ГЛАВА 2

СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Упругое полупространство является полезной математической моделью для рассмотрения различных контактных задач и задач теории трещин в телах конечных размеров, в случаях, когда область контакта или размер трещины намного меньше, чем характеристические размеры тела. Общее решение, выраженное через три гармонические функции, представлено для случая трансверсальной изотропии. Точные замкнутые решения даны для смешанных задач первого и второго типа. Различные приложения этих решений рассмотрены в деталях. Материал этой главы базируется на статьях (Fabrikant, 1970, 1971b, 1971c, 1985b, 1986g).

2.1 Общее решение

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое тело, которое характеризуется пятью упругими константами A_{ik}. Закон Гука для такого тела имеет вид:

$$\sigma_x = A_{11}\frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66})\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\sigma_y = (A_{11} - 2A_{66})\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11}\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\sigma_z = A_{13}\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13}\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{xy} = A_{66}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \tau_{yz} = A_{44}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{zx} = A_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right). \tag{2.1.1}$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{2.1.2}$$

Подстановка (2.1.1) в (2.1.2) даёт:

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66})\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (A_{13} + A_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$A_{66}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + A_{11}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (A_{13} + A_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$A_{44}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (A_{44} + A_{13})\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z}\right] = 0. \tag{2.1.3}$$

Введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + \mathrm{i}u_y$, и $\overline{u} = u_x - \mathrm{i}u_y$.

Это позволит нам уменьшить число уравнений в (2.1.3) на один, и переписать эти уравнения в более компактном виде, а именно,

$$\frac{1}{2}(A_{11} + A_{66})\Delta u + A_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(A_{11} - A_{66})\Lambda^2\overline{u} + (A_{13} + A_{44})\Lambda\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$A_{44}\Delta w + A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(A_{13} + A_{44})\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\Lambda}u + \Lambda\overline{u}) = 0. \tag{2.1.4}$$

Здесь следующие дифференциальные операторы были использованы:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.1.5}$$

Заметим также, что $\Delta = \Lambda\overline{\Lambda}$, и черта сверху означает везде комплексно сопряжённый параметр. Мы можем проверить, что уравнения (2.1.4) могут быть удовлетворены, если

$$u = \Lambda(F_1 + F_2 + \mathrm{i}F_3), \qquad w = m_1\frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2\frac{\partial F_2}{\partial z} \tag{2.1.6}$$

где все три функции $F_к$ удовлетворяют уравненю (Elliott, 1948):

$$\Delta F_k + \gamma_k^2\frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} = 0, \qquad \text{для} \qquad k = 1,2,3, \tag{2.1.7}$$

и параметры $m_к$ и $\gamma_к$ связаны следующими соотношениями (Elliott, 1948):

$$\frac{A_{44} + m_k(A_{13}+A_{44})}{A_{11}} = \frac{m_k A_{33}}{m_k A_{44} + A_{13} + A_{44}} = \gamma_k^2, \qquad \text{для} \qquad k = 1,2;$$

$$\gamma_3 = \left(A_{44}/A_{66}\right)^{1/2}. \tag{2.1.8}$$

Вводя обозначения $z_k = z/\gamma_k$, для $k = 1,2,3,$ мы можем называть функции $F_k = F(x,y,z_k)$ гармоническими. Заметим свойство $m_1 m_2 = 1$, которое как—то ускользнуло внимания других исследователей, и которое поможет нам упрощать различные выражения. Другие упругие константы использованы в этой книге:

$$G_1 = \beta + \gamma_1\gamma_2 H, \qquad G_2 = \beta - \gamma_1\gamma_2 H,$$

$$H = \frac{(\gamma_1+\gamma_2)A_{11}}{2\pi(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)}, \qquad \alpha = \frac{(A_{11}A_{33})^{1/2} - A_{13}}{A_{11}(\gamma_1+\gamma_2)}, \qquad \beta = \frac{\gamma_3}{2\pi A_{44}}. \tag{2.1.9}$$

Введём следующие комбинации напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y, \qquad \sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y + 2\mathrm{i}\tau_{xy}, \qquad \tau_z = \tau_{zx} + \mathrm{i}\tau_{yz}. \tag{2.1.10}$$

Эти обозначения упростят (2.1.1), а именно,

$$\sigma_1 = (A_{11} - A_{66})(\overline{\Lambda} u + \Lambda \overline{u}) + 2A_{13}\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_2 = 2A_{66}\Lambda u,$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}A_{13}(\overline{\Lambda} u + \Lambda \overline{u}) + A_{33}\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_z = A_{44}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \Lambda w\right]. \tag{2.1.11}$$

Мы имеем только четыре компонента напряжений, вместо шести, как это было в (2.1.1). Подстановка (2.1.6) в (2.1.11) даёт:

$$\sigma_1 = 2A_{66}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{[\gamma_1^2 - (1+m_1)\gamma_3^2]F_1 + [\gamma_2^2 - (1+m_2)\gamma_3^2]F_2\},$$

$$\sigma_2 = 2A_{66}\Lambda^2(F_1 + F_2 + \mathrm{i}F_3),$$

$$\sigma_z = A_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(1+m_1)\gamma_1^2 F_1 + (1+m_2)\gamma_2^2 F_2]$$

$$= -A_{44}\Delta[(1+m_1)F_1 + (1+m_2)F_2],$$

$$\tau_z = A_{44}\Lambda\frac{\partial}{\partial z}[(1+m_1)F_1 + (1+m_2)F_2 + \mathrm{i}F_3]. \tag{2.1.12}$$

Здесь мы использовали тот факт, что каждый $F_к$ удовлетворяет уравнению (2.1.7), и соотношение: $A_{11}\gamma_k^2 - A_{13}m_k = A_{44}(1+m_k)$, (для $k = 1,2$) который является непосредственным следствием (2.1.8). Выражения (2.1.6) и (2.1.12) дают общее решение, выраженое через три гармонические функции $F_к$. Было бы очень желательно выразить каждую функцию $F_к$ через только *одну* гармоническую функцию следующим образом:

$$F_k(x,y,z) = c_k F(x,y,z_k), \tag{2.1.13}$$

где $z_k = z/\gamma_k$, и $c_к$ является пока неизвестной комплексной постоянной. Как мы увидим дальше, это вполне возможно. Все результаты, полученные в книге действительны для изотропных тел, если мы примем

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \qquad H = \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \qquad \alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

$$\beta = \frac{1+\nu}{\pi E}, \qquad G_1 = \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{\pi E}, \qquad G_2 = \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E},$$

(2.1.14)

где E упругий модуль, и ν коэффициент Пуассона.

Упражнение 2.1

1. Проверьте эквивалентность (2.1.3) и (2.1.4)

2. Докажите, что решение (2.1.6) удовлетворяет (2.1.3), если условие (2.1.7) удовлетворено.

3. Докажите равенство $m_1 m_2 = 1$.

4. Докажите равенство $A_{11}\gamma_k^2 - A_{13}m_k = A_{44}(1 + m_k)$.

2.2 Решения для точечных сил

Поле напряжений и перемещений, вызываемых сосредоточенными нагрузками, очень важно для формулирования интегральных уравнений различных смешанных граничных задач. Два случая рассмотрены здесь: произвольная сосредоточенная нагрузка, действующая внутри трансверсально изотропного упругого пространства, и действие произвольной сосредоточенной силы на границу аналогичного полупространства. Хотя эти задачи были решены многими авторами, мы следуем здесь результатам данным в (Фабрикант, 1970). Основная причина этого в упрощении упругих коэффициентов, которое ускользнуло от внимания других авторов. Вот один такой пример: один из коэффициентов в (Chen, 1966) имеет вид

$$\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{11}A_{44}(\gamma_1^2-\gamma_2^2)}\left(\frac{A_{33}m_1}{\gamma_1^2}-A_{13}\right).$$

Это выражение после упрощения сводится к $1/(1-m_2)$.

Пусть сосредоточенная сила, с компонентами T_x, T_y, и P в декартовых координатах приложена в точке N_0 внутри трансверсально изотропного упругого пространства. Мы можем положить, без потери общности, что полярные цилиндрические координаты точки N_0 являются $(\rho_0,\phi_0,0)$. Нам нужно найти поля напряжений и перемещений в произвольной точке $M(\rho,\phi,z)$. Введём комплексную тангенциальную силу $T = T_x + iT_y$. Общее решение может быть выражено через три потенциальные функции:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)}\left[\frac{1}{2}\gamma_1 m_2(\overline{\Lambda}\chi_1 + \Lambda\overline{\chi}_1) + P\ln(R_1 + z_1)\right],$$

$$F_2 = -\frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)}\left[\frac{1}{2}\gamma_2 m_1(\overline{\Lambda}\chi_2 + \Lambda\overline{\chi}_2) + P\ln(R_2 + z_2)\right],$$

$$F_3 = \mathrm{i}\frac{\gamma_3}{8\pi A_{44}}(\overline{\Lambda}\chi_3 - \Lambda\overline{\chi}_3). \tag{2.2.1}$$

Здесь было введено обозначение

$$\chi_k(z) = \chi(z_k), \quad R_k = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0) + z_k^2]^{1/2}, \quad \text{для} \quad k = 1,2,3;$$

$$\chi(z) = T[z\ln(R_0 + z) - R_0]. \tag{2.2.2}$$

Перемещения определены благодаря (2.1.6) следующим образом:

$$u = \frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)}\left\{\frac{1}{2}\gamma_1 m_2\left[-\frac{T}{R_1} + \frac{q^2\overline{T}}{R_1(R_1 + z_1)^2}\right]\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\gamma_2 m_1\left[-\frac{T}{R_2} + \frac{q^2\overline{T}}{R_2(R_2 + z_2)^2}\right] - \frac{P}{\overline{q}}\left[\frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2}\right]\right\}$$

$$+\frac{\gamma_3}{8\pi A_{44}}\left[\frac{T}{R_3} + \frac{q^2\overline{T}}{R_3(R_3 + z_3)^2}\right], \tag{2.2.3}$$

$$w = \frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{T}{q} + \frac{\overline{T}}{\overline{q}}\right]\left(-\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2}\right) + P\left[\frac{m_1}{\gamma_1 R_1} - \frac{m_2}{\gamma_2 R_2}\right]\right\}. \tag{2.2.4}$$

Здесь

$$q = \rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}. \tag{2.2.5}$$

Поле напряжений определено согласно (2.1.12). Нам нужны только выражения для σ_z и τ_z. Вот они:

$$\sigma_z = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}(T\bar{q} + \bar{T}q)\left[\frac{\gamma_1}{(m_1-1)R_1^3} + \frac{\gamma_2}{(m_2-1)R_2^3}\right]\right.$$

$$\left. + P\left[\frac{m_1 z_1}{(m_1-1)R_1^3} + \frac{m_2 z_2}{(m_2-1)R_2^3}\right]\right\},$$

$$(2.2.6)$$

$$\tau_z = \frac{T}{8\pi}\left[\frac{z_1}{(m_1-1)R_1^3} + \frac{z_2}{(m_2-1)R_2^3} - \frac{z_3}{R_3^3}\right]$$

$$-\frac{\bar{T}q^2}{8\pi}\left[\frac{2R_1+z_1}{(m_1-1)R_1^3(R_1+z_1)^2} + \frac{2R_2+z_2}{(m_2-1)R_2^3(R_2+z_2)^2} + \frac{2R_3+z_3}{R_3^3(R_3+z_3)^2}\right]$$

$$-\frac{Pq}{4\pi}\left[\frac{m_1}{\gamma_1(m_1-1)R_1^3} + \frac{m_2}{\gamma_2(m_2-1)R_2^3}\right]. \qquad (2.2.7)$$

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть сосредоточенная сила, с компонентами T_x, T_y, и P, приложена в точке $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$. Нам нужно найти поля напряжений и перемещений в полупространстве. Потенциальные функции определятся в виде

$$F_1 = \frac{H\gamma_1}{m_1-1}\left[\frac{1}{2}\gamma_2(\bar{\Lambda}\chi_1 + \Lambda\bar{\chi}_1) + P\ln(R_1+z_1)\right],$$

$$F_2 = \frac{H\gamma_2}{m_2-1}\left[\frac{1}{2}\gamma_1(\bar{\Lambda}\chi_2 + \Lambda\bar{\chi}_2) + P\ln(R_2+z_2)\right],$$

$$F_3 = \mathrm{i}\,\frac{\gamma_3}{4\pi A_{44}}(\bar{\Lambda}\chi_3 - \Lambda\bar{\chi}_3). \qquad (2.2.8)$$

Подстановка (2.2.8) в (2.1.6) даёт

$$u = \frac{\gamma_3}{4\pi A_{44}}\left[\frac{T}{R_3} + \frac{q^2\bar{T}}{R_3(R_3+z_3)^2}\right]$$

$$+\frac{H\gamma_2}{m_2-1}\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\left[-\frac{T}{R_2}+\frac{q^2\overline{T}}{R_2(R_2+z_2)^2}\right]+\frac{Pq}{R_2(R_2+z_2)}\right\}$$

$$+\frac{H\gamma_1}{m_1-1}\left\{\frac{1}{2}\gamma_2\left[-\frac{T}{R_1}+\frac{q^2\overline{T}}{R_1(R_1+z_1)^2}\right]+\frac{Pq}{R_1(R_1+z_1)}\right\},$$

(2.2.9)

$$w=H\left\{\frac{1}{2}(T\overline{q}+\overline{T}q)\left[\frac{\gamma_2 m_1}{(m_1-1)R_1(R_1+z_1)}+\frac{\gamma_1 m_2}{(m_2-1)R_2(R_2+z_2)}\right]\right.$$

$$\left.+P\left[\frac{m_1}{(m_1-1)R_1}+\frac{m_2}{(m_2-1)R_2}\right]\right\}. \qquad (2.2.10)$$

Нам нужны выражения для следующих компонентов напряжений:

$$\sigma_z=\frac{1}{2\pi(\gamma_1-\gamma_2)}\left\{\left[\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2(T\overline{q}+\overline{T}q)+Pz\right]\left(-\frac{1}{R_1^3}+\frac{1}{R_2^3}\right)\right\},$$

$$\tau_z=\frac{\gamma_2}{4\pi(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\frac{Tz_1}{R_1^3}-\frac{\overline{T}q^2(2R_1+z_1)}{R_1^3(R_1+z_1)^2}\right]-\frac{\gamma_1}{4\pi(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\frac{Tz_2}{R_2^3}-\frac{\overline{T}q^2(2R_2+z_2)}{R_2^3(R_2+z_2)^2}\right]$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{Tz_3}{R_3^3}+\frac{\overline{T}q^2(2R_3+z_3)}{R_3^3(R_3+z_3)^2}\right]+\frac{Pq}{2\pi(\gamma_1-\gamma_2)}\left[-\frac{1}{R_1^3}+\frac{1}{R_2^3}\right]. \qquad (2.2.11)$$

Выражения (2.2.9) и (2.2.10) упрощаются для случая, когда $z=0$:

$$u=\frac{1}{2}G_1\frac{T}{R}+\frac{1}{2}G_2\frac{\overline{T}q^2}{R^3}-H\alpha\frac{P}{\overline{q}}, \qquad (2.2.12)$$

$$w=H\alpha\Re\left(\frac{T}{q}\right)+H\frac{P}{R}. \qquad (2.2.13)$$

Здесь H, α, G_1, и G_2 определены в (2.1.9), и

$$R = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}. \tag{2.2.14}$$

Выражения (2.2.12) и (2.2.13) будут использованы для вывода интегральных уравнений различных смешанных граничных задач для упругого полупространства.

