ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Основные смешанные задачи в теории упругости являются наиболее трудными из–за взаимодействия между нормальными и тангенциальными параметрами. Следует упомянуть работы Моссаковского (1954) и Уфлянда (1956) среди первых опубликованных точных решений для *изотропного* полупространства, полученных использованием различных интегральных преобразований. Более компактное решение было опубликовано Капшивым и Маслюком (1967), которые использовали специальный аппарат p–аналитических функций. Первое *элементарное* точное решение для *трансверсально изотропного* упругого полупространства было опубликовано в (Фабрикант, 1971a).

Мы представляем здесь общую формулировку внутренней и внешней основной смешанной задачи как систему двумерных интегральных уравнений. Даны четыре вида точных решений внутренней осесимметричной задачи, и ещё один тип решения представлен для внешней осесимметричной задачи. Действие произвольной нагрузки на плоский круглый сцеплённый штамп рассмотрено в деталях. Общее решение неосесимметричной внутренней и внешней задач представлен как ряд Фурье. Материал в этой главе следует результатам опубликованным в статьях (Fabrikant, 1971d, 1972, 1974b, 1975, 1976, 1986j).

3.1 Общая формулировка задачи

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть следующие граничные условия предписаны на плоскости $z = 0$:

$$
\begin{array}{llll}
u = u(\rho,\phi), & \text{для} \;\; 0\leq\rho\leq a, & 0\leq\phi<2\pi; & \\
w = w(\rho,\phi), & \text{для} \;\; 0\leq\rho\leq a, & 0\leq\phi<2\pi; & \\
\sigma = \sigma(\rho,\phi), & \text{для} \;\; a\leq\rho\leq\infty, & 0\leq\phi<2\pi; & \\
\tau = \tau(\rho,\phi), & \text{для} \;\; a\leq\rho\leq\infty, & 0\leq\phi<2\pi. & (3.1.1)
\end{array}
$$

Задача, определённая выше, называется *внутренней основной смешанной задачей*. Система основных интегральных уравнений формулируется благодаря (2.2.12) и (2.2.13), и имеет вид:

$$
H\alpha\Re\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}} + H\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} = \omega_1(\rho,\phi), \tag{3.1.2}
$$

$$
\frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}
$$

$$
-H\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}} = \omega_2(\rho,\phi). \tag{3.1.3}
$$

Мы напоминаем, что обозначения q и R определены в (2.2.5) и (2.2.14) соответственно. Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий (3.1.1):

$$
\omega_1(\rho,\phi) = w(\rho,\phi) - H\alpha\Re\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}
$$

$$
-H\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}, \tag{3.1.4}
$$

$$\omega_2(\rho,\phi) = u(\rho,\phi) + H\alpha\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}$$

$$-\frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}-\frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}. \tag{3.1.5}$$

Внешняя основная смешанная граничная задача для трансверсально изотропного упругого полупространства может быть сформулирована аналогичным способом. Граничные условия имеют вид:

$$u = u(\rho,\phi), \quad \text{для } a\le\rho<\infty, \quad 0\le\phi<2\pi;$$

$$w = w(\rho,\phi), \quad \text{для } a\le\rho<\infty, \quad 0\le\phi<2\pi;$$

$$\sigma = \sigma(\rho,\phi), \quad \text{для } 0\le\rho\le a, \quad 0\le\phi<2\pi;$$

$$\tau = \tau(\rho,\phi), \quad \text{для } 0\le\rho\le a, \quad 0\le\phi<2\pi. \tag{3.1.6}$$

Система основных интегральных уравнений в этом случае принимает вид:

$$H\alpha\Re\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}+H\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}=\omega_1(\rho,\phi), \tag{3.1.7}$$

$$\frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}+\frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}$$

$$-H\alpha\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}=\omega_2(\rho,\phi). \tag{3.1.8}$$

Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий, а именно,

$$\omega_1(\rho,\phi) = w(\rho,\phi) - H\alpha\Re\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}$$

$$-H\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}, \tag{3.1.9}$$

$$\omega_2(\rho,\phi) = u(\rho,\phi) + H\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}$$

$$-\frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}. \tag{3.1.10}$$

Точное решение в замкнутой форме этих уравнения неизвестно в настоящее время, хотя мы верим, что новый метод способен доставить такое решение. В последующих секциях мы рассмотрим отдельно осесимметричный и общий случаи. Точное решение обеих внутренней и внешней задач получено для n—ной гармоники, в предположении, что все участвующие функции могут быть представлены в рядах Фурье.

Упражнение 3.1

1. Проверьте вывод формул (3.1.2–3.1.5)

2. Проверьте вывод формул (3.1.7–3.1.10)

3. Выведите основные интегральные уравнения для внутренней основной смешанной задачи в случае изотропного полупространство.

3.2 Внутренняя осесимметричная основная смешанная задача

Чтобы продемонстрировать гибкость нашего метода, мы представляем здесь четыре вида точного решения. Первый вид более удобен для вычисления напряжений, в то время, как второй вид имеет определённые преимущества для вычисления перемещений вне круга $\rho = a$. Так как очень важно быть в состоянии легко переводить один вид решения в другой, необходимые для этого взаимоотношения установлены. Приложение этой техники к плоскому круглому штампу, сцеплённому с полупространством, под действием нормальной силы и расширяющимся в радиальном направлении продемонстрировано на примерах. Исследовано влияние произвольной осесимметричной нормальной и тангенциальной нагрузки, приложенной вне штампа.

Граничные условия в случае осевой симметрии:

$$\begin{aligned}
&u = u(\rho), && \text{для}\quad 0\le\rho\le a, && 0\le\phi<2\pi;\\
&w = w(\rho), && \text{для}\quad 0\le\rho\le a, && 0\le\phi<2\pi;\\
&\sigma = \sigma(\rho), && \text{для}\quad a\le\rho\le\infty, && 0\le\phi<2\pi;\\
&\tau = \tau(\rho), && \text{для}\quad a\le\rho\le\infty, && 0\le\phi<2\pi.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Система основных интегральных уравнений примет вид:

$$2H\left\{-\pi\alpha\int_\rho^a \tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0 + 2\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\right\} = \omega_1(\rho), \tag{3.2.2}$$

$$\frac{2H}{\rho}\left\{2\gamma_1\gamma_2\int_0^\rho \frac{x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} - \pi\alpha\int_0^\rho \sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0\right\} = \omega_2(\rho). \tag{3.2.3}$$

Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий, и определены ниже:

$$\omega_1(\rho) = w(\rho) + 2H\left\{\pi\alpha\int_a^\infty \tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0 - 2\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\right\}, \tag{3.2.4}$$

$$\omega_2(\rho) = u(\rho) - 4H\gamma_1\gamma_2\rho\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{\tau(\rho_0)\,\rho_0^2\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}. \tag{3.2.5}$$

Мы умножаем обе стороны уравнения (3.2.2) на $\rho(r^2-\rho^2)^{-1/2}\mathrm{d}\rho$, интегрируем по ρ от нуля до r и дифференцируем по r. Результат есть:

$$\frac{2}{\pi}\left[-\alpha\int_0^a \tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0 + \alpha\, r\int_0^r \frac{\tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{(r^2-\rho_0^2)^{1/2}} + \int_r^a \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-r^2)^{1/2}}\right] = \chi_1(r). \tag{3.2.6}$$

Здесь

$$\chi_1(r) = \frac{1}{\pi^2 H}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^r \frac{\omega_1(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{3.2.7}$$

Аналогичное преобразование может быть приложено к уравнению (3.2.3), с результатом:

$$\frac{2}{\pi}\left[\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,r\int_r^a \frac{\tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-r^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_2\gamma_2}}\int_0^r \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(r^2-\rho_0^2)^{1/2}}\right] = \chi_2(r), \tag{3.2.8}$$

где

$$\chi_2(r) = \frac{1}{\pi^2 H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^r \frac{\omega_2(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{3.2.9}$$

Система модифицированных интегральных уравнений (3.2.6) и (3.2.8) решена ниже четырьмя различными способами. Показано, что все решения эквивалентны и дают эффективно то же самое решение.

Решение первого вида. Положим решение системы уравнений (3.2.2) и (3.2.3) в виде:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{f_1(t)t\,\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}, \qquad \tau(\rho) = (\gamma_1\gamma_2)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{f_2(t)\,\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}. \tag{3.2.10}$$

Здесь f_1 и f_2 пока неизвестные функции напряжений. Подстановка (3.2.10) в (3.2.6) даёт после интегрирования

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}f_2(r) + \frac{2}{\pi}(a^2-r^2)^{1/2}\int_0^a \frac{f_1(t)t\,\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(a^2-t^2)^{1/2}} = \chi_1(r) + b. \tag{3.2.11}$$

Здесь были введены следующие обозначения

$$b=\frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\frac{f_2(t)\,\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}}. \tag{3.2.12}$$

Позже будет показано, что мы можем предположить b = 0, без потери общности. Здесь и далее, следующие равенства используются:

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{(r^2-x^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)^{1/2}}=r\int_0^a\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{t(t^2-r^2)},$$

$$\int_r^a\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}=(a^2-r^2)^{1/2}\int_0^a\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)(a^2-t^2)^{1/2}},$$

$$\int_r^a\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)^{1/2}}=-\frac{\pi}{2}\frac{f(r)}{r},$$

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{(r^2-x^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{f(r)-f(0)}{r}\right]. \tag{3.2.13}$$

Равенство (3.2.13) может быть проверено, используя (1.3.2) и (1.3.9). Теперь подстановка (3.2.10) в (3.2.8) даёт после упрощения

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}f_1(r)+\frac{2}{\pi}r(a^2-r^2)^{1/2}\int_0^a\frac{f_2(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(a^2-t^2)^{1/2}}=\chi_2(r). \tag{3.2.14}$$

Пусть

$$f_1(t)=-f_1(-t),\qquad f_2(t)=f_2(-t). \tag{3.2.15}$$

Эти предположения позволяют нам переписать уравнения (3.2.11) и (3.2.14) в форме:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} f_2(r) + \frac{1}{\pi}(a^2 - r^2)^{1/2} \int_{-a}^{a} \frac{f_1(t)\,\mathrm{d}t}{(t-r)(a^2-t^2)^{1/2}} = \chi_1(r) + b,$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} f_1(r) + \frac{1}{\pi}(a^2 - r^2)^{1/2} \int_{-a}^{a} \frac{f_2(t)\,\mathrm{d}t}{(t-r)(a^2-t^2)^{1/2}} = \chi_2(r).$$

(3.2.16)

Вводя комплексные функции $f = f_1 + if_2$ и $\chi = \chi_1 + i\chi_2$, система, описанная в (3.2.16), может быть сведена к одному сингулярному интегральному уравнению, а именно,

$$-i\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} f(r) + \frac{1}{\pi}(a^2 - r^2)^{1/2} \int_{-a}^{a} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(t-r)(a^2-t^2)^{1/2}} = \chi(r).$$

(3.2.17)

Умножим обе части уравнения (3.2.17) на $(a+r)^{-i\theta}(a-r)^{i\theta}(r-y)^{-1}\mathrm{d}r$, где θ есть пока неизвестная постоянная, и интегрируем по r от $-a$ до a. Результат получается такой:

$$-i\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_{-a}^{a} \left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta} \frac{f(r)\,\mathrm{d}r}{r-y} - \pi f(y)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{-i\theta}$$

$$-i(a^2-y^2)^{1/2}\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{-i\theta} \tanh(\pi\theta) \int_{-a}^{a} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(t-y)(a^2-t^2)^{1/2}}$$

$$+ i\tanh(\pi\theta) \int_{-a}^{a} \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{-i\theta} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{t-y} = \int_{-a}^{a} \left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta} \frac{\chi(r)\,\mathrm{d}r}{r-y}.$$

(3.2.18)

Определяя

$$\tanh(\pi\theta) = \alpha/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}, \tag{3.2.19}$$

уравнение (3.2.18) может быть упрощено следующим образом:

$$-\pi\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\left[f(y)+\frac{i}{\pi}\tanh(\pi\theta)(a^2-y^2)^{1/2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(t-y)(a^2-t^2)^{1/2}}\right]$$

$$=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta}\frac{\chi(r)\,\mathrm{d}r}{r-y}.$$

(3.2.20)

Сингулярный интеграл может быть исключен из (3.2.20), используя (3.2.17), и точное решение становится возможным в виде:

$$f(y)=-\cosh^2(\pi\theta)\left[i\tanh(\pi\theta)\chi(y)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta}\frac{\chi(r)\,\mathrm{d}r}{r-y}\right].$$

(3.2.21)

Следующие правило изменения порядка интегрирования в сингулярных интегралах было использовано (Мусхелишвили, 1946)

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{r-y}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(r,t)\mathrm{d}t}{t-r}=-\pi^2 f(y,y)+\int\limits_{-a}^{a}\mathrm{d}t\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(r,t)\mathrm{d}r}{(r-y)(t-r)}. \qquad (3.2.22)$$

Другие интегралы, использованные здесь, даны в Аппендиксе А3.1. Строго говоря, полное решение (3.2.17) дано формулой (3.2.21) плюс член $c(a+y)^{i\theta}(a-y)^{-i\theta}$, который представляет однородное решение (3.2.17), с c в качестве произвольной постоянной. Значение c должно быть выбрано так, чтобы удовлетворить условие b = 0, где b определено в (3.2.12). Соответственное интегрирование выражения (3.2.21) показывает, что условие условие b = 0 удовлетворяется, когда c = 0, и это объясняет, почему окончательное решение записано в форме (3.2.21).

Общее решение теперь закончено, и мы можем рассмотреть более детально случай сцеплённого осесимметричного штампа, и никаких нагрузок не приложено вне штампа. Главный вектор P может быть получен интегрированием

$$P=2\pi\int\limits_{0}^{a}\sigma(\rho)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int\limits_{0}^{a}\frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}}. \qquad (3.2.23)$$

Мы напоминаем, что f_1 нечётчая функция, и что $f_1 = \Re f$. Принимая это во внимание, мы получим после подстановки (3.2.21) в (3.2.23):

$$P = \pi\cosh(\pi\theta)\Re\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta}\chi(r)\mathrm{d}r. \tag{3.2.24}$$

Поле перемещений вне штампа может быть получено повторением вывода (3.2.2) и (3.2.3) для $\rho > a$, с результатом:

$$w(\rho) = 4H\int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\int_y^a \frac{\sigma(x)\mathrm{d}x}{(x^2-y^2)^{1/2}}, \qquad \text{для} \qquad \rho > a;$$

$$u(\rho) = \frac{2H}{\rho}\left[2\gamma_1\gamma_2\int_0^a \frac{y^2\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\int_y^a \frac{\tau(x)\mathrm{d}x}{(x^2-y^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{2}P\right], \qquad \text{для} \qquad \rho > a.$$

(3.2.25)

Подстановка (3.2.10) в (3.2.25) и интегрирование по x приводит к

$$w(\rho) = 4H\int_0^a \frac{(a^2-y^2)^{1/2}}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\mathrm{d}y\int_0^a \frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-y^2)(a^2-t^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = \frac{2H}{\rho}\left[2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a \frac{(a^2-y^2)^{1/2}y^2\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{f_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2-y^2)(a^2-t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{2}P\right].$$

(3.2.26)

Сингулярные интегралы в (3.2.26) могут быть вычислены из (3.2.17) и (3.2.21), и окончательный результат может быть записан как

$$w(\rho) = 2H\int_0^a \frac{\Re\{Z(y)\}}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\mathrm{d}y,$$

$$u(\rho) = \frac{H}{\rho}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\left[2\int_0^a \frac{y\Im\{Z(y)\}}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\mathrm{d}y - P\tanh(\pi\theta)\right], \text{для} \quad \rho > a.$$

(3.2.27)

Здесь

$$Z(y)=\pi\cosh^2(\pi\theta)\left[\chi(y)-\frac{i}{\pi}\tanh(\pi\theta)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta}\frac{\chi(r)\mathrm{d}r}{r-y}\right]. \tag{3.2.28}$$

Формулы (3.2.10) и (3.2.21) являются основными результатами этой секции.

Решение второго вида. Положим решение задачи в форме

$$\sigma(\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{\rho}^{a}\frac{F_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}},\qquad \tau(\rho)=\frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{\rho}^{a}\frac{F_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{3.2.29}$$

Опять, F_1 и F_2 пока неизвестные функции напряжений. Подстановка (3.2.29) в (3.2.6) и (3.2.8) даёт результат:

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\frac{F_2(t)\mathrm{d}t}{t}+\frac{\alpha r^2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\frac{F_2(t)\mathrm{d}t}{t(t^2-r^2)}-\frac{\pi}{2}F_1(r)\right]=\chi_1(r),$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}F_2(r)-\frac{\alpha r}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\frac{F_1(t)\mathrm{d}t}{t^2-r^2}\right]=\chi_2(r). \tag{3.2.30}$$

Полагая, что

$$F_1(t)=F_1(-t),\qquad F_2(t)=-F_2(-t), \tag{3.2.31}$$

уравнения (3.2.30) может быть переписано как

$$-F_1(r)+\frac{\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_{-a}^{a}\frac{F_2(t)\mathrm{d}t}{t-r}=\chi_1(r),$$

$$-F_2(r)-\frac{\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_{-a}^{a}\frac{F_1(t)\mathrm{d}t}{t-r}=\chi_2(r). \tag{3.2.32}$$

Вводя комплексные функции

$$F(r) = F_1(r) + iF_2(r), \qquad \chi(r) = \chi_1(r) + i\chi_2(r), \tag{3.2.33}$$

система (3.2.32) может быть сведена к одному уравнению, а именно,

$$F(r) + \frac{i\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_{-a}^{a} \frac{F(t)\mathrm{d}t}{t-r} = -\chi(r). \tag{3.2.34}$$

Умножение (3.2.34) на $(a+r)^{-i\theta}(a-r)^{i\theta}(r-y)^{-1}$ и интегрирование по r от $-a$ до a приводит к

$$\int_{-a}^{a} \left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta} \frac{F(r)\mathrm{d}r}{r-y} + \frac{i\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\left[-\pi^2\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{-i\theta} F(y) + \left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{-i\theta}\frac{\pi}{i}\coth(\pi\theta)\right.$$

$$\left.\times\int_{-a}^{a} \frac{F(t)\mathrm{d}t}{t-y} - \frac{\pi}{i}\coth(\pi\theta)\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{-i\theta}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{t-y}\right] = -\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta}\frac{\chi(r)\mathrm{d}r}{r-y}. \tag{3.2.35}$$

Здесь формула (3.2.22) и интегралы из Аппендикса 3.1 были использованы. Принимая, как и раньше, $\tanh(\pi\theta) = \alpha/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$, уравнение (3.2.35) может быть упрощено значительно, а именно,

$$F(y) + \frac{i}{\pi}\coth(\pi\theta)\int_{-a}^{a}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{t-y} = -\frac{i}{\pi}\coth(\pi\theta)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta}\frac{\chi(r)\mathrm{d}r}{r-y}. \tag{3.2.36}$$

Сингулярный интеграл может быть исключён из (3.2.36), используя (3.2.34), и окончательный результат есть:

$$F(y) = \cosh^2(\pi\theta)\left[-\chi(y) + \frac{i}{\pi}\tanh(\pi\theta)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{-i\theta}\frac{\chi(r)\mathrm{d}r}{r-y}\right]. \tag{3.2.37}$$

Мы можем считать общее решение законченным. Некоторые дополнительные результаты представлены для случая сцеплённого штампа. Главный вектор сил, действующих на штамп, получен путём интегрирования σ:

$$P = -2\pi\int_0^a F_1(t)\mathrm{d}t = -\pi\int_{-a}^a F_1(t)\mathrm{d}t. \tag{3.2.38}$$

Подстановка (3.2.37) в (3.2.38) даёт:

$$P = \pi\cosh(\pi\theta)\Re\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta}\chi(r)\mathrm{d}r.$$

Как и ожидалось, этот результат идентичен (3.2.24). Перемещения вне штампа могут быть найдены подстановкой (3.2.37) и (3.2.29) в (3.2.25), с результатом:

$$w(\rho) = -2\pi H\int_0^a \frac{\Re\{F(y)\}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}}\mathrm{d}y,$$

$$u(\rho) = -\frac{H}{\rho}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\left[2\pi\int_0^a \frac{y\Im\{F(y)\}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}}\mathrm{d}y + P\tanh(\pi\theta)\right], \quad \text{для} \quad \rho > a. \tag{3.2.39}$$

Сравнение (3.2.28) и (3.2.37) показывает, что $Z(y) = -\pi F(y)$, и это означает, что формулы (3.2.39) в действительности повторяют (3.2.27).

