}(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}+2\Big(\frac{1}{\bar{\bar{q}}}+\frac{e^{i\phi}}{\rho}\Big)\right)\right]\Bigg\}, \tag{4.4.47}
$$

$$
\bar{f}_{13}(z)=-h\Bigg\{\frac{a^2}{\bar{s}^2}\rho_0 e^{i\phi_0}\left[\frac{15(l_2^2-a^2)^{1/2}}{\bar{s}^5}\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)-\frac{15}{\bar{s}^4}\right.
$$

$$
\left.+\frac{5}{\bar{s}^2(l_2^2-a^2\bar{t})}+\frac{2\bar{t}}{(l_2^2-a^2\bar{t})^2}\right]+\frac{\rho e^{i\phi}(3l_2^2-a^2\bar{t})}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-a^2\bar{t})^2}\Bigg\}, \tag{4.4.48}
$$

$$
f_{14}(z)=\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a^3(1-t)}\Bigg\{\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}\Bigg[\frac{3(l_2^2-l_1^2t)}{1-t}
$$

$$+\frac{\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}(2l_2^2+l_1^2 t-3\rho^2)}{l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}}\Bigg]-\frac{3}{(1-t)^{3/2}}\tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\Bigg\},$$

$$(4.4.49)$$

$$f_{15}(z)=\frac{\rho^2 e^{2i\phi}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2}(3l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2},\tag{4.4.50}$$

$$f_{16}(z)=\frac{1}{\bar{\bar{q}}}\Bigg\{\frac{R_0^2+z^2}{R_0\bar{q}}\tan^{-1}\Big(\frac{h}{R_0}\Big)+(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Bigg[\frac{z}{\bar{\bar{s}}}\left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2}-\frac{2}{\bar{\bar{q}}}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)$$

$$+\frac{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}-\tan^{-1}\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)+\frac{e^{i\phi}}{\rho}\Bigg]-\frac{e^{i\phi}ha^2}{\rho\bar{s}^2}\Bigg\}.$$

$$(4.4.51)$$

Решение (4.4.36–4.4.51) представляет, фактически, явные выражения для функций Грина, и позволяет нам записать полное решение для случая произвольной тангенциальной нагрузки в квадратурах. Общие результаты упрощаются значительно для $z=0$, а именно,

$$u=\frac{G_1}{\pi}\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\frac{\eta}{R}-\frac{G_2^2}{G_1^2}\frac{(3-\bar{t})\,\eta}{a^2(1-\bar{t})^2}\right]T$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\left[\frac{q}{R\bar{q}}\tan^{-1}\frac{\eta}{R}+\frac{\eta\,[(q/\bar{q})-t e^{2i\phi_0}]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})}\right]\bar{T},\qquad \text{для}\qquad \rho<a,\tag{4.4.52}$$

$$w=H\alpha(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Re\left\{\left[\frac{1}{qs}+\frac{G_2}{G_1}\frac{e^{-i\phi_0}}{\rho_0}\left(\frac{a^2}{\bar{s}^3}-\frac{1}{a}\right)\right]T\right\}\qquad \text{для}\qquad \rho\le a,$$

$$w=\frac{2}{\pi}H\alpha(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Re\Bigg\{\Bigg[\frac{1}{qs}\tan^{-1}\frac{s}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}+\frac{G_2}{G_1}\Bigg(\frac{a^2 e^{-i\phi_0}}{\rho_0\bar{s}^3}\tan^{-1}\frac{\bar{s}}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}$$

$$-\frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}}{\bar{s}^2 q}-\frac{e^{-i\phi_0}}{a\rho_0}\sin^{-1}\Big(\frac{a}{\rho}\Big)\Bigg)\Bigg]T\Bigg\},\qquad \text{для}\qquad \rho>a\tag{4.4.53}$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\pi^2}\Re\left\{\left(2\pi H A_{66}\gamma_1\gamma_2 - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}\right)\left[\frac{1}{qR}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right) + \frac{\eta}{a^2(1-t)(1-\bar{t})}\left(\frac{1}{q}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\rho e^{-i\phi}}{a^2-\rho^2}\right) + \frac{G_2}{G_1}\frac{\eta\rho e^{-i\phi}(3-\bar{t})}{(a^2-\rho^2)a^2(1-\bar{t})^2}\right]T\right\}, \qquad \text{для} \qquad \rho < a,$$

$$\sigma_1 = 0, \qquad \text{для} \qquad \rho > a, \tag{4.4.54}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\pi^2}\left\{\left(2\pi A_{66}H\gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{\gamma_3}\right)\left[f_5(0)T + \frac{G_2}{G_1}f_{12}(0)\overline{T}\right]\right.$$

$$\left. + \left(2\pi A_{66}H\gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{\gamma_3}\right)\left[f_{11}(0)\overline{T} + \frac{G_2}{G_1}\bar{f}_{13}(0)T\right]\right\},$$

$$\sigma_z = 0, \tag{4.4.55}$$

$$\tau_z = \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}\left[\frac{T}{R^2} + \frac{G_2}{G_1}\frac{e^{2i\phi}(3\rho-\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})\overline{T}}{\rho(\rho-\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}\right], \qquad \text{для} \qquad \rho > a. \tag{4.4.56}$$

Здесь R и η определены в (4.1.14). Коэффициент концентрации напряжений второго и третьего мода может быть выражен через разложение $\tau^{(n)} = \tau_{zn} + i\tau_{tz}$, который связан с τ_z соотношением $\tau_z = \tau^{(n)}e^{i\phi}$. Вводя комплексный коэффициент концентрации напряжений

$$k_2 + ik_3 = \lim_{\rho\to a}\{(\rho-a)^{1/2}\tau_z e^{-i\phi}\}, \tag{4.4.57}$$

мы получим из (4.4.56)

$$k_2 + ik_3 = \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2(2a)^{1/2}}\left[\frac{Te^{-i\phi}}{\rho_0^2+a^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}\right.$$

$$+\frac{G_2}{G_1}\frac{e^{i\phi}(3a-\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})\overline{T}}{a(a-\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}\Bigg].$$

(4.4.58)

В общем случае произвольной распределённой нагрузки, коэффициент концентрации напряжений принимает вид:

$$k_2+ik_3=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2(2a)^{1/2}}\Bigg[\frac{e^{-i\phi}\tau(\rho_0,\phi_0)}{\rho_0^2+a^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$+\frac{G_2}{G_1}\frac{(3a-\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})\,e^{i\phi}\,\overline{\tau}(\rho_0,\phi_0)}{a(a-\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}\Bigg]\rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \tag{4.4.59}$$

что согласуется с (2.7.30).

Упражнение 4.4

1. Выведите общее решение в случае изотропии.
2. Найдите изотропный эквивалент формулы (4.4.14).
3. Проверьте свойство (4.4.17).
4. Выведите решение (4.4.36)–(4.4.51).
5. Выведите решение (4.4.36)–(4.4.51) для случая изотропии.

4.5 Круглая трещина под действием однородного давления

Пусть круглая трещина радиуса a открывается давлением $p=\text{const}$. В этом случае мы получаем из (4.1.12)

$$\omega(\rho,\phi)=4Hp(a^2-\rho^2)^{1/2}. \tag{4.5.1}$$

Потенциальная функция F может быть получена подстановкой (4.5.1) в (4.1.4). Интеграл может быть вычислен в элементарных функциях (смотри A4.1.4), а именно,

$$F = 2\pi Hp\left[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2)\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{2a^2 - 3l_1^2}{a}(l_2^2 - a^2)^{1/2}\right].$$

(4.5.2)

Полное решение может быть выражено через различные производные потенциальной функции, как предписано формулами (2.1.6) и (2.1.12). Все производные даны в Аппендиксе A4.1. Решение имеет вид:

$$u = 2Hp\rho e^{i\phi}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\gamma_k}{m_k - 1}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2}\right]\right\}, \tag{4.5.3}$$

$$w = 4Hp\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{m_k}{m_k - 1}\left[\mathrm{sign}(z)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} - z_k\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right)\right]\right\}, \tag{4.5.4}$$

$$\sigma_1 = 8HpA_{66}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k - 1)}\left[\frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right)\right]\right\},$$

(4.5.5)

$$\sigma_2 = -8HpA_{66}ae^{2i\phi}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\gamma_k}{m_k - 1}\left[\frac{l_{1k}^2(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}\right]\right\}, \tag{4.5.6}$$

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}\left\{(-1)^{k+1}\gamma_k\left[\frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right)\right]\right\}, \tag{4.5.7}$$

$$\tau_z = \frac{2pa^2\rho e^{i\phi}}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}\left\{(-1)^k\frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}\right\}, \tag{4.5.8}$$

Здесь обозначения были введены:

$$l_{1k} = \frac{1}{2}\{[(a + \rho)^2 + z_k^2]^{1/2} - [(a - \rho)^2 + z_k^2]^{1/2}\},$$

$$l_{2k} = \frac{1}{2}\{[(a + \rho)^2 + z_k^2]^{1/2} + [(a - \rho)^2 + z_k^2]^{1/2}\},$$

$$z_k = z/\gamma_k, \qquad \text{для} \qquad k = 1,2. \tag{4.5.9}$$

Задача была впервые решена Эллиоттом (1949) методом интегральных преобразований. Наши результаты в основном согласуются с результатами Эллиотта, который выразил их в форме интегралов, содержащих функции Бесселя, а именно,

$$C_n^m = \int_0^\infty x^{n-2}\cos(x)\, J_m(x\frac{\rho}{a})\exp(-x\frac{z}{a})\,dx,$$

$$S_n^m = \int_0^\infty x^{n-2}\sin(x)\, J_m(x\frac{\rho}{a})\exp(-x\frac{z}{a})\,dx.$$

Эти интегралы могут быть вычислены в элементарных функциях, и результаты в наших обозначениях запишутся

$$S_1^0 = \sin^{-1}(\frac{a}{l_2}), \qquad S_2^0 = \frac{a(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}, \qquad C_2^0 = \frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2},$$

$$C_3^0 = \frac{a(a^2-l_1^2)^{1/2}[l_2^4+a^2(\rho^2-2a^2-2z^2)]}{(l_2^2-l_1^2)^3},$$

$$S_3^0 = \frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}[a^2(2a^2+2z^2-\rho^2)-l_1^4]}{(l_2^2-l_1^2)^3},$$

$$C_1^1 = \frac{z[a-(a^2-l_1^2)^{1/2}]}{\rho(a^2-l_1^2)^{1/2}}, \qquad S_1^1 = \frac{a-(a^2-l_1^2)^{1/2}}{\rho},$$

$$S_1^2 = \frac{z[a-(a^2-l_1^2)^{1/2}]^2}{\rho^2(a^2-l_1^2)^{1/2}}, \qquad S_2^1 = \frac{a\,l_1(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)},$$

$$C_2^1 = \frac{a-(a^2-l_1^2)^{1/2}}{\rho} - \frac{a\,l_1(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)},$$

$$C_3^1 = \frac{a^2\rho(l_2^2-a^2)^{1/2}(l_2^2+3l_1^2-4a^2)}{(l_2^2-l_1^2)^3},$$

$$S_3^1 = \frac{a^2\rho(a^2 - l_1^2)^{1/2}(3l_2^2 + l_1^2 - 4a^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^3},$$

$$C_2^2 = \frac{2a[(l_2^2 - a^2)^{1/2} - z]}{\rho^2} - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2},$$

$$S_2^2 = \frac{2a[a - (a^2 - l_1^2)^{1/2})]}{\rho^2} - \frac{a(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2},$$

$$C_3^2 = \frac{2a}{\rho}\left[\frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho} - \frac{a l_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}\right]$$

$$-\frac{a(a^2 - l_1^2)^{1/2}[l_2^4 + a^2(\rho^2 - 2a^2 - 2z^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3}.$$

Имеются некоторые опечатки (или ошибки) в статье Эллиотта. Например, согласно его формуле (4·2·5), тангенциальное перемещение u исчезает на плоскости $z = 0$, что не может быть правильно; имеются некоторые пропущенные члены и очевидные опечатки в формуле (4·2·6).

В предельном случае $\gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to 1$, $m_1 \to m_2 \to 1$, $H = (1 - \nu)/2\pi\mu$, $A_{44} = A_{66} = \mu$, и формулы (4.5.3–4.5.8) дают полное решение для изотропного тела. Используя правило Лопиталя, мы получим

$$u = \frac{p\rho e^{i\phi}}{2\pi\mu}\left\{(1-2\nu)\left[\frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)\right] + \frac{2a^2|z|(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)}\right\}, \tag{4.5.10}$$

$$w = \frac{p}{\pi\mu}\left\{2(1-\nu)\left[\frac{z}{|z|}(a^2 - l_1^2)^{1/2} - z\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + z\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}\right]\right\}, \tag{4.5.11}$$

$$\sigma_1 = \frac{2p}{\pi}\left\{(1+2\nu)\left[\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{az^2[l_1^4 + a^2(2a^2+2z^2-3\rho^2)]}{(l_2^2-l_1^2)^3(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right\}, \tag{4.5.12}$$

$$\sigma_2 = \frac{2p}{\pi}\frac{a l_1^2 e^{2i\phi}(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\left\{1-2\nu + \frac{z^2[a^2(6l_2^2-2l_1^2+\rho^2)-5l_2^4]}{(l_2^2-l_1^2)^2(l_2^2-a^2)}\right\}, \tag{4.5.13}$$

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi}\left\{\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{az^2[l_1^4+a^2(2a^2+2z^2-3\rho^2)]}{(l_2^2-l_1^2)^3(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right\}, \tag{4.5.14}$$

$$\tau_z = -\frac{2p}{\pi}\frac{z l_1 e^{i\phi}(l_2^2-a^2)^{1/2}[a^2(4l_2^2-5\rho^2)+l_1^4]}{l_2(l_2^2-l_1^2)^3}. \tag{4.5.15}$$

Эта задача была впервые решена Снеддоном (1951), используя метод интегральных преобразований. Похоже, он не смог вычислить потенциальную функцию (4.5.2), поэтому он прибег к дифференцированию под знаком интеграла, с последующим вычислением различных интегралов, содержащих функции Бесселя. Его окончательные результаты даны в элементарных функциях четырёх параметров:

$$r = (1+(z/a)^2)^{1/2}, \qquad R^2 = [(\rho/a)^2 + (z/a)^2 - 1]^2 + 4(z/a)^2,$$

$$\theta = \tan^{-1}(a/z), \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2az}{\rho^2+z^2-a^2}\right).$$

Этот выбор параметров явно не самый лучший. Вот одна иллюстрация. Выражение для S_1^0 в обозначениях Снеддона принимает вид (Снеддон, 1951, п.497):

$$S_1^0 = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta + \sqrt{R}\sin(\phi/2)}{r\cos\theta + \sqrt{R}\cos(\phi/2)}\right),$$

с ограничением $\rho \neq 0$, и никаких индикаторов, какой будет результат в случае $\rho = 0$. В наших обозначениях аналогичный результат есть $\sin^{-1}(a/l_2)$, и никаких ограничений не требуется. Введение параметров Снеддона r и θ не выглядит необходимым. Существует взаимоотношение между его параметрами R и ϕ, и нашими l_1 и l_2, а именно,

$$R = (l_2^2 - l_1^2)/a^2, \qquad \sin(\phi/2) = (a^2 - l_1^2)^{1/2}/(l_2^2 - l_1^2)^{1/2}.$$

Эти взаимоотношения могут быть использованы, чтобы сравнить решения, которые находятся в хорошем согласии, еесли не считать некоторые опечатки: фактор ζ пропущен в формула Снеддона (139, стр. 496), и последний член в его формуле (145, стр. 499) должен быть $-S_1^0$ вместо $+S_0^0$.

Упражнение 4.5

1. Подтвердите справедливость результатов (4.5.3)–(4.5.8).

2. Выведите (4.5.10)–(4.5.15).

3. Выведите выражения для полярных компонентов напряжений и перемещений эквивалентных (4.5.10)–(4.5.15).

4. Найдите полное решение в случае, где круглая трещина нагружена нормальным напряжением, пропорциональным x–координате.

4.6 Круглая трещина под действием однородной сдвигающей нагрузки

Рассмотрим круглую трещину радиуса a в трансверсально изотропном упругом пространстве, под действием однородной сдвигающей нагрузки τ, где τ – комплексная константа. Решение интегро–дифференциального уравнения (4.4.14) в этом случае есть:

$$u = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)}{G_1}\tau(a^2 - \rho^2)^{1/2}, \quad \text{для } z = 0 \text{ и } \rho \le a. \tag{4.6.1}$$

Подстановка (4.6.1) в (4.4.9) ведёт к интегралу

$$\frac{2(G_1^2 - G_2^2)}{G_1}\tau \int_0^{2\pi}\int_0^a (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \ln(R_0 + z)\, \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 ,$$

который был вычислен в Аппендиксе A4.1, со всеми необходимыми пропизводными. Полное решение примет вид:

$$u = \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1}\left\{\frac{1}{m_1-1}\left[f_{17}(z_1)\bar{\tau} + f_{18}(z_1)\tau\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{m_2-1}\left[f_{17}(z_2)\bar{\tau} + f_{18}(z_2)\tau\right] + f_{17}(z_3)\bar{\tau} - f_{18}(z_3)\tau\right\},$$

$$(4.6.2)$$

$$w = \frac{G_1^2 - G_2^2}{2G_1}(\bar{\tau}\rho e^{i\phi} + \tau\rho e^{-i\phi})\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{m_k-1}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2}\right]\frac{1}{\gamma_k},$$

$$(4.6.3)$$

$$\sigma_1 = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)A_{66}}{G_1}a(\bar{\tau}e^{i\phi} + \tau e^{-i\phi})\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_3^2(m_k+1) - \gamma_k^2}{\gamma_k^2(m_k-1)}\frac{l_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)},$$

$$(4.6.4)$$

$$\sigma_2 = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)A_{66}}{G_1}\left\{\frac{1}{m_1-1}\left[f_{19}(z_1)\bar{\tau} + f_{20}(z_1)\tau\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{m_2-1}\left[f_{19}(z_2)\bar{\tau} + f_{20}(z_2)\tau\right] + f_{19}(z_3)\bar{\tau} - f_{20}(z_3)\tau\right\}, \tag{4.6.5}$$

$$\sigma_z = \frac{2\gamma_1\gamma_2\beta(\tau e^{-i\phi} + \bar{\tau}e^{i\phi})}{\pi G_1(\gamma_1 - \gamma_2)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\frac{a\,l_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}, \tag{4.6.6}$$

$$\tau_z = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\pi G_1}\left\{\frac{\beta}{\gamma_1 - \gamma_2}\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^k}{\gamma_k}[f_{21}(z_k)\tau + f_{22}(z_k)\bar{\tau}] + H[f_{21}(z_3)\tau - f_{22}(z_3)\bar{\tau}]\right\}.$$

$$(4.6.7)$$

Здесь

$$f_{17}(z) = e^{2i\phi}\frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2}, \tag{4.6.8}$$

$$f_{18}(z) = z\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - (a^2 - l_1^2)^{1/2}, \tag{4.6.9}$$

$$f_{19}(z) = \mathrm{e}^{3i\phi}\frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)} - 4\mathrm{e}^{i\phi}f_{17}(z), \tag{4.6.10}$$

$$f_{20}(z) = \mathrm{e}^{i\phi}\frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}, \tag{4.6.11}$$

$$f_{21}(z) = -\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}, \tag{4.6.12}$$

$$f_{22}(z) = \frac{\mathrm{e}^{2i\phi}al_1^2(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)}, \tag{4.6.13}$$

Полное решение этой задачи для случая *изотропии* может быть найдено в (Westmann, 1965).

В случае изотропии, формулы (4.6.2–4.6.7) превращаются в

$$u = \frac{1}{\pi\mu(2-\nu)}\left\{\left[(-5+4\nu)z\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + 4(1-\nu)(a^2 - l_1^2)^{1/2}\right]\tau\right.$$

$$\left. + \frac{za(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}\left(\tau + \bar{\tau}\mathrm{e}^{2i\phi}\frac{l_1^2}{l_2^2}\right)\right\}, \tag{4.6.14}$$

$$w = \frac{(\bar{\tau}\mathrm{e}^{i\phi} + \tau\mathrm{e}^{-i\phi})\rho}{\pi\mu(2-\nu)}\left\{\frac{1-2\nu}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2}\right] + \frac{za^2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)}\right\}, \tag{4.6.15}$$

$$\sigma_1 = \frac{2(\bar{\tau}\mathrm{e}^{i\phi} + \tau\mathrm{e}^{-i\phi})}{\pi(2-\nu)}\left\{-2(1+\nu)\frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{zl_1(l_2^2 - a^2)^{1/2}[a^2(4l_2^2 - 5\rho^2) + l_1^4]}{l_2(l_2^2 - l_1^2)^3}\right\}, \tag{4.6.16}$$

$$\sigma_2 = -\frac{2e^{i\phi}}{\pi(2-\nu)}\left\{4(1-\nu)\frac{a l_1(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)}\tau\right.$$

$$\left.+\frac{z l_1(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)}\left[\frac{4a^2}{l_2^2}\bar{\tau}e^{2i\phi}-\frac{a^2(4l_2^2-5\rho^2)+l_1^4}{(l_2^2-l_1^2)^2}(\tau+\bar{\tau}e^{2i\phi})\right]\right\}, \tag{4.6.17}$$

$$\sigma_z = -\frac{2(\bar{\tau}e^{i\phi}+\tau e^{-i\phi})}{\pi(2-\nu)}\frac{z l_1(l_2^2-a^2)^{1/2}[a^2(4l_2^2-5\rho^2)+l_1^4]}{l_2(l_2^2-l_1^2)^3}, \tag{4.6.18}$$

$$\tau_z = \frac{2}{\pi(2-\nu)}\left\{\left[(2-\nu)\left(\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}-\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{z(a^2-l_1^2)^{1/2}[l_1^4+a^2(2a^2+2z^2-3\rho^2)]}{(l_2^2-l_1^2)^3}\right]\tau+\left[\nu a(l_2^2-a^2)^{1/2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{z(a^2-l_1^2)^{1/2}[a^2(6l_2^2-2l_1^2+\rho^2)-5l_2^4]}{(l_2^2-l_1^2)^2}\right]\frac{l_1^2e^{2i\phi}}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\bar{\tau}\right\}. \tag{4.6.19}$$

Упражнение 4.6

1. Исследуйте круглую трещину радиуса a в трансверсально изотропном упругом теле, под действием сдвигающей нагрузки $\tau = c\rho e^{i\phi}$, где $c = \text{const}$. *Ответ*: основная потенциальная функция будет пропорциональна интегралу

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \ln(R_0+z)(a^2-\rho_0^2)^{1/2} e^{i\phi_0}\rho_0^2\, d\rho_0 d\phi_0$$

$$= \frac{\pi}{8}\rho e^{i\phi}\left\{(a^2-l_1^2)^{1/2}\left[\frac{4}{3}a^2+7\rho^2-\frac{19}{3}l_1^2-4l_2^2\right.\right.$$

$$+\frac{2(8a^4+4a^2l_1^2+3l_1^4)}{15\rho^2}\Bigg]+z(4a^2-3\rho^2+4z^2)\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})-\frac{16a^5}{15\rho^2}\Bigg\}.$$

Это может быть хорошим упражнением для читателя выполнить дифференцирование и записать полное решение. В качестве примера, вот первые две производные:

$$\frac{\partial I}{\partial z}=\frac{\pi}{8}\rho e^{i\phi}\left\{a(l_2^2-a^2)^{1/2}\left[15\frac{l_1^2}{a^2}-12-2\frac{l_1^2}{l_2^2}\right]+\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})\left[4a^2-3\rho^2+12z^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}=\pi\rho e^{i\phi}\left[(a^2-l_1^2)^{1/2}\left(\frac{a^2}{l_2^2}-3\right)+3z\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})\right].$$

Заметьте: $\partial I/\partial z$ пропорциональна основной потенциальной функций для случая линейной *нормальнои* нагрузки круглой трещины.