Мы предлагаем следующее классификацию смешанных граничных задач. Задача называется *внутренней смешанной* когда нормальные/тангенциальные перемещения даны *внутри* конечной области, в то время как соответствующие напряжения предписаны на остальной части границы полупространства. В случае, когда перемещения заданы *вне* конечной области, задача называется *внешней*. Мы можем различить два типа внутренних задач. Внутренняя задача *типа* I : *нормальные* перемещения предписаны *внутри* конечной области S, нормальное напряжение задано *вне* области S, в то время, как тангенциальные напряжения известны на всей плоскости $z=0$. Внутренняя задача *типа* II : *тангенциальные* перемещения заданы *внутри* S, и сдвигающие напряжения предписаны вне, в то время, как нормальное напряжение известно на всей плоскости $z=0$.

Внешние задачи типа I и II определяются точно так же, как и внутренние, с той только разницей, что термин *напряжение* заменяется на *перемещение* и наоборот. Таким образом, мы имеем четыре типа смешанных задач, которые будут рассмотрены в этой главе. Мы будем называть задачу основной смешанной когда граничные условия смешаны по отношению к обоим нормальным и тангенциальным компонентам. Такие задачи будут рассмотрены в следующей главе.

Упражнение 2.2

1. Выведите (2.2.3) и (2.2.4).

2. Проверьте справедливость (2.2.6) и (2.2.7).

3. Выведите выражения для σ_1 и σ_2 в обоих случаях сосредоточенной силы, рассмотренных в секции 2.2.

4. Выведите эквивалентные решения для изотропного тела.

5. Рассмотрите случай, когда произвольная сосредоточенная сила приложена *внутри* упругого полупространства.

2.3 Внутренняя смешанная задача типа I

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Введём полярные цилиндрические координаты (ρ,ϕ,z). Пусть следующие граничные условия предписаны на границе $z=0$:

$$w = w(\rho,\phi), \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

$$\sigma = \sigma(\rho,\phi), \quad \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

$$\tau = \tau(\rho,\phi), \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \tag{2.3.1}$$

Здесь σ обозначает нормальную нагрузку, и τ — комплексную сдвигающую нагрузку, а именно, $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$. Основное интегральное уравнение может быть написано используя (2.2.13), а именно,

$$H\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}} = f(\rho,\phi). \tag{2.3.2}$$

Мы используем то же обозначение σ для пока неизвестной нормальной нагрузки внутри круга $\rho \leq a$, а также для известной функции σ вне круга. Это не должно создавать какую—либо путаницу, так как аргумент (ρ_0,ϕ_0) позволяет различить одно от другого. Функция f известна из условий (2.3.1), а именно,

$$f(\rho,\phi) = w(\rho,\phi) - \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}$$

$$-H\alpha\Re\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}. \tag{2.3.3}$$

Как только уравнение (2.3.2) решено, и значение σ внутри круга становится известным, тангенциальные перемещения в плоскости $z=0$ может быть найдено из (2.2.12):

$$u = \frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{[\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}]^2\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{3/2}}-H\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}. \tag{2.3.4}$$

Интегральное уравнение (2.3.2) было решено в секции 1.4. Представляется полезным рассмотреть здесь более общий случай:

$$H\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{(1+\kappa)/2}}=f(\rho,\phi), \tag{2.3.5}$$

где $-1<\kappa<1$. Этот тип уравнения появляется в задачах о неоднородном упругом полупространстве с модулем упругости E являющимся степенной функцией от z, а именно, $E=E_0 z^{\kappa}$. Конечно, в неоднородном случай H не будет больше представлен формулой (2.1.9). Читателю следует обратиться к статье Ростовцева (1964) для ознакомления с деталями. Ростовцев (1964) получил точное решение (2.3.5) в рядах Фурье. Здесь мы представляем замкнутое решение.

Используя интегральное представление (1.1.4), интегральное уравнение (2.3.5) может быть переписан в виде

$$4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_0^{\rho}\frac{x^{\kappa}dx}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_x^{a}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=f(\rho,\phi). \tag{2.3.6}$$

Интегральное уравнение (2.3.6) представляет последовательность двух операторов Абеля и один $\mathcal{L}$–оператор. Процедура решения аналогична (1.4.5). Первый оператор есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{d}{dt}\int_0^{t}\frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}(\rho). \tag{2.3.7}$$

Результат приложения оператора (2.3.7) к обоим сторонам (2.3.6) даёт

$$2\pi H t^{\kappa}\int_t^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-t^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{t}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}(\rho)f(\rho,\phi). \tag{2.3.8}$$

Приложение второго оператора

$$\mathcal{L}(y)\frac{d}{dy}\int_y^a \frac{t^{1-\kappa}dt}{(t^2-y^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right)$$

к обеим сторонам (2.3.8) даёт:

$$\sigma(y,\phi)=-\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H y}\mathcal{L}(y)\frac{d}{dy}\int_y^a \frac{t^{1-\kappa}dt}{(t^2-y^2)^{(1-\kappa)/2}}$$

$$\times\mathcal{L}\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}(\rho)f(\rho,\phi). \tag{2.3.9}$$

Правила дифференцирования под знаком интеграла и свойства $\mathcal{L}$—операторов позволяют нам переписать (2.3.9) в виде

$$\sigma(y,\phi)=\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H}\left[\frac{\Phi(a,y,\phi)}{(a^2-y^2)^{(1-\kappa)/2}}-\int_y^a \frac{dt}{(t^2-y^2)^{(1-\kappa)/2}}\frac{d}{dt}\Phi(t,y,\phi)\right]. \tag{2.3.10}$$

Здесь

$$\Phi(t,y,\phi)=\frac{1}{t^{1+\kappa}}\int_0^t \frac{\rho^{1-\kappa}d\rho}{(t^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\frac{d}{d\rho}\left[\rho^{1+\kappa}\mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right)f(\rho,\phi)\right]. \tag{2.3.11}$$

Другая форма решения может быть найдена в (Фабрикант, 1971e). Решённая выше задача имеет два основных приложения: контактные задачи о гладких штампах, действующих на упругое полупространство, и задачи о внешних круглых трещинах в бесконечных упругих телах. Мы рассмотрим оба случая в деталях ниже.

Пример 1. Задача о гладком штампе. В упругих контактных задачах, мы имеем $\sigma=0$, для $\rho>a$, и $\tau=0$ на всей плоскости $z=0$, так что функция $f = w$ (смотри 2.3.9). Теперь становится возможным вычислить главный вектор P и опрокидывающие моменты M_x и M_y непосредственно через заданное перемещение w. Так как

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^a \sigma(\rho,\phi)\,\rho d\rho d\phi, \tag{2.3.12}$$

подстановка (2.3.9) в (2.3.12) даёт главный вектор

$$P = \frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{w(\rho,\phi)\,\rho d\rho d\phi}{(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}. \tag{2.3.13}$$

Для вычисления опрокидывающих моментов M_x и M_y, представляется удобным ввести комплексный параметр

$$M = M_x + iM_y = -i\int_0^{2\pi}\int_0^a \sigma(\rho,\phi)\,e^{i\phi}\,\rho^2 d\rho d\phi. \tag{2.3.14}$$

Используя (2.3.9), мы выразим опрокидывающий момент

$$M = -i\frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H(1+\kappa)}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{w(\rho,\phi)\,e^{i\phi}\rho^2 d\rho d\phi}{(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}. \tag{2.3.15}$$

Выражения (2.3.14) и (2.3.15) находятся в соответствии с аналогичными результатами Ростовцева (1964).

Обозревая процесс вывода (2.3.6), мы можем заключить, что оно действительно для вычисления нормального перемещения *вне* области контакта, если верхний предел интегрирования ρ заманён на a. Подстановка (2.3.9) в модифицированную формулу (2.3.6) даёт следующий результат

$$w(\rho,\phi) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)w(\rho_0,\phi),$$

$$\text{для} \quad \rho > a. \tag{2.3.16}$$

Дифференцируя под знаком интеграла и затем интегрируя по частям, мы получим

$$w(\rho,\phi) = \frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)(\rho^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{w(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(a^2-\rho_0^2)^{(1-\kappa)/2}[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]},$$

$$\text{для} \quad \rho > a. \tag{2.3.17}$$

Следующие равенства были использованы здесь (Bateman and Erdélyi, 1955)

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^{(1+\kappa)/2} F\left(\frac{1+\kappa}{2}, \frac{1+\kappa}{2}; \frac{3+\kappa}{2}; \zeta\right)\right] = \frac{1+\kappa}{2}\zeta^{-(1-\kappa)/2}(1-\zeta)^{-(1+\kappa)/2},$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)t\,dt}{(x^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}} = f(0)x^{\kappa} + x\int_0^x \frac{df(t)}{(x^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}. \tag{2.3.18}$$

Все параметры, которые нам нужно найти, а именно, давление под штампом σ, главный вектор P, опрокидывающий момент M, и нормальное перемещение вне штампа, могут быть выражены прямо через заданное нормальное перемещение w при помощи формул (2.3.9), (2.3.13), (2.3.15), и (2.3.17).

Пример 2. Внешняя трещина в неоднородной упругости. Рассмотрим неоднородное упругое пространство с модулем упругости $E = E_0|z|^{\kappa}$, $E_0 = \text{const}$, $|\kappa| < 1$. Это пространство ослаблено круглой внешней трещиной $\rho \geq a$. Произвольное давление $\sigma(\rho,\phi)$ приложенное к обеим сторонам трещины в противоположных направлениях. Требуется найти нормальное напряжение в шейке трещины, нормальное перемещения сторон трещины, коэффициент концентрации напряжений, и работу, требующейся для открытия трещины.

Благодаря симметрии задачи, она может быть сведена к смешанной граничной задаче для полупространства, со следующими граничными условиями на плоскости $z = 0$:

$$w = 0, \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\sigma = \sigma(\rho,\phi), \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad a < \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \tag{2.3.19}$$

Основное интегральное уравнение принимает вид (2.3.5), с известной функцией

$$f(\rho,\phi) = -H\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{(1+\kappa)/2}}. \tag{2.3.20}$$

Его решение может быть найдено точно так же, как (1.5.21), а именно,

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{(\rho_0^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}. \qquad (2.3.21)$$

Выражение (2.3.21) даёт нормальное напряжение в шейке трещины через давление приложенное к сторонам трещины. Заметим, что мы можем рассматривать (1.5.24) как особый случай формулы (2.3.21), когда $\kappa = 0$.

Нормальное перемещение сторон трещины может быть вычислено, как суперпозиция перемещения, вызванного приложенным давлением, и перемещения, вызванного нормальным напряжением в шейке трещины. Используя процедуру, аналогичную той, которая была описана в секции 1.5, мы можем получить выражение

$$w(\rho,\phi) = 4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\left\{\int_\rho^{\infty}\frac{x^\kappa dx}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_a^{x}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)\right.$$

$$\left.+\int_0^{a}\frac{x^\kappa dx}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_x^{a}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)\right\}, \quad \text{для} \quad \rho > a. \qquad (2.3.22)$$

Подстановка (2.3.21) в (2.3.22) приводит после упрощения к

$$w(\rho,\phi) = 4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_a^{\rho}\frac{x^\kappa dx}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_x^{\infty}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi),$$

$$\text{для} \quad \rho > a. \qquad (2.3.23)$$

Нормальные перемещения сторон трещины теперь выражены через приложенное давление.

Введём коэффициент концентрации напряжений как

$$k_1(\phi) = \lim_{\rho\to a}[(a-\rho)^{(1-\kappa)/2}\sigma(\rho,\phi)]. \qquad (2.3.24)$$

Подстановка (2.3.21) в (2.3.24) даёт

$$k_1(\phi)=\frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2a)^{(1-\kappa)/2}}\int\limits_a^\infty\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-a^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{a}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi).$$

Введём *функцию интенсивности напряжений*:

$$K_1(\rho,\phi)=\frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}}\int\limits_\rho^\infty\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{2.3.25}$$

Очевидно, что предельный случай функции интенсивности напряжений, когда $\rho\to a$, есть коэффициент концентрации напряжений. Используя свойство $\mathcal{L}$–операторов (1.2.3), мы можем переписать (2.3.23) в виде

$$w(\rho,\phi)=4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int\limits_a^\rho\frac{x^\kappa\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right)\int\limits_x^\infty\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$=2^{(3-\kappa)/2}\pi H\int\limits_a^\rho\frac{x^{(1+\kappa)/2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right)K_1(x,\phi). \tag{2.3.26}$$

Энергия W может быть определена интегралом

$$W=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^\infty\sigma(\rho,\phi)w(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi. \tag{2.3.27}$$

Подстановка (2.3.26) в (2.3.27) даёт

$$W=2^{(3-\kappa)/2}\pi H\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\limits_a^\infty\sigma(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho\int\limits_a^\rho\frac{x^{(1+\kappa)/2}\,\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right)K_1(x,\phi)$$

$$=2^{(3-\kappa)/2}\pi H\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\limits_a^\infty x^{(1+\kappa)/2}\mathrm{d}x\int\limits_x^\infty\frac{\sigma(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right)K_1(x,\phi)$$

$$= 2^{(3-\kappa)/2}\pi H\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^\infty K_1(x,\phi)x^{(1+\kappa)/2}\mathrm{d}x \int_x^\infty \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right)\sigma(\rho,\phi).$$

Здесь замена порядка интегрирования была использована дважды. Теперь сравнение последнего выражения с (2.3.25) даёт результат

$$W = \frac{2^{1-\kappa}\pi^2 H}{\cos(\pi\kappa/2)}\int_0^{2\pi}\int_a^\infty [K_1(\rho,\phi)]^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.3.28}$$

Выражение (2.3.28) показывает, что квадрат функции интенсивности напряжений пропорционален плотности энергии (энергии, приходящейся на единицу площади) необходимой для открытия трещины. В случае осевой симметрии, формула (2.3.28) упрощается:

$$W = \frac{2^{2-\kappa}\pi^3 H}{\cos(\pi\kappa/2)}\int_a^\infty [K_1(\rho)]^2\rho\,\mathrm{d}\rho,$$

с

$$K_1(\rho) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}}\int_\rho^\infty \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0\,\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}.$$

Все полученные результаты становится действительными для трансверсально изотропного пространства, если $\kappa=0$, и H определён согласно (2.1.9). Когда H определён согласно (2.1.14), мы имеем результат для изотропного тела, а именно,

$$W = 2\pi\frac{1-\nu^2}{E}\int_0^{2\pi}\int_a^\infty [K_1(\rho,\phi)]^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi, \tag{2.3.29}$$

с

$$K_1(\rho,\phi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}}\int_\rho^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right)\sigma(x,\phi). \tag{2.3.30}$$

В случае осевой симметрии, (2.3.29) и (2.3.30) упрощаются следующим образом:

$$W = 4\pi^2 \frac{1-\nu^2}{E} \int_a^\infty [K_1(\rho)]^2 \rho \, \mathrm{d}\rho, \tag{2.3.31}$$

где

$$K_1(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int_\rho^\infty \frac{\sigma(x) x \, \mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{2.3.32}$$

Упражнение 2.3.