Решение третьего вида. Пусть напряжения могут быть выражены через две новых и пока неизвестных функции q_1 и q_2:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{q_1(t)t\mathrm{d}t}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \quad \tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{q_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}. \tag{3.2.40}$$

Подстановка (3.2.40) в (3.2.6) и (3.2.8) приводит к системе

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a \frac{q_2(t)t\mathrm{d}t}{t^2 - r^2} + (a^2 - r^2)^{1/2}\int_0^a \frac{q_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}\chi_1(r),$$

$$-q_2(r)-\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}q_1(r)=\chi_2(r). \tag{3.2.41}$$

Функция q_2 может быть выражена из второго уравнения (3.2.41) как

$$q_2(r)=-\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}q_1(r)-\chi_2(r). \tag{3.2.42}$$

Подстановка (3.2.42) в первое уравнение (3.2.41) даёт:

$$(a^2-r^2)^{1/2}\int_0^a\frac{q_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(a^2-t^2)^{1/2}}-\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a\frac{q_1(t)t\mathrm{d}t}{t^2-r^2}=\psi(r). \tag{3.2.43}$$

Здесь

$$\psi(r)=\frac{\pi}{2}\chi_1(r)+\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\frac{\chi_2(t)t\mathrm{d}t}{t^2-r^2}. \tag{3.2.44}$$

Точное решение интегрального уравнения (3.2.43) может быть получено следующим способом. Введём обозначение

$$Y_{\mathrm{s}}(r)=\sin\left[\theta\ln\left|\frac{a+r}{a-r}\right|\right],\qquad Y_{\mathrm{c}}(r)=\cos\left[\theta\ln\left|\frac{a+r}{a-r}\right|\right]. \tag{3.2.45}$$

Умножим обе стороны (3.2.43) на $Y_{\mathrm{c}}(r)/(r^2-x^2)$ и интегрируем по r от 0 до a. Результат есть:

$$-\frac{\pi^2}{4x^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\right)q_1(x)Y_{\mathrm{c}}(x)+\frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\int_0^a\left[\frac{Y_{\mathrm{s}}(t)}{t}-\left(\frac{a^2-x^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}\frac{Y_{\mathrm{s}}(x)}{x}\right]\frac{q_1(t)\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)}$$

$$-\frac{\pi\alpha^2}{2\gamma_1\gamma_2}\coth(\pi\theta)\int_0^a\frac{q_1(t)}{x^2-t^2}\left[\frac{Y_{\mathrm{s}}(t)}{t}-\frac{Y_{\mathrm{s}}(x)}{x}\right]\mathrm{d}t=X_{\mathrm{c}}\psi(x). \tag{3.2.46}$$

Здесь и далее следующие интегральные операторы введены:

$$\mathcal{X}_c\psi(x)=\int_0^a \frac{Y_c(r)\psi(r)\mathrm{d}r}{r^2-x^2},\qquad \mathcal{X}_s\psi(x)=\int_0^a \frac{Y_s(r)\psi(r)r\mathrm{d}r}{r^2-x^2}. \tag{3.2.47}$$

Опять, полагая $\tanh(\pi\theta)=\alpha/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$, уравнение (3.2.46) может быть упрощено как

$$-\frac{\pi^2 q_1(x)Y_c(x)}{4x\cosh^2(\pi\theta)}+\frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)Y_s(x)\int_0^a\left[1-\left(\frac{a^2-x^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}\right]\frac{q_1(t)\mathrm{d}t}{x^2-t^2}=x\mathcal{X}_c\psi(x). \tag{3.2.48}$$

Аналогичная процедура умножения (3.2.43) на $rY_s(r)/(r^2-x^2)$ ведёт после упрощения к

$$-\frac{\pi^2 q_1(x)Y_s(x)}{4x\cosh^2(\pi\theta)}-\frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)Y_c(x)\int_0^a\left[1-\left(\frac{a^2-x^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}\right]\frac{q_1(t)\mathrm{d}t}{x^2-t^2}=\mathcal{X}_s\psi(x). \tag{3.2.49}$$

Уравнения (3.2.48) и (3.2.49) окончательно дают решение

$$q_1(x)=-\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)\left[xY_c(x)\mathcal{X}_c\psi(x)+Y_s(x)\mathcal{X}_s\psi(x)\right]+b_0\frac{Y_c(x)}{x}. \tag{3.2.50}$$

Последний член в (3.2.50) представляет однородное решение, и b_0 есть произвольная постоянная. Если напряжения, определенные в (3.2.40), должны быть несингулярными в точке $\rho=0$, тогда b_0 должно быть равно нулю.

Подстановка (3.2.44) в (3.2.50) позволяет нам выразить решение через χ_1 и χ_2:

$$\begin{aligned}q_1(x)=-\cosh^2(\pi\theta)\Big[&\frac{2}{\pi}xY_c(x)\mathcal{X}_c\chi_1(x)+\frac{2}{\pi}Y_s(x)\mathcal{X}_s\chi_1(x)-\tanh(\pi\theta)\chi_2(x)\\&+\frac{2}{\pi}xY_c(x)\mathcal{X}_s\{\chi_2(x)/x\}-\frac{2}{\pi}Y_s(x)\mathcal{X}_c\{x\chi_2(x)\}\Big].\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

Здесь модифицированная версия формулы (3.2.22) была использована:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t^2-x^2}\int_0^a \frac{f(t,r)\mathrm{d}r}{r^2-t^2} = -\frac{\pi^2 f(x,x)}{4x^2} + \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^a \frac{f(t,r)\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)(r^2-t^2)}. \tag{3.2.52}$$

Вторая функция напряжений q_2 может быть получена из (3.2.42) и (3.2.51) в форме:

$$q_2(x) = \cosh^2(\pi\theta)\left\{\frac{2}{\pi}\tanh(\pi\theta)[xY_c(x)\mathcal{X}_c\chi_1(x) + Y_s(x)\mathcal{X}_s\chi_1(x)\right.$$

$$\left. + xY_c(x)\mathcal{X}_s\{\chi_2(x)/x\} - Y_s(x)\mathcal{X}_c\{x\chi_2(x)\}] - \chi_2(x)\right\}. \tag{3.2.53}$$

Общее решение закончено, и мы можем вывести некоторые добавочные результаты для случая сцеплённого штампа. Главный вектор P может быть получен интегрированием первого выражения в (3.2.40):

$$P = 2\pi\int_0^a \frac{q_1(t)t\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}}. \tag{3.2.54}$$

Подстановка (3.2.51) в (3.2.54) даёт, после интегрирования,

$$P = 2\pi\cosh(\pi\theta)\int_0^a [\chi_1(r)Y_c(r) + \chi_2(r)Y_s(r)]\mathrm{d}r. \tag{3.2.55}$$

Результат (3.2.55) совпадает с (3.2.24) когда χ_1 есть чётная функция и χ_2 нечётная. Перемещения вне штампа могут быть найдены подстановкой (3.2.40) в (3.2.25), что даёт:

$$w(\rho) = 4H\int_0^a \left(\frac{a^2-y^2}{\rho^2-y^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}y\int_0^a \frac{q_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-y^2)(a^2-t^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = -H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,\frac{1}{\rho}\left[2\pi\int\limits_0^a \frac{q_2(y)y\,\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}} + P\tanh(\pi\theta)\right], \qquad \text{для} \qquad \rho > a. \tag{3.2.56}$$

Мы можем доказать, что выражения (3.2.56) идентичны (3.2.28).

Решение четвёртого вида. Пусть решение может быть представлено в виде:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int\limits_\rho^a \frac{Q_1(t)t\,\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}, \qquad \tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int\limits_0^\rho \frac{Q_2(t)\,\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}. \tag{3.2.57}$$

Используя те же методы, как и раньше, следующая система уравнений может быть получена

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}Q_2(r) - Q_1(r) = \chi_1(r) + b,$$

$$(a^2-r^2)^{1/2}\int\limits_0^a \frac{Q_2(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(a^2-t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int\limits_0^a \frac{Q_1(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-r^2} = \frac{\pi}{2r}\chi_2(r), \tag{3.2.58}$$

где

$$b = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int\limits_0^a \frac{Q_2(t)\,\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}}. \tag{3.2.59}$$

Будет показано позже, что Q_2 может всегда быть выбрано таким образом, что $b = 0$. Теперь Q_1 может быть выражено из первого уравнения (3.2.58) и подставлено во второе, с результатом:

$$(a^2-r^2)^{1/2}\int\limits_0^a \frac{Q_2(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(a^2-t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int\limits_0^a \frac{Q_2(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-r^2} = \Psi(r). \tag{3.2.60}$$

Здесь

$$\Psi(r)=\frac{\pi}{2r}\chi_2(r)-\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\frac{\chi_1(r)+b}{t^2-r^2}\mathrm{d}t. \tag{3.2.61}$$

Уравнение (3.2.60) аналогично (3.2.43), так что его решение может быть записано

$$Q_2(x)=-\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)\left[x^2Y_\mathrm{c}(x)\mathcal{X}_\mathrm{c}\Psi(x)+xY_\mathrm{s}(x)\mathcal{X}_\mathrm{s}\Psi(x)\right]+b_2Y_\mathrm{c}(x). \tag{3.2.62}$$

Последний член в (3.2.62) представляет однородное решение, и b_2 есть произвольная постоянная, которая выбирается из условия b = 0. Соответствующее интегрирование (3.2.62), используя интегралы из Аппендикса 3.1, позволяет нам определить b_2:

$$b_2=-\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)\int_0^a\Psi(x)Y_\mathrm{c}(x)\mathrm{d}x. \tag{3.2.63}$$

Подстановка (3.2.63) в (3.2.62) даёт:

$$Q_2(x)=-\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)\left[Y_\mathrm{c}(x)\mathcal{X}_\mathrm{c}\{x^2\Psi(x)\}+xY_\mathrm{s}(x)\mathcal{X}_\mathrm{s}\Psi(x)\right]. \tag{3.2.64}$$

Функция Q_2 может быть выражена через χ_1 и χ_2, используя (3.2.61) и (3.2.59) в виде:

$$\begin{aligned}Q_2(x)=-\cosh^2(\pi\theta)\{\tanh(\pi\theta)\chi_1(x)+\frac{2}{\pi}[xY_\mathrm{s}(x)\mathcal{X}_\mathrm{c}\chi_1(x)\\-Y_\mathrm{c}(x)\mathcal{X}_\mathrm{s}\chi_1(x)+Y_\mathrm{c}(x)\mathcal{X}_\mathrm{c}(x\chi_2(x))+xY_\mathrm{s}(x)\mathcal{X}_\mathrm{s}(\chi_2(x)/x)]\}.\end{aligned} \tag{3.2.65}$$

Соответственно, из первого выражения (3.2.58), мы имеем:

$$\begin{aligned}Q_1(x)=-\cosh^2(\pi\theta)\{\chi_1(x)+\frac{2}{\pi}\tanh(\pi\theta)[xY_\mathrm{s}(x)\mathcal{X}_\mathrm{c}\chi_1(x)\\-Y_\mathrm{c}(x)\mathcal{X}_\mathrm{s}\chi_1(x)+Y_\mathrm{c}(x)\mathcal{X}_\mathrm{c}(x\chi_2(x))+xY_\mathrm{s}(x)\mathcal{X}_\mathrm{s}(\chi_2(x)/x)]\}.\end{aligned} \tag{3.2.66}$$

Главный вектор сил, действующих на сцеплённый штамп, определен как

$$P = -2\pi\int_0^a Q_1(t)\mathrm{d}t.$$

Мы можем показать, что этот результат совпадает с (3.2.55). Перемещения вне штампа определяются:

$$w(\rho) = -2\pi H\int_0^a \frac{Q_1(y)\mathrm{d}y}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = \frac{2H}{\rho}\left[2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a \left(\frac{a^2 - y^2}{\rho^2 - y^2}\right)^{1/2} y^2\mathrm{d}y\int_0^a \frac{Q_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2 - y^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{2}P\right]. \tag{3.2.67}$$

Выражения (3.2.67) согласуются с (3.2.27).

Пример 1. Рассмотрим круглый плоский штамп радиуса a, сцеплённый с трансверсально изотропным полупространством, под действием осевой силы P. Граничные условия (3.2.1) в этом частном случае принимают вид:

$$u(\rho) = 0,\ \ w(\rho) = w_0 = \text{const.}, \qquad \text{для} \qquad \rho < a;$$

$$\sigma(\rho) = 0,\ \ \tau(\rho) = 0, \qquad \text{для} \qquad \rho > a.$$

Функции напряжений имеют вид:

$$f(y) = i\frac{w_0}{\pi^2 H}\coth(\pi\theta)\left[1 - \cosh(\pi\theta)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\right],$$

$$F(y) = -\frac{w_0}{\pi^2 H}\cosh(\pi\theta)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}, \qquad Q_1(y) = -\frac{w_0}{\pi^2 H}\cosh(\pi\theta)Y_c(y),$$

$$Q_2(y) = \frac{w_0}{\pi^2 H}\coth(\pi\theta)[1 - \cosh(\pi\theta)Y_c(y)].$$

$$q_1(y) = \frac{w_0\cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 H\sinh(\pi\theta)}Y_s(y), \qquad q_2(y) = -\frac{w_0}{\pi^2 H}\cosh(\pi\theta)Y_s(y),$$

Мы можем заметить что $q_1 = \Re f$, $q_2 = \Im F$, $Q_1 = \Re F$, и $Q_2 = \Im f$, и это объясняет, почемы мы имеем только два различных представления для поверхностных напряжений, а именно,

$$\sigma(\rho) = \frac{w_0 \cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 H \sinh(\pi\theta)} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \int_0^\rho \frac{Y_s(t) t \mathrm{d}t}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}$$

$$= -\frac{w_0}{\pi^2 H} \cosh(\pi\theta) \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \int_\rho^a \frac{Y_c(t) t \mathrm{d}t}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau(\rho) = -\frac{w_0 \cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H \alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \int_0^\rho \frac{Y_c(t) \mathrm{d}t}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = -\frac{w_0 \cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \int_\rho^a \frac{Y_s(t) \mathrm{d}t}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Эквивалентность этих представлений может быть проверена используя равенства

$$\int_0^\rho \frac{Y_c(t) \mathrm{d}t}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = \tanh(\pi\theta) \int_\rho^a \frac{Y_s(t) \mathrm{d}t}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{\pi}{2\cosh(\pi\theta)}, \tag{3.2.68}$$

$$\int_0^\rho \frac{Y_s(t) t \mathrm{d}t}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)} - \tanh(\pi\theta) \int_\rho^a \frac{Y_c(t) t \mathrm{d}t}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}. \tag{3.2.69}$$

Эти и другие аналогичные равенства могут быть установлены используя общее взаимоотношение:

$$\int_\rho^a \frac{f(x) \mathrm{d}x}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{f(t) t \mathrm{d}t}{t^2 - x^2} + \frac{\pi}{2\rho} \lim_{t \to 0} [t f(t)]. \tag{3.2.70}$$

Взаимоотношение между главным вектором P и осадкой штампа w_0 есть:

$$P = \frac{2 w_0 a \theta}{H \tanh(\pi\theta)}. \tag{3.2.71}$$

Перемещения поверхности вне штампа даны как:

$$w(\rho) = \frac{2}{\pi} w_0 \cosh(\pi\theta) \int_0^a \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = \frac{2}{\pi} w_0 \sqrt{\gamma_1\gamma_2}\ \cosh(\pi\theta) \left[\int_0^a \frac{Y_s(x)x\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} - \frac{\pi a\theta}{\cosh(\pi\theta)} \right] \frac{1}{\rho}. \tag{3.2.72}$$

Интегралы в (3.2.72) могут быть вычислены (Градштейн и Рыжик, 1963)

$$I_c(\rho) = \int_0^a \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta}{\sinh(\pi\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\rho^2/a^2 - 1)^{-k-1/2}}{(2k+1)(k!)^2} \prod_{m=1}^{k} (\theta^2 + m^2), \tag{3.2.73}$$

$$I_s(\rho) = \int_0^a \frac{Y_s(x)x\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi a\theta^2}{\sinh(\pi\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\rho^2/a^2 - 1)^{-k-1/2}}{(2k+1)k!(k+1)!} \prod_{m=1}^{k} (\theta^2 + m^2). \tag{3.2.74}$$

Для реальных материалов, физическая постоянная $\theta < 1$. Например, для изотропного материала

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3 - 4\nu). \tag{3.2.75}$$

Так как коэффициент Пуассона $\nu \le 0.5$, это означает, что $0 \le \theta < 0.2$ для изотропных материалов. Используя приближение

$$(k!)^{-2} \prod_{m=1}^{k} (\theta^2 + m^2) = 1 + O(\theta^2),$$

суммирование в (3.2.73) и (3.2.74) может быть выполнено, и результат есть:

$$I_c(\rho) \approx \frac{\pi\theta}{\sinh(\pi\theta)} \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right), \tag{3.2.76}$$

$$I_s(\rho) \approx \frac{\pi\theta^2}{\sinh(\pi\theta)} \left[(\rho^2 - a^2)^{1/2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) + 2a\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right]. \tag{3.2.77}$$

Прямые вычисления показывают, что относительная ошибка формулы (3.2.76) меньше, чем 6%, когда $(\rho/a) > 1.01$, и $\theta \le 0.2$; относительная ошибка (3.2.77) меньше, чем 4%. Та же точность может быть получена для $(\rho/a) > 1.1$, и $\theta \le 0.3$. Относительная ошибка обеих формул (3.2.76) и (3.2.77) быстро уменьшается, когда ρ увеличивается, например, относительная ошибка меньше, чем 4% и 2% соответственно, для $\theta < 0.9$ и $(\rho/a) > 3$.