2. Найдите выражения для плотности энергии используя процедуру, аналогичную той, что быал использована в Kassir and Sih (1968).
Ответ: $\mathcal{G}_1=2\pi^2Hk_1^2,\quad \mathcal{G}_2=\pi^2(G_1-G_2)k_2^2,\quad \mathcal{G}_3=\pi^2(G_1+G_2)k_3^2.$

3. Найдите функции Грина для полу–бесконечной плоской трещины в трансверсально изотропном пространстве, под действием сдвигающей нагрузки.
Совет: рассмотрите предельный случай (4.4.36–4.4.41), когда радиус $a\to\infty$, и начало координат двигается от центра круга к его границе.

4.7 Асимптотическое поведение напряжений и перемещений на краю трещины

Kassir and Sih (1975) вывели выражения для соотношений между коэффициентами концентрации напряжений и полем напряжений и перемещений на краю трещины, используя ихнее очень сложное решение для эллиптической трещины. Их вывод выглядит настолько сложным, что никто пока не смог повторить его и проверить их точность. Существует мнение в механике трещин, что асимптотическое поведение определено полностью тремя коэффициентами концентрации напряжений и является инвариантным для любой трещины с гладкой границей. Если это так, то мы можем получить те же результаты из более простого решения для круглой трещины. Результаты, представленные здесь, проще и получены более простым способом, чем те, что были получены Кассиром и Сих.

Асимптотическое поведение для нагрузки мода I. Хотя формулы (4.5.3–4.5.8) действительны только для круглой трещины под действием *однородного* давления, они могут быть использованы для получения некоторых общих результатов, который действительны для произвольной трещины с гладкой границей под действием *произвольной* нагрузки, другими словами, мы можем исследовать асимптотическое поведение перемещений и напряжений около края произвольной трещины. Введём локальную систему сферических координат (r,θ,ϕ), с началом координат на краю трещины. Следующее асимптотики действительны для основных параметров использованных в (4.5.3–4.5.8):

$$\rho = a + r\cos\theta, \quad l_{1k} \approx a - \frac{1}{2} r S_k^2, \quad l_{2k} \approx a + \frac{1}{2} r T_k^2,$$

$$z = r\sin\theta, \quad l_{2k}^2 - l_{1k}^2 \approx 2arQ_k, \quad (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \approx (ar)^{1/2} S_k,$$

$$(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2} \approx (ar)^{1/2} T_k, \quad \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \approx -\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} T_k. \tag{4.7.1}$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$Q_k = [\cos^2\theta + (1/\gamma_k^2)\sin^2\theta]^{1/2} \qquad S_k = [Q_k - \cos\theta]^{1/2},$$

$$T_k = [Q_k + \cos\theta]^{1/2}, \qquad \text{для} \quad k = 1,2,3. \tag{4.7.2}$$

Вводя коэффициент концентрации напряжений мода I,

$$k_1 = \frac{p\sqrt{2a}}{\pi}, \tag{4.7.3}$$

следующие асимптотические выражения могут быть выведены подстановкой (4.7.1) и (4.7.3) в (4.5.3–4.5.8):

$$u = u_n = -2\pi H k_1 \sqrt{2r} \left[\frac{\gamma_1 T_1}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 T_2}{m_2 - 1}\right] + 0(1), \tag{4.7.4}$$

$$w = 2\pi H k_1 \sqrt{2r} \left[\frac{m_1 S_1}{m_1 - 1} + \frac{m_2 S_2}{m_2 - 1}\right] + 0(r), \tag{4.7.5}$$

$$\sigma_1 = 2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\gamma_k^2 - (m_k+1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k-1)} \frac{T_k}{Q_k} + 0(1), \tag{4.7.6}$$

$$\sigma_2 = -2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\gamma_k T_k}{(m_k-1)Q_k} + 0(\sqrt{r}), \tag{4.7.7}$$

$$\sigma_z = \frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1-\gamma_2)} \left[\frac{\gamma_1 T_1}{Q_1} - \frac{\gamma_2 T_2}{Q_2}\right] + 0(1), \tag{4.7.8}$$

$$\tau_z = \tau_{zn} = -\frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1-\gamma_2)} \left[\frac{S_1}{Q_1} - \frac{S_2}{Q_2}\right] + 0(\sqrt{r}), \tag{4.7.9}$$

Эти результаты были вычислены для $\phi = 0$. Это предположение позволяет нам избежать громоздкого преобразования осей, без потери общности. Параметр σ_1 в этом случае интерпретируется как сумма $\sigma_n + \sigma_t$, и $\sigma_2 = \sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{nt}$. Вычисляя сумму и разность формул (4.7.6) и (4.7.7), мы получим:

$$\sigma_n = \frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1-\gamma_2)} \left[-\frac{T_1}{\gamma_1 Q_1} + \frac{T_2}{\gamma_2 Q_2}\right],$$

$$\sigma_t = \pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \left[\frac{[2\gamma_1^2 - (m_1+1)\gamma_3^2]T_1}{\gamma_1(m_1-1)Q_1} + \frac{[2\gamma_2^2 - (m_2+1)\gamma_3^2]T_2}{\gamma_2(m_2-1)Q_2}\right].$$

Формулы (4.7.4–4.7.9) в основном согласуются с результатами Kassir and Sih (1975), кроме некоторых опечаток, например, в знаменателе члена в фигурных скобках формулы (8.94c) должно быть $\sqrt{n_1}$ и $\sqrt{n_2}$ вместо n_1 и n_2. Чтобы сравнить наши результаты с результатами Кассира и Сих, мы должны не забывать, что их определение коэффициента концентрации напряжений есть $\sqrt{2}$ раз больше, чем наш, их обозначения $n_к$ соответствует нашим $\gamma_к^2$; Кассир и Сих похоже не заметили свойства (4.1.10) и взаимоотношения $S_k = (\sin\theta)/(\gamma_k T_k)$, которые в некоторых случаях могут быть использованы для значительного упрощения их результатов. Например, они имеют выражение $[A_{13} m_k - A_{11}\gamma_k^2]/[A_{44}(m_k + 1)]$ в формуле (8.95a), не понимая, что оно равно -1 для $k = 1,2$.

Асимптотическое поведение перемещений и напряжений около края трещины в изотропном теле может быть найдено из (4.7.4–4.7.9) или (4.5.10–4.5.15). Результат равен

$$u = u_n = \frac{k_1\sqrt{r}}{2\mu}\cos(\frac{\theta}{2})\left[2(1-\nu) - \cos^2(\frac{\theta}{2})\right] + 0(1), \tag{4.7.10}$$

$$w = \frac{k_1\sqrt{r}}{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\left[2(1-\nu) - \cos^2(\frac{\theta}{2})\right] + 0(r), \tag{4.7.11}$$

$$\sigma_1 = \frac{k_1}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 + 2\nu - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + 0(1), \tag{4.7.12}$$

$$\sigma_2 = \frac{k_1}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 - 2\nu - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + 0(\sqrt{r}), \tag{4.7.13}$$

$$\sigma_z = \frac{k_1}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + 0(1), \tag{4.7.14}$$

$$\tau_z = \tau_{zn} = \frac{k_1}{2\sqrt{r}}\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} + 0(\sqrt{r}), \tag{4.7.15}$$

что согласуется с результатами данными в (Sih and Liebowitz, 1968).

Асимптотическое поведение для мода II и III нагрузки. Мы можем вывести опять некоторые общие результаты, а именно, асимптотическое поведение поля напряжений и перемещений около края плоской трещины с гладкой границей. Мы напоминаем, что при $\phi = 0$ декомпозиции $u = u_x + iu_y$ и $\tau_z = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$ равны $u^{(n)} = u_n + iu_t$ и $\tau^{(n)} = \tau_{zn} + i\tau_{tz}$ соответственно; σ_1 понимается как $\sigma_n + \sigma_t$, и $\sigma_2 = \sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{nt}$. Это позволит нам избежать громоздких преобразований осей. Комплексный коэффициент концентрации напряжений, введённый в (4.4.57), может быть выражен через предписанную сдвигающую нагрузку τ как

$$k = k_2 + ik_3 = \frac{\sqrt{2a}}{\pi}\left[\tau + \frac{G_2}{G_1}\bar{\tau}\right], \tag{4.7.16}$$

и его обращение даёт:

$$\tau = \frac{\pi G_1(kG_1 - \bar{k}G_2)}{\sqrt{2a}(G_1^2 - G_2^2)}. \tag{4.7.17}$$

Подстановка (4.7.1) и (4.7.17) (4.6.2–4.6.13) приводит к

$$u_{\rm n} + iu_{\rm t} = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2\sqrt{2r}}{A_{44}(\gamma_1-\gamma_2)}\left[-\frac{S_1}{m_1+1} + \frac{S_2}{m_2+1}\right] + \frac{ik_3\gamma_3\sqrt{2r}}{A_{44}}S_3, \tag{4.7.18}$$

$$w = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2\sqrt{2r}}{A_{44}(\gamma_1-\gamma_2)}\left[-\frac{m_1T_1}{\gamma_1(m_1+1)} + \frac{m_2T_2}{\gamma_2(m_2+1)}\right], \tag{4.7.19}$$

$$\sigma_1 = 2\pi k_2\gamma_1\gamma_2 HA_{66}\left(\frac{2}{r}\right)^{1/2}\sum_{\rm k=1}^{2}\frac{\gamma_3^2(m_{\rm k}+1)-\gamma_{\rm k}^2}{\gamma_{\rm k}^2(m_{\rm k}-1)}\frac{S_{\rm k}}{Q_{\rm k}}, \tag{4.7.20}$$

$$\sigma_2 = 2\pi k_2\gamma_1\gamma_2 HA_{66}\left(\frac{2}{r}\right)^{1/2}\left[\frac{S_1}{(m_1-1)Q_1} + \frac{S_2}{(m_2-1)Q_2}\right] - \frac{ik_3\sqrt{2}S_3}{\gamma_3\sqrt{r}Q_3}, \tag{4.7.21}$$

$$\sigma_{\rm z} = -\frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\frac{S_1}{Q_1} - \frac{S_2}{Q_2}\right], \tag{4.7.22}$$

$$\tau_{\rm zn} + i\tau_{\rm tz} = -\frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\frac{T_1}{\gamma_1Q_1} - \frac{T_2}{\gamma_2Q_2}\right] + \frac{ik_3T_3}{\sqrt{2r}Q_3}. \tag{4.7.23}$$

Вычисляя сумму и разность (4.7.20) и (4.7.21), мы получим:

$$\sigma_{\rm n} = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\frac{S_1}{\gamma_1^2Q_1} - \frac{S_2}{\gamma_2^2Q_2}\right], \tag{4.7.24}$$

$$\sigma_{\rm t} = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}}\left\{\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\left(\frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_3^2}\right)\frac{S_1}{Q_1} - \left(\frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_3^2}\right)\frac{S_2}{Q_2}\right]\right.$$

$$\left. + 2\pi HA_{66}\left(\frac{S_1}{Q_1} + \frac{S_2}{Q_2}\right)\right\}, \tag{4.7.25}$$

$$\tau_{nt} = -\frac{k_3 S_3}{\sqrt{2r}\gamma_3 Q_3}. \tag{4.7.26}$$

Наши формулы (4.7.18–4.7.26) достаточно хорошо согласуются с аналогичными результатами Kassir and Sih (1975), кроме формулы (8.96b, стр.371) для u_t которая должна соответствовать мнимой части нашей формулы (4.7.18). Формула Кассира и Сих (8.96b) ошибочна, потому что она показывает u_t зависящим от k_2, γ_1, и γ_2, что не может быть правильным: наш результат связывает u_t с k_3 и γ_3 только, как это и должно быть. Имеются также несколько опечаток в их формулах (8.96a) и (8.96c). Остальные формулы согласуются с нашими, хотя формулы Кассира и Сих выглядят более сложными, чем наши, в основном потому, что они не заметили свойства (4.1.10), которое могло сделать некоторые выражения намного проще.

Упражнение 4.7

1. Подтвердите справедливость (4.7.1).

2. Выведите (4.7.4)–(4.7.9).

3. Выведите (4.7.18)–(4.7.23).

4. Найдите асимптотическое поведение напряжений и перемещений около края трещины для случая мода II и III нагрузки в изотропных телах.

Ответ: $u_n + iu_t = \frac{\sqrt{r}}{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\left\{\left[2(1-\nu)+\cos^2(\frac{\theta}{2})\right]k_2 + 2ik_3\right\}$,

$$w = k_2\frac{\sqrt{r}}{\mu}\cos(\frac{\theta}{2})\left[-(1-2\nu)+\sin^2(\frac{\theta}{2})\right],$$

$$\sigma_1 = \frac{k_2}{\sqrt{r}}\sin(\frac{\theta}{2})\left[-2(1+\nu)-\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2})\right],$$

$$\sigma_2 = \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{r}}\left\{\left[-2(1-\nu)-\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2})\right]k_2 - 2ik_3\right\},$$

$$\sigma_z = \frac{k_2}{2\sqrt{r}} \sin\theta \cos(\frac{3\theta}{2}),$$

$$\tau_{zn} + i\tau_{tz} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{r}} \left\{ \left[1 - \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{3\theta}{2}) \right] k_2 + ik_3 \right\}.$$

Заметьте: заинтересованный читатель может сравнить с результатами представленными в Sih and Liebowitz (1968).

4.8 Плоская трещина общей формы

Общий метод приложен здесь к анализу упругого пространства ослабленного плоской трещиной произвольной формы под действием однородного нормального давления. Простое, но точное взаимоотношение установлено между перемещениями поверхности трещины и приложенного давления для произвольной плоской трещины. Специфические формулы выведены для трещины в форме полигона, прямоугольника, ромба, креста, кругового сектора и кругового сегмента. Все формулы проверены путём сравнения с известными решениями опубликованными в литературе, и их точность подтверждена. Аналогичный подход может быть использован для анализа трещины под общей полиномиальной нагрузкой. Материал в этой секции следует статье (Fabrikant, 1987b).

Теория. Рассмотрим упругое пространство ослабленное в плоскости $z = 0$ плоской трещиной, занимающей область S, граница которой дана в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi). \qquad (4.8.1)$$

Пусть однородное давление p приложено нормально к поверхностям трещины в противоположных направлениях. Основное интегральное уравнение в этом случае дано в (4.1.9). Подход основан на интегральном представлении величины обратной расстоянию между двумя точками установленном в (1.1.27). Подстановка (1.1.27) в (4.1.9) даёт после изменения порядка интегрирования:

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{2\pi^3 H}\Delta\int_0^{\rho}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_0\int_x^{a(\phi_0)}\frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0},\phi-\phi_0)}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}w(\rho_0,\phi_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0. \tag{4.8.2}$$

Следует отметить, что изменение порядка интегрирования, которое привело к (4.8.2), действительно только внутри круга $\rho\le\min\{a(\phi)\}$, и это объясняет одну из причин, почему точность обычно ухудшается в случае областей с большой разницей между длиной и шириной. Тем не менеее, мы можем получить из (4.8.2) *точное* решение для эллипса и достаточно точные формулы для трещины различных форм, как будет показано далее. Пусть нормальное перемещение поверхности трещины равно

$$w = \frac{\delta}{a(\phi)}\left[a^2(\phi)-\rho^2\right]^{1/2}, \tag{4.8.3}$$

где δ — постоянная подлежащая определению. Теперь подставляя (4.8.3) в (4.8.2), мы можем проверить, как близко к постоянной будет нагрузка σ, производящая перемещения (4.8.3). Интегрирование по ρ_0 даёт:

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{\delta}{8\pi^2 H}\Delta\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|}\frac{x\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\frac{a^2(\phi_0)-x^2}{a^2(\phi_0)}$$

$$\times F\left(2-\frac{|n|}{2},\frac{1}{2};2;1-\frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right)e^{i(\phi-\phi_0)}\mathrm{d}\phi_0. \tag{4.8.4}$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Дальнейшее вычисление нормального напряжения может быть выполнено для каждого значения n отдельно. Нулевой член примет вид:

$$\sigma_0 = \frac{\delta B}{8\pi H}, \tag{4.8.5}$$

где обозначение

$$B = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{a(\phi)} \tag{4.8.6}$$

было введено. Очевидно, что значение интеграла в (4.8.6) будет зависеть не только от формы области интегрирования, но также от положения начала координат. Следующий аргумент может быть полезным, чтобы установить определённые правила в этом отношении. Согласно (4.8.3), начало координат соответствует точке, где перемещение сторон трещины достигает максимума. Мы будем называть эту точку *центром трещины*. В случае, когда область трещины имеет ось симметрии, мы можем заключить из физических соображений, что эта точка должна быть на оси симметрии. Когда область трещины имеет две оси симметрии, центр трещины расположен в точке их пересечения, то есть, в центре тяжести области.

Следует отметить, что интеграл (4.8.6) достигает своего минимума в этом случае. Мы можем распространить это правило для трещины произвольной формы, а именно, центр трещины должен быть расположен в точке внутри S где интеграл (4.8.6) достигает своего минимума. Прямые вычисления для различных областей показывают, что этот минимум является достаточно плоским, так что во многих случаях можно расположить центр трещины в центре тяжести, без значительной потери точности. Мы обсудим это более подробно далее, когда мы будем рассматривать область S в форме кругового сегмента и сектора.

Важно отметить, что вторая гармоника равна нулю для произвольного контура, и что все нечётные гармоники будут равны нулю, если выражение для $a(\phi)$ не содержит нечётных гармоник. Вот выражение для четвёртой гармоники:

$$\sigma_4 = -\frac{4\delta}{5\pi^2 H}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\cos 4(\phi-\phi_0)d\phi_0}{a^2(\phi_0)} \tag{4.8.7}$$

Исследование четвёртой и следующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается для областей общего вида, и они исчезают в случае эллипса. Если мы положим $p\approx\sigma_0$, тогда остальные гармоники могут быть названы ошибкой решения. Это предполагает справедливость следующего взаимоотношения между приложенным напряжением p и максимальным перемещением поверхностей трещины:

$$p = \frac{\delta B}{8\pi H} \tag{4.8.8}$$

Можно проверить, что в случае эллипса решение данное в (4.8.3) и (4.8.8) является *точным*. Мы ожидаем, что оно будет достаточно точным для трещины произвольной формы. Это предположение будет показано справедливым в следующей секции, где несколько частных случаев трещин рассмотрены в деталях. Мы также ожидаем, что (4.8.3) будет достаточно точным около центра трещины, хотя относительная ошибка может быть довольно значительна близко к границе.

Энергия трещины может быть определена как

$$W = \iint\limits_S \sigma w \mathrm{dS}. \tag{4.8.9}$$

Подстановка (4.8.3) и (4.8.8) в (4.8.9) даёт:

$$W = \frac{16\pi H p^2 A}{3B}, \tag{4.8.10}$$

где A есть площадь трещины. Введём среднее перемещение δ_{av} как

$$\delta_{\mathrm{av}} = \frac{1}{A}\iint\limits_S w \mathrm{dS}.$$

Подстановка (4.8.3) в последнее выражение дают:

$$\delta_{\mathrm{av}} = \frac{2}{3}\delta.$$

Определим безразмерный параметр τ в форме:

$$\tau = \frac{\delta_{\mathrm{av}}}{2\pi H p\sqrt{A}} = \frac{W}{2\pi H p^2 A^{3/2}}. \tag{4.8.11}$$

Физический смысл τ может быть определён как отношение среднего перемещения к определённому зафиксированному перемещению, или как отношение энергии трещины к некоторой фиксированной энергии. Обе формы (4.8.11) приводят к следующему выражению для τ:

$$\tau = \frac{8}{3\sqrt{A}B}. \tag{4.8.12}$$

Можно заключить, что величина τ не зависит от размеров области S и определяется только её формой. Она достигает максимума в случае круга, так что $0 \le \tau \le 4/(3\pi^{3/2}) = 0.2394$. Табулирование коэффициента τ для трещин различных форм может оказаться очень полезным, так как знание этого коэффициента позволяет нам найти максимальное (или среднее) перемещение поверхностей трещины и энергию трещины, используя (4.8.11).

Может показаться более логичным определить τ как отношение энергии данной трещины к энергии круговой трещины, имеющей ту же площадь. В этом случае величина τ будет заключена между нулём и единицей. Основной причиной принятия определения (4.8.12) было желание сохранить связь между задачами теории трещин в механике и математически эквивалентным задачам электростатики. Параметр τ, определённый в (4.8.11), в точности соответствует коэффициенту электрической поляризуемости в теории распространения волн через маленькие отверстия (Bethe 1944).