1. Нормальные перемещения под плоским круглым штампом даются формулой $w(\rho,\phi) = w_0 + \theta\rho\cos\phi$, с $w_0 = \mathrm{const}$, и $\theta = \mathrm{const}$. Найдите распределение напряжений σ под штампом.

Ответ: $\sigma(\rho,\phi) = \dfrac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H} \dfrac{w_0 + (2\theta\rho\cos\phi)/(1+\kappa)}{(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}$.

2. В предыдущей задаче найдите взаимоотношение между приложенной силой P, опрокидывающим моментом M, и осадкой штампа w_0 углом наклона θ.

Ответ: $P = \dfrac{2w_0 a^{1+\kappa}\cos(\pi\kappa/2)}{\pi H(1+\kappa)}$, $M = \dfrac{4\theta a^{3+\kappa}\cos(\pi\kappa/2)}{\pi H(1+\kappa)(3+\kappa)}$.

3. Нормальные перемещения под параболоидальным штампом $w(\rho,\phi) = w_0 - c\rho^2$, с $w_0 = \mathrm{const}$, и $c = \mathrm{const}$. Найдите распределение напряжений σ и радиус области контакта a.

Решение: использование (2.3.9) даёт

$$\sigma(\rho) = \frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H (a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \left\{ w_0 + \frac{2c[a^2(1-\kappa)-2\rho^2]}{(1+\kappa)^2} \right\}.$$

Радиус области контакта a определяется из условия $\sigma(a) = 0$. Окончательный результат есть $a = [(1+\kappa)\, w_0/(2c)]^{1/2}$, выражение для напряжения есть

$$\sigma(\rho) = \frac{2w_0\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 a^2 H(1+\kappa)} (a^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}.$$

4. В предыдущей задаче найдите взаимоотношение между осадкой штампа w_0 и приложенной силой P.

Ответ: $P = \dfrac{4a^{1+\kappa}w_0\cos(\pi\kappa/2)}{\pi H(1+\kappa)(3+\kappa)}$.

5. Рассмотрим внешнюю круглую трещину $\rho > a$. Найдите распределение напряжения σ в шейке трещины вызванное двумя равными сосредоточенными силами P, приложенными нормально к поверхностям трещины в противоположных направлениях в точке (b,ψ).

Ответ: $\sigma(\rho,\phi) = -\dfrac{P}{\pi^2}\cos\left(\dfrac{\pi\kappa}{2}\right)\left(\dfrac{b^2-a^2}{a^2-\rho^2}\right)^{(1-\kappa)/2}\dfrac{1}{\rho^2+b^2-2b\rho\cos(\phi-\psi)}$.

6. Рассмотрим внешнюю круглую трещину $\rho > a$. Однородное давление σ_0 приложено в противоположных направлениях к кольцу $b \le \rho \le c$, $(b > a)$, остальная часть поверхности трещины свободна от напряжений. Найдите распределение напряжений σ в шейке трещины и коэффициент концентрации напряжений k_1.

Ответ: $\sigma(\rho) = -\dfrac{2\sigma_0\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\displaystyle\int_b^c \dfrac{(\rho_0^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}\rho_0\,d\rho_0}{\rho_0^2-\rho^2}$, для $\rho < a$.

В общем случае, последний интеграл может быть вычислен через гипергеометрические функции. В особом случае изотропного тела $(\kappa = 0)$, интеграл вычисляется в элементарных функциях:

$$\sigma(\rho) = -\frac{2}{\pi}\sigma_0\left[\frac{(c^2-a^2)^{1/2}-(b^2-a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.-\tan^{-1}\left(\frac{c^2-a^2}{a^2-\rho^2}\right)^{1/2}+\tan^{-1}\left(\frac{b^2-a^2}{a^2-\rho^2}\right)^{1/2}\right].$$

Коэффициент концентрации напряжений есть

$$k_1 = -\frac{2\sigma_0\cos(\pi\kappa/2)[(c^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}-(b^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}]}{\pi(2a)^{(1-\kappa)/2}(1-\kappa)}.$$

7. В предыдущей задаче найдите величину открытия трещины w.

Ответ: $w(\rho) = \dfrac{4\cos(\pi\kappa/2)}{1-\kappa}\sigma_0\left\{\displaystyle\int_a^{\min(\rho,c)}\dfrac{(c^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}x^\kappa\,dx\right.$

$$-\int_a^{\min(\rho,b)} \frac{(b^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}} x^{\kappa}\,\mathrm{d}x \Bigg\}, \qquad \text{для} \quad \rho > a.$$

8. Используя формулу (2.3.9), докажите равенство

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \sigma(\rho,\phi)\rho^{1+|n|}\,\mathrm{e}^{in\phi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{(1+\kappa)\Gamma(1+|n|)}{2\pi^2\Gamma[|n|+(1+\kappa)/2]}\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{f(\rho,\phi)\rho^{1+|n|}\,\mathrm{e}^{in\phi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi}{(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}.$$

Заметьте: в особом случае $n=0$ и $n=-1$, последнее равенство превращается соответственно в (2.3.13) и (2.3.15).

9. Выразите функцию интенсивности напряжений $K_1(\rho,\phi)$ через перемещение w.

Ответ: $K_1(\rho,\phi)=\dfrac{\cos(\pi\kappa/2)}{2^{(1-\kappa)/2}\pi^2 H\rho^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\displaystyle\int_a^{\rho}\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}(x)w(x,\phi).$

Совет: выполните обращение формулы (2.3.26).

10. Докажите равенство

$$\lim_{\rho\to a}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_a^{\rho}\frac{(x^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}}{(\rho^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi(1-\kappa)f(a)}{2\cos(\pi\kappa/2)}.$$

Совет: используйте подстановку $t=(\rho^2-x^2)/(x^2-a^2)$.

11. Используйте равенство выше, чтобы выразить коэффициент концентрации напряжений через перемещение w.

Ответ: $k_1(\phi)=\dfrac{1-\kappa}{2^{2-\kappa}\pi H}\lim\limits_{\rho\to a}\left[\dfrac{w(\rho,\phi)}{(\rho-a)^{(1-\kappa)/2}}\right].$

Совет: вычислите предел при $\rho\to a$ результата в Упражнении 9.

2.4 Внешняя смешанная задача типа I.

Задача характеризуется следующими смешанными граничными условиями в плоскости $z=0$:

$$w = w(\rho,\phi), \quad \rho > a, \quad 0 \le \phi < 2\pi,$$

$$\sigma = \sigma(\rho,\phi), \quad \rho \le a, \quad 0 \le \phi < 2\pi,$$

$$\tau = \tau(\rho,\phi), \quad 0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \phi < 2\pi, \tag{2.4.1}$$

Здесь те же обозначения использованы, как и в предыдущей секции. Основное интегральное уравнение может быть написано, используя (2.2.13), а именно,

$$H\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}} = f(\rho,\phi). \tag{2.4.2}$$

Мы используем опять σ для неизвестной нормальной нагрузки внутри круга $\rho \le a$, а также для заданной функции σ вне круга. Функция f известна из второго условия (2.4.1):

$$f(\rho,\phi) = w(\rho,\phi) - \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}$$

$$-H\alpha\Re\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}. \tag{2.4.3}$$

Как только уравнение (2.4.2) решено, и значение σ внутри круга становится известным, тангенциальные перемещения в плоскости $z=0$ могут быть определены из (2.3.4). Интегральное уравнение (2.4.2) было решено в секции 1.5. Мы рассмотрим опять более общий случай:

$$H\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{(1+\kappa)/2}} = f(\rho,\phi), \tag{2.4.4}$$

где $-1<\kappa<1$. Новый метод позволяет нам представить замкнутое решение.

Используя интегральное представление (1.1.21) для $z=0$, интегральное уравнение (2.4.4) может быть переписано как

$$4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{x^{\kappa}\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_{a}^{x}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=f(\rho,\phi). \tag{2.4.5}$$

Интегральное уравнение (2.4.5) представляет последовательность двух операторов Абеля и один $\mathcal{L}$—оператор. Процедура решения аналогична (1.5.2). Мы приложим оператор

$$\mathcal{L}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{2.4.6}$$

к обеим сторонам (2.4.5), с результатом

$$-2\pi Ht^{\kappa}\int_{a}^{t}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$=\mathcal{L}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)f(\rho,\phi). \tag{2.4.7}$$

Второй оператор имеет вид:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a}^{y}\frac{t^{1-\kappa}\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}(t),$$

и его приложение к обоим сторонам уравнения (2.4.7) даёт

$$\sigma(y,\phi)=-\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 Hy}\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a}^{y}\frac{t^{1-\kappa}\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}$$

$$\times\mathcal{L}(t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)f(\rho,\phi). \tag{2.4.8}$$

Правила дифференцирования под знаком интеграла и свойства $\mathcal{L}$—операторов позволяют нам переписать (2.4.8) в форме

$$\sigma(y,\phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H}\left[\frac{\Phi(a,y,\phi)}{(y^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}} - \int_a^y \frac{\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,y,\phi)\right]. \tag{2.4.9}$$

Здесь

$$\Phi(t,y,\phi) = t^{1-\kappa}\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{\rho y}\right)f(\rho,\phi)\right]. \tag{2.4.10}$$

Мы можем рассмотреть два основных приложения: контактные задачи о гладких штампах прижатых к упругому полупространству, и задачи о круглых трещинах в бесконечном упругом теле. Мы рассмотрим оба случая в деталях ниже.

Пример 1. Задача о гладких штампах. В контактных задачах теории упругости мы имеем $\sigma = 0$, для $\rho < a$, и $\tau = 0$ на всей плоскости $z = 0$, так что функция $f = w$. Становится возможным выразить главный вектор P и опрокидывающие моменты M_x и M_y прямо через заданное перемещение w. Так как

$$P = \int_0^{2\pi}\int_a^\infty \sigma(\rho,\phi)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi, \tag{2.4.11}$$

подстановка (2.4.8) в (2.4.11) даёт главный вектор

$$P = \lim_{y\to\infty}\left\{-\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H}\int_a^y \frac{t^{2-\kappa}\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^{2\pi} w(\rho,\phi)\,\mathrm{d}\phi\right\}. \tag{2.4.12}$$

Опрокидывающий момент может быть найден аналогичным образом. Мы можем также выразить нормальное перемещение внутри круга $\rho \le a$ прямо через заданные перемещения w вне круга. Мы подставляем (2.4.8) в (2.4.5) помня, что для $\rho \le a$, нижний предел интегрирования в первом интеграле будет a вместо ρ. Используя свойства Абелевых операторов и $\mathcal{L}$—операторов, следующее выражение может быть получено

$$w(\rho,\phi) = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\frac{d}{dx}\int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi). \tag{2.4.13}$$

Дифференцируя под знаком интеграла, изменяя порядок интегрирования, и затем интегрируя по x, мы получим

$$w(\rho,\phi) = -\frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(1+\kappa)}\int_a^\infty \left(\frac{\rho_0^2-a^2}{\rho_0^2-\rho^2}\right)^{(1+\kappa)/2}$$

$$\times F\left(\frac{1+\kappa}{2}, \frac{1+\kappa}{2}; \frac{3+\kappa}{2}; \frac{\rho_0^2-a^2}{\rho_0^2-\rho^2}\right)\frac{d}{d\rho_0}\left[\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi)\right]d\rho_0.$$

Интегрирование по частям и использование дифференциальных свойств гипергеометрической функции Гаусса (2.3.18) позволяют нам упростить последнее выражение, а именно,

$$w(\rho,\phi) = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\kappa}{2}(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}\int_a^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}(\rho_0^2-\rho^2)}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi)$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{w(\rho_0,\phi_0)\rho_0\, d\rho_0\, d\phi_0}{(\rho_0^2-a^2)^{(1-\kappa)/2}[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]}. \tag{2.4.14}$$

Выражение (2.4.14) даёт нормальное перемещения внутри круга $\rho\le a$ прямо через заданные перемещения вне круга. Мы замечаем определённую аналогию между (2.3.17) и (2.4.14).

Пример 2. Круглая трещина в неоднородной упругости. Рассмотрим неоднородное упругое пространство с модулем упругости $E=E_0|z|^\kappa$, E_0=const, $|\kappa|<1$. Это пространство ослаблено круглой трещиной $\rho\le a$. Трещина открывается произвольным давлением $\sigma(\rho,\phi)$. Требуется найти нормальное напряжение на плоскости z=0 вне трещины, нормальные перемещения сторон трещины, коэффициент концентрации напряжений и работу необходимую для открытия трещины.

Благодаря симметрии задачи, она может быть сведена к смешанной граничной задаче для полупространства, со следующими граничными условиями на плоскости z=0:

$$w = 0, \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad a < \rho < \infty, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\sigma = \sigma(\rho,\phi), \ \tau = 0, \quad \text{для} \quad 0 \le \rho \le a, \ \ 0 \le \phi < 2\pi. \tag{2.4.15}$$

Основное интегральное уравнение принимает вид (2.4.2), с известной функцией

$$f(\rho,\phi) = -H\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{(1+\kappa)/2}}. \tag{2.4.16}$$

Его решение может быть найдено точно так же, как (1.4.25), а именно,

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2(\rho^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{(1-\kappa)/2}\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}. \tag{2.4.17}$$

Опять, мы можем заметить аналогию между (2.3.21) и (2.4.17). Выражение (2.4.17) даёт нормальное напряжение в плоскости z=0 вне трещины, выраженное через давление, приложенное к поверхности трещины. Заметим что (1.4.27) может быть рассмотрен, как особый случай формулы (2.4.17), когда κ=0.

Величина открытия трещины может быть вычислена, как суперпозиция перемещения, вызванного приложенным давлением, и перемещения вызванным нормальным напряжением (2.4.17) вне трещины. Используя процедуру, аналогичную той, которая была описана в секции 1.4, мы получим выражение

$$w(\rho,\phi) = 4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\left\{\int_a^\infty \frac{x^\kappa dx}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)\right.$$

$$\left. + \int_0^\rho \frac{x^\kappa dx}{(\rho^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{(1+\kappa)/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)\right\}, \quad \text{для} \quad \rho < a. \tag{2.4.18}$$

Подстановка (2.4.17) в (2.4.18) приводит, после упрощения, к

$$w(\rho,\phi) = 4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_{\rho}^{a}\frac{x^{\kappa}\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_{0}^{x}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi),$$

$$\text{для}\quad \rho < a. \tag{2.4.19}$$

Величина открытия трещины теперь определена через приложенное давление.