Пример 2. Рассмотрим случай, где никаких сил не приложено к штампу, сцеплённому с полупространством, но штамп сам расширяется, так что радиальное перемещение пропорционально радиусу, с коэффициентом пропорциональности k, а именно, внутри круга $\rho = a$ граничные условия имеют вид:

$$w(\rho) = w_0, \qquad u(\rho) = k\rho.$$

Здесь w_0 есть пока неизвестная осадка штампа. Функции напряжения могут быть записаны как

$$f(y) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi^2 H}\left\{ i w_0 - \frac{2ky}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} - i\cosh(\pi\theta)\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta}\left[\frac{2k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}(2a\theta + iy) + w_0\right]\right\},$$

$$F(y) = -\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H}\left[w_0 + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}(2a\theta + iy)\right]\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{i\theta},$$

$$q_1(y) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi^2 H}\left\{ w_0\cosh(\pi\theta) Y_s(y) + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\cosh(\pi\theta)(2a\theta Y_s(y) + yY_c(y)) - y]\right\},$$

$$q_2(y) = -\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H}\left\{ w_0 Y_s(y) + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[2a\theta Y_s(y) + yY_c(y)]\right\},$$

$$Q_1(y) = -\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H}\left\{ w_0 Y_c(y) + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[2a\theta Y_c(y) - yY_s(y)]\right\},$$

$$Q_2(y) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi^2 H}\left\{ w_0[1 - \cosh(\pi\theta) Y_c(y)] - \cosh(\pi\theta)\frac{2k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[2a\theta Y_c(y) - yY_s(y)]\right\}.$$

Напряжения могут быть определены двумя способами:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{q_1(x)x\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{Q_1(x)x\mathrm{d}x}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{Q_2(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{q_2(x)\mathrm{d}x}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Главный вектор P определён выражением:

$$P = \frac{2a\theta}{H}\coth(\pi\theta)\left[w_0 + \frac{2ka\theta}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\right]. \tag{3.2.78}$$

Когда никаких сил не приложено к штампу, его нормальное перемещение равно

$$w_0 = -2ka\theta/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}.$$

Сила, необходимая обеспечить нулевую осадку, есть

$$P = \frac{4ka^2\theta^2}{H\alpha}.$$

Перемещения вне штампа

$$w(\rho) = -2\pi H\int_0^a \frac{Q_1(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = -H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\left[2\pi\int_0^a \frac{q_2(x)x\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} + P\tanh(\pi\theta)\right]\frac{1}{\rho}.$$

Мы можем вычислить напряжения в точке $\rho = 0$ в элементарных функцях:

$$\sigma(0) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi H}\left\{\frac{\theta}{a}w_0\cosh(\pi\theta) + \frac{k}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[(1+4\theta^2)\cosh(\pi\theta) - 1]\right\}, \quad \tau(0) = 0.$$

Дискуссия. Мы могли заметить, что четыре вида решения, рассмотренных выше, представляют все комбинации Абелевых интегралов с пределами от 0 до ρ и от ρ до a. Решения первого и второго вида более компактны, чем другие, но они удобны для использования только, когда $w(\rho)$ представляет собой чётную функцию и $u(\rho)$ — нечётная. Решение второго вида предпочтительней, когда нас интересуют только перемещения вне штампа, в то время, как решение первого вида имеет определённые преимущества, когда нас интересуют распределения напряжений. Формулы (3.2.10) более удобны для численного интегрирования, чем (3.2.29), особенно в области, близкой к $\rho = 0$ или $\rho = a$: (i) дифференцирование подинтегрального выражения может быть выполнено в (3.2.10), таким образом избегая численного дифференцирования, которое менее точно; дифференцирование в (3.2.29) довольно трудно, так как $F(a)$ обычно не определена; (ii) формулы (3.2.10) позволяют нам легко определить напряжения в $\rho=0$, непосредственно через функцию напряжений, а именно,

$$\sigma(0)=\frac{\pi}{2}f_1'(0), \qquad \tau(0)=f_2'(0)/\sqrt{\gamma_1\gamma_2},$$

в то время, как результат (3.2.29) довольно трудно использовать, например,

$$\sigma(0)=\lim_{\rho\to 0}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{F_1(x)x\,\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\right\}=\int_0^a \frac{F_1(x)-F_1(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{F_1(0)}{a}. \tag{3.2.79}$$

Решения третьего и четвёртого вида более общие, так как они не требуют, чтобы $w(\rho)$ было чётной функцией или чтобы $u(\rho)$ было нечётной. Та же логика предпочтения применяется здесь: интегральные представления с пределами от 0 до ρ более удобны для вычисления напряжений, в то время, как представления с пределами от ρ до a более предпочтительны для вычисления перемещений.

Интересно установить взаимоотношения между различными видами решения. Некоторые из них очевидны, благодаря единственности решения, а именно,

$$f_1=q_1, \quad f_2=Q_2, \quad F_1=Q_1, \quad F_2=q_2. \tag{3.2.80}$$

Другие взаимоотношения могут быть найдены из (3.2.70) и следующего равенства

$$\int_0^\rho \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{2}{\pi}\int_\rho^a \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{(a^2-y^2)^{1/2}f(y)\mathrm{d}y}{(a^2-x^2)^{1/2}(y^2-x^2)}. \tag{3.2.81}$$

Сравнение (3.2.57) и (3.2.40) с (3.2.70) и (3.2.81) даёт:

$$Q_1(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{(a^2-y^2)^{1/2}yq_1(y)}{(a^2-t^2)^{1/2}(y^2-t^2)}\mathrm{d}y,$$

$$q_2(t) = -\frac{2}{\pi}t\int_0^a \frac{(a^2-y^2)^{1/2}Q_2(y)}{(a^2-t^2)^{1/2}(y^2-t^2)}\mathrm{d}y, \tag{3.2.82}$$

$$q_1(t) = \frac{2}{\pi t}\int_0^a \frac{y^2Q_1(y)}{(y^2-t^2)}\mathrm{d}y, \quad Q_2(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{yq_2(y)}{(y^2-t^2)}\mathrm{d}y. \tag{3.2.83}$$

Сравнение (3.2.56) и (3.2.67) приводит к несколько отличному выражению:

$$Q_1(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{(a^2-t^2)^{1/2}yq_1(y)\mathrm{d}y}{(a^2-y^2)^{1/2}(y^2-t^2)},$$

$$q_2(t) = -\frac{2}{\pi}t\int_0^a \frac{(a^2-t^2)^{1/2}Q_2(y)\mathrm{d}y}{(a^2-y^2)^{1/2}(y^2-t^2)}. \tag{3.2.84}$$

Выражения (3.2.84) отличаются от (3.2.82) членом $\mathrm{const}/(a^2 - t^2)^{1/2}$ и $t\cdot\mathrm{const}/(a^2 - t^2)^{1/2}$ соответственно. Мы можем заметить из (3.2.57) и (3.2.40), что добавка этих членов к Q_1 и q_2 соответственно не влияет на напряжения и следовательно, выражения (3.2.82) и (3.2.84) эквивалентны. Тот же аргумент справедлив для q_1. Так как добавка к q_1 члена const/t никак не влияет на решение, альтернатива первому выражению из (3.2.83) может быть предложена

$$q_1(t) = \frac{2}{\pi}t\int_0^a \frac{Q_1(y)\mathrm{d}y}{y^2-t^2}. \tag{3.2.85}$$

Сравнение (3.2.39) с (3.2.26) позволяет нам построить взаимоотношение между комплексными функциями напряжений

$$F(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{(a^2-t^2)^{1/2} f(y)\mathrm{d}y}{(a^2-y^2)^{1/2}(y-t)}. \tag{3.2.86}$$

Обратное взаимоотношение принимает вид:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{F(y)\mathrm{d}y}{y-t}. \tag{3.2.87}$$

Мы можем также вывести из (3.2.82) следующие выражение, которое эквивалентно (3.2.86):

$$F(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{(a^2-y^2)^{1/2} f(y)\mathrm{d}y}{(a^2-t^2)^{1/2}(y-t)}. \tag{3.2.88}$$

Значительные упрощения становятся возможными, когда $\theta = 0$. В случае изотропного тела это условие соответствует коэффициенту Пуассона $\nu = 1/2$. Функции напряжений будут определены в виде:

$$f(y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\chi(r)\mathrm{d}r}{r-y}, \qquad F(y) = -\chi(y),$$

$$q_1(y) = -\frac{2}{\pi} y \int_{0}^{a} \frac{\chi_1(r)\mathrm{d}r}{r^2-y^2} \qquad q_2(y) = -\chi_2(y),$$

$$Q_2(y) = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a} \frac{\chi_2(r)r\mathrm{d}r}{r^2-y^2} \qquad Q_1(y) = -\chi_1(y).$$

Распределения напряжений:

$$\sigma(\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{\rho}^{a}\frac{\chi_1(x)x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}, \qquad \tau(\rho) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{\rho}^{a}\frac{\chi_2(x)\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}.$$

Перемещения вне штампа упрощаются следующим образом:

$$u(\rho) = 2\pi H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,\frac{1}{\rho}\int_{0}^{a}\frac{\chi_2(x)x\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}, \qquad w(\rho) = 2\pi H\int_{0}^{a}\frac{\chi_1(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}. \tag{3.2.89}$$

Заметим, что здесь нормальные параметры не связаны с тангенциальными, а именно, нормальное перемещение связано только с нормальным давлением, и тангенциальные перемещения влияют только на сдвигающие напряжения. Подстановка (3.2.7) и (3.2.9) в (3.2.89) приводит к прямому взаимоотношению между перемещениями внутри и вне круга $\rho = a$

$$u(\rho) = \frac{2}{\pi}\frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}}{\rho}\int_{0}^{a}\frac{u(x)x^2\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}(\rho^2-x^2)}, \qquad \text{для} \qquad \rho > a;$$

$$w(\rho) = \frac{2}{\pi}(\rho^2-a^2)^{1/2}\int_{0}^{a}\frac{w(x)x\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}(\rho^2-x^2)}, \qquad \text{для} \qquad \rho > a.$$

Последние выражения демонстрируют определённую математическую аналогию между нормальными и тангенциальными перемещениями.

Упражнение 3.2

1. Докажите, что осадка гладкого плоского круглого штампа больше или равна осадке сцеплённого штампа.

Совет: Докажите, что $(\pi\theta) \geq \tanh(\pi\theta)$.

Заметьте: более общее свойство может быть доказано из рассмотрения энергии.

2. Осесимметричное давление $\sigma = \sigma(\rho)$ приложено к кольцу $b \leq \rho \leq c$ вне плоского сцеплённого штампа радиуса a. Исследуйте его влияние на осадку штампа w_0 и распределение напряжений под штампом.

Решение: Правая часть в интегральных уравнениях (3.2.2) и (3.2.3) примет вид

$$\omega_1(\rho) = w_0 - 4H\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\int_b^c \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}, \quad \omega_2 = 0.$$

Теперь, из (3.2.7) и (3.2.9) мы получаем

$$\chi_1(r) = \frac{w_0}{\pi^2 H} - \frac{2}{\pi}\int_b^c \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2 - r^2)^{1/2}}, \quad \chi_2 = 0.$$

Подстановка последних выражений в избранный тип решения даёт напряжения и перемещения. Главный вектор сил может быть определен как

$$P = 2\cosh(\pi\theta)\left[\frac{w_0 a\theta}{H\sinh(\pi\theta)} - 2\int_b^c I_c(\rho)\,\sigma(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right],$$

где I_c определено в (3.2.73). Когда никакие прямые нагрузки не действуют на штамп, его осадка будет

$$w_0 = \frac{2H}{a\theta}\sinh(\pi\theta)\int_b^c I_c(\rho)\sigma(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Если штамп неподвижен, тогда сила должна быть приложена

$$P = -4\cosh(\pi\theta)\int_b^c I_c(\rho)\,\sigma(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Используя приближение (3.2.76), результаты могут во многих случаях быть выражены в элементарных функциях. Например, в случае, когда $\sigma = \sigma_0 =$ const,

$$\int_b^c I_c(\rho)\sigma(\rho)\rho\mathrm{d}\rho \approx \frac{\pi\theta\sigma_0}{2\sinh(\pi\theta)}\left\{c^2\sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) - b^2\sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right.$$

$$+a[(c^2-a^2)^{1/2}-(b^2-a^2)^{1/2}]\Bigg\}.$$

3. Исследуйте влияние радиальной тангенциальной нагрузки $\tau = \tau(\rho)$, приложенной к поверхности кольца $b \le \rho \le c$, вне сцеплённого штампа радиуса a.

Решение: Мы имеем из (3.2.2) и (3.2.3)

$$\omega_1(\rho) = w_0 + 2\pi H\alpha\int_b^c \tau(\rho)\mathrm{d}\rho,$$

$$\omega_2(\rho) = -4H\gamma_1\gamma_2\frac{1}{\rho}\int_0^\rho \frac{x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_b^c \frac{\tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}.$$

Подстановка в (3.2.7) и (3.2.9) даёт:

$$\chi_1(r) = \frac{w_0}{\pi^2 H}+\frac{2}{\pi}\alpha\int_b^c \tau(\rho)\mathrm{d}\rho, \quad \chi_2(r) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,r\int_b^c \frac{\tau(x)\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{1/2}}.$$

Так как χ_1 чётная функция, и χ_2 нечётная, мы можем использовать любой из четырёх видов решения, рассмотренных выше. Главный вектор сил даётя согласно (3.2.55):

$$P = 2\cosh(\pi\theta)\left\{\frac{a\theta}{H\sinh(\pi\theta)}\left[w_0+2\pi H\alpha\int_b^c \tau(\rho)\mathrm{d}\rho\right]-2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\int_b^c I_s(\rho)\tau(\rho)\mathrm{d}\rho\right\}.$$

Здесь I_s определено в (3.2.74). Когда штамп свободен от нагрузки, его осадка будет равна

$$w_0 = 2H\left[-\pi\alpha\int_b^c \tau(\rho)\mathrm{d}\rho+\frac{\sinh(\pi\theta)}{a\theta}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\int_b^c I_s(\rho)\tau(\rho)\mathrm{d}\rho\right].$$

Величина осевой силы, обеспечивающей нулевые перемещения штампа, есть:

$$P = 4\cosh(\pi\theta)\left\{\frac{\pi a\theta\alpha}{\sinh(\pi\theta)}\int_b^c \tau(\rho)\mathrm{d}\rho - \sqrt{\gamma_1\gamma_2}\int_b^c I_s(\rho)\tau(\rho)\mathrm{d}\rho\right\}.$$

4. Нормальная сосредоточенная нагрузка P приложена в точке $(0,0,z)$ под круглым штампом радиуса a, сцеплённым с трансверсально изотропным упругим полупространством. Найдите распределение напряжений под штампом и его осадку.

Ответ: в качестве иллюстрации, решение дано согласно (Фабрикант, 1971a). Напряжения определены в виде:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\int_0^\rho \frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} + \int_\rho^a \frac{f_2(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\right\},$$

$$\tau(\rho) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_\rho^a \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}} + \frac{1}{\alpha}\int_0^\rho \frac{f_2(t)\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\right\}.$$

Здесь

$$f_1(t) = \frac{\cosh^2\pi\theta}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{(m_k-1)\sinh\pi\theta}\left[\frac{tY_c(t)\sinh\xi_k + z_k Y_s(t)\cosh\xi_k}{z_k^2+t^2}\right],$$

$$f_2(t) = \frac{\cosh\pi\theta}{\pi^2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k}{m_k-1}\left[\frac{z_k Y_c(t)\sinh\xi_k + tY_s(t)\cosh\xi_k}{z_k^2+t^2}\right], \qquad \xi_k = 2\theta\tan^{-1}\left(\frac{a}{z_k}\right).$$

Главный вектор напряжений есть:

$$N = -P\coth\pi\theta\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{m_k\sinh\xi_k}{m_k-1} + \frac{\gamma_k(\cosh\xi_k-1)}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(m_k-1)}\right].$$

Когда никаких сил не приложено непосредственно к штампу, его осадка, вызванная нагрузкой P есть:

$$w = \frac{HP}{2a\theta}\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{m_k\sinh\xi_k}{m_k-1} + \frac{\gamma_k(\cosh\xi_k-1)}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(m_k-1)}\right].$$

Заметьте: можно проверить, что в случае $z\to 0$, $N=-P$.

3.3 Внешняя осесимметричная основная смешанная задача

Мы выбрали эту задачу, чтобы продемонстрировать ещё один вид решения, который использует две функции напряжений, введенные таким образом, что они делают интегральные уравнения независимыми, так что каждое уравнение может быть решено отдельно.