Мы не нашли в литературе по механике никаких публикаций, содержащих числовые данные для неэллиптических трещин, которые могли бы быть использованы для сравнения с результатами изложенными в этой секции. Ситуация несколько лучше в электрических науках. Cohn (1952) измерил экспериментально коэффициент электрической поляризуемости нескольких конфигураций отверстий. Численное решение той же задачи было дано De Meulenaere and Van Bladel (1977), и Okon and Harrington (1981). Эти численные и экспериментальные данные будут использованы для оценки точности предложенной теории.

Эмпирическая формула для коэффициента электрической поляризуемости была предложена в Фихманас и Фридберг (1973). Эта формула в наших обозначениях имеет вид:

$$\tau = \frac{8\sqrt{A}}{3\pi L}, \tag{4.8.13}$$

где L обозначает периметр области S. Формула (4.8.13) является точной для эллипса. Предстваляется интересным сравнить результаты согласно этой формуле с нашей (4.8.12). Трещины нескольких форм рассмотрены для этой цели. Высокая точность нашей формулы (4.8.12) подтверждена путём сравнения с имеющимися числовыми решениями.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим плоскую трещину в форме полигона с n сторонами, с единственным ограничением, чтобы функция $a(\phi)$, описывающая его границу, была непрерывной и однозначной. Начало системы координат расположено в центре трещины, как этот центр был определён раньше. Пронумеруем стороны полигона в направлении против часовой стрелки от 1 до n, $a_к$ обозначает длину k—ой стороны. Вершина, в которой стороны $a_к$ и $a_{к+1}$ пересекаются, пронумерована k+1. Очевидно, что значение индекса n+1 понимается как 1. Обозначим расстояние от центра трещины до k—ой вершины $b_к$. Пусть $A_к$ обозначает площадь треугольника образуемого сторонами $a_к$, $b_к$ и $b_{к+1}$, так что полная площадь полигона A равна сумме $A_к$. Тогда формулы (4.8.6) и (4.8.12) дают следующее выражение для коэффициента τ:

$$\tau = \frac{8}{3\sqrt{A}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k^2}{4A_k^2}-\frac{1}{b_k^2}\right]^{1/2}+\left[\frac{a_k^2}{4A_k^2}-\frac{1}{b_{k+1}^2}\right]^{1/2}\right\}^{-1}. \tag{4.8.14}$$

В случае правильного полигона, формула (4.8.14) упрощается:

$$\tau = \frac{4\sqrt{\cot(\pi/n)}}{3n^{3/2}\sin(\pi/n)}. \tag{4.8.15}$$

Формула (4.8.13) даёт для правильного полигона:

$$\tau = \frac{4}{3\pi}\left[\frac{\cot(\pi/n)}{n}\right]^{1/2}. \tag{4.8.16}$$

Представляется интересным сравнить числовые результаты даваемые формулами (4.8.15) и (4.8.16). Ниже представлены результаты соответствующих вычислений

$n=$	3	4	5	6	7	8	∞
формула (4.8.15) $\tau=$	0.2251	0.2357	0.2380	0.2388	0.2391	0.2392	0.2394
формула (4.8.16) $\tau=$	0.1862	0.2122	0.2227	0.2280	0.2312	0.2331	0.2394
расхождение (%)	17.3	10.0	6.5	4.5	3.3	2.6	0.0

В то время, как обе формулы в предельном случае $n \to \infty$ дают тот же самый точный результат для круга, их расхождение для малых n довольно значительно, так что важно установить, которая формула более точная. Мы не обнаружили никаких данных для равностороннего треугольника. Если принять экспериментальные результаты Cohn для квадрата $\tau = 0.2274$ как точный, тогда наша формула (4.8.15) имеет ошибку 3.6%, в то время, как формула (4.8.16) Фихманаса и Фридберга имеет ошиблу 6.7%. Численный результат Okon and Harrington для квадрата есть 0.2258, что также в пользу нашей формулы. В случае правильного шестиугольника, результат Okon and Harrington есть 0.2375, так что наш результат имеет расхождение только 0.5%, в то время, как ошибка формулы (4.8.16) есть 4%. Следует заметить, что величина τ не меняется значительно во всём промежутке $3 \le n < \infty$.

Мы можем также сравнить нормальные перемещения вдоль центральной линии шестиугольника перпендикулярно его стороне, данное в (4.8.3) с численными данными в Okon and Harrington (1981). Результаты ($w*$ обозначает $w/2\pi H p\sqrt{A}$)

$\rho/a=$	0.	0.1667	0.3333	0.5000	0.6667	0.8333

Okon *et al* $w*$=	0.351	0.346	0.331	0.305	0.263	0.210
формула (4.8.3)$w*$=	0.357	0.352	0.3366	0.3092	0.266	0.1973
расхождение (%)	−1.7	−1.7	−1.4	−1.4	−1.2	6.0

Как мы и ожидали, результаты согласуются хорошо, кроме точек очень близко к границе.

Пример 2: Прямоугольник. Рассмотрим прямоугольную трещину, a и b — её полуоси вдоль осей Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = b/a \le 1$. Формула (4.8.15) в этом случае сводится к

$$\tau = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}. \tag{4.8.17}$$

Формула (4.8.13) в этом случае даёт:

$$\tau = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{3\pi(1+\varepsilon)}. \tag{4.8.18}$$

Мы представляем ниже результаты вычислений по формулам (4.8.17) и (4.8.18) в сравнении с экспериментальными результатами Cohn.

ε=	0.1000	0.1500	0.2000	0.3000	0.5000	0.7500	1.0000
эксперимент τ=	0.1202	0.1411	0.1565	0.1789	0.2093	0.2251	0.2274
формула (4.8.17) τ=	0.1049	0.1277	0.1462	0.1749	0.2108	0.2309	0.2357
расхождение (%)	12.7	9.5	6.6	2.3	−0.7	−2.6	−3.7
формула (4.8.18) τ=	0.1220	0.1429	0.1582	0.1788	0.2001	0.2100	0.2122
расхождение (%)	−1.5	−1.3	−1.1	0.1	4.4	6.7	6.7

Если мы положим, что результаты Cohn точны, тогда наша формула более точна для $\varepsilon \ge 0.5$, в то время, как формула Фихманаса и Фридберга более точна для $\varepsilon < 0.5$. Если вместо этого мы предположим точными численные результаты полученные частным образом от де Смедта, тогда заключение может быть различным. Например, его значение τ для $\varepsilon = 0.1$ равно 0.1142; теперь наш результат имеет ошибку 8% в то время, как результат Фихманаса и Фридберга имеет ошибку −7%. В настоящее время похоже, что никто не знает, который результат правильный. Мы можем также сравнить безразмерные перемещения $w*$ даваемые формулой (4.8.3), с числовыми результатами де Смедта для прямоугольника параметром $\varepsilon = 0.5$ (как и раньше, $w*$ обозначает $w/2\pi Hp\sqrt{A}$). Ниже приведены результаты, вычисленные вдоль оси Ox для $y/b = 0.025$.

x/a=	0.0250	0.2250	0.4250	0.6250	0.8250	0.9750
де Смедт w =	0.3161	0.3118	0.2989	0.2713	0.2107	0.0852

формула (4.8..3) w =	0.3158	0.3081	0.2862	0.2469	0.1787	0.0703
расхождение (%)	0.1	1.2	4.2	9.0	15.2	17.5

Согласование результатов удовлетворительно, кроме области $x/a > 0.625$. Нижеследующие данные были подсчитаны вдоль оси Oy для $x/a = 0.025$.

y/b=	0.0250	0.1250	0.2250	0.3250	0.4250	0.4750
де Смедт w^* =	0.3161	0.3067	0.2836	0.2424	0.1690	0.0976
формула (4.8.3) w^* =	0.3158	0.3062	0.2824	0.2403	0.1666	0.0987
расхождение (%)	0.1	0.2	0.4	0.8	1.4	–1.2

Мы замечаем довольно хорошее согласование даже близко к границе, что может быть объяснёно тем фактом, что форма трещины в направлении оси Oy очень близка к двумерному случаю.

Пример 3: Ромб. Рассмотрим случай, где область S есть ромб, a и b – его полуоси вдоль осей Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = b/a \le 1$. Формула (4.8.14) в этом случай сводится к

$$\tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{3(1+\varepsilon)}. \tag{4.8.19}$$

Соответствующий результат Фихманаса и Фридберга есть

$$\tau = \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{3\pi(1+\varepsilon^2)^{1/2}}. \tag{4.8.20}$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов относящихся к трещине в форме ромба. Коэффициент электрической поляризуемости для ромба с отношением осей $\varepsilon = 0.5$ был найден численно в Okon and Harrington равным $\tau = 0.2082$. Наш результат равен 0.2222 (расхождение 6.7%), в то время как формула (4.8.20) даёт 0.1898 (расхождение 8.9%). Мы получили 2 комплекта результатов частным образом от де Смедта и Ли. Эти данные представлены ниже в сравнении с формулами (4.8.19) и (4.8.20)

ε =	0.100	0.200	0.333	0.500	0.800	1.000
де Смедт τ=	0.111	0.151	0.182	0.204	0.219	0.221
формула (4.8.19) τ=	0.136	0.176	0.204	0.222	0.234	0.236
расхождение (%)	–21.9	–16.4	–12.0	–9.0	–6.8	–6.6
формула (4.8.20) τ=	0.094	0.132	0.164	0.190	0.210	0.212
расхождение (%)	15.1	12.8	9.8	6.9	4.4	4.1

Данные, полученные от Ли, представлены как функция угла $\alpha = \tan^{-1}\varepsilon$

α(град.)=	10.	15.	20.	25.	30.	40.	45.
Ли τ=	0.147	0.174	0.193	0.207	0.216	0.226	0.228
формула (4.8.19) τ=	0.168	0.192	0.209	0.220	0.227	0.235	0.236
расхождение (%)	−14.2	−10.6	−8.1	−6.3	−5.2	−3.8	−3.6
формула (4.8.20) τ=	0.124	0.150	0.170	0.186	0.197	0.211	0.212
расхождение (%)	15.8	13.7	11.8	10.1	8.5	6.9	6.7

Мы представили обе совокупности данных, чтобы подчеркнуть тот факт, что по–настоящему надёжных данных попросту не существует. Первая совокупность данных полагает, что формула Фихманаса и Фридберга более точна, в то время, как вторая совокупность данных показывает большую точность нашей формулы. Следует также отметить, что формула (4.8.19), похоже, даёт верхний предел, и формула (4.8.20) даёт нижнюю границу, и их среднее арифметическое очень близко к числовым данным.

Мы можем также сравнить нормальные перемещения, даваемые нашей формулой (4.8.3), с аналогичными результатами в Okon and Harrington (1981). Ниже представлены данные, подсчитанные вдоль центральной линии, параллельной его стороне ($w*$ обозначает $w/2\pi Hp\sqrt{A}$).

ρ/a =	0.	0.3333	0.6667
Okon *et al.* $w*$ =	0.335	0.304	0.257
формула (4.8.3) $w*$ =	0.3333	0.3142	0.2484
расхождение (%)	0.5	−3.4	3.3

Согласие результатов становится хуже, если сравнение делается вдоль главной оси. Это объясняется тем, что предположение об особенности порядка квадратного корня в (4.8.3) не справедливо для областей с острыми углами.

Пример 4: Круговой сегмент. Пусть радиус r и угол 2α являются параметрами сегмента. Прямые численные расчёты показывают, что центр трещины может быть расположен в центре тяжести, с ошибкой того же порядка, как и точность нашей теории. Положение центра тяжести определяется координатой $x_c = kr$, где

$$k = \frac{2\sin^3\alpha}{3(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)}.$$

Уравнение границы сегмента относительно центра тяжести принимает вид:

$$a(\phi) = r[-k\cos\phi + (1 - k^2\sin^2\phi)^{1/2}], \ \text{for } 0\le\phi\le\pi-\gamma \text{ or } \pi+\gamma\le\phi<2\pi,$$

и

$$a(\phi) = r\frac{k - \cos\alpha}{\cos(\pi-\phi)}, \quad \text{for } \pi-\gamma\le\phi\le\pi+\gamma, \tag{4.8.21}$$

где $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(k-\cos\alpha))$. Подстановка (4.8.21) в (4.8.6) и (4.8.12) ведёт к

$$\tau = \frac{4}{3(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)^{1/2}}\left[\frac{k\sin\gamma + \mathrm{E}(\pi-\gamma,k)}{1-k^2} + \frac{\sin\gamma}{k-\cos\alpha}\right]^{-1}. \tag{4.8.22}$$

где $\mathrm{E}(\cdot,\cdot)$ обозначает неполный эллиптический интеграл второго рода. Формула согласно Фихманасу и Фридбергу даёт:

$$\tau = \frac{4(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)^{1/2}}{3\pi(\alpha + \sin\alpha)}. \tag{4.8.23}$$

Коэффициент электрической поляризуемости для полукруга был подсчитан Оконом и Харрингтоном как $\tau = 0.2161$. Наш результат согласно (4.8.22) равен $\tau = 0.2163$ что практически идентично предыдущему. Результат (4.8.23) равен $\tau = 0.2069$ (расхождение 4.3%). Дополнительное подтверждение правильности нового метода может быть получено рассмотрением графика распределения плотности электрической поляризуемости для полукруга, представленном в Okon and Harrington (1981). Его максимум расположен на расстоянии $\approx 0.47r$ от центра круга. Наше определение центра трещины, требующее минимизации интеграла (4.8.6), даёт его координату как $0.48r$, что очень близко. Центр тяжести полукруга расположен на расстоюнии $0.42r$.

Пример 5: Круговой сектор. Пусть r и 2α обозначают его радиус и полярный угол. Центр трещины предполагается расположенным на оси симметрии на расстоянии kr от центра круга. Числовые расчёты показывают, что центр трещины может быть расположен в центре тяжести для $0.1\pi < \alpha < 0.6\pi$. В этом случае значение k равно $k = 2\sin\alpha/(3\alpha)$. В интервале $\alpha < 0.1\pi$ или $\alpha > 0.6\pi$, значение k должно быть определено из условий минимума для интеграла (4.8.6). Повторение процедуры, описанной в предыдущем параграфе, приводит к следующему результату:

$$\tau = \frac{4}{3\sqrt{\alpha}}\left[\frac{k\sin\gamma + \mathrm{E}(\gamma,k)}{1-k^2} + \frac{\cos\alpha + \cos(\alpha-\gamma)}{k\sin\gamma}\right]^{-1}. \tag{4.8.24}$$

Здесь $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(\cos\alpha - k))$. Формула согласно Фихманасу и Фридбергу имеет вид:

$$\tau = \frac{4\sqrt{\alpha}}{3\pi(1+\alpha)}. \tag{4.8.25}$$

Заметим, что ни (4.8.24) ни (4.8.25) не сводятся к точному значению для круга, когда $\alpha=\pi$. Это объясняется тем, что мы не имеем круглой трещины, когда α приближается к π: мы имеем круговую трещину, стороны которой соединены вдоль радиуса $\phi=\pi$. Такой случай никем не был рассмотрен, так что мы не можем сказать, какая формула более правильна. Окон и Харрингтон получили в случае квадранта $\tau=0.2269$, формула (4.8.24) даёт $\tau=0.2308$ (расхождение 1.7%), и формула (4.8.25) даёт $\tau=0.2107$ (расхождение 7%). Следует заметить, что значение τ для квадранта больше, чем для полукруга. Общей впечатление создаётся, что наша теория в частном случае кругового сектора и сегмента обеспечивает верхнюю границу для τ, в то время, как формула согласно Фихманасу и Фридбергу даёт нижнюю границу.

Пример 6: Крест. Рассмотрим форму трещины полученной ортогональным пересечением двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$. Введём параметр $\varepsilon=b/a\le 1$. Площадь креста может быть выражена как

$$A=4a^2\varepsilon(2-\varepsilon)$$

Следующее выражение может быть получено для τ:

$$\tau=\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{6\sqrt{2-\varepsilon}\{[2(1+\varepsilon^2)]^{1/2}-1\}} \qquad (4.8.26)$$

Формула согласно Фихманасу и Фридбергу есть:

$$\tau=\frac{2\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{3\pi}. \qquad (4.8.27)$$

В таблице ниже, мы представляем результаты, полученные из формул (4.8.26) и (4.8.27), и сравниваем их с экспериментальными результатами Cohn и численными результатами De Meulenaere and Van Bladel (1977), а также с результатами, полученными частным образом от де Смедта.

ε=	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
эксперим. τ=	0.0942	0.1333	0.1609	—	—	—	0.2274
De Meulenaere τ=	—	—	—	0.19	0.22	0.23	0.238
де Смедт τ=	0.0835	0.1183	—	0.1767	0.2084	0.2193	0.2212
формула (4.8.26) τ=	0.1284	0.1777	0.2078	0.2252	0.2376	0.2372	0.2357
формула (4.8.27) τ=	0.0925	0.1273	0.1515	0.1698	0.1944	0.2079	0.2122

Мы не вычисляли расхождение так как разногласие между данными слишком велико, так что все данные становятся ненадёжными. Общее впечатление, что наша формула (4.8.26) даёт верхнюю границу для τ, в то время, как формула Фихманаса и Фридберга даёт нижнюю границу. Это заключение может быть неправильным, если численные результаты, полученные частным образом от де Смедта, правильны. Например, его результат для $\varepsilon = 0.1$ равен $\tau = 0.08347$, что отличается от экспериментального результата на 11%. Всё это доказывает, что существующие численные методы слишком грубы и необходимо разработать более надёжные и точные численные методы.

Следует отметить, что функция, определённая в (4.8.26), не монотонна: относительно плоский максимум существует около $\varepsilon \approx 0.7$. Данные других авторов монотонны. Мы не имеем строгого доказательства, что качественное поведение формулы (4.8.26) правильно, в то время, как данные других авторов неправильны, но мы можем указать, что значение τ для квадранта тоже больше, чем τ для полукруга, и это свойство в основном благодаря тому факту, что форма квадранта ближе к форме круга, чем полукруг. Аналогичный аргумент может быть использован для случая креста с параметром $\varepsilon \approx 0.7$ по сравнению с квадратом.

Дискуссия. Большинство рассмотренных примеров показывает, что точный результат находится между результатами формулы (4.8.12) и формулы Фихманаса и Фридберга (4.8.13). В этом смысле, формулы действуют, как верхняя и нижняя границы соответственно, что ведёт к утверждению: для произвольного контура одно из неравенств справедливо, а именно, или $\tau_{12} \le \tau_{\text{exact}} \le \tau_{13}$, или $\tau_{12} \ge \tau_{\text{exact}} \ge \tau_{13}$. Мы можем указать один способ отвергнуть наше утверждение. Простой взгляд на таблицу данных для прямоугольника в предыдущей секции указывает, что наша формула (4.8.17) должна давать нижнюю границу для маленького значения параметра ε, и она должна давать верхнюю границу для ε близкого к единице; обратное должно быть справедливо для формулы (4.8.18). Это означает, что должно существовать значение ε для которого обе формулы (4.8.17) и (4.8.18) *точные* и дают тот же самый результат. Приравнивая (4.8.17) и (4.8.18), мы получим значение параметра

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\pi^2 \pm 4(2\pi^2 - 16)^{1/2}}{16 - \pi^2},$$

что даёт $\varepsilon_1 = 0.3482$ и $\varepsilon_2 = 2.8716$, с очевидным свойством $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Соответствующее значение τ равно 0.18576. Из таблицы в предыдущей секции, мы можем видеть, что для $\varepsilon = 0.3$ точное значение τ должно быть между 0.1749 и 0.1788. Если бы мы могли быть уверены, что экспериментальное значение 0.1789 является точным, тогда наше утверждение может считаться отвергнутым, но в настоящий момент существующие экспериментальные или численные методы не могут обеспечить такую точность. Это может быть достигнуто на основании метода точного вычисления сингулярных двумерных интегралов представленного в (Fabrikant, 1986e). Значительные усилия требуются, чтобы доказать или опровергнуть наше утверждение, и мы оставляем это интересующемуся читателю.

Точность формулы (4.8.12) может быть улучшена путём включения четвёртой гармоники (4.8.7) в комбинации с вариационнным методом, описанном в (Noble, 1960). Следующий функционал является стационарным на точном решении (4.1.9)

$$I(w) = 2\int\limits_S\int \sigma(M)w(M)\mathrm{d}S_\mathrm{M} + \frac{1}{4\pi^2 H}\int\limits_S\int w(M)\left[\Delta\int\limits_S\int \frac{w(N)}{R(M,N)}\mathrm{d}S_\mathrm{N}\right]\mathrm{d}S_\mathrm{M}. \qquad (4.8.28)$$

Принимая

$$-\frac{1}{4\pi^2 H}\Delta\int\limits_S\int \frac{w(N)}{R(M,N)}\,\mathrm{d}S_\mathrm{N} \approx \sigma_0 + \sigma_4,$$

где σ_0 и σ_4 определены в (4.8.5) и (4.8.7) соответственно, и подставляя их в (4.8.28), мы получим функционал который может быть рассмотрен как функция δ. Из условий стационарности

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \delta} = 0$$

мы получим окончательно

$$\tau = \frac{8}{3B\sqrt{A}(1-c)}, \qquad (4.8.29)$$

где

$$c = \frac{3(F_\mathrm{c}E_\mathrm{c} + F_\mathrm{s}E_\mathrm{s})}{5AB},$$

и следующие геометрические характеристики были введены

$$F_\mathrm{c} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 4\phi\,\mathrm{d}\phi}{a^2(\phi)}, \qquad F_\mathrm{s} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 4\phi\,\mathrm{d}\phi}{a^2(\phi)},$$

$$E_c = \int_0^{2\pi} a^3(\phi)\cos 4\phi \, d\phi, \qquad E_s = \int_0^{2\pi} a^3(\phi)\sin 4\phi \, d\phi.$$

Результаты вычислений согласно (4.8.29) для прямоугольника представлены ниже в сравнении с экспериментальными результатами Cohn.