Введём коэффициент концентрации напряжений

$$k_1(\phi) = \lim_{\rho\to a}[(\rho-a)^{(1-\kappa)/2}\sigma(\rho,\phi)]. \tag{2.4.20}$$

Подстановка (2.4.17) в (2.4.20) даёт

$$k_1(\phi) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2a)^{(1-\kappa)/2}}\int_{0}^{a}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(a^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{2.4.21}$$

Введём *функцию интенсивности напряжений*:

$$K_1(\rho,\phi) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}}\int_{0}^{\rho}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{2.4.22}$$

Мы можем видеть, что предельный случай функцию интенсивности напряжений, когда $\rho\to a$, есть коэффициент концентрации напряжений. Используя свойство $\mathcal{L}$—операторов (1.2.3) мы можем переписать (2.4.19) в виде

$$w(\rho,\phi) = 4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_{\rho}^{a}\frac{x^{\kappa}\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right)\int_{0}^{x}\frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{x}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= 2^{(3-\kappa)/2}\pi H\int_{\rho}^{a}\frac{x^{(1+\kappa)/2}\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right)K_1(x,\phi). \tag{2.4.23}$$

Энергия W может быть определена интегралом

$$W = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a}\sigma(\rho,\phi)w(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi. \tag{2.4.24}$$

Подстановка (2.4.23) в (2.4.24) даёт

$$W = 2^{(3-\kappa)/2}\pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \sigma(\rho,\phi)\rho\, d\rho \int_\rho^a \frac{x^{(1+\kappa)/2}\, dx}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) K_1(x,\phi)$$

$$= 2^{(3-\kappa)/2}\pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a x^{(1+\kappa)/2}\, dx \int_0^x \frac{\sigma(\rho,\phi)\rho\, d\rho}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) K_1(x,\phi)$$

$$= 2^{(3-\kappa)/2}\pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a K_1(x,\phi)\, x^{(1+\kappa)/2}\, dx \int_0^x \frac{\rho\, d\rho}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) \sigma(\rho,\phi).$$

Здесь изменение порядка интегрирования было использовано дважды. Теперь сравнение последнего выражения с (2.4.22) даёт результат

$$W = \frac{2^{1-\kappa}\pi^2 H}{\cos(\pi\kappa/2)} \int_0^{2\pi} \int_0^a [K_1(\rho,\phi)]^2 \rho\, d\rho\, d\phi. \tag{2.4.25}$$

Выражение (2.4.25) показывает, что квадрат функции интенсивности напряжений пропорционален плотности энергии необходимой для открытия трещины. В случае осевой симметрии, формула (2.4.25) упрощается:

$$W = \frac{2^{2-\kappa}\pi^3 H}{\cos(\pi\kappa/2)} \int_0^a [K_1(\rho)]^2 \rho\, d\rho,$$

с

$$K_1(\rho) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}} \int_0^\rho \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\rho_0\, d\rho_0}{(\rho^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}.$$

Все полученные результаты действительны для трансверсально изотропного пространства, если мы возьмём $\kappa=0$, и H таким, как определено в (2.1.9).

Упражнение 2.4

1. Найдите изотропный эквивалент формулы (2.4.25).

Ответ: $W = 2\pi \dfrac{1-\nu^2}{E} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} [K_1(\rho,\phi)]^2 \rho \, d\rho \, d\phi$,

с

$$K_1(\rho,\phi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int\limits_0^{\rho} \frac{x \, dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) \sigma(x,\phi).$$

2. Решите задачу, приведённую выше, для случая осевой симметрии.

Ответ: $W = 4\pi^2 \dfrac{1-\nu^2}{E} \int\limits_0^{a} [K_1(\rho)]^2 \rho \, d\rho$,

где

$$K_1(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int\limits_0^{\rho} \frac{\sigma(x) x \, dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} .$$

Заметьте: эти результаты были получены Снеддоном (1965).

3. Круглая трещина в неоднородном упругом пространстве открывается давлением $\sigma(\rho,\phi) = \sigma_0 + \sigma_1 \rho\cos\phi$, с $\sigma_0 = \mathrm{const}$ и $\sigma_1 = \mathrm{const}$. Найдите нормальное напряжение на плоскости $z = 0$ вне трещины.

Ответ: $$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(3-\kappa)} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{3-\kappa} \left\{ \sigma_0 F\left(\frac{3-\kappa}{2}, \frac{3-\kappa}{2}; \frac{5-\kappa}{2}; \left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right) \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5-\kappa}\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 F\left(\frac{3-\kappa}{2}, \frac{5-\kappa}{2}; \frac{7-\kappa}{2}; \left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right) \sigma_1 \rho\cos\phi \right\}, \quad \text{для} \quad \rho > a.$$

Результат может быть выражен в элементарных функциях для однородного тела:

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{2}{\pi}\left\{ \left[\frac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right] \sigma_0 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{3\rho^2 - a^2}{3\rho(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - 3\frac{\rho}{a} \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right] \sigma_1 \rho\cos\phi \right\}.$$

4. В предыдущей задаче найдите нормальные перемещения поверхности трещины w.

Ответ: $w = \dfrac{4H\cos(\pi\kappa/2)}{(1-\kappa)^2}(a^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}\left[\sigma_0 + \dfrac{2}{3-\kappa}\sigma_1\rho\cos\phi\right].$

5. Рассмотрим круглую трещину $\rho \le a$. Найдите распределение напряжений σ в плоскости z=0 вне трещины, вызванное действием пары равных сосредоточенных сил P, приложенных нормально к поверхностям трещины в противоположных направлениях в точке (b,ψ), $b<a$.

Ответ: $\sigma(\rho,\phi) = -\dfrac{P}{\pi^2}\cos\left(\dfrac{\pi\kappa}{2}\right)\left(\dfrac{a^2-b^2}{\rho^2-a^2}\right)^{(1-\kappa)/2}\dfrac{1}{\rho^2+b^2-2b\rho\cos(\phi-\psi)}.$

6. Докажите равенство для круглой трещины:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sigma(\rho,\phi)\rho^{|n|+1}\,\mathrm{e}^{in\phi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = -\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\sigma(\rho,\phi)\rho^{|n|+1}\,\mathrm{e}^{in\phi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi.$$

Заметьте: равенство означает, что нормальное напряжение в плоскости z=0 находится в равновесии, это свойство *не справедливо* для внешней трещины.

7. Выразите функцию интенсивности напряжений $K_1(\rho,\phi)$ через перемещение w.

Ответ: $K_1(\rho,\phi) = -\dfrac{\cos(\pi\kappa/2)}{2^{(1-\kappa)/2}\pi^2 H\rho^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}(\rho)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\displaystyle\int_\rho^a \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{x}\right)w(x,\phi).$

Совет: выполните инверсию формулы (2.4.23).

8. Докажите равенство

$$\lim_{\rho\to a}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{(a^2-x^2)^{(1-\kappa)/2}}{(x^2-\rho^2)^{(1-\kappa)/2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right\} = -\frac{\pi(1-\kappa)f(a)}{2\cos(\pi\kappa/2)}.$$

Совет: используйте подстановку $t = (x^2-\rho^2)/(a^2-x^2)$.

9. Используйте равенство выше и выразите коэффициент концентрации напряжений через перемещение w.

Ответ: $k_1(\phi) = \dfrac{1-\kappa}{2^{2-\kappa}\pi H}\lim_{\rho\to a}\left[\dfrac{w(\rho,\phi)}{(a-\rho)^{(1-\kappa)/2}}\right].$

Совет: вычислите предел $\rho\to a$ результата в Упражнении 7.

10. Рассмотрите трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное круглой трещиной $\rho \le a$ в плоскости z = 0, под действием

произвольного давления $\sigma(\rho,\phi)$. Найдите комплексное тангенциальное перемещение u в плоскости $z=0$.

Ответ: $u=-H\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{(a^2-\rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}$, для $\rho\le a$;

$$u=-\frac{2}{\pi}H\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{(a^2-\rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}}$$

$$\times\tan^{-1}\left[\frac{(a^2-\rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\right]\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}},\quad \text{для}\quad \rho>a.$$

Совет: смотри (Fabrikant, 1987a).

2.5 Интегральное представление для q^2/R^3

В то время, как знание интегрального представления для $1/R$ было достаточно, чтобы решить смешанную граничную задачу типа I, это недостаточно для решения задачи типа II . Необходимость знания интегрального представления для q^2/R^3 очевидна из (2.2.12). Мы припоминаем, что q определён в (2.2.5), и R даётся в (2.2.14). Оригинальный вывод был сделан автором много лет назад. Вывод был очень длинным и сложным. Здесь мы представляем только использованные идеи и окончательный результат.

Так как

$$q^2/R^3=q/(\bar{q}R), \tag{2.5.1}$$

мы можем использовать следующее разложение:

$$\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}=e^{2i\phi_0}\left\{\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k e^{-ik(\phi-\phi_0)}-\frac{\rho}{\rho_0}e^{i(\phi-\phi_0)}\right\},\quad \text{для}\quad \rho<\rho_0;$$

$$\frac{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}{\rho e^{-i\phi}-\rho_0 e^{-i\phi_0}}=e^{2i\phi}\left\{\left[1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k e^{ik(\phi-\phi_0)}-\frac{\rho_0}{\rho}e^{-i(\phi-\phi_0)}\right\},\quad \text{для}\quad \rho>\rho_0;$$

(2.5.2)

Теперь мы должны подставить (2.5.2) и (1.1.27) в (2.5.1). Эта процедура даёт для $\rho < \rho_0$,

$$\frac{q^2}{R^3} = \mathrm{e}^{2i\phi_0}\left\{\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \mathrm{e}^{-ik(\phi-\phi_0)} - \frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\phi-\phi_0)}\right\}$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{in(\phi-\phi_0)}\int_0^{\rho}\frac{(x^2/\rho\rho_0)^{|n|}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}.$$

(2.5.3)

Дальше идёт громоздкая процедура группировки членов, принадлежащих к каждой гармонике. Вывод не заканчивается на этом: нам также нужно использовать следующие равенства:

$$\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{(\rho_0^2-x^2)\sum_{k=0}^{n}\rho^{2(n-k)}x^{2k}-\rho^{2n}x^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{x^{2n}[(2n+1)\rho_0^2-(2n+2)x^2]}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x,$$

(2.5.4)

и

$$\rho_0^2\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{(2n-1)\rho^2-2nx^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}x^{2n-2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{2n\rho^2-(2n+1)x^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}x^{2n}\mathrm{d}x, \qquad \text{для} \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{2.5.5}$$

Первое равенство может быть доказано методом математической индукции, справедливость второго может быть показана, используя свойство

$$\int_0^{min(\rho_0,\rho)} \mathrm{d}[x^{2n-1}(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}] = 0.$$

Аналогичная процедура требуется для случая $\rho>\rho_0$. Окончательный результат есть

$$\frac{q^2}{R^3} = \frac{2}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2i\phi}}{\rho^2}\left[\frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{(\rho\rho_0)^n}\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{(2n+1)\rho^2-(2n+2)x^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}x^{2n}\mathrm{d}x\right]\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2i\phi_0}}{\rho_0^2}\left[\frac{e^{-in(\phi-\phi_0)}}{(\rho\rho_0)^n}\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{(2n+1)\rho_0^2-(2n+2)x^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}x^{2n}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\left.-\frac{e^{i(\phi+\phi_0)}}{\rho\rho_0}\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\right\}. \qquad (2.5.6)$$

Выражение (2.5.6), хотя и выглядит громоздким, покажет себя очень полезным для решения внутренних смешанных граничных задач типа II. Нам нужно ещё одно интегральное представление, которое будет полезно для решения внешних задач. Процедура так же сложна, как и предыдущаяя, и окончательный результат есть

$$\frac{q^2}{R^3} = \frac{2}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}e^{2i\phi}\left[(e^{i(\phi-\phi_0)}\rho\rho_0)^n\int_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty}\frac{(2n+1)x^2-(2n+2)\rho_0^2}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\right]\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}e^{2i\phi_0}\left[(e^{-i(\phi-\phi_0)}\rho\rho_0)^n\int_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty}\frac{(2n+1)x^2-(2n+2)\rho^2}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\left.-e^{i(\phi+\phi_0)}\rho\rho_0\int_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\right\}. \qquad (2.5.7)$$

Здесь следующие равенства были использованы:

$$\int\limits_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty} \frac{(x^2-\rho^2)\sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k}\rho_0^{2(n-k)} - \rho^2 x^{2n}}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,dx$$

$$= \rho_0^{2n} \int\limits_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty} \frac{(2n+1)x^2-(2n+2)\rho^2}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,dx,$$

и

$$\int\limits_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty} \frac{2n\rho_0^2-(2n-1)x^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,dx$$

$$= \rho^2 \int\limits_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty} \frac{(2n+1)\rho_0^2-2nx^2}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\,dx.$$

Эти равенства могут быть выведены из (2.5.4) и (2.5.5) путём формальной замены x на $\rho\rho_0/x$. Как обычно, когда один результат получен, всегда можно найти более лёгкий способ вывода. Мы обсудим далее некоторые обобщения интегральных представлений выведенных выше (смотри секцию 2.7).

Упражнение 2.5

1. Докажите равенства (2.5.4) и (2.5.5).

2. Покажите правильность представления (2.5.6).

3. Покажите правильность представления (2.5.7).