Граничные условия в случае осевой симметрии имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&u=u(\rho), && \text{для } a\le\rho\le\infty, && 0\le\phi<2\pi;\\
&w=w(\rho), && \text{для } a\le\rho\le\infty, && 0\le\phi<2\pi;\\
&\sigma=\sigma(\rho), && \text{для } 0\le\rho\le a, && 0\le\phi<2\pi;\\
&\tau=\tau(\rho), && \text{для } 0\le\rho\le a, && 0\le\phi<2\pi.
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

Система основных интегральных уравнений примет вид:

$$
2H\left\{-\pi\alpha\int_\rho^\infty \tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0+2\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\right\}=\omega_1(\rho),
\tag{3.3.2}
$$

$$
\frac{2H}{\rho}\left\{2\gamma_1\gamma_2\rho^2\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{\tau(\rho_0)\rho_0^2\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}-\pi\alpha\int_a^\rho \sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0\right\}=\omega_2(\rho).
\tag{3.3.3}
$$

Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий, и определены в

$$
\omega_1(\rho)=w(\rho)-4H\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}},
\tag{3.3.4}
$$

$$
\omega_2(\rho)=u(\rho)-4\gamma_1\gamma_2\frac{H}{\rho}\int_0^a \frac{x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}+2\pi\frac{H\alpha}{\rho}\int_0^a \sigma(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0.
\tag{3.3.5}
$$

Мы будем искать решение системы (3.3.2) и (3.3.3) в форме

$$\sigma(\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\int_\rho^\infty \frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}+\int_a^\rho \frac{f_2(t)t\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\right],$$

$$\tau(\rho)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[C_1\int_a^\rho \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}+C_2\int_\rho^\infty \frac{f_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\right]+\frac{C_1Da}{\rho(\rho^2-a^2)^{1/2}}. \tag{3.3.6}$$

Здесь f_1 и f_2 пока неизвестные функции, и C_1, C_2, и D постоянные подлежащие определению. Подстановка (3.3.6) в (3.3.2) и (3.3.3) приводит к двум независимым уравнениям, которые могут быть решены отдельно, при условии, что постоянные определены как

$$C_1=\alpha/\gamma_1\gamma_2,\quad C_2=-1/\alpha. \tag{3.3.7}$$

Уравнения теперь имеют вид:

$$2H\left\{-\frac{\pi\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\left[D\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)-\int_a^\rho \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\right]\right.$$

$$\left.+2\int_\rho^\infty \frac{(x^2-a^2)^{1/2}}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}x\int_a^\infty \frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^{1/2}(t^2-x^2)}\right\}=\omega_1(\rho).$$

$$\frac{2\pi H\alpha}{\rho}\left\{\frac{2\gamma_1\gamma_2}{\pi\alpha^2}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-a^2)^{1/2}}\int_a^\infty \frac{\rho^2a^2(t^2-x^2)-x^4(t^2-a^2)}{x^2(t^2-a^2)^{1/2}(t^2-x^2)}f_2(t)\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.+\int_a^\infty\left[\frac{t}{(t^2-a^2)^{1/2}}-1\right]f_1(t)\mathrm{d}t+aD-\int_a^\rho \frac{f_2(t)t\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\right\}=\omega_2(\rho). \tag{3.3.8}$$

Мы решаем первое уравнение (3.3.8). Разделим обе стороны на $\rho(\rho^2-r^2)^{1/2}$, интегрируем по ρ от r до ∞, умножим результат на r, и дифференцируем по r. Результат есть:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int_a^\infty \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t^2-r^2}-\int_a^\infty \frac{(r^2-a^2)^{1/2}f_1(t)t\mathrm{d}t}{r(t^2-a^2)^{1/2}(t^2-r^2)}=\psi_1(r). \tag{3.3.9}$$

Здесь

$$\psi_1(r)=\frac{1}{2\pi H}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\int_r^\infty \frac{\omega_1(\rho)\mathrm{d}\rho}{\rho(\rho^2-r^2)^{1/2}}\right]-\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{D}{2r}\ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right). \tag{3.3.10}$$

Уравнение (3.3.9) может быть решено способом аналогичным (3.2.43). Умножим обе стороны формулы (3.3.9) на $Y_\mathrm{c}(r)/(r^2-x^2)$ и интегрируем по r от a до ∞. Мы используем в этой секции обозначения Y_c и Y_s, как это было определено в (3.2.45). Результат интегрирования есть:

$$\frac{\pi^2}{4x^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\right)Y_\mathrm{c}(x)f_1(x)-\frac{\pi a}{2x^2\cosh(\pi\theta)}\int_a^\infty \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t(t^2-a^2)^{1/2}}$$

$$-\tanh(\pi\theta)\int_a^\infty \left[\frac{t(x^2-a^2)^{1/2}Y_\mathrm{s}(x)}{x^2(t^2-a^2)^{1/2}}-\frac{Y_\mathrm{s}(t)}{t}\right]\frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t^2-x^2}$$

$$+\frac{\pi}{2}\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\coth(\pi\theta)\int_a^\infty \left[\frac{Y_\mathrm{s}(x)}{x}-\frac{Y_\mathrm{s}(t)}{t}\right]\frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t^2-x^2}=\int_a^\infty \frac{\psi_1(r)Y_\mathrm{c}(r)\mathrm{d}r}{r^2-x^2}. \tag{3.3.11}$$

Опять, выражение (3.3.11) может быть упрощено значительно, полагая $\tanh(\pi\theta)=\alpha/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$,

$$\frac{\pi^2 Y_\mathrm{c}(x)}{4x^2\cosh^2(\pi\theta)}f_1(x)+\frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\frac{Y_\mathrm{s}(x)}{x}\int_a^\infty \left[1-\frac{t(x^2-a^2)^{1/2}}{x(t^2-a^2)^{1/2}}\right]\frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t^2-x^2}$$

$$-\frac{\pi a}{2x^2\cosh(\pi\theta)}\int_a^\infty \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t(t^2-a^2)^{1/2}}=\int_a^\infty \frac{\psi_1(r)Y_\mathrm{c}(r)\mathrm{d}r}{r^2-x^2}. \tag{3.3.12}$$

Умножение (3.3.9) на $rY_\mathrm{s}(r)/(r^2-x^2)$ и преобразования аналогичные вышеприведённым приводят к

$$\frac{\pi^2 Y_s(x)}{4x\cosh^2(\pi\theta)} f_1(x) - \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta) Y_c(x) \int_a^\infty \left[1 - \frac{t(x^2-a^2)^{1/2}}{x(t^2-a^2)^{1/2}}\right] \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t^2-x^2}$$

$$= \int_a^\infty \frac{\psi_1(r) Y_s(r) r\mathrm{d}r}{r^2-x^2}. \tag{3.3.13}$$

Уравнения (3.3.12) и (3.3.13) дают окончательное решение:

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)x\left[xY_c(x)\int_a^\infty \frac{\psi_1(r)Y_c(r)\mathrm{d}r}{r^2-x^2} + Y_s(x)\int_a^\infty \frac{\psi_1(r)Y_s(r)r\mathrm{d}r}{r^2-x^2}\right]. \tag{3.3.14}$$

Строго говоря, мы должны были добавить член $BY_c(x)$, представляющий однородное решение, где B есть произвольная постоянная. Мы покажем далее, что мы можем положить B = 0, так как постоянная D, введеная раньше, в действительности играет ту же роль.

Второе уравнение в (3.3.8) может быть решено аналогичным способом. Первый шаг — преобразовать его к виду

$$\frac{\gamma_1\gamma_2}{\alpha^2}\left[\int_a^\infty \frac{r(r^2-a^2)^{1/2} f_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^{1/2}(t^2-r^2)} + \int_a^\infty \frac{f_2(t)\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^{1/2}}\right] - \int_a^\infty \frac{f_2(t)t\mathrm{d}t}{t^2-r^2} = \psi_2(r), \tag{3.3.15}$$

с

$$\psi_2(r) = \frac{1}{2\pi H\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\int_r^\infty \frac{\omega_2(\rho)\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-r^2)^{1/2}}\right]. \tag{3.3.16}$$

Его решение есть:

$$f_2(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sinh^2(\pi\theta)\left[xY_c(x\int_a^\infty \frac{\psi_2(r)Y_c(r)\mathrm{d}r}{r^2-x^2} + Y_s(x)\int_a^\infty \frac{\psi_2(r)Y_s(r)r\mathrm{d}r}{r^2-x^2}\right]. \tag{3.3.17}$$

Мы можем заметить, что члены вида const./ρ были потеряны в процессе преобразования второго уравнения (3.3.8), из—за дифференцирования. Это означает, что решение (3.3.17) удовлетворяет второе уравнение (3.3.8), кроме вышеупомянутых членов. И здесь роль постоянной D становится ясной: она должна быть выбраба так, чтобы уравнение было удовлетворено. Мы покажем ниже, как это делается.

Пример. Пусть внешность круга $\rho = a$ защемлёна, так что $w = u = 0$, для $\rho > a$. Постоянное давление σ_0 приложено внутри круга. Распределение напряжений вне круга и перемещения внутри подлежат определению. Общее решение, описанное выше, даёт для этого частного случая

$$\omega_1(\rho) = -4H\sigma_0\int_0^a \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}\mathrm{d}x}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}, \quad \omega_2(\rho) = \pi H\alpha\sigma_0\frac{a^2}{\rho};$$

$$\psi_1(r) = 2\pi H\sigma_0\left[1 - \frac{(r^2 - a^2)^{1/2}}{r}\right] - \frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{D}{2r}\ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right), \quad \psi_2(r) = 0;$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi}\coth(\pi\theta)\sigma_0[tY_s(t) - 2a\theta Y_c(t)] - D[1 - Y_c(t)], \quad f_2(t) = 0. \tag{3.3.18}$$

Подстановка (3.3.18) во второе уравнение (3.3.8) определяет постоянную D:

$$D = \frac{2}{\pi}a\theta\sigma_0\coth(\pi\theta). \tag{3.3.19}$$

Формулы (3.3.6), (3.3.18) и (3.3.19) дают полное решение для распределения напряжений. Перемещения внутри круга даются

$$u(\rho) = 2\pi H\alpha\sigma_0\left\{\frac{2}{\pi}\frac{\coth(\pi\theta)}{\rho}\left[\int_a^\infty \frac{tY_s(t) - a\theta[1 + Y_c(t)]}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}t\mathrm{d}t\right.\right.$$

$$\left.\left. - a\theta(a^2 - \rho^2)^{1/2}\right] - \frac{\rho}{2}\right\},$$

$$w(\rho) = 4H\sigma_0\left\{\int_a^\infty \frac{(t^2 - a^2)^{1/2} - tY_c(t) - a\theta Y_s(t)}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}t\right.$$

$$+\int_0^{\rho}\frac{(a^2-t^2)^{1/2}}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}a\theta\tanh(\pi\theta)\Bigg\}.$$

Интегралы выше могут быть вычислены в элементарных функциях в центре $\rho=0$, а именно,

$$u(0)=0,\qquad w(0)=4\pi Ha\theta\sigma_0\frac{1+\cosh(\pi\theta)}{\sinh(2\pi\theta)}.$$

Читатель, который интересуется численными результатами, может посмотреть статью (Фабрикант, 1972), где поле напряжений и перемещения было вычислено для стали, цемента и песчаника.

Метод решения, представленный в этой секции, не является ни единственным возможным, ни самым простым. Читателю следует пробовать различиные модификации подхода, представленного в секции 3.2.

Упражнение 3.3

1. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z\geq 0$. Пусть внешность круга $\rho=a$ защемлёна, так что $u=w=0$, для $\rho>a$. Осесимметричное давление $\sigma(\rho)$ приложено на кольце $b\leq\rho\leq c$, с $c\leq a$. Найдите распределение напряжений вне круга и перемещения внутри круга. *Совет*: используйте решение представленое в Упражнении 3.2 как пример.

2. В условиях предыдущей задачи, докажите, что напряжения в плоскости $z=0$ находятся в равновесии.
Заметьте: это свойство вобщем не справедливо во внутренних задачах.

3. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z\geq 0$. Пусть внешность круга $\rho=a$ защемлёна, так что $u=w=0$, для $\rho>a$. Осесимметричная тангенциальная нагрузка $\tau(\rho)$ приложена на кольце $b\leq\rho\leq c$, с $c\leq a$. Найдите распределение напряжений вне круга и перемещения внутри.

4. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z\geq 0$. Пусть внешность круга $\rho=a$ защемлена, так что $u=w=0$, для $\rho>a$. Найдите распределение напряжений вне круга и перемещения внутри вызываемые сосредоточенной силой P приложенной в положительном Oz направление в точке с декартовыми координатами $x=0$, $y=0$, $z=b$.

3.4 Обобщение для неоднородного полупространства

Попов (1973) рассмотрел внутреннюю основную смешанную задачу для случая неоднородного *изотропного* полупространства, с упругим модулем $E_\kappa = E_0 z^\kappa$, $E_0 = \text{const}$, и $0 \le \kappa < 1$. Он свёл задачу к общему интегральному уравнению Абеля, которое он решил в форме разложения по полиномам Якоби. Заинтересованный читатель может найти детали в оригинальной статье. Мы представляем здесь только *решение в замкнутой форме* обобщённого интегрального уравнения Абеля, как это было дано в (Фабрикант, 1976).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_b^x \frac{F(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^\kappa} + A\int_x^a \frac{F(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^\kappa} = f(x), \qquad \text{для} \qquad 0<\kappa<1, \quad b \le x \le a. \tag{3.4.1}$$

Здесь A известная постоянная, f известная функция, и функция F подлежит определению. Мы используем следующие интегральные представления (Градштейн и Рыжик, 1963)

$$\frac{1}{(x-t)^\kappa} = \frac{(x-b)^\delta (t-b)^{1-\delta-\kappa}}{\mathrm{B}(\kappa,\delta)} \int_b^t \frac{(y-b)^{\kappa-1}(t-y)^{\delta-1}}{(x-y)^{\delta+\kappa}}\mathrm{d}y, \tag{3.4.2}$$

$$\frac{1}{(t-x)^\kappa} = \frac{(x-b)^\delta (t-b)^{1-\delta-\kappa}}{\mathrm{B}(\kappa,1-\delta-\kappa)} \int_b^x \frac{(y-b)^{\kappa-1}(t-y)^{\delta-1}}{(x-y)^{\delta+\kappa}}\mathrm{d}y. \tag{3.4.3}$$

Мы определим значение δ из условия:

$$\frac{\mathrm{B}(\kappa,1-\delta-\kappa)}{\mathrm{B}(\kappa,\delta)} = A. \tag{3.4.4}$$

Используя свойства Бета—функций, выражение (3.4.4) может быть упрощено:

$$\frac{\sin(\pi\delta)}{\sin[\pi(\delta+\kappa)]} = A.$$

Значение δ может быть найдено из последнего выражения как

$$\delta = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{A\sin(\pi\kappa)}{1 - A\cos(\pi\kappa)}\right) \tag{3.4.5}$$

Подставим (3.4.2) и (3.4.3) в (3.4.1) и изменим порядок интегрирования. Результат получится:

$$\frac{(x-b)^{\delta}}{\mathrm{B}(\kappa,\delta)}\int_b^x \frac{(y-b)^{\kappa-1}\mathrm{d}y}{(x-y)^{\kappa+\delta}}\int_y^a \frac{F(t)\mathrm{d}t}{(t-b)^{\delta+\kappa-1}(t-y)^{1-\delta}} = f(x). \tag{3.4.6}$$

Обобщйнное интегральное уравнение Абеля теперь представлено как последовательность двух Абелевых операторов, и каждый может быть обращён. Решение пример вид:

$$F(t) = -\mathrm{B}(\kappa,\delta)\frac{\sin(\pi\delta)\sin[\pi(\kappa+\delta)]}{\pi^2(t-b)^{1-\delta-\kappa}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^a \frac{(r-b)^{1-\kappa}\mathrm{d}r}{(r-t)^{\delta}}$$

$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_b^r \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-b)^{\delta}(r-x)^{1-\delta-\kappa}}. \tag{3.4.7}$$

Форма решения, данная в (3.4.7), не является единственной возможной. В самом деле, мы можем использовать интегральные представления:

$$\frac{1}{(x-t)^{\kappa}} = \frac{(a-t)^{\delta}(a-x)^{1-\delta-\kappa}}{\mathrm{B}(\delta,\kappa)}\int_x^a \frac{(a-y)^{\kappa-1}(y-x)^{\delta-1}}{(y-t)^{\delta+\kappa}}\mathrm{d}y, \tag{3.4.8}$$

$$\frac{1}{(t-x)^{\kappa}} = \frac{(a-t)^{\delta}(a-x)^{1-\delta-\kappa}}{\mathrm{B}(1-\delta-\kappa,\kappa)}\int_t^a \frac{(a-y)^{\kappa-1}(y-x)^{\delta-1}}{(y-t)^{\delta+\kappa}}\mathrm{d}y. \tag{3.4.9}$$

Подстановка (3.4.8) и (3.4.9) в (3.4.1) приводит к

$$\frac{(a-x)^{1-\delta-\kappa}}{\mathrm{B}(\delta,\kappa)}\int_x^a \frac{(a-y)^{\kappa-1}\mathrm{d}y}{(y-x)^{1-\delta}}\int_b^y \frac{(a-t)^{\delta}F(t)\mathrm{d}t}{(y-t)^{\delta+\kappa}} = f(x). \tag{3.4.10}$$

Решение теперь примет форму:

$$F(t)=-\mathrm{B}(\kappa,\delta)\frac{\sin(\pi\delta)\sin[\pi(\delta+\kappa)]}{\pi^2(a-t)^{\delta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_b^t\frac{(a-r)^{1-\kappa}\mathrm{d}r}{(t-r)^{1-\kappa-\delta}}$$

$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{(a-x)^{1-\delta-\kappa}(x-r)^{\delta}}. \tag{3.4.11}$$

Мы оставляем желающему читателю установить эквивалентность решений (3.4.7) и (3.4.11).

Если мы сравним интегральные уравнения (3.2.30) и (3.4.1), первое впечатление, что они настолько различны, что просто невозможно установить взаимоотношение между ними. Это не так. Рассмотрим систему уравнений:

$$-\int_0^a\left[\frac{1}{(r+t)^{\kappa}}+\frac{\operatorname{sign}(r-t)}{|r-t|^{\kappa}}\right]F_1(t)\mathrm{d}t+\cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\left[\frac{1}{|r-t|^{\kappa}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(r+t)^{\kappa}}\right]F_2(t)\mathrm{d}t=\frac{2\cos(\pi\kappa/2)\Gamma(1-\kappa)}{\pi^2H}\int_0^r\frac{\omega_1(\rho)\rho\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}, \tag{3.4.12}$$

$$-\cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a\left[\frac{1}{|r-t|^{\kappa}}+\frac{1}{(r+t)^{\kappa}}-\frac{2}{t^{\kappa}}\right]F_1(t)\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^a\left[\frac{1}{(r+t)^{\kappa}}-\frac{\operatorname{sign}(r-t)}{|r-t|^{\kappa}}-\frac{1}{t^{\kappa}}-\frac{\operatorname{sign}(t)}{t^{\kappa}}\right]F_2(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\cos(\pi\kappa/2)\Gamma(1-\kappa)}{\pi^2H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}r\int_0^r\frac{\omega_2(\rho)\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{3.4.13}$$

В предельном случае $\kappa\to 0$, уравнения (3.4.12) и (3.4.13) превращаются в

$$-\int_0^r F_1(t)\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a F_2(t)\ln\left|\frac{r+t}{r-t}\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2 H}\int_0^r \frac{\omega_1(\rho)\rho\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}},$$

(3.4.14)

$$-\frac{\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^a F_1(t)\ln\frac{t^2}{|r^2-t^2|}\mathrm{d}t - \int_0^r F_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2 H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\, r\int_0^r \frac{\omega_2(\rho)\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}.$$

(3.4.15)

Мы можем легко проверить, что дифференцирование (3.4.14) и (3.4.15) по r приводит к (3.2.30). Таким образом, связь установлена. Вводя комплексную функцию $F = F_1 + iF_2$, уравнения (3.4.12) и (3.4.13) могут быть объединёны следующим образом:

$$-\left(1+\frac{i\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\right)\int_{-a}^r \frac{F(t)\mathrm{d}t}{(r-t)^\kappa} + \left(1-\frac{i\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\right)\int_r^a \frac{F(t)\mathrm{d}t}{(t-r)^\kappa}$$

$$= \frac{2\cos(\pi\kappa/2)\,\Gamma(1-\kappa)}{\pi^2 H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\int_0^r \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\rho\omega_1(\rho) + ir\omega_2(\rho)}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$+2i\left[\int_0^a \frac{F_2(t)\mathrm{d}t}{t^\kappa} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\int_0^a \frac{F_1(t)\mathrm{d}t}{t^\kappa}\right]. \qquad (3.4.16)$$

Мы получили обобщённое интегральное уравнение Абеля типа (3.4.1), с $b = -a$, решение которого известно из (3.4.7) и (3.4.11), с параметром δ, определенным как

$$\delta = -\frac{\kappa}{2} + i\theta, \qquad (3.4.17)$$

и θ данным в (3.2.19). Функция напряжений для плоского круглого сцеплённого штампа есть

$$F(t) = -\frac{\sin(\pi\kappa)\cosh(\pi\theta)\,\Gamma(1-\kappa)}{\pi^3\kappa H} w_0 (a^2-t^2)^{\kappa/2}\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{i\theta}.$$

Последний результат согласуется с результатами секции 3.2. Читатель может вывести несколько новых модификаций основных интегральных уравнений, используя интегральные представления

$$\int\limits_0^{min(\rho_0,\rho)} \frac{x^{\kappa+1}\mathrm{d}x}{[(\rho^2-x^2)(\rho_0^2-x^2)]^{(\kappa+1)/2}}$$

$$=\frac{\Gamma(\kappa/2)\,\Gamma[(1-\kappa)/2]}{4\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{|\rho-\rho_0|^{\kappa}}-\frac{1}{(\rho+\rho_0)^{\kappa}}\right],$$

$$\int\limits_0^{min(\rho_0,\rho)} \frac{x^{\kappa-1}\mathrm{d}x}{[(\rho^2-x^2)(\rho_0^2-x^2)]^{(\kappa+1)/2}}$$

$$=\frac{\Gamma(\kappa/2)\,\Gamma[(1-\kappa)/2]}{4\sqrt{\pi}\rho\rho_0}\left[\frac{1}{|\rho-\rho_0|^{\kappa}}+\frac{1}{(\rho+\rho_0)^{\kappa}}\right].$$

Некоторые добавочные представления могут быть получены простым сложением, вычитанием, интегрированием или дифференцированием тех, которые представлены выше.