ε=	0.1000	0.1500	0.2000	0.3000	0.5000	0.7500	1.0000
Cohn τ=	0.1202	0.1411	0.1565	0.1789	0.2093	0.2251	0.2274
формула (4.8.29) τ=	0.1054	0.1290	0.1484	0.1785	0.2125	0.2257	0.2278
расхождение (%)	12.3	8.6	5.2	0.2	–1.5	–0.3	–0.2

Сравнение этой таблицы с соответствующей таблицей представленной ранее показывает, что вариационный подход улучшает точность, хотя улучшение не достаточно для маленьких ε. Нет никаких доказательств, что вариационный подход будет всегда улучшать точность. Напротив, мы можем найти примеры, где точность ухудшается. Это обычно имеет место для областей с очень маленьким ε. Читатель должен решить для себя, прибегать или нет к более громоздким вычислениям, чтобы немножко улучшить точность.

В этой секции мы рассмотрели в деталях только случай трещины под действием однородного давления. Некоторые рассуждения могут быть представлены для общего случая. Хорошо известно (смотри, например, 4.1.13), что в случае круглой трещины, следующее взаимоотношение может быть установлено между перемещением w и внутренним давления σ

$$w(\rho,\phi) = \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \tan^{-1}\left[\frac{[(a^2-\rho^2)(a^2-\rho_0^2)]^{1/2}}{aR}\right]\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)}{R}\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0\,,$$

где $R^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)$. Следующее обобщение последней формулы представляется натуральным:

$$w(\rho,\phi) = \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi}\int_0^{a(\phi_0)} \tan^{-1}\left[\frac{[(a^2(\phi)-\rho^2)(a^2(\phi_0)-\rho_0^2)]^{1/2}}{a(\phi)R}\right]\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)}{R}\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{4.8.30}$$

Хотя полное исследование формулы (4.8.30) находится вне рамок этой книги, есть основания верить, что он будет достаточно точным для общей нагрузки для трещин с парамером ε недалеко от единицы. Вот пример. Попробуем подсчитать перемещение w_0 в центре эллиптической трещины (a и b — полуоси эллипса, $a > b$) под действием однородного давления p. Результат формулы (4.8.30) есть $w_0 = (8/\pi)HpbK(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого типа и $k = (1-b^2/a^2)^{1/2}$. Точный результат есть $w_0 = 2\pi Hpb/E(k)$. Оба результата близки один к другому для малых k, совпадая в случае круга ($k = 0$). Прямые вычисления показывают, что ошибка приближённого выражения не превосходит 7% для эллипса с отношением $b/a \geq 0.5$. В случае квадрата, безразмерное перемещение w в его центре может быть вычислено из (4.8.30) как $(4/\pi^2)\ln(1 + \sqrt{2}) = 0.3572$, в то время, как аналогичный экспериментальный результат Cohn равен $(3/2)\tau = 0.3411$, и расхождение не превышает 5%. Конечно, эти примеры ничего строго не доказывают, но из них становится ясным, что выражение (4.8.30) стоит исследовать более детально. Аналогичное утверждение может быть сделано относительно следующего выражения:

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi[\rho^2 - a^2(\phi)]^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(\phi_0)} \frac{[a^2(\phi_0) - \rho_0^2]^{1/2}\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)},$$

которое даёт распределение нормального напряжения вне круговой трещины прямо через его значения внутри трещины. Будущие исследования покажут, насколько полезно последнее выражение для произвольной трещины.

Исследование коэффициента концентрации напряжений выходит за рамки этой секции, но мы можем показать, что некоторые простые формулы могут быть выведены и дают результаты, которые близки к (Weaver, 1977). Мы используем асимптотическое взаимоотношение между предельными значениями перемещений трещины и коэффициентом концентрации напряжений, а именно,

$$w = 2H(2\pi r)^{1/2}k_1.$$

Рассмотрим прямоугольную трещину размером $2a$ на $2b$ ($a > b$), под действием однородного давления p. Подставляя (4.8.3) в последнее выражение, следующие формулы получаются для безразмерного коэффициента концентрации напряжений $\kappa = k_1/[p(\pi b)^{1/2}]$: вдоль короткой стороны $\kappa = 3\tau$; вдоль длинной стороны $\kappa = 3\tau(a/b)^{1/2}$. В случае квадрата, наши формулы дают $\kappa = 3\times 0.2357 = 0.7071$. Результат Weaver равен 0.73, с расхождением около 3%. В случае $b/a = 0.3$, наш результат в середине длинной стороны есть $\kappa = 0.98$, что очень близко к результату Weaver. Выражение (4.8.17) показывает, что предельное значение коэффициента концентрации напряжений, когда $(b/a) \to 0$, есть $\kappa \to 1$, как и должно быть в случае разреза в форме бесконечной полосы. Единственное расхождение с результатом Weaver (1977) в значении безразмерного коэффициента концентрации напряжений вдоль короткой стороны: согласно нашей формуле, он должен *уменьшаться* с ростом b/a, стремясь к нулю как $(b/a)^{1/2}$; в статье Weaver (1977) его значение *увеличивается*. Мы можем также сделать ссылку на статью (Fabrikant, 1987f), где указаны противоречия (Kassir and Sih, 1975) в определении коэффициента концентрации напряжений для эллиптической трещины.

Математически эквивалентная задача проницаемости звука через отверстие общей формы в мягком экране решена в (Fabrikant, 1988d). Тот же аппарат использован в исследовании электрической поляризуемости малых отверстий произвольной формы (Fabrikant, 1987c).

Упражнение 4.8

1. Выведите (4.8.5).

2. Установите (4.8.14).

3. Попробуйте доказать справедливость (или несправедливость) утверждения, сделанного в секции "Дискуссия" выше.

4. Найдите область, где формула (4.8.30) справедлива для эллиптической трещины. (Найдите отношение между полуосями эллипса, для которых ошибка не превосходит 5%.)

5. Решите задачу общей плоской трещины под действием нормальной нагрузки, с его амплитудой пропорциональной x—координате. (Изгиб упругого пространства, с плоской трещиной общей формы).

4.9 Произвольная трещина под действием однородной сдвигающей нагрузки

Пусть граница трещина может быть описана в полярных координатах уравнением $\rho = a(\phi)$, где $a(\phi)$ есть однозначная непрерывная функция. Мы можем всегда выбрать ориентацию осей координат так, что первая гармоника исчезнет из разложения Фурье функции $a(\phi)$. Приближённое аналитическое решение (4.4.14) для общей трещины может быть получено методом, использованным в предыдущей секции. Метод использует следующее представление:

$$\int\!\!\int\limits_S \frac{u(N)}{R(N,N_0)}\,\mathrm{d}S_N = \int\limits_0^{\rho} \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_0 \int\limits_x^{a(\phi_0)} \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\, u(\rho_0,\phi_0)\rho_0 \mathrm{d}\rho_0. \tag{4.9.1}$$

Рассмотрим случай однородной сдвигающей нагрузки. Пусть тангенциальные перемещения имеют форму:

$$u(\rho,\phi) = u_0[a^2(\phi) - \rho^2]^{1/2}/a(\phi)\,, \tag{4.9.2}$$

где u_0 есть пока неизвестная комплексная постоянная. Подстановка (4.9.2) в (4.9.1) даёт после интегрирования и сохранения только первых двух гармоник:

$$\int\!\!\int\limits_S \frac{u(N)}{R(N,N_0)}\,\mathrm{d}S_N \approx \frac{u_0}{16\pi(G_1^2 - G_2^2)} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ 2a(\phi_0) - \frac{\rho^2}{a(\phi_0)} \left[1 + 3\cos 2(\phi-\phi_0) \right] \right\} \mathrm{d}\phi_0. \tag{4.9.3}$$

Подставляя (4.9.3) в (4.4.14) и выполняя необходимое дифференцирование, мы получим взаимоотношение между сдвигающей нагрузкой и амплитудой тангенциального перемещения, а именно,

$$\tau = \frac{1}{4\pi(G_1^2 - G_2^2)} \left[u_0 G_1 B_1 + 3\bar{u}_0 G_2 B_2 \right], \tag{4.9.4}$$

где

$$B_1 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{a(\phi)}\,, \qquad B_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2i\phi}\mathrm{d}\phi}{a(\phi)}\,. \tag{4.9.5}$$

Уравнение (4.9.4) может быть решено:

$$u_0 = \frac{4\pi(G_1^2 - G_2^2)}{G_1^2 B_1^2 - 9G_2^2 B_2^2}[G_1 B_1 \tau - 3G_2 B_2 \bar{\tau}]. \tag{4.9.6}$$

Интегралы в (4.9.5) могут быть легко вычислены для различных форм трещин. Например, прямоугольная трещина со сторонами $2a_1$ и $2a_2$ характеризуется значениями:

$$B_1 = \frac{4(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}{a_1 a_2}, \quad B_2 = \frac{4(a_2^2 - a_1^2)}{3a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}. \tag{4.9.7}$$

Стоит отметить, что несмотря на тот факт, что интегральное представление (4.9.1) справедливо только внутри круга $\rho \le \min\{a(\phi)\}$, и несмотря на приближённую структуру (4.9.3), решение, данное в (4.9.4–4.9.5), является *точным* для эллипса. Мы не нашли в литературе никаких надёжных данных для не—эллиптических трещин под действием сдвигающей нагрузки, поэтому трудно оценить точность нашего решения для трещин различных форм.

Упражнение 4.9

1. Выведите (4.9.3).

2. Установите (4.9.6).

3. Рассмотрите случай полукруговой трещины.

4. Решите задачу для трещины в форме креста.

5. Решите задачу общей плоской трещины под действием кручения.

4.10 Близкие взаимодействия копланарных круглых трещин под действием нормальной нагрузки

Общий метод приложен здесь для анализа напряжений в упругом пространстве, ослабленном несколькими произвольно расположенными копланарными круглыми трещинами под действием произвольного нормального давления. Выведены основные интегральные уравнения, которые имеют определённые преимущества по сравнению с другими методами: уравнения несингулярны, процедура итерации сходится быстро даже для очень близких взаимодействий; нет необходимости решать интегральные уравнения, если нас интересуют только верхние и нижние границы для интересующих нас параметров. В случае трещин, которые далеко друг от друга, эти границы достаточно близки и дают, фактически, достаточно точное решение задачи. Метод позволяет нам также получить практически точное численное решение задачи очень близких взаимодействий. Рассмотрено несколько иллюстративных примеров.

Теория. Рассмотрим упругое пространство ослабленное в плоскости $z = 0$ n произвольно расположенными круглыми трещинами. Трещины не пересекаются. Пусть центр k—ой трещины расположен в точке с декартовыми координатами $x_к$ и $y_к$, её радиус обозначен $a_к$. Пусть произвольное давление $\sigma_к$ приложено нормально к сторонам трещины в противоположных направлениях. Система основных интегральных уравнений может быть записана, благодаря (4.1.9), в виде:

$$\sigma_i(M_i) = -\frac{1}{4\pi^2 H}\Delta\sum_{k=1}^{n}\int\int_{S_k}\frac{w_k(M_k)}{R(M_i,M_k)}\,\mathrm{d}S_k, \qquad \text{для} \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{4.10.1}$$

где Δ есть двумерный оператор Лапласа, $S_к$ есть область k—ой трещины, $R(M_i,M_k)$ обозначает расстояние между точками M_i и $M_к$, ($M_i \in S_i$ и $M_к \in S_к$); $w_к$ обозначает нормальные перемещения сторон трещины (неизвестная функция), σ_i есть нормальное напряжение внутри i—ой трещины (известная функция). Мы можем выделить без потери общности трещину номер 1, и рассмотреть систему трещин в системе локальных полярных координат, с началом координат совпадающим с центром первой трещины. Используя интегральное представление (4.1.11), первое уравнение из системы (4.10.1) может быть переписано как

$$\sigma_1(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi^2 H\rho}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^{\rho}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\mathcal{L}(x^2)$$

$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{a_1}\frac{\rho_0\,\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w_1(\rho_0,\phi) - \frac{1}{4\pi^2 H}\sum_{k=2}^{n}\Delta\int\int_{S_k}\frac{w_k(M_k)}{R(M_1,M_k)}\,\mathrm{d}S_k. \tag{4.10.2}$$

Так как интегралы под знаком суммы в (4.10.2) несингулярны, дифференцирование может быть выполнено под знаком интеграла, с результатом:

$$\sigma_1(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi^2 H\rho}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^{\rho}\frac{x\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}(x^2)$$

$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{a_1}\frac{\rho_0\,\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w_1(\rho_0,\phi) - \frac{1}{4\pi^2 H}\sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}}\int\int_{S_{\mathrm{k}}}\frac{w_k(M_{\mathrm{k}})}{R^3(M_1,M_{\mathrm{k}})}\mathrm{d}S_{\mathrm{k}}. \tag{4.10.3}$$

Формула (4.1.12) позволяет нам выразить w_1 из (4.10.3) при помощи обратного оператора, а именно,

$$w_1(\rho,\phi) = 4H\int_{\rho}^{a_1}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^{x}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma_1(\rho_0,\phi)$$

$$+\frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}}{\pi^2}\sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}}\int\int_{S_{\mathrm{k}}}\frac{w_{\mathrm{k}}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0}{(\rho_0^2-a_1^2)^{1/2}[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]}. \tag{4.10.4}$$

Здесь мы использовали следующее интегральное представление для $1/R^3$

$$\frac{1}{(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0))^{3/2}} = \frac{2}{\pi\rho}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^{\rho}\frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho_0},\phi-\phi_0\right)x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{3/2}},$$

$$\text{для } \rho_0>\rho. \tag{4.10.5}$$

Представление (4.10.5) позволяет нам вычислить различные интегралы от Абелевых и $\mathcal{L}$–операторов. Например, следующий интеграл есть непосредственное следствие (4.10.5)

$$\int_0^{x}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}(\rho)[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{-3/2}$$

$$=\frac{x}{(\rho_0^2-x^2)^{3/2}}\lambda\left(\frac{x^2}{\rho_0},\phi-\phi_0\right).$$

Аналогичная процедура может быть приложена к остальным $n-1$ трещинам, чтобы получить дополнительные n–1 уравнений типа (4.10.4) . Заметим, что каждое такое уравнение справедливо в локальной системе полярных координат, связанных с определённой трещиной. Система уравнений (4.10.4) может быть решена численно итерациями.

Теперь мы покажем, что можно получить верхнюю и нижнюю границы, а также достаточно точную центральную оценку для всех параметров, которые нас интересуют, без необходимости решения интегральных уравнений (4.10.4). Так как $w_к$ не меняет знак в $S_к$, мы можем применить теорему о среднем ко второму интегралу в (4.10.4), с результатом:

$$w_1(\rho,\phi) = 4H\int_{\rho}^{a_1}\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x\frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma_1(\rho_0,\phi)$$

$$+\frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{V_k}{(r_{1k}^2-a_1^2)^{1/2}\,[\rho^2+r_{1k}^2-2\rho r_{1k}\cos(\phi-\phi_{1k})]}. \tag{4.10.6}$$

Здесь $V_к$ обозначает половину объёма открытой k—ой трещины

$$V_k = \iint_{S_k} w_k dS_k,$$

и хотя точное местоположение точки $R_{1к}$ с полярными координатами $(r_{1к},\phi_{1к})$ неизвестно, тот факт, что она принадлежит области $S_к$, ограничивает возможные вариации интересующих нас параметров и позволяет нам получить верхнюю и нижнюю границы, а также достаточно точную центральную оценку, что будет обсиждаться далее. Соображения симметрии могут также быть использованы, чтобы сделать оценки более точными. Мы покажем далее, что эти границы могут быть так близко друг к другу в случае далёких трещин, что они дают, фактически, достаточно точное решение задачи.

Объём трещины $2V_1$ может быть оценён путём интегрирования (4.10.4) по области S_1. Результат есть:

$$V_1 = 4H\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\sigma(\rho,\phi)(a_1^2-\rho^2)^{1/2}\rho d\rho d\phi$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\int\int_{S_k}\left[\frac{a_1}{(\rho^2-a_1^2)^{1/2}}-\sin^{-1}\frac{a_1}{\rho}\right]w_k(\rho,\phi)\rho d\rho d\phi. \tag{4.10.7}$$

Мы можем использовать опять теорему о среднем, с результатом:

$$V_1 = 4H\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\sigma_1(\rho,\phi)\,(a_1^2-\rho^2)^{1/2}\rho d\rho d\phi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{a_1}{(\rho_{1k}^2-a_1^2)^{1/2}}-\sin^{-1}\frac{a_1}{\rho_{1k}}\right]V_k. \tag{4.10.8}$$

Опять, точка с полярными координатами $\rho_{1к}$ принадлежит области $S_к$, таким образом ограничивая возможную вариацию. Интегрирование оставшихся n–1 уравнений по площади каждой трещины обеспечивает окончательно систему n линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена относительно неизвестных $V_к$. Их подстановка назад в (4.10.6) даёт полное решение задачи. Хотя точные значения координат r_{ik}, ϕ_{ik} и ρ_{ik} неизвестны, мы можем всегда использовать их максимальные и минимальные значения, чтобы получить верхнюю и нижнюю границы для всех параметров, интересующих нас.

Определяя коэффициент концентрации напряжений как

$$k_k(\phi) = \lim_{\rho\to a_k}\{(\rho-a_k)^{1/2}\sigma_k(\rho,\phi)\},$$

можно получить эквивалентное выражение через перемещения сторон трещины:

$$k_k(\phi) = \frac{1}{4\pi H}\lim_{\rho\to a_k}\frac{w_k(\rho,\phi)}{(a_k-\rho)^{1/2}}. \tag{4.10.9}$$

Подстановка (4.10.4) в (4.10.9) даёт:

$$k_1(\phi) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{2a_1}}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}\sigma_1(\rho,\phi_0)\,\rho d\rho d\phi_0}{\rho^2+a_1^2-2\rho a_1\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$+\frac{\sqrt{a_1}}{2\sqrt{2}\pi^3 H}\sum_{k=2}^{n}\int\!\!\int_{S_k}\frac{w_k(\rho,\phi_0)\,\rho d\rho d\phi_0}{(\rho^2-a_1^2)^{1/2}[\rho^2+a_1^2-2\rho a_1\cos(\phi-\phi_0)]}.$$

Используя опять теорему о среднем, следующее выражение для коэффициента концентрации напряжений может быть получено:

$$k_1(\phi)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a_1}}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}\sigma_1(\rho,\phi_0)\,\rho d\rho d\phi_0}{\rho^2+a_1^2-2\rho a_1\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$+\frac{\sqrt{a_1}}{2\sqrt{2}\pi^3 \mathrm{H}}\sum_{k=2}^{n}\frac{V_k}{(r_{1k}^2-a_1^2)^{1/2}\,[r_{1k}^2+a_1^2-2r_{1k}a_1\cos(\phi-\phi_{1k})]}. \tag{4.10.10}$$

Аналогичные выражения могут быть выведены для остальных n–1 трещин. Первый член в (4.10.10) представляет коэффициент концентрации напряжений одинокой трещины, открываемой произвольной нормальной нагрузкой σ_1, остальные члены отражают влияние взаимодействующих трещин. Ясно из (4.10.10), что коэффициент концентрации напряжений взаимодействующих копланарных трещин всегда больше, чем коэффициент концентрации напряжений одинокой трещины под тем же давлением. Это доказывает, что результаты Mastrojannis and Mura (1983) неправильны, так как они описывают уменьшение коэффициента концентрации напряжений вдоль части границы.

Пример 1: Две трещины. Рассмотрим случай двух копланарных круглых трещин с радиусами a_1 и a_2 под действием однородного нормального давления $\sigma_1=p_1$ и $\sigma_2=p_2$ соответственно. Пусть l обозначает расстояние между их центрами. Уравнения (4.10.8) в этом случай принимают форму:

$$V_1=\frac{8}{3}\pi a_1^3 Hp_1+\frac{2}{\pi}V_2\left[\frac{a_1}{(\rho_{12}^2-a_1^2)^{1/2}}-\sin^{-1}\frac{a_1}{\rho_{12}}\right],$$

$$V_2=\frac{8}{3}\pi a_2^3 Hp_2+\frac{2}{\pi}V_1\left[\frac{a_2}{(\rho_{21}^2-a_2^2)^{1/2}}-\sin^{-1}\frac{a_2}{\rho_{21}}\right].$$

Их решение есть:

$$V_1 = \frac{8}{3}\pi H \frac{a_1^3 p_1 + c_{12} a_2^3 p_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \qquad V_2 = \frac{8}{3}\pi H \frac{c_{21} a_1^3 p_1 + a_2^3 p_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \tag{4.10.11}$$

где

$$c_{12} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a_1}{(\rho_{12}^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_1}{\rho_{12}}\right], \quad c_{21} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a_2}{(\rho_{21}^2 - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_2}{\rho_{21}}\right]. \tag{4.10.12}$$

Здесь ρ_{12} находится в интервале между $l - a_2$ и $l + a_2$, и $l - a_1 \le \rho_{21} \le l + a_1$. Верхняя граница для $V_к$ соответствует $\rho_{12} = l - a_2$ и $\rho_{21} = l - a_1$; нижняя граница достигается при $\rho_{12} = l + a_2$ и $\rho_{21} = l + a_1$. Эти оценки могут быть сближены, используя теорему взаимности, которая требует справедливость тождества $c_{12} a_2^3 = c_{21} a_1^3$. Это тождество сужает интервал допустимых значений для ρ (только в случае неравных трещин), таким образом делая оценки более узкими. Получается, что случай двух равных трещин является наименее точным. Мы также рассмотрим *центральную оценку,* которая соответствует $\rho_{12} = \rho_{21} = l$. Мы покажем, что центральная оценка даёт достаточно точное решение даже для довольно близких взаимодействий между трещинами.