2.6 Внутренняя смешанная задача типа II

Материал в этой секции следует в основном статье (Фабрикант, 1971ц). Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z\geq 0$. Пусть нормальное напряжение σ задано на всей плоскости $z = 0$. Произвольное тангенциальное перемещение $u = u_x + \mathrm{i}u_y$ предписано внутри круга $\rho = a$, в то время, как комплексная сдвигающая нагрузка τ известна вне круга. Требуется найти сдвигающее напряжение внутри круга. Математическая формулировка граничных условий имеет вид

$$\sigma = \sigma(\rho,\phi), \qquad \text{для } 0\leq\rho<\infty, \qquad 0\leq\phi<2\pi;$$

$$\tau = \tau(\rho,\phi), \qquad \text{для } a<\rho<\infty, \qquad 0\leq\phi<2\pi;$$

$$u = u(\rho,\phi), \qquad \text{для } 0\leq\rho\leq a, \qquad 0\leq\phi<2\pi; \tag{2.6.1}$$

Основное интегральное уравнение может быть написано согласно (2.2.12):

$$\frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R} = \chi(\rho,\phi). \tag{2.6.2}$$

Функция χ известна из граничных условий (2.6.1):

$$\chi(\rho,\phi) = u + H\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}$$

$$-\frac{1}{2}G_1\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2}G_2\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}. \tag{2.6.3}$$

Хотя точное решение (2.6.2) в замкнутой форме возможно, мы представим вначале точное решение в рядах Фурье. Пусть следующие разложения справедливы:

$$\tau(\rho,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tau_n(\rho)\, e^{in\phi}, \qquad \chi(\rho,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_n(\rho)\, e^{in\phi}. \tag{2.6.4}$$

Подстановка (2.5.6) и (2.6.4) в (2.6.2) приводит к системе интегральных уравнений

$$\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n+2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{2G_2}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{(2n-1)\rho^2-2nx^2}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0=\chi_{n+1}(\rho),$$

(2.6.5)

$$\frac{2G_1}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{2G_2}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2-2nx^2}{\rho_0^{n}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0=\chi_{-n+1}(\rho),$$

(2.6.6)

Уравнения (2.6.5) и (2.6.6) действительны для n = 1,2,3, ... В случае осевой симметрии, $n=0$, и интегральное уравнение принимает вид

$$\frac{2}{\rho}\int_0^\rho \frac{x^2\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{G_1\tau_1(\rho_0)-G_2\bar{\tau}_1(\rho_0)}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0=\chi_1(\rho). \tag{2.6.7}$$

Его решение элементарно, а именно,

$$\tau_1(\rho)=-\frac{2}{\pi^2(G_1^2-G_2^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_0^x \frac{G_1\chi_1(\rho_0)+G_2\bar{\chi}_1(\rho_0)}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0\right].$$

(2.6.8)

Общее решение системы (2.6.5) и (2.6.6) может быть представлено в форме

$$\tau_{-n+1}(\rho)=\rho^{n-1}\int_\rho^a \frac{f_{-n+1}(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}+\left(\frac{G_2}{G_1}\bar{C}_n+D_n\right)\frac{\rho^{n-1}}{(a^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau_{n+1}(\rho)=\rho^{n-1}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}+\frac{2n}{\rho^{n+1}}\int\limits_{\rho}^{a}y^{2n-1}\mathrm{d}y\int\limits_{y}^{a}\frac{f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-y^2)^{1/2}}$$

$$+C_n\left[\frac{\rho^{n-1}}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}+\frac{2n}{\rho^{n+1}}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{y^{2n-1}\,\mathrm{d}y}{(a^2-y^2)^{1/2}}\right].$$

(2.6.9)

Здесь $f_к$ пока неизвестные комплексные функции, и C_n и D_n пока неизвестные константы. Подстановка (2.6.9) в (2.6.5) и (2.6.6), даёт после изменения порядка интегрирования и интегрирования по ρ_0,

$$\frac{\pi G_1}{\rho^{n+1}}\left[\rho\int\limits_{0}^{a}t^{2n-1}f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t+C_n\rho a^{2n-1}-\int\limits_{0}^{\rho}(\rho^2-t^2)^{1/2}t^{2n-1}f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$+\frac{\pi G_2}{\rho^{n+1}}\int\limits_{0}^{\rho}(\rho^2-t^2)^{1/2}\,t^{2n-1}\bar{f}_{-n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\chi_{n+1}(\rho), \tag{2.6.10}$$

$$\frac{\pi G_1}{\rho^{n-1}}\left[\int\limits_{0}^{\rho}\frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int\limits_{x}^{a}f_{-n+1}(t)\,\mathrm{d}t+D_n\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n-\frac{1}{2})}{2\Gamma(n)}\rho^{2n-2}\right]$$

$$-\frac{\pi G_2}{\rho^{n-1}}\int\limits_{0}^{\rho}\frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int\limits_{x}^{a}\bar{f}_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\chi_{-n+1}(\rho). \tag{2.6.11}$$

Выражение (2.6.10) может быть упрощено, если мы определим C_n как

$$C_n=-a^{-2n+1}\int\limits_{0}^{a}t^{2n-1}f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.6.12}$$

Приложение оператора

$$r^{-2n+2}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{\rho^n d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}$$

к обеим сторонам (2.6.11) даёт

$$\frac{\pi^2}{2}\left[G_1\int_r^a f_{-n+1}(t)\,dt - G_2\int_r^a \bar{f}_{n+1}(t)\,dt + G_1 D_n\right] = r^{-2n+2}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{\chi_{-n+1}(\rho)\rho^n d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{2.6.13}$$

Так как выражение (2.6.13) должно оставаться действительным в предельном случае $r \to a$, это определяет D_n следующим образом:

$$D_n = \frac{2}{\pi^2 G_1 a^{2n-2}}\frac{d}{da}\int_0^a \frac{\chi_{-n+1}(\rho)\rho^n d\rho}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{2.6.14}$$

Обе константы теперь определены. Инверсия (2.6.10) и дифференцирование (2.6.13) приводит к системе

$$-G_1 f_{n+1}(r) + G_2 \bar{f}_{-n+1}(r) = \psi_{n+1}(r),$$

$$-G_1 f_{-n+1}(r) + G_2 \bar{f}_{n+1}(r) = \psi_{-n+1}(r). \tag{2.6.15}$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\psi_{n+1}(r) = \frac{2}{\pi^2 r^{2n-1}}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{d[\rho^{n+1}\chi_{n+1}(\rho)]}{(r^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\psi_{-n+1}(r) = \frac{2}{\pi^2}\frac{d}{dr}\left[r^{-2n+2}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{\rho^n\chi_{-n+1}(\rho)\,d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.6.16}$$

Решение системы (2.6.15) даёт

$$f_{-n+1}(r) = -\frac{G_1\psi_{-n+1}(r) + G_2\bar{\psi}_{n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2},$$

$$f_{n+1}(r) = -\frac{G_1\psi_{n+1}(r) + G_2\overline{\psi}_{-n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2}. \tag{2.6.17}$$

Общее решение теперь закончено. Оно даётся формулами (2.6.9), с константами C и D согласно (2.6.12) и (2.6.14), и функциями f определёнными в (2.6.17) и (2.6.16).

Пример. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное внешней круглой трещиной $\rho \geq a$ в плоскости z=0. Две *одинаково направленные* равные сосредоточенные силы P приложенны нормально к обеим сторонам трещины в точках $(\rho_0, \phi_0, 0^{\pm})$, $\rho_0 > a$. Нам нужно найти тангенциальное напряжение в шейке трещины. Благодаря антисимметрии приложенной нагрузки, задача может быть сведена к задаче о полупространстве, с тангенциальными перемещениями и нормальным напряжением исчезающим в шейке трещины. Математическая формулировка граничных условий есть:

$$\sigma = P\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)/\rho \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\tau = 0, \quad \text{для} \quad a < \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$u = 0, \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \tag{2.6.18}$$

Здесь $\delta(\cdot)$ есть делта–функция Дирака. Основное интегральное уравнение соответствует (2.6.2), с правой стороной χ, определённой в (2.6.3), то есть,

$$\chi(\rho,\phi) = \frac{PH\alpha}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} = -\frac{PH\alpha}{\rho_0 e^{-i\phi_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-i(\phi-\phi_0)} \frac{\rho}{\rho_0}\right)^n.$$

Общее решение, представленное выше, даёт следующие результаты

$$\chi_{-n+1}(\rho) = -\frac{PH\alpha e^{i\phi_0}}{\rho_0} \left(e^{i\phi_0} \frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}, \quad \chi_{n+1}(\rho) = 0,$$

$$f_{-n+1} = f_{n+1} = C_n = 0, \quad D_n = -\frac{2PH\alpha\Gamma(n)}{\pi^{3/2} G_1 \Gamma(n-\frac{1}{2})(\rho_0 e^{-i\phi_0})^n} \tag{2.6.19}$$

Подстановка (2.6.19) в (2.6.17) и (2.6.9) приводит к решению

$$\tau(\rho,\phi) = -\frac{2PH\alpha}{\pi^{3/2}G_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{(\rho_0 e^{-i\phi_0})^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{\rho^n e^{-in\phi}}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}.$$

Суммирование может быть выполнено согласно схеме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\zeta^n = \pi^{-1/2}F(1, 1; \tfrac{1}{2}; \zeta) = \frac{\pi^{-1/2}}{1-\zeta}\left[1+\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2}\sin^{-1}\sqrt{\zeta}\right].$$

Здесь мы использовали хорошо известное свойство гипергеометрических функций (Bateman and Erdélyi, 1955). Теперь результат примет вид

$$\tau(\rho,\phi) = -\frac{2PH\alpha}{\pi^2 G_1\rho_0 e^{-i\phi_0}(a^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{1}{1-b}\left[1+\left(\frac{b}{1-b}\right)^{1/2}\sin^{-1}\sqrt{b}\right],$$

где $b = (\rho/\rho_0)e^{-i(\phi-\phi_0)}$. В случае изотропии, последняя формула совпадает с результатом Уфлянда (1967).

Упражнение 2.6

1. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Тангенциальное перемещение $u = u_0 = \mathrm{const}$ задано внутри круга $\rho = a$. Сдвигающее напряжение вне круга равно нулю, и нормальное давление исчезает на всей плоскости $z = 0$. Найдите сдвигающее напряжение внутри круга.

Ответ: $\tau(\rho) = \dfrac{2u_0}{\pi^2 G_1(a^2-\rho^2)^{1/2}}.$

2. В задаче выше найдите нормальное перемещение w в плоскости $z = 0$.

Ответ: $w = \dfrac{4\Re(u_0 e^{-i\phi})H\alpha a}{\pi G_1\rho}$, для $\rho > a$;

$$w = \frac{4\Re(u_0 e^{-i\phi})H\alpha[a-(a^2-\rho^2)^{1/2}]}{\pi G_1\rho}, \quad \text{для} \quad \rho \leq a;$$

3. Согласно условиям первой задачи, найдите тангенциальное перемещение вне круга $\rho = a$.

Ответ: $u = \frac{2}{\pi}\left[u_0 \sin^{-1}(\frac{a}{\rho}) + \bar{u}_0 \frac{G_2}{G_1}\frac{a(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho^2} e^{2i\phi}\right]$.

2.7 Внешняя смешанная задача типа II

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть нормальное напряжение σ задано на всей плоскости $z = 0$. Произвольное тангенциальное перемещение $u = u_x + iu_y$ задано вне круга $\rho = a$, в то время, как комплексная сдвигающая нагрузка τ известна внутри круга. Требуется найти сдвигающее напряжение вне круга, тангенциальное перемещение внутри, и нормальное перемещение в плоскости $z = 0$. Математическая формулировка граничных условий есть:

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma(\rho,\phi), && \text{для} \quad 0 \leq \rho < \infty, && 0 \leq \phi < 2\pi; \\ &\tau = \tau(\rho,\phi), && \text{для} \quad 0 \leq \rho < a, && 0 \leq \phi < 2\pi; \\ &u = u(\rho,\phi), && \text{для} \quad a \leq \rho < \infty, && 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Основное интегральное уравнение может быть написано согласно (2.2.12):

$$\frac{1}{2}G_1 \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2}G_2 \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R} = \chi(\rho,\phi). \tag{2.7.2}$$

Функция χ известна из граничных условий (2.7.1):

$$\chi(\rho,\phi) = u + H\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}$$

$$-\frac{1}{2}G_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2}G_2 \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{q\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}. \tag{2.7.3}$$

После того, как уравнение (2.7.2) решено, нормальное перемещение находится следующим образом

$$w(\rho,\phi) = H\alpha\,\Re\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}}\right\} + H\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}. \tag{2.7.4}$$

Мы представляем точное решение (2.7.2) в рядах Фурье. Пусть действительны разложения:

$$\tau(\rho,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tau_n(\rho)\,e^{in\phi}, \quad \chi(\rho,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_n(\rho)\,e^{in\phi}. \tag{2.7.5}$$

Подстановка интегральных представлений (2.5.7) и (2.7.5) в (2.7.2) приводит к системе парных интегральных уравнений

$$2G_1\rho^{n+1}\int_\rho^\infty\frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\rho_0^{n+2}\,d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} + 2G_2\rho^{n+1}\int_\rho^\infty\frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}$$

$$\times\int_a^x\frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0 = \chi_{n+1}(\rho), \quad \text{для} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.7.6}$$

$$2G_1\rho^{n-1}\int_\rho^\infty\frac{dx}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x\frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} + 2G_2\rho^{n-1}\int_\rho^\infty\frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}dx$$

$$\times\int_a^x\frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} = \chi_{-n+1}(\rho), \quad \text{для} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.7.7}$$

Здесь

$$\chi_{n+1}(\rho) = u_{n+1}(\rho) + 2\pi H\alpha\rho^{-n-1}\int_0^\rho\sigma_n(\rho_0)\,\rho_0^{n+1}d\rho_0 - \frac{2}{\rho^{n+1}}\int_0^a\frac{x^{2n}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$\times\int_x^a\frac{G_1x^2\tau_{n+1}(\rho_0) + G_2[2n\rho^2-(2n+1)x^2]\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}d\rho_0, \tag{2.7.8}$$

и

$$\chi_{-n+1}(\rho) = u_{-n+1}(\rho) + 2\pi H\alpha\rho^{n-1}\int_{\rho}^{\infty}\sigma_{-n}(\rho_0)\,\rho_0^{-n+1}d\rho_0 - \frac{2}{\rho^{n-1}}\int_0^a \frac{x^{2n-2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$\times\int_x^a \frac{G_1\rho_0^2\tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2[(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2]\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}d\rho_0, \qquad (2.7.9)$$

Случай осевой симметрии соответствует $n = 0$, и мы должны решить только одно уравнение (2.7.6). Общее решение системы (2.7.6) и (2.7.7) может быть представлено в форме

$$\tau_{n+1}(\rho) = \frac{1}{\rho^{n+1}}\left[\int_a^{\rho}\frac{f_{n+1}(t)\,dt}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} + \frac{D_n}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\right], \quad \text{для} \quad n = 1,2,\ldots$$

$$\tau_{-n+1}(\rho) = \frac{1}{\rho^{n+1}}\int_a^{\rho}\frac{y\,dy}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\frac{d}{dy}\left[y^{2n}\int_a^y \frac{f_{-n+1}(t)}{t^{2n+1}}dt\right]$$

$$+ C_n\left[\frac{1}{\rho^{n+1}(\rho^2-a^2)^{1/2}} + \frac{2n}{\rho^{n+1}a^{2n+1}}\int_a^{\rho}\frac{y^{2n}dy}{(\rho^2-y^2)^{1/2}}\right], \quad \text{для} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$(2.7.10)$$

Здесь функции f подлежат определению, и C и D пока неизвестные комплексные константы. Мы используем те же обозначения, как в предыдущей секции, надеясь, что это не вызовет путаницу, и что читатель легко разберётся, что, например, C_n в этой секции не равно C_n в предыдущей секции. Подстановка (2.7.10) в уравнения (2.7.6) даёт после упрощения,

$$\pi\rho^{n+1}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\left[G_1\left(\int_a^x f_{n+1}(t)\,dt + D_n\right)\right.$$

$$\left.-G_2\left(\int_a^x \bar{f}_{-n+1}(t)\,dt + \bar{C}_n\right)\right] = \chi_{n+1}(\rho), \qquad (2.7.11)$$

$$\pi\rho^{\text{n-1}}G_1\int\limits_\rho^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\left[\int\limits_a^x \frac{f_{\text{-n+1}}(t)\,\mathrm{d}t}{t^{2\text{n}+1}}+\frac{C_\text{n}}{a^{2\text{n}+1}}\right]$$

$$+\pi\rho^{\text{n-1}}G_2\int\limits_\rho^\infty \frac{(x^2-\rho^2)^{1/2}}{x^{2\text{n}+1}}\bar{f}_{\text{n}+1}(x)\,\mathrm{d}x=\chi_{\text{-n+1}}(\rho). \qquad (2.7.12)$$