Упражнение 3.4

1. Найдите решение обобщённого уравнение Абеля (3.4.1), с $f(x)=C=\mathrm{const}$.

Ответ: $F(t)=\dfrac{C\sin[\pi(\delta+\kappa)]}{\pi(t-b)^{1\text{-}\delta\text{-}\kappa}(a-t)^{\delta}}$

2. Найдите решение обобщённого уравнения Абеля (3.4.1), с $f(x)=Cx$, с $C=\mathrm{const}$.

Ответ: $F(t)=\dfrac{C\sin[\pi(\delta+\kappa)][t-b-\delta(a-b)+\kappa b]}{\pi\kappa(t-b)^{1\text{-}\delta\text{-}\kappa}(a-t)^{\delta}}$

3. Найдите решение обобщённого уравнения Абеля (3.4.1), с $f(x)=Cx^2$, с $C=\mathrm{const}$.

Ответ: $F(t)=\dfrac{C\sin[\pi(\delta+\kappa)][2(t-b)(t+D)+D^2-\delta(a^2-b^2)+\kappa b^2]}{\pi\kappa(1+\kappa)(t-b)^{1\text{-}\delta\text{-}\kappa}(a-t)^{\delta}}$.

Здесь $D=\kappa b-\delta(a-b)$.

3.5 Влияние сдвигающей силы и опрокидывающего момента на сцеплённый круглый штамп.

Рассмотрим круглый плоский штамп радиуса a, сцеплённый с трансверсально изотропным упругим полупространством $z \geq 0$. Штамп подвержен действию сдвигающей силы T, действующей в направлении Ox, и опрокидывающего момента M. Мы можем предположить, без потери общности, что вектор момента направлен вдоль оси Oy. Мы должны найти распределение напряжений под штампом и получить взаимоотношения между линейными (u_0) и угловыми (δ) перемещениями штампа с параметрами приложенной нагрузки. Эта задача рассмотрена в отдельной секции из—за большой практической важности.

Задача характеризуется следующими граничными условиями на плоскости $z=0$:

$$
\begin{aligned}
&u = u_0, && \text{для } 0 \leq \rho \leq a, && 0 \leq \phi < 2\pi;\\
&w = -\delta\rho\cos\phi, && \text{для } 0 \leq \rho \leq a, && 0 \leq \phi < 2\pi;\\
&\sigma = \tau = 0, && \text{для } a \leq \rho < \infty, && 0 \leq \phi < 2\pi.
\end{aligned}
\tag{3.5.1}
$$

Основные интегральные уравнения, согласно (2.5.6), (3.1.2) и (3.1.3), примут вид:

$$
\frac{2G_1}{\rho^2}\int_0^\rho \frac{x^4 \mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_2(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} - \frac{2\pi H\alpha}{\rho^2}\int_0^\rho \sigma_1(\rho_0)\rho_0^2\mathrm{d}\rho_0
$$

$$
+\frac{2G_2}{\rho^2}\int_0^\rho \frac{\rho^2-2x^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x\int_x^a \frac{\bar{\tau}_0(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} = 0,
$$

$$
2G_2\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{(\rho_0^2-2x^2)\,\bar{\tau}_2(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} + 2\pi H\alpha\int_\rho^a \sigma_{-1}(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0
$$

$$
+2G_1\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_0(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} = u_0,
$$

$$
2\pi H\alpha\,\Re\left\{\frac{\mathrm{e}^{-i\phi}}{\rho}\int_0^\rho \tau_0(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0 - \rho\mathrm{e}^{i\phi}\int_\rho^a \tau_2(\rho_0)\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0}\right.
$$

$$+\frac{4H}{\rho}\int_0^\rho \frac{x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\sigma_1(\rho_0)e^{i\phi}+\sigma_{-1}(\rho_0)e^{-i\phi}}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0=-\delta\rho\cos\phi. \tag{3.5.2}$$

Структура уравнений (3.5.2) такова, что мы можем предположить, что $\sigma_1=\overline{\sigma}_{-1}$. Решение может быть представлено в форме:

$$\sigma_1(\rho)=\overline{\sigma}_{-1}(\rho)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{\bar{f}(t)\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}},$$

$$\tau_0(\rho)=-\frac{C}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{f(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}+\frac{D}{(a^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau_2(\rho)=-C\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^a \frac{\bar{f}(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\right\}-\overline{D}\frac{2a^2-\rho^2}{\rho^2(a^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{3.5.3}$$

Здесь f пока неизвестная функция напряжений, и C и D постоянные подлежащие определению. Подстановка (3.5.3) в первые два уравнения (3.5.2) показывает, что они удовлетворяются, если следующие условия справедливы:

$$C=\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2},\qquad D=\frac{C}{a}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t, \tag{3.5.4}$$

$$\frac{\pi^2 D}{2}(G_1+G_2)+2\pi H\alpha\int_0^a \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}}=u_0. \tag{3.5.5}$$

Выражения (3.5.4) и (3.5.5) выглядят противоречиво: мы имеем только две постоянные, чтобы довлетворить три уравнения. Это обстоятельство будет прояснёно далее. Добавочная постоянная, представляющая однородное решение, появится в выражении для f.

Подстановка (3.5.3) в третье уравнение (3.5.2) приводит к

$$\frac{2\pi H\alpha}{\rho}\left\{-2C\int_{\rho}^{a}\frac{f(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}+C\int_{0}^{a}f(t)\mathrm{d}t+aD\right\}$$

$$+\frac{8H}{\rho}\int_{0}^{\rho}\frac{x^2(a^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_{0}^{a}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)(a^2-t^2)^{1/2}}=-\delta\rho.$$

Умножим последнее выражение на $\rho^2(r^2-\rho^2)^{-1/2}$, и интегрируем по ρ от 0 до r. Результат равен

$$(a^2-r^2)^{1/2}\int_{0}^{a}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}(t^2-r^2)}-\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int_{0}^{a}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t^2-r^2}=-\frac{\delta}{\pi H}. \tag{3.5.6}$$

Уравнение (3.5.6) аналогично (3.2.60), с общим решением (3.2.62). Решение в этом частном случае есть:

$$f(t)=-\frac{\delta\cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 H\sinh(\pi\theta)}\Big[tY_s(t)-\theta aY_c(t)\Big]+AY_c(t). \tag{3.5.7}$$

Последний член в (3.5.7) представляет однородное решение, с A в качестве произвольной постоянной. Подстановка (3.5.7) в (3.5.4) и (3.5.5) позволяет нам определить все постоянные, а именно,

$$D=\frac{\pi\theta\alpha}{\gamma_1\gamma_2\sinh(\pi\theta)}A,$$

$$A=\left(u_0+\frac{\delta a\theta\alpha}{\tanh(\pi\theta)}\right)\left[\frac{\pi^2 H\alpha}{\cosh(\pi\theta)}\left(1+\frac{\pi\theta(G_1+G_2)}{\tanh(\pi\theta)(G_1-G_2)}\right)\right]^{-1}. \tag{3.5.8}$$

Формулы (3.5.7), (3.5.8) и (3.5.3) полностью определяют распределение напряжений под штампом. Теперь нам нужно получить взаимоотношение между нагрузкой, приложенной к штампу, и перемещениями. Мы используем условия равновесия:

$$T=2\pi\int_{0}^{a}\tau_0(\rho)\rho\mathrm{d}\rho,\qquad M=-\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a}[\sigma_1(\rho)\mathrm{e}^{i\phi}+\sigma_{-1}(\rho)\mathrm{e}^{-i\phi}]\rho^2\cos\phi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi.$$

После выполнения всех вычислений, мы получим

$$T = 4\pi^2 A \frac{a\theta}{\sinh(\pi\theta)}\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}, \qquad M = \frac{4\delta a^3\theta(1+\theta^2)}{3H\tanh(\pi\theta)} + \frac{4\pi^2 a^2\theta^2}{\cosh(\pi\theta)}A. \tag{3.5.9}$$

Выражения (3.5.8) и (3.5.9) позвояет нам определить перемещения штампа

$$u_0 = \frac{1}{8a}\left[\pi(G_1+G_2) + \frac{(1+4\theta^2)\tanh(\pi\theta)}{\theta(1+\theta^2)}(G_1-G_2)\right]T - \frac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)}M,$$

$$\delta = \frac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)}\left[-T + \frac{M}{a\theta\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\right]. \tag{3.5.10}$$

В случае изотропии, формулы (3.5.10) согласуются (кроме некоторых знаков) с результатами Уфлянда (1967), который похоже использовал правила знаков, отличные от наших. Следует заметить, что опрокидывающий момент вызывает линейное перемещение штампа, даже в случае отсутствия сдвигающей силы. Сдвигающая сила, в свою очередь, наклоняет штамп, даже когда никакого опрокидывающего момента не приложено. Мы увидим далее (секция 5.11), что аналогичная ситуация имеет место в случае конечного трения между штампом и упругим полупространством.

Упражнение 3.5

1. Плоский круглый штамп радиуса a сцеплённый с трансверсально изотропным упругим полупространством $z \geq 0$. Сдвигающая сила T приложена в направлении Oy. Найдите угол наклона штампа δ.

Ответ: $\delta = \dfrac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)}T$, с наклоном относительно оси Ox. Заметьте, что угол положительный.

2. При условиях задачи 1, найдите опрокидывающий момент, нужный для предотвращения наклона штампа.
Ответ: $M = -a\theta\sqrt{\gamma_1\gamma_2}T$.

3. Опрокидывающий момент M относительно оси Ox приложен к плоскому круглому штампу, сцеплённому с трансверсально изотропным упругим полупространством. Найдите линейное перемещение u и его направление.

Ответ: $u = \dfrac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)}M$, в направлении оси Oy.

4. Плоский круглый сцеплённый штамп находится под действием сдвигающей силы T, действующей в направлении оси Ox, и

опрокидывающий момент M относительно оси Oy. Найдите нормальные перемещения вне штампа.

Ответ: $$w(\rho,\phi)=\Bigg\{-\frac{4\delta\cosh(\pi\theta)}{\pi\rho}\int_0^a\frac{x^2Y_c(x)+\theta axY_s(x)}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$$

$$+4\pi HA\tanh(\pi\theta)\frac{1}{\rho}\left[\frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)}-\int_0^a\frac{xY_s(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\right]\Bigg\}\cos\phi.$$

5. Выразите ответ в задаче 4 через сдвигающую силы T и опрокидывающий момент M.

Ответ: $$w(\rho,\phi)=\Bigg\{-\frac{3H\alpha\cosh(\pi\theta)}{\pi\rho a^2(1+\theta^2)}\left[\frac{M}{\theta a\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}-T\right]\int_0^a\frac{x^2Y_c(x)+\theta axY_s(x)}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$$

$$+\frac{H\alpha}{\rho}T\left[1-\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi\theta a}\int_0^a\frac{xY_s(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\right]\Bigg\}\cos\phi.$$

6. Выразите нормальное перемещение w вне штампа через функцию напряжений f.

Ответ: $$w(\rho,\phi)=\Bigg\{\frac{8H}{\rho}\int_0^a\frac{x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^a\frac{(a^2-x^2)^{1/2}f(t)\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}(t^2-x^2)}$$

$$+4\pi H\alpha D\frac{a}{\rho}\Bigg\}\cos\phi.$$

7. Выразите тангенциальное перемещение u вне штампа через функцию напряжений f.

Ответ: $u(\rho,\phi)=u_0(\rho)+u_2(\rho)\mathrm{e}^{2i\phi}$,

где

$$u_0(\rho)=\pi(G_1-G_2)\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}+\pi(G_1+G_2)D\sin^{-1}(\frac{a}{\rho}),$$

$$u_2(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left\{2\pi H\alpha\int_0^a f(x)\mathrm{d}\{x[(a^2-x^2)^{1/2}-(\rho^2-x^2)^{1/2}]\}\right.$$

$$\left. + \pi(G_1+G_2)Da(\rho^2-a^2)^{1/2}\right\}.$$

8. Исследуйте взаимодействие произвольной сосредоточенной силы, приложенной в некоторой точке внутри трансверсально изотропного полупространства, с плоским сцеплённым круглым штампом.

3.6 Неосесимметричная внутренняя основная смешанная задача

Общая формулировка этой задачи дана в секции 3.1, с граничными условиями (3.1.1), и основные интегральные уравнения даны в (3.1.2–3.1.5). Точное решение *в замкнутой форме* неизвестно в настоящее время. Мы предполагаем, что все параметры задачи могут быть разложены в ряды Фурье. Точное решение для n—ной гармоники представлено ниже. Основные интегральные уравнения для n—ной гармоники имеют вид:

$$\frac{2}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{G_1x^2\tau_{n+1}(\rho_0)+G_2[2n\rho^2-(2n+1)x^2]\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0$$

$$-\frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \sigma_n(\rho_0)\rho_0^{n+1}\mathrm{d}\rho_0 = F_{n+1}(\rho), \qquad \text{для} \qquad n\geq 0.$$

$$\frac{2}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{G_1\rho_0^2\tau_{-n+1}(\rho_0)+G_2[(2n-1)\rho_0^2-2nx^2]\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0$$

$$+2\pi H\alpha\rho^{n-1}\int_\rho^a \frac{\sigma_{-n}(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{n-1}} = F_{-n+1}(\rho), \qquad \text{для} \qquad n\geq 1;$$

$$2\pi H\alpha\,\Re\left\{\frac{\mathrm{e}^{-in\phi}}{\rho^{\mathrm{n}}}\int_0^{\rho}\tau_{-\mathrm{n}+1}(\rho_0)\rho_0^{\mathrm{n}}\mathrm{d}\rho_0-\rho^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{in\phi}\int_{\rho}^{a}\frac{\tau_{\mathrm{n}+1}(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{\mathrm{n}}}\right\}$$

$$+\frac{4H}{\rho^{\mathrm{n}}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2\mathrm{n}}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^{a}\frac{\sigma_{-\mathrm{n}}(\rho_0)\mathrm{e}^{-in\phi}+\sigma_{\mathrm{n}}(\rho_0)\mathrm{e}^{in\phi}}{\rho_0^{\mathrm{n-1}}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0=\Re\{\mathrm{e}^{in\phi}\Phi_{\mathrm{n}}(\rho)\},$$

$$\text{для}\qquad n\geq 0. \qquad (3.6.1)$$

Здесь правые части известны из граничных условий, а именно,

$$F_{\mathrm{n}+1}(\rho)=u_{\mathrm{n}+1}(\rho)-2\rho^{\mathrm{n}+1}\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2\mathrm{n}+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}$$

$$\int_a^{x}\frac{G_1\rho_0^2\tau_{\mathrm{n}+1}(\rho_0)+G_2[2nx^2-(2n+1)\rho_0^2]\bar{\tau}_{-\mathrm{n}+1}(\rho_0)}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\rho_0^{\mathrm{n}}\mathrm{d}\rho_0,$$

$$F_{-\mathrm{n}+1}(\rho)=u_{-\mathrm{n}+1}(\rho)-2\pi H\alpha\rho^{\mathrm{n-1}}\int_a^{\infty}\frac{\sigma_{-\mathrm{n}}(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{\mathrm{n-1}}}$$

$$-2\rho^{\mathrm{n-1}}\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2\mathrm{n}}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^{x}\frac{G_1x^2\tau_{-\mathrm{n}+1}(\rho_0)+G_2[(2n-1)x^2-2n\rho^2]\bar{\tau}_{\mathrm{n}+1}(\rho_0)}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\rho_0^{\mathrm{n}}\mathrm{d}\rho_0,$$

$$\Re\{\Phi_{\mathrm{n}}(\rho)\mathrm{e}^{in\phi}\}=w_{\mathrm{n}}(\rho)\mathrm{e}^{in\phi}+w_{-\mathrm{n}}(\rho)\mathrm{e}^{-in\phi}+2\pi H\alpha\,\Re\left\{\mathrm{e}^{in\phi}\rho^{\mathrm{n}}\int_a^{\infty}\frac{\tau_{\mathrm{n}+1}(\rho_0)\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{\mathrm{n}}}\right\}$$

$$-4H\rho^{\mathrm{n}}\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2\mathrm{n}}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^{x}\frac{\sigma_{\mathrm{n}}(\rho_0)\mathrm{e}^{in\phi}+\sigma_{-\mathrm{n}}(\rho_0)\mathrm{e}^{-in\phi}}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\rho_0^{\mathrm{n}+1}\mathrm{d}\rho_0.$$

(3.6.2)

Случай осевой симметрии ($n=0$) был рассмотрен в деталях в секции 3.2 и не обсуждается здесь. Решение ищется для $n\geq 1$. Мы можем предположить без потери общности, что первые два уравнения (3.6.1) однородные. Это может быть достигнуто добавлением некоторых специальных решений к параметерам τ_{-n+1} и τ_{n+1}. Эти специальные решения, удовлетворяющие правым частям первых двух уравнений (3.6.1), могут быть получены из результатов секции 2.6. Конечно, эта процедура сделает правую часть третьего уравнения (3.6.1) более сложной.