Формулы (4.10.11–4.9.12) упрощаются в случае равных трещин, когда $a_1 = a_2 = a$, и если $p_1 = p_2 = p$, тогда

$$V_1 = V_2 = V = \frac{V_0}{1 - c}, \qquad c = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{\rho}\right]. \tag{4.10.13}$$

Здесь $V_0 = (8/3)\pi H a^3 p$ обозначает половину объёма одинокой трещины, и ρ заключено в интервале между $l - a$ и $l + a$. Заметим, что в случае однородного давления, энергия трещины W пропорциональна её объёму, а именно, $W = pV$. Становится ясно из (4.10.13), что взаимодействие трещин увеличивает их энергию. Подстановка (4.10.13) в (4.10.10) и использование теоремы о среднем даёт следующее выражение для коэффициента концентрации напряжений:

$$K(\phi) = K_0\left\{1 + \frac{2\varepsilon^3}{\{3\pi(1-\varepsilon^2)^{1/2} - 6[\varepsilon - (1-\varepsilon^2)^{1/2}\sin^{-1}\varepsilon]\}[1+\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\phi]}\right\}, \tag{4.10.14}$$

где $K_0 = p\sqrt{2a}/\pi$ соответствует коэффициенту концентрации напряжений для изолированной трещины под действием однородного нормального давления

p. Здесь верхняя граница для коэффициента концентрации напряжений даётся как $\varepsilon = a/(l-a)$, нижняя граница соответствует $\varepsilon = a/(l+a)$, и центральная оценка определена как $\varepsilon = a/l$. Теперь нам нужно точное численное решение, чтобы оценить точность выведенных приближённых формул. Положим перемещения сторон трещины в форме:

$$w(\rho,\phi) = 4Hp(a^2-\rho^2)^{1/2} f(\rho,\phi), \qquad (4.10.15)$$

где f пока неизвестная функция. Она может быть названа *функцией взаимодействия,* так как она равна отношению открывающего перемещения трещины к тому же значению для изолированной трещины. Значения $f(a,\phi)$ равны отношению коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих трещин к коэффициенту концентрации напряжений изолированной трещины. Мы назовём $f(a,\ \phi)$ *фактором взаимодействия*. Подстановка (4.10.15) в (4.10.4) даёт удобное выражение для процедуры итерации:

$$w(\rho,\phi) = 4Hp(a^2-\rho^2)^{1/2}\left\{ 1 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-r_0^2)^{1/2} f(r_0,\psi_0)\, r_0 \mathrm{d}r_0 \mathrm{d}\psi_0}{(l^2+r_0^2+2lr_0\cos\psi_0-a^2)^{1/2}[r^2+r_0^2+2rr_0\cos(\psi+\psi_0)]} \right\}. \qquad (4.10.16)$$

Здесь мы ввели новые переменные: $r = (\rho^2 + l^2 - 2l\rho\cos\phi)^{1/2}$, $\psi = \sin^{-1}[(\rho/r)\sin\phi]$.

Интеграл в (4.10.16) имеет логарифмическую сингулярность при $r = l-a$, $\psi = 0$, когда $l \to 2a$, следовательно процедура итерации может расходиться для l очень близких к $2a$. Предельное значение l может быть найдено путём анализа интегрального оператора

$$Z(f) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-r_0^2)^{1/2} f(r_0,\psi_0)\, r_0 \mathrm{d}r_0 \mathrm{d}\psi_0}{(l^2+r_0^2+2lr_0\cos\psi_0-a^2)^{1/2}[(l-a)^2+r_0^2+2(l-a)r_0\cos\psi_0]}. \qquad (4.10.17)$$

Согласно теореме Банаха, достаточно доказать, что интегральный оператор (4.10.17) является сжимающим оператором. Мы определим расстояние в классе непрерывных функций

$$\delta(f,f_1) = \max|f(\rho,\phi) - f_1(\rho,\phi)|.$$

Мы измерим значение

$$|Z(f)-Z(f_1)|$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-r^2)^{1/2}\,|f(r,\psi)-f_1(r,\psi)|\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{(l^2+r^2+2lr\cos\psi-a^2)^{1/2}[(l-a)^2+r^2+2(l-a)r\cos\psi]}$$

$$\leq\frac{\delta(f,f_1)}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-r^2)^{1/2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{(l^2+r^2+2lr\cos\psi-a^2)^{1/2}[(l-a)^2+r^2+2(l-a)r\cos\psi]}$$

$$<\frac{2\delta(f,f_1)}{\pi}\int_0^a \frac{(a^2-r^2)^{1/2}\,r\mathrm{d}r}{[(l-r)^2-a^2]^{1/2}[(l-a)^2-r^2]}<\frac{2a\,\delta(f,f_1)}{\pi[(l-a)^2-a^2]^{1/2}}.$$

Интегральный оператор (4.10.17) будет сжимающим оператором, если

$$\frac{2a}{\pi[(l-a)^2-a^2]^{1/2}}<1,$$

и это означает, что процедура итераций будет сходиться для $l>2.18a$, который соответствует довольно близкому взаимодействию. Вышеуказанная оценка является грубой. Прямые вычисления показывают, что процедура итерации сходится даже для $l=2.0005a$ (что соответствует случаю, когда кратчайшее расстояние между трещинами равно 0.0005 их радиуса), и сходится быстро: первая итерация с $f\equiv 1$ имеет максимальную относительную ошибку меньше, чем 2%, и шестая итерация может считаться практически точным решением, так как максимальная относительная ошибка меньше, чем 10^{-7}.

Точность первой итерации улучшается с увеличением расстояния между трещинами. Например, первая итерация для $l=10$ практически точна, так как максимальная относительная ошибка меньше, чем 10^{-7}. Мы не смогли двинуться ближе, чем $l=2.0005a$, но не из–за расхождения, а потому, что стандартная программа DBLIN из библиотеки IMSL, которая была использована для вычисления интегралов, просто перестала работать. Хотя мы не имеем строгого доказательства, не исключено, что процедура итераций теоретически сходится для произвольно малого расстояния между трещинами.

Результаты вычисления функции взаимодействия $f(\rho,\phi)$ представлены в (Fabrikant, 1987g) для различных значений l/a. Мы ограничиваемся здесь одной короткой таблицей, относящейся к наиболее близким взаимодействиям, с $l=2.0005a$. Читатель может найти дополнительные числовые данные в вышеназванной статье.

Таблица 4.10.1. Функция взаимодействия для $l = 2.0005a$

ρ ϕ	0.	30.	60.	90.	120.	150.	180.
1.00000	2.77577	1.18634	1.06686	1.03605	1.02471	1.02009	1.01881
0.91667	1.42135	1.16479	1.06729	1.03761	1.02614	1.02137	1.02003
0.83333	1.27366	1.14560	1.06728	1.03916	1.02766	1.02277	1.02139
0.75000	1.20176	1.12870	1.06682	1.04067	1.02928	1.02431	1.02289
0.66667	1.15812	1.11396	1.06593	1.04214	1.03102	1.02601	1.02455
0.58333	1.12865	1.10117	1.06464	1.04353	1.03287	1.02788	1.02642
0.50000	1.10743	1.09012	1.06299	1.04482	1.03483	1.02996	1.02850
0.41667	1.09146	1.08058	1.06103	1.04597	1.03692	1.03228	1.03086
0.33333	1.07903	1.07234	1.05883	1.04696	1.03911	1.03486	1.03353
0.25000	1.06913	1.06519	1.05646	1.04777	1.04142	1.03775	1.03657
0.16667	1.06108	1.05899	1.05396	1.04836	1.04382	1.04101	1.04007
0.08333	1.05442	1.05358	1.05141	1.04872	1.04630	1.04468	1.04411
0.00000	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884

Первая строка в Таблице 4.10.1 даёт отношение коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих трещин к коэффициенту концентрации напряжений изолированной трещины под действием той же однородной нагрузки. Все вычисления были сделаны с относительной ошибкой не превышающей 10^{-6}. Было установлено, что формулы Collins (1963) имеют точность 1% для $l > 2.5a$. Относительная ошибка центральной оценки, соответствующей (4.10.14) не превышает 2% для $l > 2.5a$. Можно также заметить, что центральная оценка всегда несколько ниже точного результата, таким образом давая в случае двух трещин очень близкую к точной нижнюю границу для параметров представляющих интерес. То же самое может быть сказано про формулы Collins (1963). Точность центральной оценки быстро ухудшается с уменьшением l, например, максимальная ошибка в коэффициенте концентрации напряжений для $l = 2.2$ (расстояние между трещинами равно 0.2 от их радиуса) составляет около 10%. Точность центральной оценки энергии трещины, соответствующая (4.10.13) намного лучше, и обсуждается в деталях в следующей секции. В последующих примерах мы рассмотрим только центральную оценку для всех параметров.

Пример 2: Бесконечный ряд одинаковых трещин. Пусть трещины имеет радиус a, и расстояние между центрами соседних трещин равно l. Трещины открываются однородным давлением p. Центральная оценка для объёма открытой трещины $2V$ может быть определена согласно (4.10.8) одним уравнением:

$$V = \frac{8}{3}\pi H a^3 p + \frac{4}{\pi} V \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{kl}\right],$$

с результатом:

$$V = \frac{V_0}{1 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{kl}\right]}, \qquad (4.10.18)$$

где $V_0 = (8/3)\pi H p$ есть соответствующий результат для случая изолированной трещины. Открывающее перемещение трещины примет форму, согласно (4.10.6)

$$w(\rho,\phi) = (a^2 - \rho^2)^{1/2}\Bigg[4pH$$

$$+\frac{2V}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^2 + (kl)^2}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}[\rho^4 + (kl)^4 - 2(\rho kl)^2\cos 2\phi]}\Bigg],$$

и, как прямое следствие предыдущего выражения, коэффициент концентрации напряжений будет определён как

$$K(\phi) = K_0\left[1 + \frac{V}{2\pi^2 pH}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^2 + (kl)^2}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}[a^4 + (kl)^4 - 2(akl)^2\cos 2\phi]}\right],$$

где K_0 обозначает, как и раньше, коэффициент концентрации напряжений изолированной трещины.

Пример 3: Полигональная конфигурация. Рассмотрим круглую трещину радиуса b, с её центром, совпадающим с центром правильного полигона, окружённую n трещинами радиуса a, с их центрами расположенными в вершинах полигона. Пусть l есть расстояние от центра полигона до его вершины. Пусть однородное давление p_c открывает центральную трещину, и однородное давление p действует внутри трещин расположенных в вершинах полигона. Благодаря симметрии системы, открывающий объём трещины может быть определён двумя уравнениями:

$$V_c = \frac{8}{3}\pi H b^3 p_c + \frac{2}{\pi} nV\left[\frac{b}{(l^2-b^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{b}{l}\right],$$

$$V = \frac{8}{3}\pi H a^3 p + \frac{2}{\pi} V_c\left[\frac{a}{(l^2-a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{l}\right]$$

$$+\frac{2}{\pi} V \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{a}{(l_k^2-a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{l_k}\right],$$

где V_c и V обозначают половину объёма центральной трещины и трещин в вершинах соответственно, и $l_k = 2l\sin(\pi k/n)$. Решение есть:

$$V_c = \frac{8}{3}\pi H \frac{b^3 p_c c_{22} + a^3 p c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \quad V = \frac{8}{3}\pi H \frac{b^3 p_c c_{21} + a^3 p c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \tag{4.10.19}$$

где

$$c_{11} = 1, \;\; c_{22} = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{a}{(l_k^2-a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{l_k}\right],$$

$$c_{21} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a}{(l^2-a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{l}\right], \;\; c_{12} = \frac{2}{\pi} n\left[\frac{b}{(l^2-b^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{b}{l}\right].$$

Открывающие перемещения центральной трещины, согласно (4.10.6), имеют вид:

$$w_c(\rho, \phi) = 4Hp_c(b^2-\rho^2)^{1/2}\left[1\right.$$

$$\left. + \frac{V}{4\pi^2 H p_c (l^2-b^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho^2 + l^2 - 2\rho l\cos(\phi - \phi_k)}\right] \tag{4.10.20}$$

Полагая $\phi_k = 2\pi k/n$, суммирование в (4.10.20) может быть выполнено, с результатом:

$$w_c(\rho,\phi) = 4Hp_c(b^2-\rho^2)^{1/2}\left[1\right.$$

$$+\frac{nV}{4\pi^2 Hp_c(l^2-b^2)^{1/2}}\frac{l^{2n}-\rho^{2n}}{(l^2-\rho^2)(\rho^{2n}+l^{2n}-2\rho^n l^n\cos n\phi)}\Bigg].$$

Коэффициент концентрации напряжений для центральной трещины имеют форму:

$$K_c=K_0\left[1+\frac{nV}{4\pi^2 Hp_c}\frac{l^{2n}-b^{2n}}{(l^2-b^2)^{3/2}(b^{2n}+l^{2n}-2b^n l^n\cos n\phi)}\right].$$

Благодаря симметрии системы, все трещины, расположенные в вершинах, будут иметь одинаковые характеристики. Следующие выражения справедливы в локальной системе полярных координат, с началом в центре трещины и полярной осью совпадающей с линией, соединяющей центр полигона с его вершиной. Открывающие перемещения трещины равны

$$w(\rho,\phi)=4Hp(a^2-\rho^2)^{1/2}\Bigg\{1+\frac{1}{4\pi^2 Hp}\Bigg[\frac{V_c}{(l^2-a^2)^{1/2}(\rho^2+l^2+2l\rho\cos\phi)}$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{V}{(l_k^2-a^2)^{1/2}[\rho^2+l_k^2+2l_k\rho\cos(\phi+\psi_k)]}\Bigg]\Bigg\},$$

где V и V_c определены в (4.10.19); $l_k=2l\sin[\pi(k-1)/n]$, и $\psi_k=2\pi(k-1)/n$. Коэффициент концентрации напряжений может быть записан как:

$$K=K_0\Bigg\{1+\frac{1}{4\pi^2 Hp}\Bigg[\frac{V_c}{(l^2-a^2)^{1/2}(a^2+l^2+2la\cos\phi)}$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{V}{(l_k^2-a^2)^{1/2}[a^2+l_k^2+2al_k\cos(\phi+\psi_k)]}\Bigg]\Bigg\}.$$

Дискуссия. Представляется интересным сравнить наши результаты с имеющимися в литературе. Статья Collins (1963), хотя и опубликована 23 года тому назад, похоже всё ещё является самым надёжным источником. Он не дал коэффициент концентрации напряжений явно, но он может быть легко выведен для случая двух равных трещина, и он примет вид в наших обозначениях:

$$K = K_0\left\{ 1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{8\varepsilon^5}{5\pi} + \frac{4\varepsilon^6}{9\pi^2} + \frac{30\varepsilon^7}{7\pi} + \frac{12\varepsilon^8}{5\pi^2} \right.$$

$$+ \frac{4\varepsilon^4}{3\pi}\left[1 + 3\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + 9\varepsilon^4 \right]\cos\phi + \frac{4\varepsilon^5}{3\pi}\left[1 + \frac{18\varepsilon^2}{5} + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} \right]\cos 2\phi$$

$$\left. + \frac{4\varepsilon^6}{3\pi}\left[1 + \frac{21\varepsilon^2}{5} \right]\cos 3\phi + \frac{4\varepsilon^7}{3\pi}\cos 4\phi + \frac{4\varepsilon^8}{3\pi}\cos 5\phi \right\}. \qquad (4.10.21)$$

Наш результат (4.10.14), если его разложить в ряд, имеет вид:

$$K = K_0\left[1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \cos k\phi\right)\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{7}{4}\varepsilon^4 + \ldots\right) \right]. \qquad (4.10.22)$$

Сравнение (4.10.21) с (4.10.22) выявляет довольно много общих членов. Хотя Коллинс сам полагал, что его результаты действительны только для трещин, чей радиус намного меньше, чем расстояние между их центрами, численное результаты указывают, что (4.10.21) является точным до 1% для $l \geq 2.5a$, что соответствует кратчайшему расстоянию описанному в литературе. Прямые вычисления показывают, что центральная оценка, соответствующая (4.10.14), не отличается от Collins (4.10.21) более, чем на 3% во всём интервале $2a < l < \infty$, и отличается меньше, чем на 0.9% для $l > 2.5a$. Коэффициент концентрации напряжений, полученный в (Андрейкив и Панасюк, 1971), есть

$$K = K_0\left(1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{2\varepsilon^4}{3\pi}\cos\phi\right).$$

Следует заметить фактор 2 пропущенный в третьем члене их результата.

Collins (1963) дал следующее выражение для энергии трещины в случае двух равных трещин:

$$W = W_0\left[1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{6\varepsilon^5}{5\pi} + \frac{4\varepsilon^6}{9\pi^2} + \frac{18\varepsilon^7}{7\pi} + \frac{32\varepsilon^8}{15\pi^2} + \ldots \right],$$

где $W_0 = (8/3)\pi H a^3 p^2$ есть энергия изолированной трещины. Наше выражение для энергии трещины имеет вид:

$$W = \frac{W_0}{1-c}, \tag{4.10.23}$$

где c определена согласно (4.10.13) как

$$c = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\varepsilon\right].$$

Разложение в ряд формулы (4.10.23) даёт:

$$W = W_0\left[1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{3\varepsilon^5}{5\pi} + \frac{4\varepsilon^6}{9\pi^2} + \frac{15\varepsilon^7}{28\pi} + \ldots\right].$$

что очень близко к результату Коллинса, наш результат немного ниже.

Таблица 4.10.2. Увеличение энергии трещины (две равные трещины).

l/a	верхняя граница	нижняя граница	центр. оценка	результат Коллинса	точный результат	ошибка (%)
2.001	—	1.008800	1.035366	1.046308	1.062976	2.6
2.005	—	1.008762	1.035105	1.045921	1.061694	2.5
2.010	—	1.008714	1.034783	1.045444	1.060378	2.4
2.020	—	1.008621	1.034152	1.044510	1.058066	2.3
2.050	—	1.008349	1.032352	1.041861	1.052411	1.9
2.100	2.965366	1.007921	1.029637	1.037908	1.045276	1.5
2.200	1.498350	1.007150	1.025091	1.031413	1.035399	1.0
2.500	1.117132	1.005370	1.016120	1.019160	1.020067	0.4
3.000	1.035432	1.003526	1.008809	1.009900	1.010035	0.1
5.000	1.003526	1.001009	1.001764	1.001834	1.001835	0.0
10.000	1.000294	1.000161	1.000214	1.000216	1.000216	0.0

Таблица 4.10.2 показывает значения W/W_0. Она подтверждает, что ошибка центральной оценки (4.10.23) меньше, чем 3%, даже для близких взаимодействий, когда кратчайшее расстояние между трещинами равно 0.001 их радиуса. Результаты Коллинса представлены, чтобы подчеркнуть точность нашего численного решения. Увеличение энергии трещин, высываемое их взаимодействием, относительно невелико даже для очень близких взаимодействий; это в основном благодаря узкой локализации эффектов взаимодействия (смотри, например, Таблицу 4.10.1.)

Представляет также интерес сравнить верхнюю границу для коэффициента концентрации напряжений, определённого в (4.10.14), с верхней границей выведенной Ioakimidis (1982). Его результат для двух равных трещин записывается в наших обозначениях:

$$K = \frac{K_0}{1 - \dfrac{2a^3}{3\pi(l-2a)}} \tag{4.10.24}$$

Если мы разложим (4.10.13) в степенной ряд, сохраняя только первые члены, результат будет:

$$V = \frac{V_0}{1 - \dfrac{2a^3}{3\pi(l-a)}} \tag{4.10.25}$$

Сравнение (4.10.24) с (4.10.25) объясняет, почему наша оценка более узкая: мы имеем в знаменателе $l-a$ в то время, как Иоакимидис имеет $l-2a$. Вот численный пример. Для $l=3a$ точный результат есть $K=1.0234K_0$. Наша верхняя граница даёт $K=1.127K_0$ с ошибкой 10%, в то время, как результат формулы (4.10.24) есть $K=1.269K_0$, с ошибкой около 25%.

Collins (1963) дал следующее выражение для энергии трещины в случае бесконечного ряда равных трещин

$$W = W_0(1 + 0.5102\varepsilon^3 + 0.7921\varepsilon^5 + 0.2603\varepsilon^6 + 1.6507\varepsilon^7 + 0.8083\varepsilon^8 + \ldots) \tag{4.10.26}$$

Наше выражение согласно (4.10.18) есть:

$$W = \frac{W_0}{1 - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon}{(k^2-\varepsilon^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{\varepsilon}{k}\right]} \tag{4.10.27}$$

Значения W/W_0, вычисленные на основе (4.10.26) и (4.10.27), могут быть найдены в (Fabrikant, 1987g). Наш (4.10.27) не отличается от (4.10.26) более, чем на 2% во всём интервале $2.001a \le l < \infty$. Конечно, это не означает, что центральная оценка так точна; это означает только, что наше простое приближённое решение почти так же точно, как очень сложные формулы Коллинса. Мы не знаем ни одного результата в литературе по механике, которые можно было бы сравнить с нашими результатами для полигональной конфигурации.

Некоторые хорошо известные результаты могут быть упрощены значительно, используя метод вычисления различных интегралов от расстояний между несколькими точками. Например, вот система основных интегральных уравнений, выведенных Панасюком и другими (1986, стр. 83) для задачи взаимодействия N копланарных тонких сфероидальных включений:

$$w_n(x_n,y_n) + H\Gamma w_n(x_n,y_n) - \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq n}}^{N}\iint_{S_k} w_k(x_k,y_k)\Gamma[(x_n-x_k)^2$$

$$+(y_n-y_k)^2]^{-3/2}\,dx_k dy_k = f_n(x_n,y_n),\ \text{for } n=1,2,\ldots,N. \tag{4.10.28}$$

Здесь f_n известная функция, w_n — нормальное перемещение на границе n—ого включения, S_n — поперечное сечение вдоль медианы, $(x_n,y_n)\in S_n$, и интегральный оператор Γ определён как

$$\Gamma\Phi(x_k,y_k) = \iint_{S_k} \frac{\Phi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{[(x_k-\xi)^2+(y_k-\eta)^2]^{1/2}}$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\iint_{\bar{S}_k}\frac{d\xi d\eta}{\{[\xi^2+\eta^2-a_k^2][(x_k-\xi)^2+(y_k-\eta)^2]\}^{1/2}}$$

$$\times\iint_{S_k}\frac{\Phi(\xi_1,\eta_1)(a_k^2-\xi_1^2-\eta_1^2)^{1/2}}{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}\,d\xi_1 d\eta_1. \tag{4.10.29}$$

Здесь $a_к$ радиус среднего поперечного сечения k—ого включения, и $\bar{S}_к$ обозначает площадь вне $S_к$. Двойные и четверные интегралы в (4.10.29), которые являются ядром интегрального уравнения (4.10.28), делают численное решение почти невозможным. Панасюк и другие (1986) ухитрились дать приближённое решение для случая, когда включения далеки одно от другого, что имеет малую практическую ценность, так как взаимодействие на таких расстояниях между включениями почти отсутствует. Мы покажем, что (4.10.28) может быть упрощено, так что его ядро будет представлено в элементарных функциях. Мы используем интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{(r^2-a^2)^{1/2}}\frac{1}{\rho_0^2+r^2-2\rho_0 r\cos(\phi_0-\psi)}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{[\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\phi-\psi)]^{1/2}}$$

$$=\frac{2\pi}{R}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-\rho^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR}\right)\right],$$

Изменением порядок интегрирования во втором интеграле (4.10.29), выполним интегрирование в $\overline{S}_к$, и интегральный оператор Γ значительно упрощается в полярных координатах, а именно,

$$\Gamma\Phi(\rho,\phi)=\frac{2}{\pi}\int\int_{S_k}\frac{1}{R}\tan^{-1}(\frac{\eta}{R})\,\Phi(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0,$$

что намного проще, чем (4.10.29). Следует напомнить, что R и η определены в (4.1.14). Мы можем также вычислить $\Gamma[(x_n-x_k)^2+(y_n-y_k)^2]^{-3/2}$ в элементарных функциях. В самом деле, мы можем получить из (1.6.19)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{1}{R}\tan^{-1}(\frac{\eta}{R})\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0}{[\rho_0^2+r^2-2r\rho_0\cos(\phi_0-\psi)]^{3/2}}$$

$$=\frac{2\pi(a^2-\rho^2)^{1/2}}{(r^2-a^2)^{1/2}[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)]},\qquad \text{для}\quad r>a.$$

Вышеприведённые результаты упрощают (4.10.28) настолько, что теперь оно может быть решено численно итерациями или аналитически.