Следующее равенство было использовано в процедуре интегрирования по частям:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(x^2-\rho^2)^{1/2}}{x^{2\text{n}}}\right]=\frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2\text{n}+1}(x^2-\rho^2)^{1/2}}.$$

Глядя на первый интеграл в (2.7.12), мы можем заключить, что он сходится только, если член в квадратных скобках стремится к нулю, когда $x\to\infty$. Это условие определяет C_n следующим образом:

$$C_\text{n}=-a^{2\text{n}+1}\int\limits_a^\infty f_{\text{-n+1}}(t)\,t^{\text{-2n-1}}\mathrm{d}t. \qquad (2.7.13)$$

Мы разделим обе стороны (2.7.11) на $\rho^\text{n}(\rho^2-r^2)^{1/2}$, интегрируем по ρ от r до ∞, дифференцируем по r, и умножаем результат на $r^{2\text{n}+2}/\pi$. Мы получим

$$G_1\left[\int\limits_a^r f_{\text{n}+1}(t)\,\mathrm{d}t+D_\text{n}\right]-G_2\left[\int\limits_a^r \bar{f}_{\text{-n+1}}(t)\,\mathrm{d}t+\overline{C}_\text{n}\right]$$

$$=-\frac{2}{\pi^2}r^{2\text{n}+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int\limits_r^\infty \frac{\chi_{\text{n}+1}(\rho)\,\mathrm{d}\rho}{\rho^\text{n}(\rho^2-r^2)^{1/2}}. \qquad (2.7.14)$$

Переход к пределу $r\to a$ в (2.7.14) даёт нам формулу для вычисления D_n, а именно,

$$D_n = \frac{1}{G_1}\left[G_2\overline{C}_n - \frac{2}{\pi^2}a^{2n+2}\frac{d}{da}\int_a^\infty \frac{\chi_{n+1}(\rho)\,d\rho}{\rho^n(\rho^2 - a^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.7.15}$$

Инверсия (2.7.12) и дифференцирование (2.7.14) ведёт к системе уравнений

$$G_1 f_{-n+1}(r) - G_2\bar{f}_{n+1}(r) = \psi_{-n+1}(r),$$

$$G_1 f_{n+1}(r) - G_2\bar{f}_{-n+1}(r) = \psi_{n+1}(r). \tag{2.7.16}$$

Здесь

$$\psi_{-n+1}(r) = -\frac{2}{\pi^2}r^{2n+1}\frac{d}{dr}\int_r^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\chi_{-n+1}(\rho)}{\rho^{n-1}}\right],$$

$$\psi_{n+1}(r) = -\frac{2}{\pi^2}\frac{d}{dr}\left[r^{2n+2}\frac{d}{dr}\int_r^\infty \frac{\chi_{n+1}(\rho)\,d\rho}{\rho^n(\rho^2 - r^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.7.17}$$

Следующее правило дифференцирования было использовано выше:

$$\frac{\text{д}}{\text{д}\rho}\int_\rho^\infty \frac{f(x)\ \text{д}x}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} - \rho\int_\rho^\infty \frac{\text{д}[f(x)/x]}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}. \tag{2.7.18}$$

Решение системы (2.7.16) есть

$$f_{n+1}(r) = \frac{G_1\psi_{n+1}(r) + G_2\overline{\psi}_{-n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2},$$

$$f_{-n+1}(r) = \frac{G_1\psi_{-n+1}(r) + G_2\overline{\psi}_{n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2}. \tag{2.7.19}$$

Формулы (2.7.10), (2.7.13), (2.7.15), (2.7.17), и (2.7.19) дают полное решение задачи. Так как сдвигающее напряжение теперь известно на всей плоскости $z = 0$, тангенциальные перемещения внутри круга может быть определёно по (2.7.2), и нормальное перемещение определяется по (2.7.4). Мы рассмотрим далее случай круглой трещины более подробно, включая вывод решения в замкнутой форме.

Пример: Круглая трещина. Пусть трещина радиуса a расположена в плоскости $z=0$. Обе стороны трещины загружены произвольной сдвигающей нагрузкой действующей в противоположных направлениях. Граничные условия антисимметричны, так что задача может быть сведена к смешанной задаче для полупространства, со следующими граничными условиями:

$$\sigma=0, \quad \text{для} \quad 0\le\rho<\infty, \quad 0\le\phi<2\pi;$$

$$\tau=\tau(\rho,\phi), \quad \text{для} \quad 0\le\rho<a, \quad 0\le\phi<2\pi;$$

$$u=0, \quad \text{для} \quad a\le\rho<\infty, \quad 0\le\phi<2\pi. \tag{2.7.20}$$

Сдвигающее напряжение вне трещины, тангенциальное перемещение внутри и нормальное перемещение в плоскости $z = 0$ должны быть определены. Задача о трещине может быть рассмотрена как особый случай более общей задачи, которая была решена выше. Однако, мы можем показать, что задача о трещине имеет более простое решение. Действительно, интегральные уравнения (2.7.6) и (2.7.7) остаются теми же, но вместо (2.7.8) и (2.7.9) мы имеем

$$\chi_{n+1}(\rho)=-\frac{2}{\rho^{n+1}}\int_0^a\frac{x^{2n}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{G_1x^2\tau_{n+1}(\rho_0)+G_2[2n\rho^2-(2n+1)x^2]\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}d\rho_0, \tag{2.7.21}$$

и

$$\chi_{-n+1}(\rho)=-\frac{2}{\rho^{n-1}}\int_0^a\frac{x^{2n-2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{G_1\rho_0^2\tau_{-n+1}(\rho_0)+G_2[(2n-1)\rho_0^2-2nx^2]\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}d\rho_0. \tag{2.7.22}$$

Структура интегрального уравнения указывает на возможность выразить неизвестное τ вне трещины через заданное τ внутри. Такое представление имеет вид:

$$\tau_{n+1}(\rho)=-\frac{2}{\pi\rho^{n+1}(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^a\frac{(a^2-t^2)^{1/2}\tau_{n+1}(t)t^{n+2}dt}{\rho^2-t^2}+\frac{A_n}{\rho^{n+1}(\rho^2-a^2)^{1/2}},$$

$$\text{для} \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\tau_{-n+1}(\rho)=-\frac{2}{\pi\rho^{n-1}(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^a\frac{(a^2-t^2)^{1/2}\tau_{-n+1}(t)t^{n}dt}{\rho^2-t^2}, \quad \text{для} \quad n=1,2,3,\ldots$$

(2.7.23)

Здесь A_n есть пока неизвестные комплексные константы. Подстановка (2.7.23) в (2.7.6) даёт, после промежуточного интегрирования,

$$2G_1\rho^{n+1}\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\left[-\int_0^a \frac{\tau_{n+1}(t)t^{n+2}dt}{(x^2-t^2)^{1/2}}+\frac{\pi}{2}A_n\right]$$

$$+2G_2\rho^{n+1}\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\left[-\int_0^a \frac{2nx^2-(2n+1)t^2}{(x^2-t^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(t)t^n\,dt\right.$$

$$\left.+(2n+1)\int_0^a (a^2-t^2)^{1/2}\,\bar{\tau}_{-n+1}(t)t^n\,dt\right]=\chi_{n+1}(\rho). \qquad (2.7.24)$$

Следующее равенство может быть проверено формальной заменой x на $\rho t/x$:

$$\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-t^2)^{1/2}}=\frac{1}{(\rho t)^{2n+2}}\int_0^t \frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(t^2-x^2)^{1/2}}. \qquad (2.7.25)$$

Изменение порядка интегрирования в (2.7.24), использование (2.7.25) и ещё одно изменение порядка ведёт к выражению

$$-\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\int_0^a \frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{n+1}(t)\,dt}{t^n(t^2-x^2)^{1/2}}$$

$$-\frac{2G_2}{\rho^{n+1}}\int_0^a \frac{2n\rho^2-(2n+1)x^2}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}x^{2n}dx\int_x^a \frac{\bar{\tau}_{-n+1}(t)\,dt}{t^n(t^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\rho^{n+1}\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\Bigg[\pi G_1 A_n$$

$$+2G_2(2n+1)\int_0^a (a^2-t^2)^{1/2}\bar{\tau}_{-n+1}(t)t^{n}\mathrm{d}t\Bigg] = \chi_{n+1}(\rho). \tag{2.7.26}$$

Сравнение (2.7.26) и (2.7.21) показывает, что уравнение будет удовлетворено, если A_n определено как

$$A_n = -\frac{2}{\pi}(2n+1)(G_2/G_1)\int_0^a \bar{\tau}_{-n+1}(\rho)\rho^{n}(a^2-\rho^2)^{1/2}\mathrm{d}\rho. \tag{2.7.27}$$

Так как τ_{-n+1} определено для $n\geq 1$ только, мы можем заключить, что $A_0 = 0$. Аналогичная процедура подстановки (2.7.23) в (2.7.7) приводит к

$$2G_1\rho^{n-1}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\left[-\int_0^a \frac{\tau_{-n+1}(t)t^{n}\,\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\right]$$

$$+2G_2\rho^{n-1}\int_\rho^\infty \frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\left[-\int_0^a \frac{\bar{\tau}_{n+1}(t)t^{n}}{(x^2-t^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.+\frac{1}{ax}\left(\int_0^a (a^2-t^2)^{1/2}\bar{\tau}_{n+1}(t)t^{n+2}\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}A_n\right)\right] = \chi_{-n+1}(\rho). \tag{2.7.28}$$

Следует заметить, что интеграл

$$\int_\rho^\infty \frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n+1}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int_\rho^\infty \mathrm{d}\left[-\frac{(x^2-\rho^2)^{1/2}}{x^{2n}}\right] = 0, \qquad \text{для} \qquad n\geq 1. \tag{2.7.29}$$

Используя (2.7.25) и (2.7.29), уравнение (2.7.28) может быть преобразовано в

$$-\frac{2G_1}{\rho^{n-1}}\int_0^a \frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(t)\,\mathrm{d}t}{t^{n-2}(t^2-x^2)^{1/2}}$$

$$-\frac{2G_2}{\rho^{n-1}}\int_0^a \frac{x^{2n-2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{(2n-1)t^2-2nx^2}{t^n(t^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(t)\,dt=\chi_{-n+1}(\rho).$$

Сравнение последнего выражения с (2.7.22) доказывает, что уравнение (2.7.7) удовлетворено, и что (2.7.23) является решением нашей задачи. Решение в замкнутой форме может быть получено при помощи суммирования (2.7.23) и (2.7.27), с результатом:

$$\tau(\rho,\phi)=-\frac{1}{\pi^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$-\frac{G_2 e^{2i\phi}}{\pi^2 G_1\rho^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3-(\rho_0/\rho)e^{i(\phi-\phi_0)}}{[1-(\rho_0/\rho)e^{i(\phi-\phi_0)}]^2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{2.7.30}$$

Мы можем заметить, что первый интеграл в (2.7.30) соответствует решению для случай нормальной нагрузки круглой трещины. Определим комплексный коэффициент концентрации напряжений как

$$k(\phi)=\lim_{\rho\to a}[(\rho-a)^{1/2}\tau(\rho,\phi)]. \tag{2.7.31}$$

Подстановка (2.7.30) в (2.7.31) даёт:

$$k(\phi)=-\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$-\frac{G_2 e^{2i\phi}}{\pi^2 G_1 a^2\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3-(\rho_0/a)e^{i(\phi-\phi_0)}}{[1-(\rho_0/a)e^{i(\phi-\phi_0)}]^2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{2.7.32}$$

Так как наше определение τ содержит обе x- и y-компоненты, то выражение для коэффициента концентрации напряжений тоже будет содержать две компоненты $k = k_x + ik_y$. Если нам нужно разложить коэффициент на радиальную и тангенциальную компоненты, мы используем взаимоотношение

$$\tau_{zx} + i\tau_{yz} = (\tau_{z\rho} + i\tau_{\phi z})e^{i\phi}.$$

Это позволяет нам переписать (2.7.32) через второй и третий мод коэффициент концентрации напряжений следующим образом:

$$k_2 + ik_3 = -\frac{e^{-i\phi}}{\pi^2\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$-\frac{G_2 e^{i\phi}}{\pi^2 G_1 a^2\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3-(\rho_0/a)e^{i(\phi-\phi_0)}}{[1-(\rho_0/a)e^{i(\phi-\phi_0)}]^2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\,\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{2.7.33}$$

Используя (2.7.33), нам следует помнить, что τ определёно через декартовы компоненты.

Чтобы найти тангенциальные перемещения внутри трещины прямо через заданную сдвигающую нагрузку, уравнения (2.7.6) и (2.7.7) должны быть переписаны для $\rho \le a$. Они будут иметь ту же форму, с единственной разницей в пределах интегрирования, а именно,

$$u_{n+1}(\rho) = 2G_1\rho^{n+1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\rho_0^{n+2}d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}$$

$$+2G_2\rho^{n+1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0$$

$$+\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{2G_2}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n}\,dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{2n\rho^2-(2n+1)x^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0,$$

$$\text{для}\quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.7.34}$$

$$u_{-n+1}(\rho) = 2G_1\rho^{n-1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}$$

$$+2G_2\rho^{n-1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x \frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0$$

$$+\frac{2G_1}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{2G_2}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}\,dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2-2nx^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0,$$

$$\text{для } n=1,2,3,\ldots \tag{2.7.35}$$

Первые два члена в (2.7.34) и (2.7.35) представляют перемещение внутри трещины, вызванное сдвигающим напряжением вне, в то время, как остальные члены дают перемещение, вызванное действием сдвигающих напряжений внутри. Подстановка (2.7.23) в (2.7.34) даёт, после интегрирования по ρ_0,

$$u_{n+1}(\rho)=-2G_1\rho^{n+1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{\tau_{n+1}(t)t^{n+2}dt}{(x^2-t^2)^{1/2}}$$

$$-2G_2\rho^{n+1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{2nx^2-(2n+1)t^2}{(x^2-t^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(t)t^n dt$$

$$+\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{2G_2}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{2n\rho^2-(2n+1)x^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0. \tag{2.7.36}$$

Преобразуем третий член в (2.7.36) используя (2.7.25). Процедура протекает следующим образом:

$$\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\Bigg[\int_0^{\rho}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n}\int_0^{\rho_0}\frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\int_{\rho}^{a}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\Bigg]$$

$$=\frac{2G_1}{\rho^{n+1}}\Bigg[\int_0^{\rho}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n}\int_{\rho}^{\infty}\frac{(\rho\rho_0)^{2n+2}dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}$$

$$+\int_{\rho}^{a}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n}\int_{\rho_0}^{\infty}\frac{(\rho\rho_0)^{2n+2}dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\Bigg]$$

$$=2G_1\rho^{n+1}\Bigg[\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^{a}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\rho_0^{n+2}d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}$$

$$+\int_{\rho}^{a}\frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^{x}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\rho_0^{n+2}d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\Bigg]. \qquad (2.7.37)$$