Положим, что решение системы (3.6.1), с первыми двумя уравнениями превращёнными в однородные, имеет вид:

$$\sigma_n(\rho) = \bar{\sigma}_{-n}(\rho) = \frac{1}{\rho^n}\int_0^\rho \frac{t^{2n-1}\mathrm{d}f_n(t)}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}$$

$$= -\frac{1}{\rho^{n+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{t^{2n-2}[(2n-1)\rho^2 - 2nt^2]}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} f_n(t)\mathrm{d}t;$$

$$\tau_{-n+1}(\rho) = -C\rho^{n-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{\bar{f}_n(t)t\mathrm{d}t}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{\bar{D}_n\rho^{n-1}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}};$$

$$\tau_{n+1}(\rho) = C\rho^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\frac{1}{\rho^{2n}}\int_\rho^a y^{2n-2}\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_y^a \frac{f_n(t)t\mathrm{d}t}{(t^2 - y^2)^{1/2}}\right\}$$

$$+ D_n\rho^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\frac{1}{\rho^{2n}}\int_\rho^a \frac{t^{2n-1}\mathrm{d}t}{(a^2 - t^2)^{1/2}}\right\}$$

$$= -C\rho^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\int_\rho^a \frac{f_n(t)\mathrm{d}t}{t(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + (2n-1)\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}y}{y^{2n}(y^2 - \rho^2)^{1/2}}\int_y^a f_n(t)t^{2n-2}\mathrm{d}t\right\}$$

$$-D_n\left[\frac{\rho^{n-1}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{2n}{\rho^{n+1}}\int_\rho^a \frac{t^{2n-1}\mathrm{d}t}{(a^2 - t^2)^{1/2}}\right]. \tag{3.6.3}$$

Здесь f_n пока неизвестные комплексные функции напряжений, и C, D_n являются постоянными подлежащими определению. В нижеследующих преобразованиях мы даём в некоторых случаях два эквивалентных выражения того же самого параметра, для удобства процедуры подстановки в основные уравнения (3.6.1). Мы представляем вначале некоторые промежуточные результаты относящиеся к подстановке (3.6.3) в первое уравнение (3.6.1):

$$\int_x^a \frac{\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi C}{2x}\left[\frac{f_n(x)}{x} - \int_x^a \frac{f_n(t)dt}{t^2}\right] + \frac{\pi}{2ax}D_n,$$

(3.6.4)

$$\int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi C}{2x}\left[\frac{f_n(x)}{x} + \frac{2n-1}{x^{2n}}\int_x^a f_n(t)t^{2n-2}dt\right] - \frac{\pi a^{2n-1}}{2x^{2n+1}}D_n.$$

(3.6.5)

Подстановка (3.6.4) и (3.6.5) в первое уравнение (3.6.1) даёт:

$$(G_1-G_2)\frac{\pi C}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}[2nx^2-(2n-1)\rho^2]}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}f_n(x)dx - \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \sigma_n(\rho_0)\rho_0^{n+1}d\rho_0 = 0,$$

(3.6.6)

если следующие условие справедливо:

$$D_n = \frac{(2n-1)C}{a^{2n-1}}\int_0^a f_n(t)t^{2n-2}dt. \tag{3.6.7}$$

Теперь легко проверить, что подстановка первого выражения (3.6.3) в (3.6.6) делает его тождеством, если

$$C = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}. \tag{3.6.8}$$

Ниже представлены некоторые промежуточные результаты относящиеся к процедуре подстановки (3.6.3) во второе уравнение (3.6.1):

$$\int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}\left[C\bar{f}_n(x) + \bar{D}_n\right], \tag{3.6.9}$$

$$\int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2-2nx^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)d\rho_0 = \frac{\pi}{2}\left[-C\bar{f}_n(x) + \bar{D}_n\right]. \tag{3.6.10}$$

Мы использовали в преобразованиях некоторые общие формулы из Аппендикса А3.3. Подстановка (3.6.9) и (3.6.10) во второе уравнение (3.6.1) даёт:

$$\frac{\pi}{\rho^{n-1}}\int_0^{\rho}\frac{[C(G_1-G_2)\bar{f}_n(x)+(G_1+G_2)\overline{D}_n]x^{2n-2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}+2\pi H\alpha\rho^{n-1}\int_{\rho}^{a}\frac{\sigma_{-n}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^{n-1}}=0. \tag{3.6.11}$$

Подстановка первого выражения (3.6.3) в (3.6.11) показывает, что равенство удовлетворяется, благодаря (3.6.8) и добавочному условию

$$(G_1+G_2)\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{2\Gamma(n)}D_n+\frac{2H\alpha}{a^{2n-2}}\int_0^a f_n(x)\frac{x^{2n-2}dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}=0. \tag{3.6.12}$$

Условия (3.6.7) и (3.6.12) могут показаться противоречивыми. Мы покажем далее (смотри 3.6.14) что это не так, потому что добавочная постоянная появится в выражении для f_n, соответствующая однородному решению сингулярного интегрального уравнения (3.6.14).

Теперь мы удовлетворили первые два уравнения (3.6.1). Подстановка (3.6.3) в третье уравнение (3.6.1) требует следующие преобразование:

$$\int_x^a\frac{d\rho_0}{\rho_0^{2n-1}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\int_0^{\rho_0}\frac{t^{2n-1}df_n(t)}{(\rho_0^2-t^2)^{1/2}}=\int_0^a\Bigg[(a^2-x^2)^{1/2}(a^2-t^2)^{1/2}Q_n(x,t)$$
$$+\psi_n(x,t)\ln\frac{a|t^2-x^2|^{1/2}}{|t(a^2-x^2)^{1/2}-x(a^2-t^2)^{1/2}|}\Bigg]t^{2n-1}df_n(t). \tag{3.6.13}$$

Здесь $Q_n(x,t)$ полином чётных отрицательных степеней x и t. Хотя мы не можем написать явные выражения для $Q_n(x,t)$, он может быть вычислен элементарным способом для любого частного n. Явные выражение для ψ_n есть:

$$\psi_n(x,t)=\frac{1}{\pi t x^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k-1/2)\,\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n-k)\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{t}\right)^{2k}.$$

Умножим обе стороны третьего уравнения (3.6.1) на ρ^n, продифференцируем по ρ, разделим результат на $\rho^{2n-2}(r^2-\rho^2)^{1/2}$ и проинтегрируем по ρ от 0 до r. Эта процедура позволяет нам разделить ядро интегрального уравнения на две части: сингулярную и вырожденную. Результат принимает вид:

$$(a^2-r^2)^{1/2}\int_0^a \frac{f_n(t)\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(a^2-t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a \frac{f_n(t)\mathrm{d}t}{t^2-\rho^2} = \chi_n(r). \tag{3.6.14}$$

Здесь

$$\chi_n(r) = \frac{1}{4\pi H r}\int_0^r \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n-2}(r^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho^n\Phi_n(\rho)]$$

$$-\frac{2}{\pi r}\int_0^r \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n-2}(r^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \frac{x^{2n}(a^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_0^a (a^2-t^2)^{1/2}Q_n(x,t)t^{2n-1}\mathrm{d}f_n(t)$$

$$-\frac{2}{\pi^{3/2} r}\int_0^r \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n-2}(r^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(a^2-x^2)^{1/2}}\int_0^a q_n(\rho,x,t)(a^2-t^2)^{1/2}t^{2n-2}\mathrm{d}f_n(t), \tag{3.6.15}$$

с

$$q_n(\rho,x,t) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{\Gamma(n-k-1/2)}{\Gamma(n-k)}\left(\frac{\rho}{t}\right)^{2k} F\left(2-n+k,\frac{1}{2};\frac{3}{2}-n+k;\frac{x^2}{t^2}\right). \tag{3.6.16}$$

Заметим, что гипергеометрическая функция в (3.6.16) есть, фактически, полином, и что все интегралы по x и ρ в вырожденной части ядра (3.6.15) могут быть вычислены в элементарных функциях для любого n. Интегральное уравнение (3.6.14) было решено в секции 3.2, и его решение есть:

$$f_n(t) = -\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)t\left[tY_c(t)\int_0^a \frac{\chi_n(r)Y_c(r)\mathrm{d}r}{r^2-t^2}\right.$$

$$\left.+\,Y_s(t)\int_0^a \frac{\chi_n(r)Y_s(r)r\mathrm{d}r}{r^2-t^2}\right] + A_nY_c(t). \tag{3.6.17}$$

Последний член в (3.6.17) представляет собой однородное решение, с A_n в качестве произвольной постоянной. Его значение, вместе с постоянной D_n и другими, которые появляются из–за вырожденной части ядра, могут быть найдены из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений и условий (3.6.7) и (3.6.12). Общее решение может считаться законченным. Основной недостаток решения заключается в необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых увеличивается с n, таким образом делая точное решение для высших гармоник очень громоздким. Мы не знаем никакого другого решения для *трансверсально изотропного* твёрдого тела. Соответствующая задача для *изотропного* тела была решена Уфляндом (1967), который использовал метод интегрального преобразования Мечлера–Фока. Решение Уфлянда имеет тот же недостаток: необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых увеличивается с n.

Пример. Рассмотрим действие нормальной сосредоточенной нагрузки P, приложенной вне плоского круглого штампа радиуса a, сцеплённого с трансверсально изотропным упругим полупространством $z \geq 0$. Мы можем предположить, без потери общности, что сила приложена в точке $\rho = b$, $\phi = 0$ $(b > a)$. Таким образом, граничные условия могут быть записаны:

$$u = w = 0, \qquad \text{для} \quad \rho \leq a;$$

$$\sigma = P\delta(\rho - b)\delta(\phi - 0)/\rho, \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad \rho > a.$$

Граничные условия дают:

$$F_{n+1}(\rho) = 0, \qquad \text{для} \qquad n \geq 0; \quad F_{-n+1} = -PH\alpha\frac{\rho^{n-1}}{b^n}, \qquad \text{для} \qquad n \geq 1;$$

$$\Phi_n(\rho) = -\frac{4PH}{\pi(\rho b)^n}\int_0^\rho \frac{x^{2n}dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(b^2 - x^2)^{1/2}}. \tag{3.6.18}$$

Мы представляем теперь явные решение для некоторых специфических значений n. В осесимметричном случае $n = 0$, следующие результаты могут быть получены:

$$\sigma_0(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho \frac{f_0(t)t\,dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \qquad \tau_1(\rho) = -\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a \frac{f_0(t)dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$f_0(t)=\frac{2}{\pi^3}P\cosh^2(\pi\theta)\left[tY_c(t)\int_0^a\frac{Y_c(r)\mathrm{d}r}{(b^2-r^2)^{1/2}(r^2-t^2)}\right.$$

$$\left.+Y_s(t)\int_0^a\frac{Y_s(r)r\mathrm{d}r}{(b^2-r^2)^{1/2}(r^2-t^2)}\right]. \tag{3.6.19}$$

Результаты для $n=1$ имеют вид:

$$\sigma_1(\rho)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho\frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}},$$

$$\tau_0(\rho)=-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a\frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}+\frac{D_1}{(a^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau_2(\rho)=-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^a\frac{f_1(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\right]-D_1\frac{2a^2-\rho^2}{\rho^2(a^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$f_1(t)=\frac{t}{b}f_0(t)+A_1Y_c(t),$$

$$D_1=-\frac{P\theta}{\pi b\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\left(1-\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi a\theta}I_s(b)\right)\left[1+\frac{\pi\theta(G_1+G_2)}{\tanh(\pi\theta)(G_1-G_2)}\right]^{-1},$$

$$A_1=-\frac{P\cosh^2(\pi\theta)}{\pi^3\theta ab}[I_s(b)-2a\theta I_c(b)]+\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi\theta}D_1\sqrt{\gamma_1\gamma_2}. \tag{3.6.20}$$

Мы напоминаем, что обозначения $I_{c,s}$ определены в (3.2.73) и (3.2.74) соответственно.

Случай $n=2$ более громоздок:

$$\sigma_2(\rho)=\frac{1}{\rho^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int\limits_0^{\rho}\frac{4t^2-3\rho^2}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}t^2 f_2(t)\mathrm{d}t),$$

$$\tau_{-1}(\rho)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{f_2(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}-D_2(a^2-\rho^2)^{1/2}\right],$$

$$\tau_3(\rho)=\rho^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\frac{1}{\rho^4}\left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{\rho^2-2t^2}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}f_2(t)t\mathrm{d}t+D_2\frac{2a^2+\rho^2}{3}(a^2-\rho^2)^{1/2}\right]\right\},$$

$$f_2(t)=-\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)\,t\left[tY_\mathrm{c}(t)\int\limits_0^a\frac{\chi_2(r)Y_\mathrm{c}(r)\mathrm{d}r}{r^2-t^2}+Y_\mathrm{s}(t)\int\limits_0^a\frac{\chi_2(r)Y_\mathrm{s}(r)r\mathrm{d}r}{r^2-t^2}\right]$$

$$+A_2Y_\mathrm{c}(t)+\frac{2\coth(\pi\theta)}{\pi a}\left[\frac{2\theta}{a}Y_\mathrm{c}(t)-\frac{1}{t}Y_\mathrm{s}(t)\right]B_2.$$

Постоянная B_2 соответствует вырожденной части ядра:

$$B_2=\int\limits_0^a\frac{2t^2-a^2}{(a^2-t^2)^{1/2}}f_2(t)\mathrm{d}t.$$

Все постоянные определены следующим образом:

$$D_2=\frac{3\alpha}{\gamma_1\gamma_2a^3}\left[L_1+A_2\frac{\pi a^3\theta}{\sinh(\pi\theta)}\frac{1-2\theta^2}{3}-B_2\frac{2a\theta^2(1+4\theta^2)\cosh(\pi\theta)}{3\sinh^2(\pi\theta)}\right],$$

$$A_2=\frac{\cosh(\pi\theta)}{2\pi a^2\theta^2}\left[L_3-B_2\frac{4\theta(1+2\theta^2)}{\sinh(\pi\theta)}\right],$$

$$B_2=\left\{2\theta^2\left(\frac{Pa^2}{2\pi b^2}+L_2+L_1\frac{3\pi(G_1+G_2)}{4a(G_1-G_2)}\right)+L_3\left[\frac{1}{4}-\theta^2\right.\right.$$

$$+\frac{(G_1+G_2)}{4(G_1-G_2)}(1-2\theta^2)\Bigg]\Bigg\}\Bigg\{\frac{\theta}{\sinh(\pi\theta)}\Bigg[1+\frac{\pi\theta(1+\theta^2)(G_1+G_2)}{\tanh(\pi\theta)(G_1-G_2)}\Bigg]\Bigg\}^{-1},$$

$$L_1=\frac{2\cosh^2(\pi\theta)}{\pi\sinh(\pi\theta)}\int_0^a\Bigg[2a\theta\left(r^2+a^2\frac{1-2\theta^2}{3}\right)Y_{\mathrm{c}}(r)$$

$$+r(2a^2\theta^2-r^2)Y_{\mathrm{s}}(r)\Bigg]\chi_2(r)\mathrm{d}r,$$

$$L_2=\frac{4}{\pi}\cosh(\pi\theta)\int_0^a\left\{\left[a^2\left(\frac{1}{4}-\theta^2\right)+\frac{r^2}{2}\right]Y_{\mathrm{c}}(r)+\theta arY_{\mathrm{s}}(r)\right\}\chi_2(r)\mathrm{d}r,$$

$$L_3=\frac{4}{\pi}\cosh(\pi\theta)\int_0^a[(r^2-2a^2\theta^2)Y_{\mathrm{c}}(r)+2\theta arY_{\mathrm{s}}(r)]\chi_2(r)\mathrm{d}r,$$

$$\chi_2(r)=-\frac{P}{2\pi b^2}\left[\frac{1}{(b^2-r^2)^{1/2}}+\frac{1}{b+(b^2-r^2)^{1/2}}\right].$$

Чтобы обеспечить нулевые перемещения, штамп должен быть нагружен нормальной силой N, сдвигающей силой T, действующей в отрицательном направлении оси Ox, и опрокидывающим моментом M относительно оси Oy. Их взаимоотношение с силой P может быть установлено при помощи уравнений статики, а именно,

$$T=2\pi\int_0^a\tau_0(\rho)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a f_1(t)\mathrm{d}t+D_1a\right],$$

$$N=2\pi\int_0^a\sigma_0(\rho)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^a\frac{f_0(t)t\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}},$$

$$M = -\int_0^{2\pi}\int_0^a [\sigma_1(\rho)e^{i\phi} + \sigma_{-1}(\rho)e^{-i\phi}]\rho^2\cos\phi d\rho d\phi = 2\pi\int_0^a \frac{a^2-2t^2}{(a^2-t^2)^{1/2}} f_1(t)dt.$$

Выполняя интегрирования, мы получим:

$$T = 4\pi a D_1, \qquad N = -\frac{2P}{\pi}\cosh(\pi\theta)\int_0^a \frac{Y_c(r)dr}{(b^2-r^2)^{1/2}},$$

$$M = \frac{4P}{\pi b}\cosh(\pi\theta)\int_0^a \frac{r^2 Y_c(r) + \theta a r Y_s(r)}{(b^2-r^2)^{1/2}} dr + 4\pi a^2\theta\sqrt{\gamma_1\gamma_2}D_1. \tag{3.6.21}$$

Если штамп не нагружен, то он испытает тангенциальное, нормальное и угловое перемещения. Их значения могут быть определены из (3.2.71), (3.5.10) и (3.6.21).

Упражнение 3.6

1. В условиях примера выше (страница 200), найдите нормальное напряжение в центре штампа.

Ответ: $\sigma(0) = \dfrac{P\cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 ab}\left[\displaystyle\int_0^a \frac{[aY_c(x) + 2\theta x Y_s(x)]dx}{[b + (b^2-x^2)^{1/2}](b^2-x^2)^{1/2}} - \frac{\pi\theta}{\sinh(\pi\theta)}\right].$

2. В условиях того же примера, найдите сдвигающее напряжение в центре штампа.

Ответ: $\tau(0) = \dfrac{P\alpha}{2\pi b^2\gamma_1\gamma_2}\left[1 - \dfrac{2}{\pi}b\coth(\pi\theta)\displaystyle\int_0^a \frac{Y_s(x)dx}{x(b^2-x^2)^{1/2}}\right] + \dfrac{D_1}{a} + \dfrac{\pi\theta A_1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}.$

3. В условиях того же примера, найдите распределение напряжений под штампом в предельном случае $\alpha = 0$.

Ответ: $\sigma_n(\rho) = -\dfrac{P}{\pi^2}\dfrac{(b^2-a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho^2)^{1/2}(b^2-\rho^2)}\left(\dfrac{\rho}{b}\right)^n, \qquad \tau_n(\rho) = 0.$

4. Никакой нагрузки не приложено к плоскому круглому штампу радиуса

a сцеплённому с трансверсально изотропным полупространством. Нормальная сосредоточенная сила *P* приложена в точке $\rho = b$, $\phi = \pi/2$. Найдите нормальный компонент *w* перемещения штампа.

Ответ: $w = \dfrac{PH\sinh(\pi\theta)}{\pi\theta a}\displaystyle\int_0^a \frac{Y_c(r)\mathrm{d}r}{(b^2 - r^2)^{1/2}}.$

Совет: используйте (3.2.71) и (3.6.21)

5. В условиях Упражнения 4, найдите тангенциальный компонент *u* перемещения штампа и его направление.

Ответ: $u = \dfrac{3PH\alpha\cosh(\pi\theta)}{\pi b a^2(1+\theta^2)}\displaystyle\int_0^a \frac{x^2Y_c(x) + \theta a x Y_s(x)}{(b^2 - x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x + PH\alpha\frac{1}{b}\Bigg[1$

$$-\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi\theta a}\int_0^a \frac{xY_s(x)\mathrm{d}x}{(b^2 - x^2)^{1/2}}\Bigg],$$ в направлении *Oy*.