Упражнение 4.10

1. Выведите (4.10.4).

2. Выведите (4.10.4) используя другой подход: результаты секции 4.2 в сочетании с теоремой взаимности.

3. Исследуйте сходимость итеративного процесса, приложенного к интегральному уравнению (4.10.16).

4. Рассмотрите взаимодействие трещины с микротрещиной.

5. Рассмотрите взаимодействие двух трещин вызываемое изгибом упругого пространства. Положите пространство растянутым так, что трещины не закрываются из—за изгиба.

4.11 Близкие взаимодействия копланарных круглых трещин под действием сдвигающей нагрузки

В этой секции, общий метод приложен к анализу напряжений в упругом пространстве ослабленном несколькими произвольно расположенными копланарными круглыми трещинами под действием произвольной сдвигающей нагрузки. Задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма. Число уравнений равно числу трещин, и может быть уменьшено в случае симметричной конфигурации. Уравнения несингулярны. Показано, что процедура итераций сходится, и что сходимость настолько быстрая, что практически точное численное решение может быть получено даже для очень близко расположенных трещин. Можно получить приблизительное *аналитическое* решение без необходимости решения интегральных уравнений. Оно обеспечивает достаточно точную оценку для интересующих нас параметров, как коэффициент концентрации напряжений, энергия трещины, перемещение сторон трещины, и так далее. Случай двух трещин и бесконечный ряд равных трещин рассмотрены как иллюстративные примеры.

Теория. Рассмотрим упругое пространство, ослабленное в плоскости $z=0$ n произвольно расположенными круглыми трещинами. Трещины не пересекаются. Пусть центр k—ой трещины расположен в точке с декартовыми координатами $x_к$ и $y_к$, и её радиус обозначен $a_к$. Мы введём комплексные тангенциальные перемещения $u=u_x+iu_y$, и комплексные сдвигающие напряжения $\tau=\tau_{zx}+i\tau_{yz}$. Пусть произвольные кососимметричные сдвигающие напряжения $\tau_к$ приложены к поверхностям k—ой трещины.

Мы можем выделить, без потери общности, трещину номер 1, и рассмотреть системы трещин в локальной полярной системе координат с началом координат совпадающим с центром первой трещины. Чтобы быть в состоянии использовать теорему взаимности, нам нужно рассмотреть вторую систему напряжений приложеных к той же самой системе трещин. Мы прикладываем две единичные сосредоточенные силы T_x к обеим поверхностям первой трещины в противоположных направлениях в точках полярными координатами (ρ,ϕ), и параллельно оси Ox. Мы также прилагаем сдвигающие напряжения q_{kx} и q_{ky} к остальным трещинам. Эти напряжения выбраны таким образом, чтобы обеспечить нулевое взаимное перемещение на поверхностях трещин, так что вся система ведёт себя, как изолированная трещина (номер один) в бесконечном теле. Этот выбор позволит нам использовать функции Грина для изолированной круглой трещины выведенные в секции 4.4. Следующее интегральное уравнение может быть получено, используя теорему взаимности:

$$u_{1x} + \sum_{k=2}^{n} \int\int_{S_k} q_{kx} u_{kx} \mathrm{d}S_k + \sum_{k=2}^{n} \int\int_{S_k} q_{ky} u_{ky} \mathrm{d}S_k = \int\int_{S_1} (\tau_{1x} u_{xT_x} + \tau_{1y} u_{yT_x}) \mathrm{d}S_1. \tag{4.11.1}$$

Здесь q_{kx} и q_{ky} обозначают сдвигающие напряжения в области k—ой трещины вызываемые парой единичных сосредоточенных сил, приложенных в произвольной точке первой трещины в направлении параллельном оси Ox; u_{xT_x} и u_{yT_x} — тангенциальные перемещения поверхностей первой трещины, вызываемые теми же единичными силами; и u_{1x}, u_{kx}, и u_{ky} пока неизвестные тангенциальные перемещения поверхностей первой и k—ой трещин соответственно. Аналогичные соображения, с единичными сосредоточенными силами T_y приложенными параллельно оси Oy, дают второе интегральное уравнение

$$u_{1y} + \sum_{k=2}^{n} \int\int_{S_k} s_{kx} u_{kx} \mathrm{d}S_k + \sum_{k=2}^{n} \int\int_{S_k} s_{ky} u_{ky} \mathrm{d}S_k = \int\int_{S_1} (\tau_{1x} u_{xT_y} + \tau_{1y} u_{yT_y}) \mathrm{d}S_1. \tag{4.11.2}$$

Смысл обозначений в (4.11.2) аналогичен (4.11.1). Все интегралы в (4.11.1) и (4.11.2) вычисляются на одной стороне соответствующей трещины. Теперь нам нужны явные выражения для параметров q_{kx}, q_{ky}, s_{kx}, s_{ky}, u_{xT_x}, u_{yT_x}, u_{xT_y}, u_{yT_y}. Эти выражения были выведены в секции 4.4, а именно,

$$q_{kx} = -\zeta - \Re Z, \qquad q_{ky} = -\Im Z = s_{kx}, \qquad s_{ky} = -\zeta + \Re Z, \tag{4.11.3}$$

$$u_{xT_x} = \zeta_1 - \Re Z_1 + \zeta_2 + \Re Z_2, \qquad u_{yT_x} = -\Im Z_1 + \Im Z_2,$$

$$u_{xT_y} = \Im Z_1 + \Im Z_2, \qquad u_{yT_y} = \zeta_1 - \Re Z_1 - \zeta_2 - \Re Z_2, \tag{4.11.4}$$

где $\Re$ и $\Im$ обосначают действительную и мнимую части, и

$$\zeta = \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2} R^2}, \qquad Z = \frac{G_2}{G_1} \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2}} \frac{e^{i\phi_0}(3\rho_0 e^{-i\phi_0} - \rho e^{-i\phi})}{\rho_0(\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2},$$

$$\zeta_1 = \frac{G_1}{\pi R}\tan^{-1}\frac{\eta(a_1)}{R}, \qquad Z_1 = \frac{G_2^2}{\pi G_1}\frac{(3-t_1)\,\eta(a_1)}{a_1^2(1-t_1)^2},$$

$$\zeta_2 = \frac{G_2\xi}{\pi R}\tan^{-1}\frac{\eta(a_1)}{R}, \qquad Z_2 = \frac{G_2}{\pi a_1^2}\frac{\eta(a_1)(\xi - t_1 e^{2i\phi_0})}{(1-t_1)(1-\bar{t}_1)}. \tag{4.11.5}$$

Здесь

$$R=[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}, \qquad \eta(x) = (x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}/x, \tag{4.11.6}$$

$$t_1=(\rho\rho_0/a_1^2)e^{i(\phi-\phi_0)}, \qquad \xi = (\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0})/(\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}). \tag{4.11.7}$$

Мы умножаем уравнение (4.11.2) на мнимую единицу i, добавляем результат к (4.11.1) и после подстановки (4.11.3), (4.11.4) и (4.11.5), получим:

$$u_1(\rho,\phi) = \frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\frac{\eta(a_1)}{R} - \frac{G_2^2}{G_1^2}\frac{(3-\bar{t}_1)\,\eta(a_1)}{a_1^2(1-\bar{t}_1)^2}\right]\tau_1(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\left[\frac{\xi}{R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta(a_1)}{R}\right)+\frac{\eta(a_1)\,(\xi - t_1 e^{2i\phi_0})}{a_1^2(1-t_1)(1-\bar{t}_1)}\right]\bar{\tau}_1(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n}\iint_{S_k}\left[\frac{u_k(\rho_0,\phi_0)}{R^2}+\frac{G_2}{G_1}\frac{\bar{u}_k(\rho_0,\phi_0)\,(3\rho_0 e^{-i\phi_0}-\rho e^{-i\phi})e^{i\phi_0}}{\rho_0(\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0})^2}\right]\frac{\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2-a_1^2)^{1/2}}. \tag{4.11.8}$$

Первая два интеграла в (4.11.8), хотя и выглядят очень трудными, могут быть вычислены точно и выражены в элементарных функциях для любой полиномиальной нагрузки. Они дают тангенциальные перемещения первой трещины, как будто она была бы изолирована, под действием заданной нагрузки τ_1. Остальные интегралы представляют влияние других трещин. Аналогичная процедура может быть приложена к остальным n–1 трещинам, и добавочные n–1 уравнений типа (4.11.8) могут быть получены. Заметим, что каждое такое уравнение действительно в локальной системе полярных координат относящихся к конкретной трещине. Уравнения эти несингулярны. Они могут быть решены численно итерациями. Как будет показано далее, они сходятся так быстро, что первая итерация имеет ошибку менее 2.5% даже для очень близких взаимодействий, когда две трещины разделёны только расстоянеим, равным 0.01 их радиуса.

В случае однородной сдвигающей нагрузки $\tau = \tau_0 = const,$ и система уравнений (4.11.8) упрощается следующим образом

$$u_1 = 2\tau_0 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1}(a_1^2 - \rho^2)^{1/2} + \frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n}\int\int_{S_k}\left[\frac{u_k(\rho_0,\phi_0)}{R^2}\right.$$

$$\left.+\frac{G_2}{G_1}\frac{\bar{u}_k(\rho_0,\phi_0)\,(3\rho_0 e^{-i\phi_0} - \rho e^{-i\phi})\,e^{i\phi_0}}{\rho_0(\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2}\right]\frac{\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2}}. \qquad (4.11.9)$$

В некоторых случаях мы можем получить достаточно точное *аналитическое* решение системы (4.11.8), прилагая теорему о среднем. Результат есть:

$$u_1(\rho,\phi) = \frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta(a_1)}{R}\right) - \frac{G_2^2}{G_1^2}\frac{(3-\bar{t}_1)\,\eta(a_1)}{a_1^2(1-\bar{t}_1)^2}\right]\tau_1(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\left[\frac{\xi}{R}\tan^{-1}\frac{\eta(a_1)}{R} + \frac{\eta(a_1)\,(\xi - t_1 e^{2i\phi_0})}{a_1^2(1-t_1)(1-\bar{t}_1)}\right]\bar{\tau}_1(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{(a_1^2-\rho^2)^{1/2}}{\pi^2(\rho_k^2 - a_1^2)^{1/2}}\left[\frac{U_k}{\rho^2 + \rho_k^2 - 2\rho\rho_k cos(\phi - \phi_k)} + \frac{G_2}{G_1}\frac{\bar{U}_k(3\rho_k e^{-i\phi_k} - \rho e^{-i\phi})e^{i\phi_k}}{\rho_k(\rho e^{-i\phi} - \rho_k e^{-i\phi_k})^2}\right]. \qquad (4.11.10)$$

Здесь

$$U_k = \int\int_{S_k} u_k dS_k\,,$$

и $\rho_к$ и $\phi_к$ полярные координаты точки внутри $S_к$. Хотя точное положение точки неизвестно, тот факт, что она находится внутри области $S_к$, ограничивает возможные вариации интересующих нас параметров и позволяют конструкцию верхних и нижних границ, а также достаточно точных *центральных оценок,* которые соответствуют предположению, что $\rho_к$

и $\phi_к$ расположены в *центре* k—ой трещины. Соображения симметрии также могут быть использованы, чтобы сузить интервал оценок. Будет показано далее, что центральная оценка обеспечивает в некоторых случаях достаточно точное решение задачи.

Значение U_1 может быть оценёно интегрированием (4.11.8) по области S_1. Результат есть:

$$U_1 = 2\frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\tau(\rho,\phi)(a_1^2-\rho^2)^{1/2}\rho d\rho d\phi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\int\int_{S_k}\left\{\left[\frac{a_1}{(\rho^2-a_1^2)^{1/2}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin^{-1}\frac{a_1}{\rho}\right]u_k(\rho,\phi) + \frac{G_2}{G_1}a_1^3\frac{\overline{u}_k(\rho,\phi)e^{2i\phi}}{\rho^2(\rho^2-a_1^2)^{1/2}}\right\}\rho d\rho d\phi. \qquad (4.11.11)$$

Мы можем использовать опять теорему о среднем, с результатом для центральной оценки:

$$U_1 = 2\frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_1}\tau(\rho,\phi)(a_1^2-\rho^2)^{1/2}\rho d\rho d\phi$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{a_1}{(l_{1k}^2-a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_1}{l_{1k}}\right]U_k + \frac{2G_2}{\pi G_1}a_1^3\sum_{k=2}^{n}\frac{\overline{U}_k e^{2i\phi_{1k}}}{l_{1k}^2(l_{1k}^2-a_1^2)^{1/2}}.$$

(4.11.12)

Здесь $(l_{1к},\phi_{1к})$ полярные координаты центра k—ой трещины в системе координат, имеющей начало в центре первой трещины. Интегрирование остальных n—1 уравнений по области каждой трещины ведёт к системе n линейных алгебраических уравнений, которые могут быть решены относительно неизвестных $U_к$. Их обратная подстановка в (4.11.10) даёт полное решение задачи.

Определим коэффициент концентрации напряжений на краю первой трещины как

$$K_1(\phi) = \lim_{\rho\to a_1}\{(\rho-a_1)^{1/2}\tau_1(\rho,\phi)\}.$$

Важная черта настоящего метода — возможность вычислить коэффициент концентрации напряжений прямо через перемещения (смотри вывод (2.8.46)):

$$K_1(\phi) = -\frac{a_1}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a_1}} \lim_{\rho \to a_1} \left[\frac{G_1 u_1(\rho,\phi) + G_2 e^{2i\phi}\,\overline{u}_1(\rho,\phi)}{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}} \right]. \tag{4.11.13}$$

Коэффициент концентрации напряжений для остальных трещин может быть определён тем же образом. Подстановка (4.11.8) в (4.11.13) даёт, после упрощения:

$$K_1(\phi) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a_1}} \left\{ \int_0^{2\pi}\int_0^{a_1} \frac{(a_1^2 - \rho_0^2)^{1/2}\,\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a_1^2 + \rho_0^2 - 2a_1\rho_0\cos(\phi - \phi_0)} \right.$$

$$\left. + \frac{G_2}{G_1}\frac{e^{i\phi}}{a_1} \int_0^{2\pi}\int_0^{a_1} \frac{3a_1 e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}{[a_1 e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}]^2} (a_1^2 - \rho_0^2)^{1/2}\,\overline{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \right\}$$

$$- \frac{a_1}{\pi^3(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a_1}} \sum_{k=2}^{n} \iint_{S_k} \left\{ \left[\frac{G_1}{R_1^2} + \frac{G_2^2}{G_1}\overline{\Theta}_1 e^{2i\phi} \right] u_k(\rho_0,\phi_0) \right.$$

$$\left. + G_2\left[\frac{e^{2i\phi}}{R_1^2} + \Theta_1 \right] \overline{u}_k(\rho_0,\phi_0) \right\} \frac{\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2}}. \tag{4.11.14}$$

Здесь

$$\Theta_1 = \frac{3\rho_0 e^{-i\phi_0} - a_1 e^{-i\phi}}{\rho_0 e^{-i\phi_0}(a_1 e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2}, \quad R_1 = [a_1^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 a_1 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}.$$

Первые два интеграла в (4.11.14) дают коэффициент концентрации напряжений для изолированной трещины, в то время, как оставшиеся интегралы представляют влияние других трещин. Мы увидим далее, как эти общие выражения могут быть приложены к некоторым специфическим проблемам.

Пример: Две трещины. Рассмотрим случай двух копланарных круглых трещин с радиусами a_1 и a_2 под действием однородной сдвигающей нагрузки τ_1 и τ_2 соответственно. Пусть l есть расстояние между их центрами. Как было установлено в предыдущей секции, задача сведена к вычислению интегральных характеристик U_1 и U_2. Мы рассмотрим только центральную оценку. Уравнения (4.11.12) в этом случае примут вид:

$$U_1 = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \tau_1 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{2}{\pi} U_2 \left[\frac{a_1}{(l - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_1}{l} \right] + \frac{2G_2}{\pi G_1} \frac{a_1^3 \overline{U}_2}{l^2 (l^2 - a_1^2)^{1/2}},$$

$$U_2 = \frac{4}{3}\pi a_2^3 \tau_2 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{2}{\pi} U_1 \left[\frac{a_2}{(l - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_2}{l} \right] + \frac{2G_2}{\pi G_1} \frac{a_2^3 \overline{U}_1}{l^2 (l^2 - a_2^2)^{1/2}}. \tag{4.11.15}$$

Строго говоря, теорема о среднем несправедлива в этом случае, так как мнимая часть u изменяет знак внутри трещины. Численное свидетельство будет представлено позже, чтобы оправдать пренебрежение мнимой части. Принимая это предположение, решение имеет вид:

$$U_1 = \frac{4}{3}\pi \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \frac{a_1^3 \tau_1 + c_{12} a_2^3 \tau_2}{1 - c_{12} c_{21}},$$

$$U_2 = \frac{4}{3}\pi \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \frac{c_{21} a_1^3 \tau_1 + a_2^3 \tau_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \tag{4.11.16}$$

где

$$c_{12} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a_1}{(l^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_1}{l} + \frac{G_2}{G_1} \frac{a_1^3}{l^2 (l^2 - a_1^2)^{1/2}} \right],$$

$$c_{21} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a_2}{(l^2 - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a_2}{l} + \frac{G_2}{G_1} \frac{a_2^3}{l^2 (l^2 - a_2^2)^{1/2}} \right]. \tag{4.11.17}$$

Мы покажем, что центральная оценка даёт достаточно точное решение даже для относительно близких взаимодействий трещин.

Формулы (4.11.16–4.11.17) упрощаются в случае равных трещин как $a_1 = a_2 = a$, и если $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, тогда

$$U_1 = U_2 = U = \frac{U_0}{1 - c},$$

$$c = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a}{(l^2-a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{l} + \frac{G_2}{G_1}\frac{a^3}{l^2(l^2-a^2)^{1/2}}\right]. \tag{4.11.18}$$

Здесь $U_0 = (4/3)\pi a^3\tau_0(G_1^2 - G_2^2)/G_1$. Отметим, что в случае однородной нагрузки, энергия трещины W пропорциональна U, а именно, $W = \tau_0 U$. Ясно из (4.11.18), что взаимодействие трещин увеличивает их энергию, когда приложенные нагрузки действуют в одном направлении, в противном случае, их энергия уменьшается. Перемещения поверхностей трещина примут вид, согласно (4.11.9) и (4.11.10),

$$u_1(\rho,\phi) = (a_1^2-\rho^2)^{1/2}\left\{2\tau_1\frac{G_1^2-G_2^2}{G_1}\right.$$

$$\left.+\frac{U_2}{\pi^2(l^2-a_1^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{\rho^2+l^2-2\rho l\cos\phi} + \frac{G_2}{G_1}\frac{3l-\rho e^{-i\phi}}{l(l-\rho e^{-i\phi})^2}\right]\right\},$$

$$u_2(\rho,\phi) = (a_2^2-\rho^2)^{1/2}\left\{2\tau_2\frac{G_1^2-G_2^2}{G_1}\right.$$

$$\left.+\frac{U_1}{\pi^2(l^2-a_2^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{\rho^2+l^2+2\rho l\cos\phi} + \frac{G_2}{G_1}\frac{3l+\rho e^{-i\phi}}{l(l+\rho e^{-i\phi})^2}\right]\right\}. \tag{4.11.19}$$

Мы вспоминаем, что каждое выражение в (4.11.19) действительно в *локальной* системе полярных координат, с началом координат расположенным в центре соответствующей трещины. Подстановка (4.11.19) в (4.11.13) даёт выражение для коэффициента концентрации напряжений.