Аналогичное преобразование последнего члена в (2.7.36) приводит к равенству

$$\frac{2G_2}{\rho^{n+1}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{2n\rho^2-(2n+1)x^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0$$

$$= 2G_2\rho^{n+1}\left[\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,\mathrm{d}\rho_0\right.$$

$$\left.+\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,\mathrm{d}\rho_0\right]. \quad (2.7.38)$$

Подстановка (2.7.37) и (2.7.38) в (2.7.36) ведёт к результату:

$$u_{n+1}(\rho) = 2G_1\rho^{n+1}\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)\rho_0^{n+2}\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}$$

$$+2G_2\rho^{n+1}\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,\mathrm{d}\rho_0,$$

$$\text{для } n = 0,1,2,\ldots, \text{ и } \rho\le a. \quad (2.7.39)$$

Аналогичная процедура может быть применёна к (2.7.35). Подстановка (2.7.23) в (2.7.35) даёт после интегрирования по ρ_0,

$$u_{-n+1}(\rho) = -2G_1\rho^{n-1}\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{\tau_{-n+1}(t)t^n\,\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}$$

$$+2G_2\rho^{n-1}\int_a^\infty \frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}x\left[-\int_0^a \frac{\bar{\tau}_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{ax}\left(\int_0^a (a^2-t^2)^{1/2}\bar{\tau}_{n+1}(t)t^{n+2}\,\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}A_n\right)\right]$$

$$+\frac{2G_1}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{2G_2}{\rho^{n-1}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{(2n-1)\rho_0^2-2nx^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0. \tag{2.7.40}$$

Следующие равенства могут быть установлены, используя процедуры, идентичные тем, которые были использованы для вывода (2.7.37) и (2.7.38)

$$\frac{2G_1}{\rho^{n-1}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}$$

$$=2G_1\rho^{n-1}\left[\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^a\frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0\right.$$

$$\left.+\int_{\rho}^a\frac{\mathrm{d}x}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x\frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0\right], \tag{2.7.41}$$

$$\frac{2G_2}{\rho^{n-1}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n-2}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{(2n-1)\rho_0^2-2nx^2}{\rho_0^n(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\,\mathrm{d}\rho_0$$

$$=2G_2\rho^{n-1}\left[\int_a^{\infty}\frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}x\int_0^a\frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\int_{\rho}^a\frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.7.42}$$

Подстановка (2.7.41) и (2.7.42) в (2.7.40) даёт:

$$u_{-n+1}(\rho)=2G_1\rho^{n-1}\int_{\rho}^a\frac{\mathrm{d}x}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x\frac{\tau_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho_0$$

$$+2G_2\rho^{n-1}\left[\int_\rho^a \frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\,dx\int_0^x \frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}+B_n(a^2-\rho^2)^{1/2}\right]. \tag{2.7.43}$$

Здесь

$$B_n = a^{-2n-1}\int_0^a t^n(a^2-t^2)^{1/2}[\bar{\tau}_{n+1}(t)-(2n+1)(G_2/G_1)\tau_{-n+1}(t)]\,dt. \tag{2.7.44}$$

Формулы (2.7.39), (2.7.43), и (2.7.44) дают тангенциальные перемещения поверхностей трещины через заданные сдвигающие напряжения. Заметим, что перемещение исчезает вне трещины. Комплексное тангенциальное перемещение u может быть представлено в гармониках как

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}(\rho)e^{i(n+1)\phi}+\sum_{n=1}^{\infty}u_{-n+1}(\rho)e^{-i(n-1)\phi}, \tag{2.7.45}$$

где u_{n+1} и u_{-n+1} определёны в (2.7.39) и (2.7.44). Суммирование будет выполнено для членов, содержащих G_1 и G_2 отдельно. Подстановка (2.7.39) в (2.7.45) и суммирование членов с G_1 даёт:

$$\frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi_0\int_\rho^a \frac{\lambda(\rho\rho_0/x^2,\phi-\phi_0)\,dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x \frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}. \tag{2.7.46}$$

Здесь мы должны изменить порядок интегрирования согласно схеме:

$$\int_\rho^a dx\int_0^x d\rho_0=\int_\rho^a d\rho_0\int_{\rho_0}^a dx+\int_0^\rho d\rho_0\int_\rho^a dx. \tag{2.7.47}$$

Интегрирование по x в (2.7.46) может быть выполнено согласно (1.1.23) и даёт:

$$\frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right)\right]\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{2.7.48}$$

где R и $\eta(x)$ определены в (2.2.14) и (1.1.6) соответственно. Мы вспоминаем, что, согласно нашей конвенции, сокращение η обозначает $\eta(a)$. Суммирование членов с G_2 в (2.7.39) и (2.7.43) несколько более сложно, но вобщем сводится к ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Результат суммирования есть

$$\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{2i\phi_0}\,d\phi_0 \int_\rho^a \frac{\lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi-\phi_0)\,dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}$$

$$\times\int_0^x \left\{1+\frac{4iq\rho e^{-i\phi_0}\sin(\phi-\phi_0)}{x^2(1-\zeta)(1-\bar\zeta)}\right\}\frac{\bar\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}.$$

(2.7.49)

Здесь $\zeta = (\rho\rho_0/x^2)e^{i(\phi-\phi_0)}$, и $\bar\zeta$ есть комплексно сопряжённое ζ. Интеграл в (2.7.49), хотя и выглядит очень трудным, является полным дифференциалом и может быть вычислен как неопределённый

$$\int \frac{\lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi-\phi_0)\,dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\left\{1+\frac{4iq\rho e^{-i\phi_0}\sin(\phi-\phi_0)}{x^2(1-\zeta)(1-\bar\zeta)}\right\}$$

$$= e^{-2i\phi_0}\frac{q}{\bar q R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta(x)}{R}\right)+\frac{2i\rho e^{-i\phi_0}\sin(\phi-\phi_0)\,\eta(x)}{x^2\bar q\,(1-\zeta)(1-\bar\zeta)}.$$

(2.7.50)

Следует отметить, что (2.7.50) может рассматриваться как обобщение интегрального представления для q^2/R^3, данное в (2.5.7). Действительно, такое представление может быть получено из (2.7.50) вычисляя его как определённый интеграл, а именно,

$$\frac{2}{\pi}\int_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty} \frac{e^{2i\phi_0}\lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi-\phi_0)\,dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\left\{1+\frac{4iq\rho e^{-i\phi_0}\sin(\phi-\phi_0)}{x^2(1-\zeta)(1-\bar\zeta)}\right\}=\frac{q}{\bar q R}.$$

Изменяя порядок интегрирования в (2.7.49) и интегрируя по x согласно (2.7.50), мы получим:

$$\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{q}{\bar{q}R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right)+\frac{2i\rho e^{i\phi_0}\sin(\phi-\phi_0)\eta}{a^2\bar{q}(1-t)(1-\bar{t})}\right]\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \tag{2.7.51}$$

где t определёно в (1.4.41). Оставшийся шаг — суммирование B_n (2.7.44), с результатом

$$\frac{G_2}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,e^{2i\phi_0}}{(1-\bar{t})}-\frac{G_2}{G_1}\frac{(3-\bar{t})\,\tau(\rho_0,\phi_0)}{(1-\bar{t})^2}\right]\eta\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{2.7.52}$$

Окончательно, суммирование (2.7.48), (2.7.51) и (2.7.52) приводит к

$$u(\rho,\phi)=\frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right)-\frac{G_2^2}{G_1^2}\frac{(3-\bar{t})\,\eta}{a^2(1-\bar{t})^2}\right]\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{q}{\bar{q}R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right)+\frac{\eta[(q/\bar{q})-te^{2i\phi_0}]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})}\right]\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{2.7.53}$$

Так как нормальное напряжение исчезает в плоскости $z=0$, нормальное перемещение w может быть определено согласно (2.7.4) как

$$w(\rho,\phi)=H\alpha\,\Re\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi}-\rho_0 e^{i\phi_0}},$$

который эквивалентен следующему разложению в ряд

$$w(\rho,\phi)=2\pi H\alpha\,\Re\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-i(n+1)\phi}}{\rho^{n+1}}\int_0^{\rho}\tau_{-n}(\rho_0)\,\rho_0^{n+1}d\rho_0\right.$$

$$-\,e^{in\phi}\rho^{n}\left[\int_{\rho}^{a}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^{n}}\,d\rho_0+\int_{a}^{\infty}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^{n}}\,d\rho_0\right]\Bigg\}, \qquad \text{для} \qquad \rho\le a;$$

(2.7.54)

$$w(\rho,\phi)=2\pi H\alpha\,\Re\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\frac{e^{-i(n+1)\phi}}{\rho^{n+1}}\Bigg[\int_{0}^{a}\tau_{-n}(\rho_0)\,\rho_0^{n+1}d\rho_0$$

$$+\int_{a}^{\rho}\tau_{-n}(\rho_0)\,\rho_0^{n+1}\,d\rho_0\Bigg]-e^{in\phi}\rho^{n}\int_{\rho}^{\infty}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^{n}}\,d\rho_0\Bigg\}, \qquad \text{для} \qquad \rho\ge a.$$

(2.7.55)

Подставляя формулы (2.7.23) и (2.7.27) в (2.7.54) и (2.7.55), и выполняя суммирование и интегрирование, мы получим:

$$w=H\alpha\,\Re\Bigg\{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a(1-t)^{1/2}}\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)}{q}\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\frac{G_2}{G_1 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\frac{1}{(1-t)^{3/2}}-1\right)(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\,\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)e^{i\phi_0}\,d\rho_0\,d\phi_0\Bigg\}, \qquad \text{для} \qquad \rho\le a;$$

и

$$w=\frac{2}{\pi}H\alpha\,\Re\Bigg\{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{a(1-t)^{1/2}}\tan^{-1}\!\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\right)\frac{\tau(\rho_0,\phi_0)}{q}\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+\frac{G_2}{G_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\Bigg[\frac{1}{a(1-t)^{3/2}}\tan^{-1}\!\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\right)-\frac{1}{a}\sin^{-1}\frac{a}{\rho}$$

$$-\frac{\rho_0 e^{-i\phi_0}(\rho^2-a^2)^{1/2}}{\bar{q}a^2(1-t)}\Bigg](a^2-\rho_0^2)^{1/2}\,\bar{\tau}(\rho_0,\phi_0)\,e^{i\phi_0}\,d\rho_0 d\phi_0\Bigg\}, \qquad \text{для} \qquad \rho>a.$$

Упражнение 2.7

1. Однородные сдвигающие напряжения $\tau = \tau_0$, где τ_0 есть комплексная константа, приложены антисимметрично внутри круглой трещины радиуса a. Требуется найти тангенциальные перемещения сторон трещины.
Ответ: $u = 2\tau_0[(G_1^2 - G_2^2)/G_1](a^2 - \rho^2)^{1/2}$.

2. В условиях предыдущей задачи, найдите сдвигающее напряжение в плоскости $z = 0$ вне трещины.

Ответ: $\tau(\rho,\phi) = \dfrac{2}{\pi}\left\{\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{a}{\rho}\right) - \dfrac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}\right]\tau_0 - \dfrac{G_2 a^3 e^{2i\phi}}{G_1\rho^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}}\bar{\tau}_0\right\}$.

3. Согласно условиям первой задачи, найдите нормальное перемещение w в плоскости $z = 0$.

Ответ: $w(\rho,\phi) = \pi H\alpha\rho\Re\left[\tau_0 e^{-i\phi} + (G_2/G_1)\bar{\tau}_0 e^{i\phi}\right]$, для $\rho \le a$;

$$w(\rho,\phi) = 2H\alpha\Re\left[\tau_0 e^{-i\phi} + (G_2/G_1)\bar{\tau}_0 e^{i\phi}\right]\left[\rho\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) - \frac{a}{\rho}(\rho^2 - a^2)^{1/2}\right], \quad \text{для} \quad \rho \ge a.$$

2.8 Обратная задача линейной теории трещин

В прямых задачах теории трещин распределение напряжений на трещине известно и требуется определить перемещения. Изучение материалов с твёрдыми включениями приводит к задаче другого вида, а именно, перемещения заданы на поверхностях трещины, в то время, как распределение напряжений подлежит определению. Таким образом сформулированная задача называется *обратной задачей.* Мы рассмотрим два типа задач: случай гладких твёрдых включений (нормальные перемещения заданы, тангенциальные напряжения отсутствуют) называется внешней задачей типа I. Второй тип соответствует случаю, когда нормальное напряжение равно нулю на плоскости $z = 0$, и антисимметричные тангенциальные перемещения заданы внутри трещины. Распределение напряжений подлежит определению в каждом случае. Строго говоря, обратная задача теории трещин не принадлежит классу смешанных задач, её точное решение известно для произвольной трещины. Мы покажем ниже, как некоторые специфические результаты могут быть полученны при помощи нового метода.

Задача о твёрдом гладком включении. Рассмотрим круглую трещину радиуса a в трансверсально изотропном пространстве. Пусть эта трещина открывается твёрдым гладким включением. Открывающие перемещения на трещине заданы как

$$w = w(\rho,\phi), \quad \text{для} \quad z = 0^+, \quad 0 \le \rho \le a;$$

$$w = -w(\rho,\phi), \quad \text{для} \quad z = 0^-, \quad 0 \le \rho \le a;$$

Благодаря симметрии, задача может быть сведена к задаче для полупространства, с граничными условиями на плоскости $z = 0$

$$w = w(\rho,\phi), \qquad \text{для} \quad \rho \le a, \qquad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$w = 0, \qquad \text{для} \quad \rho \ge a, \qquad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\tau = 0, \qquad \text{для} \quad 0 \le \rho < \infty, \qquad 0 \le \phi < 2\pi. \tag{2.8.1}$$

Общее взаимоотношение между открывающим перемещением трещины w и приложенным давлением σ было установлено в (2.4.19), и в этом случае может быть написано как

$$w(\rho,\phi) = 4H \int_{\rho}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_{0}^{x} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{2.8.2}$$

Так как в нашем случае перемещение w известно, и σ неизвестна, мы можем интерпретировать (2.8.2) как интегральное уравнение. Оно может быть решено точно. Мы используем первый оператор

$$\mathcal{L}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{a} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

с результатом

$$2\pi H \int_{0}^{t} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right)\sigma(\rho_0,\phi) = -\mathcal{L}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{a} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) w(\rho,\phi). \tag{2.8.3}$$

Приложенное следующего оператора

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y \frac{t\,\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}(t).$$

даёт

$$\sigma(y,\phi) = -\frac{1}{\pi^2 H y}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y \frac{t\,\mathrm{d}t}{(y^2-t^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}(t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^a \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)w(\rho,\phi). \tag{2.8.4}$$

Формула (2.8.4) действительна только внутри трещины. Нормальное напряжение вне трещины может быть выражено прямо через заданное открывающее перемещение трещины, благодаря взаимоотношению между нормальным напряжением внутри и вне трещины (2.4.17), которое в этом случае принимает вид

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{2}{\pi(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^a \frac{(a^2-y^2)^{1/2}}{\rho^2-y^2}\,\mathcal{L}\left(\frac{y}{\rho}\right)\sigma(y,\phi)y\,\mathrm{d}y, \qquad \text{для} \qquad \rho > a. \tag{2.8.5}$$

Подстановка (2.8.4) в (2.8.5) даёт после интегрирования по y,

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\mathcal{L}(1/\rho)}{\pi^2 H\rho^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^a \left[a - t\left(\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-t^2}\right)^{1/2}\right]\mathrm{d}t$$

$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\mathcal{L}(t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^a \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-t^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi)\right].$$

Интегрирование по частям в последнем выражении приводит к

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\mathcal{L}(1/\rho)}{\pi^2 H}\int_0^a \frac{x\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{3/2}}\,\mathcal{L}(x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi). \tag{2.8.6}$$

Выражение (2.8.6) может также быть представлено в форме

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{\mathcal{L}(1/\rho)}{\pi^2 H\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^a \frac{x\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}(x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi). \tag{2.8.7}$$

Сравнение (2.8.7) и (2.8.4) показывает, что напряжение вне трещины может быть представлено почти в той же форме, как и напряжение внутри, с одной только разницей в верхнем пределе первого интеграла. Используя правило (1.3.9) и условие $w(a,\phi) = 0$, выражение (2.8.6) может быть переписано как

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{1}{\pi^2 H}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{3/2}}\int_x^a \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\left[\rho_0\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi)\right]. \tag{2.8.8}$$

Замена порядка интегрирования и интегрирование по частям дают

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{4\pi^2 H}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{w(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{3/2}}. \tag{2.8.9}$$

Последнее выражение может также быть переписано как

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{4\pi^2 H}\Delta\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{w(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}. \tag{2.8.10}$$

Здесь Δ обозначает двумерный оператор Лапласа. Мы покажем позже, что формула (2.8.10) является общей: она действительна для плоской трещины произвольной формы в плоскости $z = 0$.