6. В условиях Упражнения 4, найдите угол наклона штампа δ и его направление.

Ответ: $\delta = \dfrac{3PH\sinh(\pi\theta)}{\pi a^3 b\theta(1+\theta^2)}\displaystyle\int_0^a \frac{Y_c(x)x^2 + \theta a x Y_s(x)}{(b^2 - x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x,$ в положительном направление относительно оси *Ox*.

7. Никакой нагрузки не приложено к плоскому круглому штампу радиуса *a*, сцеплённому с трансверсально изотропным полупространством. Тангенциальная сосредоточенная сила *T* приложена в точке $\rho = b$, $\phi = 0$ в положительном *Ox* направлении. Найдите нормальный компонент *w* перемещения штампа.

Ответ: $w = \dfrac{TH\sinh(\pi\theta)}{\pi\theta ab}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\left[I_s(b) - \dfrac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)}\right],$ с I_s определенным в (3.2.74).

Совет: используйте (3.2.72) и теорему взаимности.

8. При общих граничных условиях (3.1.1), найдите тангенциальные перемещения для $\rho > a$, выраженные через функции напряжений f_n.

Ответ: $u_{-n+1}(\rho) = \dfrac{\pi}{\rho^{n-1}}\displaystyle\int_0^a \frac{(\alpha/\gamma_1\gamma_2)(G_1 - G_2)\bar{f}_n(x) + (G_1 + G_2)\overline{D}_n}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}x^{2n-2}\mathrm{d}x,$

$$u_{n+1}(\rho) = \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}} \int_0^a f_n(x) d\{x^{2n-1}[(a^2 - x^2)^{1/2} - (\rho^2 - x^2)^{1/2}]\}$$

$$+ \pi(G_1 + G_2) D_n a^{2n-1} \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho^{n+1}}.$$

9. При общих граничных условиях (3.1.1), найдите нормальные перемещения для $\rho > a$, выраженные через функций напряжений f_n.

Ответ: $\Re\{w_n(\rho)e^{in\phi} + w_{-n}(\rho)e^{-in\phi}\} = 2\pi^{3/2} H\alpha \dfrac{\Gamma(n)a^{2n-1}}{\Gamma(n+1/2)\rho^n} \Re\{D_n e^{in\phi}\}$

$$+ \frac{8H}{\rho^n} \Re\left\{ e^{in\phi} \int_0^a \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{d\rho_0}{\rho_0^{2n-1}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{\rho_0} \frac{t^{2n-1} df_n(t)}{(\rho_0^2 - t^2)^{1/2}} \right\}.$$

10. Исследуйте взаимодействие произвольной тангенциальной силы со сцеплённым осесимметричным штампом.

3.7 Неосесимметричная внешняя основная смешанная задача

Общая формулировка задачи дана в секции 3.1, с граничными условиями (3.1.6), и основными интегральными уравнениями (3.1.7–3.1.10). Мы предположим, что все параметры могут быть разложены в ряды Фурье. Точное решение для n-ной гармоники представлено ниже. Основные интегральные уравнения для n-ной гармоники имеют вид:

$$2\rho^{n+1} \int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2[2nx^2 - (2n+1)\rho_0^2]\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^n d\rho_0$$

$$- \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}} \int_a^\rho \sigma_n(\rho_0)\rho_0^{n+1} d\rho_0 = F_{n+1}(\rho), \qquad \text{для} \qquad n \ge 0.$$

$$2\rho^{n-1}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int\limits_{a}^{x}\frac{G_1x^2\tau_{-n+1}(\rho_0)+G_2[(2n-1)x^2-2n\rho^2]\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\rho_0^n d\rho_0$$

$$+2\pi H\alpha\rho^{n-1}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{\sigma_{-n}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^{n-1}}=F_{-n+1}(\rho),\qquad \text{для}\qquad n\geq 1;$$

$$2\pi H\alpha\,\Re\left\{\frac{e^{-in\phi}}{\rho^n}\int\limits_{a}^{\rho}\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n d\rho_0-\rho^n e^{in\phi}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^n}\right\}$$

$$+4H\rho^n\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int\limits_{a}^{x}\frac{\sigma_{-n}(\rho_0)e^{-in\phi}+\sigma_n(\rho_0)e^{in\phi}}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\rho_0^{n+1}d\rho_0=\Re\{e^{in\phi}\Phi_n(\rho)\},$$

$$\text{для}\qquad n\geq 0. \tag{3.7.1}$$

Правая часть (3.7.1) известна из граничных условий, а именно,

$$F_{n+1}(\rho)=u_{n+1}(\rho)+\frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}}\int\limits_{0}^{a}\sigma_n(\rho_0)\rho_0^{n+1}d\rho_0$$

$$-\frac{2}{\rho^{n+1}}\int\limits_{0}^{a}\frac{x^{2n}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int\limits_{x}^{a}\frac{G_1x^2\tau_{n+1}(\rho_0)+G_2[2n\rho^2-(2n+1)x^2]\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}d\rho_0,$$

$$F_{-n+1}(\rho)=u_{-n+1}(\rho)-\frac{2}{\rho^{n-1}}\int\limits_{0}^{a}\frac{x^{2n-2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$\times\int\limits_{x}^{a}\frac{G_1\rho_0^2\tau_{-n+1}(\rho_0)+G_2[(2n-1)\rho_0^2-2nx^2]\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}d\rho_0,$$

$$\Re\{\Phi_n(\rho)e^{in\phi}\}=w_n(\rho)e^{in\phi}+w_{-n}(\rho)e^{-in\phi}+2\pi H\alpha\,\Re\left\{\frac{e^{-in\phi}}{\rho^n}\int\limits_{0}^{a}\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n d\rho_0\right\}$$

$$-\frac{4H}{\rho^{n}}\int_{0}^{a}\frac{x^{2n}dx}{(\rho^{2}-x^{2})^{1/2}}\int_{x}^{a}\frac{\sigma_{n}(\rho_{0})e^{in\phi}+\sigma_{-n}(\rho_{0})e^{-in\phi}}{\rho_{0}^{n-1}(\rho_{0}^{2}-x^{2})^{1/2}}d\rho_{0}. \tag{3.7.2}$$

Случай осевой симметрии $(n=0)$ был рассмотрен в деталях в секции 3.3, и не обсуждается здесь. Решение ищется для $n\geq 1$. Мы можем предположить, без потери общности, что первые два уравнения (3.7.1) однородны. Это может быть достигнуто добавлением некоторых специальных решений к параметрам τ_{-n+1} и τ_{n+1}. Эти специальные решения, удовлетворяющие правым частям первых двух уравнений (3.7.1), могут быть получены из результатов секции 2.7. Конечно, эта процедура сделает правую часть третьего уравнения (3.7.1) более сложным.

Положим решение (3.7.1), с первыми двумя уравнениями преобразованными в однородные, в следующей форме:

$$\sigma_{n}(\rho)=\bar{\sigma}_{-n}(\rho)=\rho^{n}\int_{\rho}^{\infty}\frac{df_{n}(t)}{t^{2n}(t^{2}-\rho^{2})^{1/2}},$$

$$\tau_{n+1}(\rho)=\frac{C}{\rho^{n}}\frac{d}{d\rho}\int_{a}^{\rho}\frac{f_{n}(t)dt}{(\rho^{2}-t^{2})^{1/2}}-\frac{D_{n}}{\rho^{n+1}(\rho^{2}-a^{2})^{1/2}},$$

$$\tau_{-n+1}(\rho)=\frac{C}{\rho^{n}}\frac{d}{d\rho}\left\{\rho^{2n}\int_{a}^{\rho}\frac{dy}{y^{2n}}\frac{d}{dy}\int_{a}^{y}\frac{\bar{f}_{n}(t)dt}{(y^{2}-t^{2})^{1/2}}\right\}$$

$$+\frac{\bar{D}_{n}}{\rho^{n}}\frac{d}{d\rho}\left\{\rho^{2n}\int_{a}^{\rho}\frac{dt}{t^{2n+1}(t^{2}-a^{2})^{1/2}}\right\}. \tag{3.7.3}$$

Здесь f_n пока неизвестные комплексные функции напряжений, и C, D_n постоянные, подлежащие определению. Подстановка (3.7.3) в первые два уравнения (3.7.1) удовлетворяет их тождественно, если следующие условия справедливы:

$$C=\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2},\qquad D_n=-2nCa^{2n+1}\int\limits_a^\infty\frac{f_n(t)}{t^{2n+1}}\,dt. \tag{3.7.4}$$

$$(G_1+G_2)\frac{\pi^{3/2}\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+3/2)}D_n+2\pi H\alpha a^{2n+2}\int\limits_a^\infty\left[xf_n(x)\right.$$

$$\left.-\int\limits_a^x f_n(t)dt\right]\frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-a^2)^{1/2}}=0. \tag{3.7.5}$$

Некоторые общие формулы из Аппендикса А3.3 были использованы в преобразованиях. Условия (3.7.4) и (3.7.5) могут казаться противоречивым. Будет показано ниже (смотри 3.7.11), что это не так, потому что добавочная постоянная появится в выражении для f_n, из–за однородного решения интегрального уравнения (3.7.8).

Пока что, мы удовлетворили первые два уравнения (3.7.1). Подстановка (3.7.3) в третье уравнение (3.7.1) требует выполнения следующих преобразований:

$$\int\limits_a^x\frac{\rho_0^{2n+1}d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\int\limits_{\rho_0}^\infty\frac{df_n(t)}{t^{2n}(t^2-\rho_0^2)^{1/2}}=\int\limits_a^\infty\left[(x^2-a^2)^{1/2}(t^2-a^2)^{1/2}Q_n(x,t)\right.$$

$$\left.+\psi_n(x,t)\ln\frac{|(x^2-a^2)^{1/2}+(t^2-a^2)^{1/2}|}{|t^2-x^2|^{1/2}}\right]\frac{df_n(t)}{t^{2n}}. \tag{3.7.6}$$

Здесь $Q_n(x,t)$ есть полином чётных степеней по x и t. Хотя мы не можем написать явное выражение для $Q_n(x,t)$, он может быть вычислен элементарным способом для любого частного n. Явное выражение для ψ_n есть:

$$\psi_n(x,t)=\frac{x^{2n}}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n-k+1/2)\,\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{t}{x}\right)^{2k}. \tag{3.7.7}$$

Разделим обе стороны третьего уравнения (3.7.1) на ρ^n, дифференцируем по

ρ, умножим результат на $\rho^{2n}/(\rho^2 - r^2)^{1/2}$ и интегрируем по ρ от r до ∞. Эта процедура позволяет нам разделить ядро интегрального уравнения на две части: сингулярную и вырожденную. Результат принимает вид:

$$-\frac{(r^2-a^2)^{1/2}}{r}\int_a^\infty \frac{f_n(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)(t^2-a^2)^{1/2}}+\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int_a^\infty \frac{f_n(t)\mathrm{d}t}{t^2-\rho^2}=\chi_n(r). \tag{3.7.8}$$

Здесь

$$\chi_n(r)=\frac{1}{4\pi H}\int_r^\infty \frac{\rho^{2n}\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-r^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\frac{\Phi_n(\rho)}{\rho^n}\right]$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_r^\infty \frac{\rho^{2n}\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-r^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^\infty \frac{(x^2-a^2)^{1/2}\mathrm{d}x}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^\infty (t^2-a^2)^{1/2}Q_n(x,t)\frac{\mathrm{d}f_n(t)}{t^{2n}}$$

$$+\frac{2}{\pi^{3/2}}\int_r^\infty \frac{\rho^{2n-1}\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-r^2)^{1/2}}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-a^2)^{1/2}}\int_a^\infty q_n(\rho,x,t)(t^2-a^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}f_n(t)}{t^{2n-2}}, \tag{3.7.9}$$

с

$$q_n(\rho,x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k+1/2)}{\Gamma(n-k+1)}\left(\frac{t}{\rho}\right)^{2k}F\left(1-n+k,\frac{1}{2};\frac{1}{2}-n+k;\frac{t^2}{x^2}\right). \tag{3.7.10}$$

Заметим, что гипергеометрическая функция в (3.7.10) есть, фактически, полином, и что все интегралы по x и ρ в вырожденной части ядра (3.7.9) могут быть вычислены в элементарных функциях для любого n. Интегральное уравнение (3.7.8) было решено в секции 3.3, и это решение есть:

$$f_n(t)=\frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)t\left[tY_c(t)\int_a^\infty \frac{\chi_n(r)Y_c(r)\mathrm{d}r}{r^2-t^2}+Y_s(t)\int_a^\infty \frac{\chi_n(r)Y_s(r)r\mathrm{d}r}{r^2-t^2}\right]+A_nY_c(t). \tag{3.7.11}$$

Последний член в (3.7.11) представляет однородное решение, с A_n в качестве произвольной постоянной. Его значение, вместе с постоянной D_n и другими, которые появляются из–за вырожденной части ядра, может быть найдено из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений и условий (3.7.4) и (3.7.5). Общее решение может считаться законченным.

Пример. Рассмотрим действие нормальной сосредоточенной силы P приложенной в некоторой точке внутри круга $\rho = a,$ с защемлённой остальной частью плоскости $z = 0$. Мы можем предположить, без потери общности, что сила приложена в точке $\rho = b$, $\phi = 0$ ($b<a$). Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$u = w = 0, \qquad \text{для} \qquad \rho > a;$$

$$\sigma = P\delta(\rho - b)\delta(\phi - 0)/\rho, \qquad \tau = 0, \qquad \text{для} \qquad \rho < a.$$

Мы находим в этом случае:

$$F_{-n+1}(\rho) = 0, \qquad \text{для} \qquad n \geq 1; \qquad F_{n+1} = PH\alpha \frac{b^{n}}{\rho^{n+1}}, \qquad \text{для} \qquad n \geq 0;$$

$$\Phi_{n}(\rho) = -\frac{4}{\pi} PH(\rho b)^{n} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}(x^{2}-\rho^{2})^{1/2}(x^{2}-b^{2})^{1/2}}. \tag{3.7.12}$$

Мы представляем теперь явные решения для некоторых специфических значений n. В осесимметричном случае $n = 0$, следующие результаты могут быть получены:

$$\sigma_{0}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{df_{0}(t)}{(t^{2}-\rho^{2})^{1/2}} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_{\rho}^{\infty} \frac{f_{0}(t)t\,dt}{(t^{2}-\rho^{2})^{1/2}},$$

$$\tau_{1}(\rho) = \frac{\alpha}{\gamma_{1}\gamma_{2}}\frac{d}{d\rho}\int_{a}^{\rho} \frac{f_{0}(t)dt}{(\rho^{2}-t^{2})^{1/2}} - \frac{D_{0}}{\rho(\rho^{2}-a^{2})^{1/2}},$$

$$f_{0}(t) = \frac{2P}{\pi^{3}}\cosh^{2}(\pi\theta)\int_{a}^{\infty} \frac{Y_{c}(t)rY_{c}(r) + tY_{s}(t)Y_{s}(r)}{(r^{2}-t^{2})(r^{2}-b^{2})^{1/2}}\,dr$$

$$-D_{0}\frac{\gamma_{1}\gamma_{2}}{a\alpha}[1 - Y_{c}(t)],$$

$$D_0 = -\frac{P\alpha\sinh(\pi\theta)}{4\pi^2\theta\gamma_1\gamma_2}\left[1-\frac{2}{\pi}\coth(\pi\theta)\int_a^\infty \frac{Y_s(r)\mathrm{d}r}{(r^2-b^2)^{1/2}}\right].$$

Результаты для первой гармоники ($n=1$):

$$\sigma_1(\rho) = \bar{\sigma}_{-1}(\rho) = \rho\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{t^2(t^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau_2(\rho) = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_a^\rho \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} - \frac{D_1}{\rho^2(\rho^2-a^2)^{1/2}},$$

$$\tau_0(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\rho^2\left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_a^\rho \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^y \frac{\bar{f}_1(t)\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{1/2}} + \bar{D}_1\int_a^\rho \frac{\mathrm{d}y}{y^3(y^2-a^2)^{1/2}}\right]\right\},$$

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi^2}\cosh^2(\pi\theta)t\left[tY_c(t)\int_a^\infty \frac{\chi_1(r)Y_c(r)\mathrm{d}r}{r^2-t^2} + Y_s(t)\int_a^\infty \frac{\chi_1(r)Y_s(r)r\mathrm{d}r}{r^2-t^2}\right] + A_1Y_c(t),$$

$$\chi_1(r) = \frac{Pb}{2\pi r}\left[\frac{1}{(r^2-b^2)^{1/2}} + \frac{1}{r+(r^2-b^2)^{1/2}}\right] + \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{(r^2-a^2)^{1/2}}{r}\right]B_1.$$

Постоянные D_1, A_1, и B_1 должны быть определены из системы линейных алгебраических уравнений

$$D_1 = -\frac{2\alpha a^3}{\gamma_1\gamma_2}\int_a^\infty \frac{f_1(t)\mathrm{d}t}{t^3}, \qquad B_1 = \int_a^\infty \frac{(t^2-a^2)^{1/2}}{t^2}\mathrm{d}f_1(t),$$

$$-\frac{2\pi}{3H\alpha}(G_1+G_2)D_1 + 2\pi\int_a^\infty\left[xf_1(x) - \int_a^x f_1(t)\mathrm{d}t\right]\frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2-a^2)^{1/2}} - Pb = 0.$$

Следует отметить, что система напряжений в защемлённой части такова, что её главный вектор точно равен P. Это может быть показано прямым интегрированием.

Упражнение 3.7

1. Найдите решение для примера выше (страница 211) в предельном случае $b = 0$.

Ответ: единственная ненулевая функция напряжений есть:

$$f_0(t) = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{2\cosh^2(\pi\theta)Y_s(t)}{\pi\sinh(\pi\theta)t} - \frac{\sinh(2\pi\theta)[1 - Y_c(t)]}{2\pi\theta[1+\cosh(\pi\theta)]a}\right\}.$$

2. Найдите решение для примера выше в предельном случае $\alpha = 0$.

Ответ: $\sigma_n(\rho) = -\dfrac{P(a^2 - b^2)^{1/2}}{\pi^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}(\rho^2 - b^2)}\left(\dfrac{b}{\rho}\right)^n, \qquad \tau_n = 0.$

3. Докажите, что напряжения в плоскости $z = 0$ находятся в равновесии, когда внешность штампа защемлёна.

Заметьте: это свойство несправедливо в случае *внутренних* задач.

4. Попробуйте найти точное решение *в замкнутой форме* основной смешанной граничной задачи.

Аппендикс А3.1

Некоторые интегралы, относящиеся к решению внутренних основных смешанных задач, представлены здесь. Обозначения $Y_{c,s}$ определены в (3.2.45). Мы предполагаем, что $0 < r < a$.