Теперь нам нужно точное численное решение, чтобы оценить точность выведенных приближённых формул. Ради простоты, рассмотрим случай двух равных трещин. Представим перемещения поверхностей трещин в форме:

$$u(\rho,\phi) = 2\tau_0\frac{G_1^2-G_2^2}{G_1}(a^2-\rho^2)^{1/2} f(\rho,\phi), \tag{4.11.20}$$

где f пока неизвестная комплексная функция. Она может быть названа *функцией взаимодействия,* так как она равна отношению перемещений поверхностей взаимодействующих трещин к перемещениям изолированной трещины. Значения $f(a,\phi)$ связаны с коэффициентом концентрации напряжений взаимодействующих трещин через соотношение:

$$K(\phi) = -\frac{\sqrt{2a}}{\pi G_1}[G_1\tau_0 f(a,\phi) + G_2\bar{\tau}_0\bar{f}(a,\phi)e^{2i\phi}]. \tag{4.11.21}$$

В случае, когда τ_0 есть действительная константа, мы можем пренебречь мнимую часть f, и коэффициент концентрации напряжений может быть выражен следующим образом:

$$K(\phi) = K_0(\phi)\, f(a,\phi), \tag{4.11.22}$$

где

$$K_0(\phi) = -\frac{\sqrt{2a}}{\pi G_1}\tau_0[G_1 + G_2 e^{2i\phi}]$$

есть коэффициент концентрации напряжений для изолированной трещины. Мы назовём $f(a,\phi)$ *фактором взаимодействия*, так как его значение приблизительно равно отношению коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих трещина к тому же параметру для изолированной трещины. Подстановка (4.11.20) в (4.11.9) даёт удобное выражение для процедуры итераций:

$$u(\rho,\phi) = 2\tau_0\frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1}(a^2-\rho^2)^{1/2}\Bigg\{1$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-r_0^2)^{1/2}\, r_0 dr_0 d\psi_0}{(l^2 + r_0^2 + 2lr_0\cos\psi_0 - a^2)^{1/2}}\Bigg[\frac{f(r_0,\psi_0)}{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos(\psi-\psi_0)}$$

$$+\frac{G_2}{G_1}\frac{\bar{f}(r_0,\psi_0)\,(2l + r_0 e^{-i\psi_0} - re^{-i\psi})(l + r_0 e^{i\psi_0})}{(r_0^2 + l^2 + 2lr_0\cos\psi_0)\,(r_0 e^{-i\psi_0} - re^{-i\psi})^2}\Bigg]\Bigg\}. \tag{4.11.23}$$

Здесь мы ввели новые переменные: $r = (\rho^2 + l^2 - 2l\rho\cos\phi)^{1/2}$, $\psi = \pi - \sin^{-1}[(\rho/r)\sin\phi]$.

Интеграл в (4.11.23) имеет логарифмическую сингулярность для $r = l - a$, $\psi = 0$, когда $l \to 2a$, следовательно процедура итерации может расходиться для l очень близких к $2a$.

Прямые вычисления показывают, что процедура итераций сходится для $l = 2.01a$, (чти соответствует случаю, когда кратчайшее расстояние между трещинами равно 0.01 от их радиуса), и сходится быстро: первая итерация с $f = 1$ имеет максимум относительной ошибки меньше, чем 2.5%, и шестая итерация мижет считаться практически точным решением, так как ошибка становится меньше, чем 10^{-7}.

Точность первой итерации улучшается с увеличением расстояния между трещинами. Например, первая итерация для $l = 10$ практически точна с максимумом относительной ошибки меньше, чем 10^{-7}. Мы не смогли идти ближе, чем $l = 2.01a$, но не из–за расхождения, а потому, что стандартная программа DBLIN из библиотеки IMSL, которая была использована для вычисления интегралов, просто перестала работать. Хотя мы не имеем строгого доказательства, не исключено, что процедура итераций теоретически сходится для произвольно малого расстояния между трещинами.

В случае, когда $G_2 = 0$ (для изотропного тела это условие эквивалентно коэффициенту Пуассона равному $\nu = 0$), взаимодействие трещин под действием сдвигающей нагрузки является тем же самым, как и взаимодействие трещина под действием нормальной нагрузки (сравни (4.1.9) с (4.4.14)). Максимальное значение отношения G_2/G_1 для изотропного тела равно 1/3, и это значение было принято во всех численных процедурах, чтобы выявить максимально возможную разницу между взаимодействием трещин под действием нормальной нагрузки, и взаимодействием трещин под действием сдвигающей нагрузки.

Некоторые значения функции взаимодействия $f(\rho,\phi)$ представлены в Таблицах 4.11.1 и 4.11.2, для наиболее близких взаимодействий, соответствующих $l/a = 2.01$. Читатель может найти добавочные числовые результаты в оригинальной статье (Fabrikant, 1989).

Таблица 4.11.1. Функция взаимодействия (действительная часть для $l = 2.01a$)

ρ ϕ	0	15	30	45	90	135	180
1.00	2.14189	1.52935	1.24944	1.14303	1.06042	1.04512	1.04195
0.75	1.32715	1.28240	1.20537	1.14660	1.07271	1.05393	1.04976
0.50	1.19220	1.18283	1.16050	1.13539	1.08451	1.06514	1.06027
0.25	1.13108	1.12916	1.12389	1.11649	1.09335	1.07930	1.07499
0.00	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668

Все вычисления были выполнены с относительной ошибкой не превышающей 10^{-6}. Первая строка в Таблице 4.11.1 приблизительно равна отношению коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих

Таблица 4.11.2. Функция взаимодействия (мнимая часть) для $l = 2.01a$

$\rho \quad \phi$	0	15	30	45	90	135	180
1.00	0.00000	−0.11448	−0.09508	−0.06835	−0.02738	−0.01092	0.00000
0.75	0.00000	−0.04250	−0.05420	−0.04922	−0.02518	−0.01053	0.00000
0.50	0.00000	−0.01526	−0.02474	−0.02774	−0.01983	−0.00918	0.00000
0.25	0.00000	−0.00458	−0.00834	−0.01082	−0.01107	−0.00609	0.00000
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

трещин к коэффициенту концентрации напряжений изолированной трещины под действием той же однородной нагрузки. Данные в Таблице 4.11.2 опревдывают наше пренебрежение мнимой части функции взаимодействия при выводе приблизительного аналитического решения: максимальное значение мнимой части не превосходит 8% от соответствующей действительной части, и оно быстро меньшается с увеличением расстояния между трещинами. Данные в таблицах представлены для $0 \le \phi \le \pi$. Следующие правила должны соблюдаться, если нас интересует значение функции взаимодействия для $\phi > \pi$: $\Re f(\rho,\phi) = \Re f(\rho, 2\pi - \phi)$ и $\Im f(\rho,\phi) = -\Im f(\rho, 2\pi - \phi)$. Сравнение с результатами, данными в секции 4.10, показывает, что взаимодействие трещин под действием сдвигающей нагрузки (действующей на обе трещины в том же направлении) сильнее, чем взаимодействие под действием нормальной нагрузки. Например, максимальное значение фактора взаимодействия для случая $l = 2.01a$ и $G_2/G_1 = 1/3$ равно 2.1419 (Таблица 4.11.1), в то время как соответствующее значение в случае нормальной нагрузки есть 1.8613.

Мы можем теперь оценить точность аналитического решения, данного в (4.11.18–4.11.19). Мы можем вычислить точное значение энергии трещины W, используя вычисленные данные и сравнить его с приблизительными результатами согласно формуле (4.11.18). Отношение W/W_0 (W_0 обозначает энергию изолированной трещины) дано в Таблице 4.11.3. Приближённые

Таблица 4.11.3. Отношение W/W_0 согласно точному и приближённому решениям.

l/a	10.0	3.0	2.5	2.1	2.05	2.02	2.01
точное	1.00043	1.01940	1.03817	1.08367	1.09621	1.10603	1.11000
приближ.	1.00043	1.01736	1.03165	1.05802	1.06333	1.06684	1.06808
ошибка (%)	0.0	0.2	0.6	2.4	3.0	3.5	3.8

значения были вычислены как $W/W_0 = 1/(1 - c)$, где c определено в (4.11.18). Согласование результатов очень хорошее для $l/a = \geq 2.5$. Даже для очень близких взаимодействий ($l/a = 2.01$) относительная ошибка не превышает 4%; конечно, это происходит благодаря тому факту, что увеличение энергии взаимодействующих трещин очень незначительно. Это может быть объяснёно узкой локализацией эффектов взаимодействия (смотри Таблицу 4.11.1).

Аналитическое выражение для функции взаимодействия может быть записано согласно (4.11.19), в форме:

$$f(\rho,\phi) = 1 + \frac{G_1}{2\tau_0(G_1^2 - G_2^2)} \frac{U}{\pi^2(l^2 - a^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\phi} \right.$$

$$\left. + \frac{G_2}{G_1} \frac{3l - \rho e^{-i\phi}}{l(l - \rho e^{-i\phi})^2} \right].$$

Мы вычислили только фактор взаимодействия $f(a,\phi)$ согласно последней формуле и сравнили его с точными значениями в Таблице 4.11.4.

Таблица 4.11.4. Сравнение точного и приближённого решений для фактора взаимодействия

l/a	ϕ(дег.)–	0	30	60	90	120	150	180
2.50	Действ. точное	1.11020	1.07479	1.04136	1.02764	1.02198	1.01959	1.01892
	приближённое	1.07927	1.05793	1.03465	1.02393	1.01925	1.01722	1.01664
	ошибка (%)	2.8	1.6	0.6	0.4	0.3	0.2	0.2
	Мним. точное	0.00000	–0.01875	–0.01485	–0.00936	–0.00547	–0.00254	0.00000
	приближённое	0.00000	–0.01439	–0.01210	–0.00782	–0.00461	–0.00215	0.00000
	ошибка (%)	0.0	23.3	18.5	16.5	15.7	15.4	0.0
2.05	Действ. точное	1.63484	1.21826	1.08826	1.05542	1.04397	1.03945	1.03821
	приближённое	1.21014	1.12652	1.06405	1.04226	1.03379	1.03029	1.02931
	ошибка (%)	26.0	7.5	2.2	1.2	1.0	0.9	0.9
	Мним. точное	0.00000	–0.07834	–0.04299	–0.02416	–0.01359	–0.00622	0.00000
	приближённое	0.00000	–0.04268	–0.02834	–0.01667	–0.00951	–0.00437	0.00000
	ошибка (%)	0.0	45.5	34.1	31.0	30.0	29.7	0.0

Относительная ошибка центральной оценки действительной части фактора взаимодействия не превышает 3% для $l > 2.5a$. Хотя относительная ошибка мнимой части велика, это происходит из–за того факта, что мнимая часть мала по сравнению с действительной частью; абсолютная ошибка очень мала, и мы можем считать аналитическое решение (4.11.18–4.11.19) достаточно точным, когда расстояние между взаимодействующими трещинами больше, чем половина их радиуса. Точность центральной оценки быстро ухудшается с уменьшением расстояния l. Можно также заметить, что центральная оценка всегда несколько ниже точного значения, таким образом давая очень близкую нижнюю границу для интересующих нас параметров в случае двух взаимодействующих трещин.

Бесконечный ряд равных трещин. Пусть радиус трещин равен a, и расстояние между центрами соседних трещин l. Трещины находятся под действием однородной сдвигающей нагрузки τ. Центральная оценка для интегральных характеристик U может быть определёна из (4.11.12) одним уравнением:

$$U = \frac{4}{3}\pi a^3 \tau \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{a}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{kl}\right]U + \frac{G_2}{G_1}\frac{a^3\overline{U}}{k^2l^2(k^2l^2 - a^2)^{1/2}}\right\}.$$

Если мы пренебрежём мнимую часть U, тогда решение примет вид:

$$U = \frac{U_0}{1 - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{kl}\right) + \frac{G_2}{G_1}\frac{a^3}{k^2l^2(k^2l^2 - a^2)^{1/2}}\right\}}, \tag{4.11.24}$$

где $U_0 = (4/3)\pi a^3\, \tau(G_1^2 - G_2^2)/G_1$ соответствует случаю изолированной трещины. Перемещение поверхностей трещины примет форму согласно (4.11.9) и (4.11.10):

$$u(\rho,\phi) = (a^2 - \rho^2)^{1/2}\left\{2\tau\frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{U}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(\rho^2 + k^2l^2)}{\rho^4 + k^4l^4 - 2\rho^2k^2l^2\cos 2\phi} + \frac{G_2}{G_1}\frac{3k^2l^2 - \rho^2 e^{-2i\phi}}{(k^2l^2 - \rho^2 e^{-2i\phi})^2}\right]\frac{1}{(k^2l^2 - a^2)^{1/2}}\right\}, \tag{4.11.25}$$

и подстановка (4.11.25) в (4.11.13) даст выражение для коэффициента концентрации напряжений.

Дискуссия. Представляется интересным сравнить наши результаты с теми, которые опубликованы в литературе. Мы нашли только одну статью (Fu and Keer, 1969) где проблема двух взаимодействующих копланарных круглых трещин была рассмотрена методом, аналогичным Collins (1963). Только случай, когда расстояние между центрами трещина l намного больше, чем радиус трещины a $(\varepsilon = a/l \ll 1)$ был рассмотрен. Fu and Keer рассмотрели в деталях две равные трещины под действием однородной сдвигающей нагрузки, действующей на обе трещины в том же направлении горизонтально (Случай a), и действующие в противоположных направлениях (Случай b). Мы нашли несколько мест в их решении, которые являются неправильными. Один из результатов (Fu and Keer, 1969, стр. 371) показывает, что абсолютное значение m—ой гармоники $(m = 1,2,3, \ldots)$ вертикального перемещения u_y *равен* соответствующей гармонике горизонтального перемещения u_x. Это не может быть правильно, так как вертикальные перемещения зависят от отношения G_2/G_1 (в изотропном случае это отношение равно $\nu/(2-\nu)$, где ν есть коэффициент Пуассона), и вертикальные перемещения исчезают, когда $G_2 = 0$ $(\nu = 0)$).

Возможно также вывести выражения для увеличения энергии деформации W трещин. Выражение, данное в Fu and Keer (1969), в наших обозначениях имеет вид:

$$W = W_0\left[1 \mp \frac{4}{3\pi}\varepsilon^3 \mp \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5\pi}\right)\varepsilon^5 + \frac{16}{9\pi^2}\varepsilon^6\right], \tag{4.11.26}$$

где $\varepsilon = a/l$; $\mp$ знак соответствует случаям (a) и (b) соответственно, и $W_0 = (4/3)\pi a^3\tau^2(G_1^2 - G_2^2)/G_1$ обозначает энергию изолированной трещины. Заметим очевидную опечатку в (4.11.26): знак плюс должен соответствовать случаю (a) и минус случаю (b). Наше выражение для энергии трещина есть

$$W = \frac{W_0}{1-c}, \tag{4.11.27}$$

где c определён согласно (4.11.18) как

$$c = \frac{2}{\pi}\left[\frac{a}{(l^2-a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\frac{a}{l} + \frac{G_2}{G_1}\frac{a^3}{l^2(l^2-a^2)^{1/2}}\right]. \tag{4.11.28}$$

Разложение (4.11.27) в ряд даёт результат:

$$W = W_0\left[\, 1 + \frac{2\varepsilon^3}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{G_2}{G_1}\right) + \frac{\varepsilon^5}{\pi}\left(\frac{3}{5} + \frac{G_2}{G_1}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{4\varepsilon^6}{\pi^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{G_2}{G_1}\right)^2 + \frac{3\varepsilon^7}{4\pi}\left(\frac{5}{7} + \frac{G_2}{G_1}\right) + \ldots \,\right]. \tag{4.11.29}$$

Имеется явное разногласие между (4.11.26) и (4.11.29): каждый член в (4.11.29) зависит от отношения G_2/G_1, в то время как каждый член в (4.11.26) не зависит от упругих констант. В случае изотропного тела $G_2/G_1 = \nu/(2-\nu)$ (как и должно быть), и мы можем заметить согласие между (4.11.26) и (4.11.29) только для $\nu = 1/2$ что является просто совпадением. Collins (1963) дал следующее выражение для случая двух трещин под действием *нормальной* нагрузки:

$$W = W_0\left[\, 1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{6\varepsilon^5}{5\pi} + \frac{4\varepsilon^6}{9\pi^2} + \frac{18\varepsilon^7}{7\pi} + \frac{32\varepsilon^8}{15\pi^2} + \ldots \,\right]. \tag{4.11.30}$$

Как было отмечено ранее, в случае, когда $G_2 = 0$ ($\nu = 0$), взаимодействие трещин под действием сдвигающей нагрузки математически эквивалентно взаимодействию под действием нормальной нагрузки, это означает, что обе формулы (4.11.26) и (4.11.29) должны согласоваться с (4.11.30) для $\nu = 0$. Можно заметить, что это не соблюдается для выражения (4.11.26).

Упражнение 4.11

1. Выведите (4.11.8).
2. Установите (4.11.11).
3. Исследуйте сходимость процедуры итерации, приложенной к (4.11.8).
4. Рассмотрите случай полигональной конфигурации идентичных трещин.

Аппендикс А4.1

Здесь дана главная потенциальная функция, вместе с различными частными производными. Мы определяем потенциальную функцию как

$$\Psi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \ln(R_0 + z)\, \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \,,$$

где $R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Интеграл может быть вычислен в элементарных функциях:

$$\Psi = \frac{\pi}{2}\Big[z(2a^2 - \rho^2 + \frac{2}{3}z^2)\sin^{-1}(\frac{a}{l_2}) + \frac{1}{3}(a^2 - l_1^2)^{1/2}(5\rho^2 - \frac{10}{3}a^2$$

$$- 2l_2^2 - \frac{11}{3}l_1^2) + \frac{4}{3}a^3\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}]\Big] \tag{A4.1.1}$$

Следующие производные могут быть вычислены:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \pi x\Big[-z\sin^{-1}\frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2}(1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2}) + \frac{2a^3}{3\rho^2}\Big] \tag{A4.1.2}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \pi y\Big[-z\sin^{-1}\frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2}(1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2}) + \frac{2a^3}{3\rho^2}\Big] \tag{A4.1.3}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\pi}{2}\Big[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2)\sin^{-1}\frac{a}{l_2} - \frac{2a^2 - 3l_1^2}{a}(l_2^2 - a^2)^{1/2} \Big] \tag{A4.1.4}$$

$$\Lambda\Psi = \pi\rho e^{i\phi}\Big[-z\sin^{-1}\frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2}(1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2}) + \frac{2a^3}{3\rho^2}\Big] \tag{A4.1.5}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \pi\Big[-z\sin^{-1}\frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2}$$

$$+ (1 - \frac{2x^2}{\rho^2})\frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2}\Big] \tag{A4.1.6}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \pi\Big[-z\sin^{-1}\frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2}$$

$$+\left(1-\frac{2y^2}{\rho^2}\right)\frac{2a^3-(l_1^2+2a^2)\,(a^2-l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2}\Bigg] \tag{A4.1.7}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=-2\pi xy\,\frac{2a^3-(l_1^2+2a^2)\,(a^2-l_1^2)^{1/2}}{3\rho^4} \tag{A4.1.8}$$

$$\Lambda^2\Psi=-2\pi e^{2i\phi}\,\frac{2a^3-(l_1^2+2a^2)\,(a^2-l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2} \tag{A4.1.9}$$

$$\Delta\Psi=2\pi\left[-z\sin^{-1}\frac{a}{l_2}+(a^2-l_1^2)^{1/2}\right] \tag{A4.1.10}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=2\pi\left[z\sin^{-1}\frac{a}{l_2}-(a^2-l_1^2)^{1/2}\right] \tag{A4.1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda\Psi=\pi\rho e^{i\phi}\left[-\sin^{-1}\frac{a}{l_2}+\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2}\right] \tag{A4.1.12}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z}=\pi\left\{-\sin^{-1}\frac{a}{l_2}+\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2}\left[1+\frac{2a^2x^2}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\right]\right\} \tag{A4.1.13}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z}=\pi\left\{-\sin^{-1}\frac{a}{l_2}+\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2}\left[1+\frac{2a^2y^2}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\right]\right\} \tag{A4.1.14}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}=2\pi\left\{\sin^{-1}\frac{a}{l_2}-\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}\right\} \tag{A4.1.15}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y\partial z}=2\pi\,\frac{a^3xy(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^4(l_2^2-l_1^2)} \tag{A4.1.16}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2}=2\pi\,\frac{a^2x(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)} \tag{A4.1.17}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2} = 2\pi\frac{a^2 y(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \tag{A4.1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda^2\Psi = 2\pi\rho^2 e^{2i\phi}\frac{a^3(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^4(l_2^2 - l_1^2)} \tag{A4.1.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta\Psi = 2\pi\left[-\sin^{-1}\frac{a}{l_2} + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}\right] \tag{A4.1.20}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Lambda\Psi = 2\pi a^2\rho e^{i\phi}\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \tag{A4.1.21}$$

$$\Lambda\Delta\Psi = -2\pi a^2\rho e^{i\phi}\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \tag{A4.1.22}$$

$$\Lambda^3\Psi = -2\pi e^{3i\phi}\left\{\frac{4[(l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2} - 2a^3]}{3\rho^3} + \frac{a l_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}\right\} \tag{A4.1.23}$$

$$\frac{\partial^4\Psi}{\partial z^4} = -2\pi\frac{za[l_1^4 + a^2(2a^2 + 2z^2 - 3\rho^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \tag{A4.1.24}$$

$$\frac{\partial^4\Psi}{\partial\rho\partial z^3} = -2\pi\frac{l_1(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)^3}[a^2(4l_2^4 - 5\rho^2) + l_1^4] \tag{A4.1.25}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Lambda^2\Psi = 2\pi\rho^2 e^{2i\phi}a^3 z\frac{a^2(6l_2^2 - 2l_1^2 + \rho^2) - 5l_2^4}{l_2^4(l_2^2 - l_1^2)^3(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \tag{A4.1.26}$$

Следующие тождества были использованы при выводе (A4.1.1–A4.1.26):

$$l_1 l_2 = a\rho, \quad l_1^2 + l_2^2 = a^2 + \rho^2 + z^2, \tag{A4.1.27}$$

$$(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}(l_2^2 - a^2)^{1/2} = z l_2, \quad (a^2 - l_1^2)^{1/2}(\rho^2 - l_1^2)^{1/2} = z l_1,$$

$$(a^2-l_1^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2}=za, \quad (l_2^2-\rho^2)^{1/2}(\rho^2-l_1^2)^{1/2}=z\rho. \tag{A4.1.28}$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial z}=-\frac{zl_1}{l_2^2-l_1^2}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial z}=\frac{zl_2}{l_2^2-l_1^2},$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \rho}=\frac{al_2-\rho l_1}{l_2^2-l_1^2}=\frac{\rho(a^2-l_1^2)}{l_1(l_2^2-l_1^2)}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \rho}=\frac{\rho l_2-al_1}{l_2^2-l_1^2}=\frac{\rho(l_2^2-a^2)}{l_2(l_2^2-l_1^2)}. \tag{A4.1.29}$$

Аппендикс A4.2

Здесь мы представляем некоторые неопределённые интегралы от выражений, содержащих l_1 и l_2.