Интегралы, содержащие Y_c:

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2 - r^2} = -\frac{\pi}{2r}\coth(\pi\theta)Y_s(r),$$

$$\int_0^a \left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - x^2}\right)^{1/2}\frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2 - r^2} = -\frac{\pi}{2r}\tanh(\pi\theta)Y_s(r),$$

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)x^2\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)} - \frac{\pi}{2} r\coth(\pi\theta) Y_s(r),$$

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)x^4\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = -\frac{\pi}{2} r^3\coth(\pi\theta) Y_s(r) + \frac{\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)}\left[r^2 + a^2\frac{1-2\theta^2}{3}\right],$$

$$\int_0^a \frac{(a^2-x^2)^{1/2} Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = -\frac{\pi}{2r}(a^2-r^2)^{1/2}\tanh(\pi\theta) Y_s(r) - \frac{\pi}{2\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{x^2(a^2-x^2)^{1/2} Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\pi a^2}{\cosh(\pi\theta)}\left(\frac{1}{4}+\theta^2\right)$$

$$-\frac{\pi}{2}\left[r(a^2-r^2)^{1/2}\tanh(\pi\theta) Y_s(r) + \frac{r^2}{\cosh(\pi\theta)}\right],$$

$$\int_0^a \frac{x^2 Y_c(x)\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2\cosh(\pi\theta)} - \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\frac{r}{(a^2-r^2)^{1/2}} Y_s(r),$$

$$\int_0^a Y_c(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)}, \qquad \int_0^a x^2 Y_c(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\theta(1-2\theta^2)a^3}{3\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{1/2} Y_c(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{\cosh(\pi\theta)}\left(\frac{1}{4}+\theta^2\right), \qquad \int_0^a \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{x^2 Y_c(x)\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi a^2}{\cosh(\pi\theta)}\left(\frac{1}{4}-\theta^2\right),$$

$$\int_0^a \frac{1-Y_c(x)}{x^2}\,dx = \frac{\pi\theta\coth(\pi\theta)-1}{a}.$$

Интегралы, содержащие Y_c:

$$\int_0^a \frac{xY_s(x)dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2}\coth(\pi\theta)Y_c(r) - \frac{\pi}{2\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x)dx}{x(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2}\coth(\pi\theta)\,\frac{Y_c(r)-1}{r^2},$$

$$\int_0^a \frac{x^3Y_s(x)dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi\theta^2a^2}{\sinh(\pi\theta)} + \frac{\pi r^2}{2\sinh(\pi\theta)}[\cosh(\pi\theta)Y_c(r)-1],$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x)dx}{x(a^2-x^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2r^2}\tanh(\pi\theta)\left[\frac{Y_c(r)}{(a^2-r^2)^{1/2}} - \frac{1}{a}\right],$$

$$\int_0^a \frac{x^3Y_s(x)dx}{(a^2-x^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)} + \frac{\pi r^2}{2(a^2-r^2)^{1/2}}\tanh(\pi\theta)Y_c(r),$$

$$\int_0^a \left(\frac{a^2-r^2}{a^2-x^2}\right)^{1/2}\frac{xY_s(x)dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)Y_c(r),$$

$$\int_0^a \frac{x(a^2-x^2)^{1/2}Y_s(x)dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\,(a^2-r^2)^{1/2}Y_c(r) - \frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a xY_s(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\theta^2 a^2}{\sinh(\pi\theta)}, \qquad \int_0^a x^3 Y_s(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\theta^2(2-\theta^2)a^4}{3\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{xY_s(x)\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)}, \qquad \int_0^a \frac{x^3 Y_s(x)\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta(5-4\theta^2)a^3}{6\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{(a^2-x^2)^{1/2}Y_s(x)\mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{2}a\tanh(\pi\theta) - \frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x)\mathrm{d}x}{x(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2a}\tanh(\pi\theta), \qquad \int_0^a x(a^2-x^2)^{1/2}Y_s(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\theta(1+4\theta^2)a^3}{6\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2+r^2} = \frac{\pi\sinh[2\theta\tan^{-1}(a/r)]}{2r\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x)x\mathrm{d}x}{x^2+r^2} = \frac{\pi\{\cosh[2\theta\tan^{-1}(a/r)]-1\}}{2\sinh(\pi\theta)},$$

Интегралы, содержащие комбинацию $Y_c + iY_s$:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{\mathrm{d}x}{x-r} = \frac{\pi}{i\sinh(\pi\theta)}\left[1-\cosh(\pi\theta)\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta}\right],$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x)(x-r)} = \frac{\pi i\coth(\pi\theta)}{a+r}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{\mathrm{d}x}{(x-r)(a^2-x^2)^{1/2}}=\frac{\pi i\tanh(\pi\theta)}{(a^2-r^2)^{1/2}}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{(a^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x}{x-r}=\pi i\tanh(\pi\theta)(a^2-r^2)^{1/2}\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^{i\theta}-\frac{\pi(2ia\theta+r)}{\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\mathrm{d}x=\frac{2\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)},\qquad \int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}x\mathrm{d}x=\frac{2i\pi\theta^2a^2}{\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi\theta(1-2\theta^2)a^3}{3\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{\mathrm{d}x}{x+a}=-\frac{i\pi}{\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{x\mathrm{d}x}{x+a}=\frac{\pi a(i+2\theta)}{\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\theta}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x+a}=-\frac{\pi a^2[2\theta+i(1-2\theta^2)]}{\sinh(\pi\theta)}.$$

Аппендикс А3.2

Некоторые интегралы, использованные при решении внешних основных смешанных граничных задач, представлены здесь. Предполагается, что $a<r<\infty$.

Интегралы, содержащие Y_c:

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2r}\coth(\pi\theta)Y_s(r),$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2r^3}\coth(\pi\theta)Y_s(r) - \frac{\pi\theta}{ar^2\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \frac{xY_c(x)\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\frac{Y_s(r)}{(r^2-a^2)^{1/2}}$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2r^2}\left[-\frac{1}{a\cosh(\pi\theta)} + \tanh(\pi\theta)\frac{Y_s(r)}{(r^2-a^2)^{1/2}}\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^3(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2r^4}\left[-\frac{1}{a\cosh(\pi\theta)}\right.$$

$$\left.+\tanh(\pi\theta)\frac{Y_s(r)}{(r^2-a^2)^{1/2}}\right] - \frac{\pi[(1/4)-\theta^2]}{a^3r^2\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \frac{(x^2-a^2)^{1/2}Y_c(x)\mathrm{d}x}{x(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2r^2}\left[\frac{a}{\cosh(\pi\theta)} + \tanh(\pi\theta)(r^2-a^2)^{1/2}Y_s(r)\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\pi\theta}{a\sinh(\pi\theta)}, \qquad \int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2a\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)\mathrm{d}x}{x^3(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi[(1/4)-\theta^2]}{a^3\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty [1 - Y_c(x)]\mathrm{d}x = a[\pi\theta\coth(\pi\theta) - 1],$$

$$\int_a^\infty [1 - Y_c(x)]\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = \pi\theta a\tanh(\pi\theta),$$

$$\int_a^\infty \left[1 - \frac{xY_c(x)}{(x^2 - a^2)^{1/2}}\right]\mathrm{d}x = a[\pi\theta\tanh(\pi\theta) - 1],$$

$$\int_a^\infty (x^2 - a^2)^{1/2}\mathrm{d}[Y_c(x)] = \pi\theta a\tanh(\pi\theta),$$

$$\int_a^\infty \left(\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1\right)Y_c(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\theta a}{\sinh(2\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \left(1 - \frac{(x^2 - a^2)^{1/2}}{x}\right)Y_c(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi a}{2\cosh(\pi\theta)} - \frac{2\pi\theta a}{\sinh(2\pi\theta)},$$

Интегралы, содержащие Y_s:

$$\int_a^\infty \frac{xY_s(x)\mathrm{d}x}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{2}\coth(\pi\theta)[1 - Y_c(r)],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)\mathrm{d}x}{x(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^2}\left[\frac{1}{\sinh(\pi\theta)} - \coth(\pi\theta)Y_c(r)\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = -\frac{\pi\tanh(\pi\theta)}{2r(r^2-a^2)^{1/2}}Y_c(r),$$

$$\int_a^\infty \frac{x^2Y_s(x)\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\left[1-\frac{r}{(r^2-a^2)^{1/2}}Y_c(r)\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)\mathrm{d}x}{x^2(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = -\frac{\pi}{r^2}\left[\frac{\tanh(\pi\theta)}{2r(r^2-a^2)^{1/2}}Y_c(r)+\frac{\theta}{a^2\cosh(\pi\theta)}\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{(x^2-a^2)^{1/2}Y_s(x)\mathrm{d}x}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta)\left[1-\frac{(r^2-a^2)^{1/2}}{r}Y_c(r)\right],$$

$$\int_a^\infty Y_s(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{2}\tanh(\frac{\pi\theta}{2}), \qquad \int_a^\infty Y_s(x)\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{\pi\theta^2}{a^2\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty Y_s(x)\frac{\mathrm{d}x}{x^5} = \frac{\pi\theta^2(2-\theta^2)}{3a^4\sinh(\pi\theta)}, \qquad \int_a^\infty \frac{Y_s(x)\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\theta),$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)\mathrm{d}x}{x^2(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta}{a^2\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty (x^2-a^2)^{1/2}\mathrm{d}[Y_s(x)] = \pi a^2\tanh(\pi\theta)(\theta^2-1/4),$$

$$\int_a^\infty (x^2-a^2)^{1/2}Y_s(x)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\pi}{2}\left[\tanh(\pi\theta)-\frac{2\theta}{\cosh(\pi\theta)}\right]$$

$$\int_a^\infty (x^2-a^2)^{1/2} Y_s(x)\,\frac{dx}{x^4} = \frac{2\pi\theta(\theta^2+1/4)}{3a^2\cosh(\pi\theta)}$$

$$\int_a^\infty \left[\frac{x}{(x^2-a^2)^{1/2}} - 1\right] Y_s(x) x\,dx = \frac{\pi a^2}{4}\left[\tanh(\pi\theta) + \frac{8\theta^2}{\sinh(2\pi\theta)}\right],$$

Интегралы, содержащие оба Y_c и Y_s:

$$\int_a^\infty [xY_s(x) - 2a\theta Y_c(x)]\,dx = \pi a^2\theta^2\coth(\pi\theta),$$

$$\int_a^\infty [xY_s(x) - 2a\theta Y_c(x)]\,\frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi a^2}{4}\tanh(\pi\theta)(1+4\theta^2),$$

$$\int_a^\infty \left[1 - \frac{(x^2-a^2)^{1/2}}{x}\right][xY_s(x) - 2a\theta Y_c(x)]\,dx$$

$$= \frac{2\pi\theta^2 a^2}{\sinh(2\pi\theta)} + \frac{\pi a^2}{4}\tanh(\pi\theta) - \frac{\pi\theta a^2}{\cosh(\pi\theta)}.$$

Аппендикс A3.3

Некоторые формулы, относящиеся к преобразованию и вычислению интегралов, представлены здесь.

Преобразования пределов интегрирования:

$$\int_0^\rho \frac{f(x)\,dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}\rho\int_0^a \frac{dy}{\rho^2-y^2}\int_y^a \frac{f(x)\,dx}{(x^2-y^2)^{1/2}}$$

$$\int_\rho^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}(a^2-\rho^2)^{1/2}\int_0^a \frac{y\mathrm{d}y}{(y^2-\rho^2)(a^2-y^2)^{1/2}}\int_0^y \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(y^2-x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{xf(x)\mathrm{d}x}{x^2-y^2}+\frac{\pi}{2\rho}\lim_{x\to 0}[xf(x)],$$

$$\int_0^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}(\rho^2-a^2)^{1/2}\int_0^a \frac{y\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)(a^2-y^2)^{1/2}}\int_0^y \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(y^2-x^2)^{1/2}}$$

Упрощения двух последовательных интегралов:

$$\int_\rho^a \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2}\Bigg[\rho f(\rho)+\int_\rho^a f(y)\mathrm{d}y$$

$$-\frac{a}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\lim_{r\to a}[f(r)(a^2-r^2)^{1/2}]\Bigg];$$

$$\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2\rho}\left[-\frac{f(\rho)}{\rho^2}+\int_\rho^a \frac{f(y)\mathrm{d}y}{y^3}\right].$$

$$\int_b^x \frac{t\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\int_t^a \frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-t^2)^{1/2}} = \int_b^a f(y)\ln\frac{(x^2-b^2)^{1/2}+(y^2-b^2)^{1/2}}{|x^2-y^2|^{1/2}}\mathrm{d}y,$$

$$\int_x^a \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)^{1/2}}\int_b^t \frac{f(y)\mathrm{d}y}{(t^2-y^2)^{1/2}} = \int_b^a f(y)\ln\frac{(a^2-x^2)^{1/2}+(a^2-y^2)^{1/2}}{|x^2-y^2|^{1/2}}\mathrm{d}y,$$

$$\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{f(r)r\mathrm{d}r}{(r^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}} = -\frac{\pi}{2\cos(\pi\kappa/2)}f(\rho),$$

$$\int_0^{\rho}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x}\frac{f(r)r\mathrm{d}r}{(x^2-r^2)^{(1-\kappa)/2}}=\frac{\pi}{2\cos(\pi\kappa/2)}\left[f(\rho)-\frac{1}{\rho}\lim_{r\to 0}[rf(r)]\right]$$

$$\int_b^{x}\frac{\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{a}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-t^2)^{1/2}}=(x^2-b^2)^{1/2}\int_b^{a}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-x^2)(y^2-b^2)^{1/2}},$$

$$\int_x^{a}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_b^{t}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(t^2-y^2)^{1/2}}=(a^2-x^2)^{1/2}\int_b^{a}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-x^2)(a^2-y^2)^{1/2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^{x}\frac{t\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\int_t^{a}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(y^2-t^2)^{1/2}}=\frac{x}{(x^2-b^2)^{1/2}}\int_b^{a}\frac{(y^2-b^2)^{1/2}f(y)\mathrm{d}y}{y^2-x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{a}\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)^{1/2}}\int_b^{t}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(t^2-y^2)^{1/2}}=\frac{x}{(a^2-x^2)^{1/2}}\int_b^{a}\frac{(a^2-y^2)^{1/2}f(y)\mathrm{d}y}{y^2-x^2},$$

$$\int_0^{a}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(x^2-y^2)^{1/2}}=(\rho^2-a^2)^{1/2}\int_0^{a}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)(a^2-y^2)^{1/2}},$$

$$\int_a^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{(t^2-x^2)^{1/2}}=\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{\infty}\frac{f(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-x^2)^{1/2}}$$

$$=(a^2-\rho^2)^{1/2}\int_a^{\infty}\frac{f(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^{1/2}(t^2-\rho^2)}.$$

Вычисление и/или преобразование некоторых интегралов:

$$\int_x^a \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n+1}(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_\rho^a \frac{t^{2n-1}\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}} = \frac{\pi(a^{2n}-x^{2n})}{4nax^{2n+1}},$$

$$\int_x^a \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n-1}(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_\rho^a \frac{t^{2n-1}\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}} = \frac{\pi(a^{2n-1}-x^{2n-1})}{2(2n-1)x^{2n-1}},$$

$$\int_x^a \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n-1}(a^2-\rho^2)^{1/2}(\rho^2-x^2)^{1/2}} = \frac{1}{(ax)^{2n-1}}\int_x^a \frac{\rho^{2n-1}\mathrm{d}\rho}{(a^2-\rho^2)^{1/2}(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\pi}{2ax^{2n-1}}F(1-n,\frac{1}{2};1;1-\frac{x^2}{a^2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{2ax^{2n-1}\Gamma(n)}F(1-n,\frac{1}{2};\frac{3}{2}-n;\frac{x^2}{a^2}),$$

$$\int_x^a \frac{(a^2-\rho^2)^{1/2}\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n+1}(\rho^2-x^2)^{1/2}} = \frac{1}{a^{2n-1}x^{2n+1}}\int_x^a \frac{(\rho^2-x^2)^{1/2}\rho^{2n-1}\mathrm{d}\rho}{(a^2-\rho^2)^{1/2}} = \frac{\pi(a^2-x^2)}{4ax^{2n+1}}$$

$$\times F(1-n,\frac{1}{2};2;1-\frac{x^2}{a^2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)(a^2-x^2)}{2n!ax^{2n+1}}F(1-n,\frac{1}{2};\frac{1}{2}-n;\frac{x^2}{a^2})$$

$$\int_x^a \frac{(\rho^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n+1}(a^2-\rho^2)^{1/2}} = \frac{1}{a^{2n+1}x^{2n-1}}\int_x^a \frac{(a^2-\rho^2)^{1/2}\rho^{2n-1}\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\pi(a^2-x^2)}{4a^3x^{2n-1}}F(1-n,\frac{3}{2};2;1-\frac{x^2}{a^2}).$$

$$\int_a^\rho \frac{x^{2n}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} = a^{2n+1}\rho^{2n}\int_a^\rho \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+1}(x^2-a^2)^{1/2}},$$

$$\int_\rho^a \frac{x^{2n}\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} = a^{2n+1}\rho^{2n}\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+1}(a^2-x^2)^{1/2}}.$$

$$\int_x^a \frac{d\rho}{\rho^{2n-1}(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho^2-t^2)^{1/2}} = \frac{(a^2-x^2)^{1/2}(a^2-t^2)^{1/2}}{a^2x^{2n-2}(x^2-t^2)}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)^m$$

$$\times\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-m)(m!)^2}\frac{d^m}{d\zeta^m}\left[(1-\zeta)^{m-1/2}\frac{\sin^{-1}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\right], \text{ s } \zeta = -\frac{t^2(a^2-x^2)}{a^2(x^2-t^2)}.$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-\rho^2)} = \frac{1}{a^{2n+1}\rho^{2n+2}}\int_0^\rho \frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1}\rho^{2n+2}}\left[\frac{\pi a^{2n+1}}{2(a^2-\rho^2)^{1/2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)}a^{2(n-k)}\rho^{2k}\right],$$

Правила изменения порядка интегрирования:

$$\int_0^a F(r)dr\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{f(\rho)\rho d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} = -\int_0^a f(\rho)d\rho\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a \frac{F(r)rdr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} +$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\rho f(\rho)\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a \frac{F(r)rdr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}\right\} + \lim_{\rho\to a}\left\{f(\rho)\int_\rho^a \frac{F(r)rdr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}\right\},$$

$$\int_a^\infty F(\rho)d\rho\frac{d}{d\rho}\int_\rho^\infty \frac{f(x)xdx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} = -\int_a^\infty f(x)dx\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{F(\rho)\rho d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\int_0^a \frac{dt}{t^2-x^2}\int_0^a \frac{f(t,r)dr}{r^2-t^2} = -\frac{\pi^2 f(x,x)}{4x^2} + \int_0^a dr\int_0^a \frac{f(t,r)dt}{(t^2-x^2)(r^2-t^2)},$$

$$\int_0^a \mathrm{d}t \int_0^a \frac{f(t,r)\mathrm{d}r}{r^2-t^2} = -\frac{\pi^2}{4} f(0,0) + \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^a \frac{f(t,r)\mathrm{d}t}{(r^2-t^2)}.$$