$$\int (l_2^2-a^2)^{1/2}\mathrm{dz}=(a^2-l_1^2)^{1/2}\frac{l_2^2-2a^2}{2a}+\frac{\rho^2}{2}\ln[l_2+(l_2^2-\rho^2)^{1/2}], \tag{A4.2.1}$$

$$\int (l_2^2-a^2)^{1/2}\, l_1^2\mathrm{dz}=-a(a^2-l_1^2)^{1/2}\frac{l_1^2+2a^2}{3}+a^2\rho^2\ln[l_2+(l_2^2-\rho^2)^{1/2}], \tag{A4.2.2}$$

$$\int (a^2-l_1^2)^{1/2}\mathrm{dz}=\frac{2a^2-l_1^2}{2a}(l_2^2-a^2)^{1/2}+\frac{\rho^2}{2}\sin^{-1}(\frac{a}{l_2}), \tag{A4.2.3}$$

$$\int (a^2-l_1^2)^{1/2}\, l_1^2\mathrm{dz}=-\frac{l_1^2(2l_1^2+3\rho^2)}{8a}(l_2^2-a^2)^{1/2}+\rho^2(\frac{3}{8}\rho^2-a^2)\sin^{-1}(\frac{a}{l_2}), \tag{A4.2.4}$$

$$\int (l_2^2-a^2)^{1/2}\frac{l_1^2}{l_2^2}\mathrm{dz}=a(a^2-l_1^2)^{1/2}\left[1-\frac{8a^2}{15\rho^2}-\frac{4a^2+3l_1^2}{15l_2^2}\right], \tag{A4.2.5}$$

$$\int \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}\mathrm{dz}=-\sin^{-1}(\frac{a}{l_2}), \tag{A4.2.6}$$

$$\int \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\mathrm{dz}=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2}-\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})\right], \tag{A4.2.7}$$

$$\int \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \mathrm{d}z = z\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - (a^2 - l_1^2)^{1/2} + a\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}], \qquad (\text{A4.2.8})$$

$$\int z\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \mathrm{d}z = \frac{1}{4}(2a^2 + 2z^2 + \rho^2)\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + (l_2^2 - a^2)^{1/2}\frac{2a^2 + l_1^2}{4a}, \qquad (\text{A4.2.9})$$

$$\int z^2\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \mathrm{d}z = \frac{1}{3}z^3\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{1}{18}(a^2 - l_1^2)^{1/2}(3l_2^2 + 6\rho^2 + 8a^2 - 2l_1^2)$$

$$-\frac{1}{6}a(3\rho^2 + 2a^2)\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}]. \qquad (\text{A4.2.10})$$

Интегрирование в (А4.2.1–А4.2.10) было выполнено по частям, с соответствующей заменой переменных: $z = (a^2 - l_1^2)^{1/2}(\rho^2 - l_1^2)^{1/2}/l_1$ или $z = (l_2^2 - a^2)^{1/2}(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}/l_2$.

$$\int \rho\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \mathrm{d}\rho = \frac{\rho^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{z(2a^2 - l_1^2)}{2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}, \qquad (\text{A4.2.11})$$

$$\int \rho^2\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)\mathrm{d}\rho = \frac{\rho^3}{3}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{z\rho(2a^2 - l_1^2)}{6(a^2 - l_1^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{6}a(a^2 - 3z^2)\cosh^{-1}\frac{l_2}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{6}z(3a^2 - z^2)\sin^{-1}\frac{l_1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}, \qquad (\text{A4.2.12})$$

$$\int a\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \mathrm{d}a = \frac{1}{4}\left[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2)\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)\right.$$

$$\left. + l_1(\rho^2 - l_1^2)^{1/2} - 2z(a^2 - l_1^2)^{1/2}\right]. \qquad (\text{A4.2.13})$$

Интегрирование в (А4.2.11–А4.2.12) было выполнено по частям, с соответствующей заменой переменных: $\rho = y[1 + z^2/(a^2 - y^2)]^{1/2}$, которое соответствует подстановке $l_2 = y$. Аналогичное замечание справедливо для формулы (А4.2.13).

Аппендикс A4.3

Два важных интеграла вычислены здесь. Первый интеграл есть:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho e^{i\phi}-re^{i\psi}}{R^3(M,N)}\tan^{-1}\left[\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(N,N_0)}. \tag{A4.3.1}$$

Интеграл (A4.3.1) может быть вычислен, используя (40), что ведёт к эквивалентному выражению:

$$\int_\infty^z \Lambda\left[\frac{1}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R(M,N_0)}\right)\right]\mathrm{d}z \tag{A4.3.2}$$

Мы можем использовать следующие тождества:

$$\Lambda h = -\frac{h\rho e^{i\phi}}{l_2^2-l_1^2}, \tag{A4.3.3}$$

$$\Lambda\left[\frac{1}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R(M,N_0)}\right)\right]$$

$$= -\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^3}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)-\frac{h}{R_0^2+h^2}\left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2}\right]. \tag{A4.3.4}$$

Обозначение R_0 в этом Аппендиксе использовано как сокращение для $R(M,N_0)$. Подстановка (A4.3.4) в (A4.3.2) даёт, после интегрирования по частям:

$$\int_\infty^z \Lambda\left[\frac{1}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R(M,N_0)}\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}\left[\frac{z}{R_0}\tan^{-1}\frac{h}{R_0}-\int_\infty^z \frac{z}{R_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\tan^{-1}\frac{h}{R_0}\right)\mathrm{d}z\right]$$

$$-\int_{\infty}^{z}\left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2}\right]\frac{h\mathrm{d}z}{R_0^2+h^2}. \tag{A4.3.5}$$

Следующие тождества будут использованы теперь:

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{h(\rho^2-l_1^2)}{z(l_2^2-l_1^2)}, \tag{A4.3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)=\frac{hR_0}{z(R_0^2+h^2)}\left[\frac{\rho^2-l_1^2}{l_2^2-l_1^2}-\frac{z^2}{R_0^2}\right]. \tag{A4.3.7}$$

Подстановка (А4.3.7) в (А4.3.5) позволяет нам продолжать:

$$-\frac{1}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}\left\{\frac{z}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)-\int_{\infty}^{z}\frac{h}{R_0^2+h^2}\left[\frac{\rho^2-l_1^2}{l_2^2-l_1^2}-\frac{z^2}{R_0^2}\right]\mathrm{d}z\right\}$$

$$-\int_{\infty}^{z}\left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2}\right]\frac{h\mathrm{d}z}{R_0^2+h^2}=-\frac{z}{(\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0})R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)$$

$$+\int_{\infty}^{z}\frac{h\,\mathrm{d}z}{(R_0^2+h^2)(l_2^2-l_1^2)}\left[\frac{\rho^2-l_1^2}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}-\rho e^{i\phi}\right]$$

$$-\int_{\infty}^{z}\frac{h\mathrm{d}z}{R_0^2(R_0^2+h^2)}\left[\frac{z^2}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}+\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}\right]$$

$$=\frac{1}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}\left\{-\frac{z}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)+\int_{\infty}^{z}\left[\frac{\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}-l_1^2}{l_2^2-l_1^2}-1\right]\frac{h\mathrm{d}z}{R_0^2+h^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left\{ -\frac{z}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \int_{\infty}^{z} \left[\frac{\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)} - l_2^2}{l_2^2 - l_1^2} \right] \frac{h dz}{R_0^2 + h^2} \right\}$$

(A4.3.8)

Принимая во внимание тождество:

$$R_0^2 + h^2 = (l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})\,(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})/l_2^2, \qquad (A4.3.9)$$

интеграл в (A4.3.8) может быть преобразован следующим образом:

$$\int \frac{h l_2^2\, dz}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})} = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a} \int \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2} l_2^2\, dl_2}{z l_2 (l_2^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})}$$

$$= (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \int \frac{l_2 dl_2}{(l_2^2 - a^2)^{1/2} (l_2^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})} = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1}\frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{\bar{s}},$$

(A4.3.10)

где $\bar{s} = (a^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}$. Наконец, формулы (A4.3.8) и (A4.3.10) позволяют нам вычислить начальный интеграл (A4.3.1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}}{R^3(M,N)} \tan^{-1}\left[\frac{(a^2 - r^2)^{1/2}(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(N,N_0)}$$

$$= \frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left[\frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1}\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z}{R(M,N_0)} \tan^{-1}\frac{h}{R(M,N_0)} \right].$$

(A4.3.11)

Мы напоминаем, что h определён в (4.1.18), и $R(M,N_0) = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + z^2]^{1/2}$. Правая сторона в (A4.3.11) упрощается в предельном случае $\rho_0 \to \rho$ и $\phi_0 \to \phi$, а именно,

$$\frac{\rho e^{i\phi}}{2(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \tan^{-1}\frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - \rho^2} \right].$$

(A4.3.12)

Второй интеграл, который нужно вычислить, есть:

$$I_2 = \int \frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right]\mathrm{d}z\,. \tag{A4.3.13}$$

Мы начинаем с интегрирования по частям. Результат есть:

$$I_2 = \int \frac{z\mathrm{d}z}{R_0^2 h} - \frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \int \frac{\mathrm{d}z}{R_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right). \tag{A4.3.14}$$

Мы модифицируем (A4.3.7) следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) = \frac{R_0}{R_0^2 + h^2}\left[\frac{h(\rho^2 - l_1^2)}{z(l_2^2 - l_1^2)} + \frac{z}{h}\right] - \frac{z}{hR_0}$$

$$= \frac{R_0(l_2^2 - a^2)^{1/2}(l_2^4 - \rho^2\rho_0^2)}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}(l_2^2 - l_1^2)l_2^2(R_0^2 + h^2)} - \frac{z}{hR_0}\,. \tag{A4.3.15}$$

Подставляя (A4.3.15) в (A4.3.14) и принимая во внимание (A4.3.9) и (A4.1.29), мы получим:

$$I_2 = -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)$$

$$+\frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}\int \frac{(l_2^4 - \rho^2\rho_0^2)\,\mathrm{d}l_2}{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})} \tag{A4.3.16}$$

Интеграл в (A4.3.16) элементарен, то—есть:

$$I_2 = -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}\Bigg\{\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}]$$

$$-\frac{1}{(\zeta - 1)^{1/2}}\tan^{-1}\left[\frac{a(\zeta - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}\right] - \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}\tan^{-1}\left[\frac{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}\right]\Bigg\},\ \zeta = \frac{\rho}{\rho_0}e^{i(\phi-\phi_0)} \tag{A4.3.17}$$

Так как интегрирование было неопределённым, мы могли потерять функцию других переменных, кроме z. Эта функция может быть найдена из условия, что результат интегрирования не должен иметь логарифмическую сингулярность в точке $\rho = 0$ или при $q = 0$. Функции, удаляющие такую сингулярность, имеют вид: $\tan^{-1}[(\zeta - 1)^{1/2}]$ и $\tan^{-1}[(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}]$. Окончательный результат может теперь быть представлен в форме:

$$\int \frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \frac{1}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}\Bigg\{\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}]$$

$$-2\Re\left(\frac{1}{(\zeta-1)^{1/2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\zeta-1)^{1/2}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\zeta-1)^{1/2}\right]\right)\Bigg\}, \quad \zeta = \frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\phi-\phi_0)},$$

что доказывает правильность формулы (5.1.13).

Аппендикс А4.4

Некоторые интегралы, относящиеся к задаче о круглой трещине под действием сдвигающей нагрузки, представлены здесь, без вывода. Первый интеграл, который может быть вычислен прямо, есть:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0\mathrm{e}^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2 - r\rho_0\mathrm{e}^{i(\psi-\phi_0)})^2}\,\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(M,N)}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$= \pi\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a^3}\Bigg\{\frac{\rho^2}{t}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{(l_2^2-a^2)^{1/2}[l_1^2(4-t)-3a^2]}{a(1-t)^2}$$

$$+\frac{1}{(1-t)^{3/2}}\left[\frac{3z^2}{1-t} + a^2(3-2t) - \frac{\rho^2}{t}\right]\tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\Bigg\}. \tag{A4.4.1}$$

Здесь t определено в (4.4.16). Приложение оператора Λ к обеим сторонам (А4.4.1) даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2}\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR^3(M,N)}(\rho e^{i\phi}-re^{i\psi})\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$=-2\pi\rho e^{i\phi}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a^3}\left\{\frac{1}{t}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)+\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(1-t)(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t(1-t)^{3/2}}\tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\right\}. \qquad (A4.4.2)$$

Другое приложение Λ к обеим сторонам (А4.4.2) даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2}\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR^5(M,N)}\,3(\rho e^{i\phi}-re^{i\psi})^2\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$=2\pi\frac{\rho^2 e^{2i\phi}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2}(3l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}. \qquad (A4.4.3)$$

Дифференцирование по z обеих сторон (А4.4.1) ведёт к результату:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2}\frac{z(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR^3(M,N)}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$=2\pi\frac{ha^2}{s^2}\left[\frac{3}{s^2}-\frac{t}{l_2^2-a^2t}-\frac{3(l_2^2-a^2)^{1/2}}{s^3}\tan^{-1}\left(\frac{s}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\right]. \qquad (A4.4.4)$$

Здесь h определен в (4.1.18). Другое дифференцирование обеих сторон (А4.4.4) по z даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2}\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR^3(M,N)}\left(1-\frac{3z^2}{R^2(M,N)}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$= 2\pi \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a^3(1-t)} \left\{ \frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})} \left[\frac{3(l_2^2-l_1^2 t)}{1-t} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}(2l_2^2+l_1^2 t-3\rho^2)}{l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}} \right] - \frac{3}{(1-t)^{3/2}} \tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}} \right) \right\}. \tag{A4.4.5}$$

Приложение оператора Λ к обеим сторонам (A4.4.4) даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{z(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR^5(M,N)} 3(\rho e^{i\phi}-re^{i\psi})\, r dr d\psi$$

$$= 2\pi \frac{h\rho e^{i\phi}(3l_2^2-a^2 t)}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-a^2 t)^2}. \tag{A4.4.6}$$

Различный результат получается если Λ приложена к комплексно сопряжённому выражению (A4.4.4), а именно,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{-i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{-i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{z(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR^5(M,N)} 3(\rho e^{i\phi}-re^{i\psi})\, r dr d\psi$$

$$= 2\pi h \left\{ \frac{a^2}{\bar{s}^2}\rho_0 e^{i\phi_0} \left[\frac{15(l_2^2-a^2)^{1/2}}{\bar{s}^5} \tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}} \right) - \frac{15}{\bar{s}^4} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{5}{\bar{s}^2(l_2^2-a^2\bar{t})} + \frac{2\bar{t}}{(l_2^2-a^2\bar{t})^2} \right] + \frac{\rho e^{i\phi}(3l_2^2-a^2\bar{t})}{(l_2^2-l_1^2)(l_2^2-a^2\bar{t})^2} \right\}. \tag{A4.4.7}$$

Интегрирование обеих сторон (A4.4.1) по z даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a} \ln[R(M,N)+z]\, r dr d\psi$$

$$= \pi(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Bigg\{2\ln[l_2+(l_2^2-\rho^2)^{1/2}]-2+\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a^3(1-t)}\Bigg[-\frac{z^2}{1-t}+\rho^2$$

$$-\frac{1}{3}(l_1^2+2a^2)\Bigg]+\frac{z\bar{\zeta}}{a}\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})+\frac{z}{a^3(1-t)^{3/2}}\Bigg[\frac{z^2}{1-t}+a^2(3-2t-\bar{\zeta})\Bigg]$$

$$\times\tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)+2(\bar{\zeta}-1)^{1/2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\right]\Bigg\}.$$

(A4.4.8)

Здесь ζ определена в (A4.3.17), и черта, как обычно, указывает на комплексно сопряжённое значение. Аналогичное интегрирование (A4.4.3) по z даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2}\,\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a}\,\Lambda^2\{\ln[R(M,N)+z]\}\;r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{2\pi}{\bar{q}}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\left\{-\frac{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{e^{i\phi}}{\rho}\left[\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\left(1+\frac{\rho^2}{l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}}\right)-1\right]\right\}. \qquad \text{(A4.4.9)}$$

Мы напоминаем, что q определён в (4.1.28), и

$$\Lambda^2\ln[R(M,N)+z]=-(\rho e^{i\phi}-re^{i\psi})^2\,\frac{2R(M,N)+z}{R^3(M,N)\,[R(M,N)+z]^2}$$

(A4.4.10)

Ещё одно приложение оператора Λ к (A4.4.9) даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(3a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})}{(a^2-r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2}\,\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a}\,\Lambda^3\{\ln[R(M,N)+z]\}\;rdrd\psi$$

$$= \frac{2\pi}{\bar{\bar{q}}}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\left\{\frac{3(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}^2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\right]\right.$$

$$-\frac{e^{2i\phi}(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(l_2^2-l_1^2)}\left[\frac{l_2^2+\rho^2}{l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}}+\frac{2\rho^2(l_2^2-a^2)}{(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}+1\right]$$

$$\left.+\frac{e^{i\phi}}{\rho}\left[\frac{3}{\bar{\bar{q}}}+\frac{2e^{i\phi}}{\rho}-\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\left(\frac{l_2^2+2\rho^2}{\bar{\bar{q}}(l_2^2-\rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}+2\left(\frac{1}{\bar{\bar{q}}}+\frac{e^{i\phi}}{\rho}\right)\right)\right]\right\}. \tag{A4.4.11}$$

Здесь

$$\Lambda^3\ln[R(M,N)+z]=(\rho e^{i\phi}-re^{i\psi})^3\,\frac{8R^2(M,N)+9R(M,N)z+3z^2}{R^5(M,N)\,[R(M,N)+z]^3}. \tag{A4.4.12}$$

Формула (4.1.27) может быть использована для получения некоторых дополнительных результатов. Интегрирование (4.1.27) по z даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho e^{i\phi}-re^{i\psi}}{R(M,N)[R(M,N)+z]}\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right)\frac{r\,dr\,d\psi}{R(N,N_0)}$$

$$=\frac{2\pi}{\bar{\bar{q}}}\left\{R_0\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)-(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\left[\frac{z}{\bar{\bar{s}}}\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\bar{\zeta}-1)^{1/2}\left(\tan^{-1}\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}-\tan^{-1}\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\right]\right\}. \tag{A4.4.13}$$

Следующее неопрделённые интегралы были использованы здесь:

$$\int\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)dz = z\tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)$$

$$+\bar{s}\left[\ln[l_2+(l_2^2-\rho^2)^{1/2}]+(\zeta-1)^{1/2}\tan^{-1}\left(\frac{a(\zeta-1)^{1/2}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}}\right)\right],$$

$$\int \frac{z}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\mathrm{d}z = R_0\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) - (a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Big[-\ln[l_2+(l_2^2-\rho^2)^{1/2}]$$

$$+ (\bar\zeta-1)^{1/2}\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar\zeta-1)^{1/2}}\right) + (\zeta-1)^{1/2}\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\zeta-1)^{1/2}}\right)\Big]. \tag{A4.4.14}$$

Прилагая оператор Λ к обеим сторонам (A4.4.13), мы получаем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{(\rho \mathrm{e}^{i\phi} - r\mathrm{e}^{i\psi})^2[2R(M,N)+z]}{R^3(M,N)\,[R(M,N)+z]^2}\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right)\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(N,N_0)}$$

$$= \frac{2\pi}{\bar q}\Bigg\{\frac{R_0^2+z^2}{R_0\bar q}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + (a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Bigg[\frac{z}{\bar s}\left(\frac{\rho_0 \mathrm{e}^{i\phi_0}}{\bar s^2} - \frac{2}{\bar q}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\bar s}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)$$

$$+ \frac{(\bar\zeta-1)^{1/2}}{\bar q}\left(\tan^{-1}\frac{1}{(\bar\zeta-1)^{1/2}} - \tan^{-1}\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar\zeta-1)^{1/2}}\right) + \frac{\mathrm{e}^{i\phi}}{\rho}\Bigg] - \frac{\mathrm{e}^{i\phi}ha^2}{\rho\bar s^2}\Bigg\}, \tag{A4.4.15}$$

и ещё одно приложение Λ к (A4.4.15) даёт:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{(\rho \mathrm{e}^{i\phi} - r\mathrm{e}^{i\psi})^3[8R^2(M,N)+9R(M,N)z+3z^2]}{R^5(M,N)\,[R(M,N)+z]^3}$$

$$\times\tan^{-1}\left(\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right)\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(N,N_0)}$$

$$= \frac{2\pi}{\bar q}\Bigg\{\frac{3R_0^4+6R_0^2z^2-z^4}{R_0^3\bar q^2}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + (a^2-\rho_0^2)^{1/2}\frac{\mathrm{e}^{i\phi}}{\rho}\left(\frac{2\mathrm{e}^{i\phi}}{\rho} + \frac{3}{\bar q}\right)$$

$$- (a^2-\rho_0^2)^{1/2}\Bigg[\frac{z}{\bar s}\left(\frac{8}{\bar q^2} - \frac{4\rho_0\mathrm{e}^{i\phi_0}}{\bar s^2\bar q} + \frac{3\rho_0^2\mathrm{e}^{2i\phi_0}}{\bar s^4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\bar s}{(l_2^2-a^2)^{1/2}}\right)$$

$$-\frac{3(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}^2}\left(\tan^{-1}\frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}-\tan^{-1}\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}\right)\Bigg]$$

$$+\frac{ha^2\mathrm{e}^{i\phi}}{\rho\bar{s}^2}\left[\frac{2\rho_0\mathrm{e}^{i\phi_0}}{\bar{s}^2}-\frac{2\mathrm{e}^{i\phi}}{\rho}-\frac{2}{\bar{\bar{q}}}+\left(\frac{\rho_0\mathrm{e}^{i\phi_0}}{\bar{s}^2}-\frac{2}{\bar{\bar{q}}}\right)\frac{(l_2^2-a^2)\bar{t}}{l_2^2-a^2\bar{t}}\right]$$

$$-\frac{h}{R_0^2+h^2}\left[\frac{\bar{q}\rho\mathrm{e}^{3i\phi}}{l_2^2-l_1^2}+\frac{\mathrm{e}^{i\phi}(l_2^2-\rho^2)}{\rho\bar{q}}-\frac{z^2q}{R_0^2\bar{\bar{q}}}+2\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\Bigg\}. \tag{A4.4.16}$$