Мы можем также выразить некоторые интегральные характеристики через нормальные перемещения трещины. Главный вектор P определён ниже

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^a \sigma(\rho,\phi)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi. \tag{2.8.11}$$

Подстановка (2.8.4) в (2.8.11) приводит к

$$P = -\frac{1}{\pi^2 H}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a \frac{x\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{w(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}. \tag{2.8.12}$$

Интегрирование по частям в (2.8.12) даёт ещё одно представление

$$P = \frac{a^2}{\pi^2 H}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{3/2}} \int_x^a \frac{w(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}. \tag{2.8.13}$$

Несколько дополнительных форм может быть полученно интегрированием (2.8.13) по x, с последующим использованием различных интегральных представлений для полных эллиптических интегралов (смотри Упражнение 2.8.2).

Мы можем также вычислить главный момент напряжений вызванных твёрдым включением. Вводя комплексный момент $M = M_x + \mathrm{i}M_y$, мы можем заключить, что

$$M = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\int_0^a \sigma(\rho,\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi. \tag{2.8.14}$$

Подстановка (2.8.4) в (2.8.14) даёт

$$M = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2 H}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi \int_0^a \frac{x^3\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a \frac{w(\rho,\phi)\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}. \tag{2.8.15}$$

Ещё одно представление может быть получено из (2.8.15) (смотрите Упражнение 2.8.3).

Пример. Представляется интересным рассмотреть общий случай, где перемещения могут быть представлены как разложение

$$w(\rho,\phi) = (a^2-\rho^2)^{1/2}\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{n}}\rho^{|\mathrm{n}|}\mathrm{e}^{in\phi}. \tag{2.8.16}$$

Подстановка (2.8.16) в (2.8.4) и (2.8.7) даёт

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}H}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(|n|+3/2)}{\Gamma(|n|+1)}w_n\rho^{|n|}e^{in\phi}, \qquad \text{для} \qquad \rho \le a.$$

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{2\pi H}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a^{2|n|+3}w_n e^{in\phi}}{(2|n|+3)\rho^{|n|+3}}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}+|n|;\frac{5}{2}+|n|;\frac{a^2}{\rho^2}\right), \qquad \text{для} \qquad \rho > a.$$

(2.8.17)

Гипергеометрическая функция Гаусса может быть выражена через элементарные функции (Bateman i Erdélyi, 1955)

$$F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}+n;\frac{5}{2}+n;\zeta\right) = \frac{(-1)^n(3+2n)}{n!\,(1-\zeta)^{1/2}}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left\{\frac{(1-\zeta)^n}{\zeta}\left[1-\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right)^{1/2}\sin^{-1}\sqrt{\zeta}\right]\right\}.$$

(2.8.18)

Напряжение в (2.8.17) становится сингулярным, когда $\rho \to a^+$. Используя интегрирование по частям в (2.8.6), сингулярная и несингулярная части могут быть разделены следующим образом:

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{2\pi H}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a^{2|n|+1}}{\rho^{|n|+1}}\left[\frac{\rho}{(\rho^2-a^2)^{1/2}} - F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+|n|;\frac{3}{2}+|n|;\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right]w_n e^{in\phi},$$

(2.8.19)

и в результате, мы можем получить коэффициент концентрации напряжений как

$$k_1 = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}\pi H}\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_n a^{|n|}e^{in\phi}. \qquad (2.8.20)$$

Гипергеометрическая функция в (2.8.19) может быть выражена в элементарных функциях:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+|n|;\frac{3}{2}+|n|;\zeta\right) = (-1)^n\frac{2n+1}{n!}\sqrt{1-\zeta}\;\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{(1-\zeta)^{n-1/2}}{\sqrt{\zeta}}\sin^{-1}\sqrt{\zeta}\right].$$

(2.8.21)

Главный вектор P и опрокидывающий момент M могут быть определены из (2.8.12) и (2.8.15) соответственно:

$$P = \frac{\pi a^2}{4H}w_0,$$

$$M = -\mathrm{i}\,\frac{3\pi a^4}{16H}\,w_{-1}$$

Обратная задача теории трещин типа II. Пусть тангенциальное перемещение задано на поверхностях трещины

$$u = u(\rho,\phi), \qquad \text{для} \quad \rho \le a \qquad z = 0^+;$$

$$u = -u(\rho,\phi), \qquad \text{для} \quad \rho \le a \qquad z = 0^-. \tag{2.8.22}$$

Требуется найти распределение сдвигающего напряжения в плоскости $z = 0$. Благодаря антисимметрии, задача может быть сведена к задаче для полупространства, удовлетворяющей граничным условиям:

$$u = u(\rho,\phi), \qquad \text{для} \;\; \rho\le a, \qquad 0\le\phi<2\pi;$$

$$u = 0, \qquad \text{для} \;\; \rho\ge a, \qquad 0\le\phi<2\pi;$$

$$\sigma = 0, \qquad \text{для} \;\; 0\le\rho<\infty, \qquad 0\le\phi<2\pi. \tag{2.8.23}$$

Взаимоотношение между тангенциальным перемещением u и сдвигающим напряжением τ было установлено в (2.7.39) и (2.7.43). Так как в обратной задаче u известно, и τ подлежит определению, мы должны рассматривать эти выражения как систему интегральных уравнений, которую нужно решить относительно двух неизвестных τ_{n+1} и τ_{-n+1}. Положим решение в форме

$$\tau_{n+1}(\rho) = G_1 f_{n+1}(\rho) + G_2\left[\bar f_{-n+1}(\rho) - \frac{2n}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \bar f_{-n+1}(x)x^n\mathrm{d}x\right], \quad \text{для} \qquad n = 0, 1, 2\,...$$

$$\tau_{-n+1}(\rho) = G_1 f_{-n+1}(\rho) + G_2\left[\bar f_{n+1}(\rho) + 2n\rho^{n-1}\int_0^\rho \frac{\bar f_{n+1}(x)}{x^n}\mathrm{d}x\right] + C_n\rho^{n-1}, \quad \text{для} \qquad n = 1, 2, 3\,...$$

(2.8.24)

Здесь f есть пока неизвестная комплексная функция и C_n — пока неизвестная комплексная постоянная. Подстановка (2.8.24) в уравнение (2.7.39) и последующее интегрирование дают:

$$u_{n+1}(\rho) = 2(G_1^2 - G_2^2)\rho^{n+1}\int_\rho^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x \frac{f_{n+1}(\rho_0)\rho_0^{n+2}\mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \tag{2.8.25}$$

и отсюда величина f_{n+1} может быть найдена как

$$f_{n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2-G_2^2)\rho^{n+2}}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho \frac{x^{2n+3}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{u_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n\,(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \tag{2.8.26}$$

Подстановка (2.8.24) в уравнение (2.7.43) даёт после упрощения

$$u_{-n+1}(\rho) = 2(G_1^2-G_2^2)\rho^{n-1}\int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^x \frac{f_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n\,d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} + 2D_n\rho^{n-1}(a^2-\rho^2)^{1/2} \tag{2.8.27}$$

Здесь D_n есть комплексная постоянная, определённая в виде:

$$D_n = G_2\left[2nG_1\int_0^a \frac{dx}{x^{2n}}\int_0^x \frac{\bar{f}_{n+1}(\rho)\,\rho^n\,d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\,2nG_2\int_0^a f_{-n+1}(\rho)\frac{\rho^n}{a^{2n}}\cosh^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)d\rho + B_n\right] + G_1C_n\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{2\Gamma(n+1/2)} \tag{2.8.28}$$

Теперь цель введения постоянной C_n в (2.8.24) становится ясной: мы можем выбрать C_n так, что D_n исчезнет. В этом случае выражение (2.8.27) может быть обращено с результатом:

$$f_{-n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2-G_2^2)\rho^n}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho \frac{x^{2n-1}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{u_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \tag{2.8.29}$$

Мы можем подставить (2.8.26) и (2.8.29) в (2.8.28) чтобы найти величину пока неизвестной постоянной C_n из условия $D_n=0$. Математические преобразования здесь довольно громоздки, хотя и элементарны. Некоторые интегралы представлены ниже.

$$\int_0^a \frac{dx}{x^{2n}}\int_0^x \frac{\bar{f}_{n+1}(\rho)\,\rho^n\,d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} = \frac{1}{\pi(G_1^2-G_2^2)}\left[\frac{2n+1}{2n}\int_0^a \frac{u_{n+1}(\rho)\,d\rho}{\rho^{n+1}} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{2a^{2n}\,\Gamma(n+1/2)}\int_0^a u_{n+1}(\rho)\,\rho^{n-1}d\rho\right], \tag{2.8.30}$$

$$\int_0^a f_{-n+1}(\rho)\,\rho^{n}\cosh^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)d\rho = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{\pi(G_1^2-G_2^2)\,\Gamma(n-1/2)}\int_0^a u_{-n+1}(\rho)\,\rho^{n-1}d\rho. \tag{2.8.31}$$

Подстановка (2.8.24) в (2.7.44) даёт следующее выражение для B_n

$$B_n = \frac{1}{a^{2n+1}}\int_0^a \left\{-2nG_2 f_{-n+1}(\rho) + \left[G_1-(2n+1)\frac{G_2^2}{G_1}\right]\bar{f}_{n+1}(\rho)\right.$$

$$\left. -\frac{2nG_2}{\rho^{n+1}}\int_0^{\rho} x^{n} f_{-n+1}(x)\,dx - 2n(2n+1)\frac{G_2^2}{G_1}\rho^{n-1}\int_0^{\rho}\frac{\bar{f}_{n+1}(x)}{x^{n}}\,dx\right\}(a^2-\rho^2)^{1/2}\rho^{n}d\rho \tag{2.8.32}$$

Следующие интегралы должны быть вычислены:

$$\int_0^a f_{-n+1}(\rho)\rho^{n}(a^2-\rho^2)^{1/2}d\rho = \frac{1}{\pi(G_1^2-G_2^2)}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)}\int_0^a u_{-n+1}(\rho)\rho^{n}d\rho \tag{2.8.33}$$

$$\int_0^a f_{n+1}(\rho)\rho^{n}(a^2-\rho^2)^{1/2}d\rho = \frac{a}{\pi(G_1^2-G_2^2)}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)}\int_0^a u_{n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho \tag{2.8.34}$$

$$\int_0^a (a^2-\rho^2)^{1/2}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{\rho} f_{-n+1}(x)x^{n}dx = \frac{1}{\pi(G_1^2-G_2^2)}\left[\frac{a\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{\Gamma(n-1/2)}\int_0^a u_{-n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho\right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)}\int_0^a u_{-n+1}(\rho)\rho^{n}d\rho\right] \tag{2.8.35}$$

$$\int_0^a \rho^{2n-1}(a^2-\rho^2)^{1/2}\,d\rho\int_0^{\rho}\frac{f_{n+1}(x)}{x^{n}}\,dx = \frac{1}{\pi(G_1^2-G_2^2)}\left[\frac{a^{2n+1}}{2n}\int_0^a\frac{u_{n+1}(\rho)}{\rho^{n+1}}\,d\rho -\right.$$

$$-\frac{a\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{2\Gamma(n+1/2)}\int_0^a u_{n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho\Bigg] \qquad (2.8.36)$$

Подстановка (2.8.33—2.8.36) в (2.8.32) даёт

$$B_n=\frac{1}{\pi a^{2n}(G_1^2-G_2^2)}\Bigg[-2G_2\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1/2)}\int_0^a u_{-n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho+G_1\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)}\int_0^a \bar{u}_{n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho$$

$$-(2n+1)a^{2n}\frac{G_2^2}{G_1}\int_0^a\frac{\bar{u}_{n+1}(\rho)}{\rho^{n+1}}d\rho\Bigg]-C_n\frac{G_2}{G_1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{2\Gamma(n+1/2)}. \qquad (2.8.37)$$

Подстановка (2.8.30), (2.8.31) и (2.8.37) в (2.8.28) даёт довольно простую формулу для C_n, а именно,

$$C_n=-\frac{4G_2\Gamma(n+3/2)}{\pi^{3/2}(G_1^2-G_2^2)\,\Gamma(n)}\int_0^a\frac{\bar{u}_{n+1}(\rho)\,d\rho}{\rho^{n+1}} \qquad (2.8.38)$$

Задача в принципе может считаться решённой, хотя определённое упрощение возможно, благодаря следующему интегралу:

$$\int_0^\rho\frac{\bar{f}_{n+1}(x)}{x^n}dx=-\frac{2}{\pi^2(G_1^2-G_2^2)}\Bigg\{\frac{1}{\rho^{2n}}\int_0^\rho\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$\times\frac{d}{dx}\Bigg[x^{2n+1}\int_x^a\frac{\bar{u}_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n\,(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\Bigg]-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\int_0^a\frac{\bar{u}_{n+1}(\rho)\,d\rho}{\rho^{n+1}}\Bigg\} \qquad (2.8.39)$$

Заметим, что последний член в (2.8.39) сократится с C_n, когда он будет подставлен в (2.8.24). Наконец, формулы (2.8.26), (2.8.29) и (2.8.38) ведут к

$$\tau_{n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)}\left\{\frac{G_1}{\rho^{n+2}}\frac{d}{d\rho}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n+3}\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{u_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left. + G_2\rho^n\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^{2n}}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n-1}dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{\bar{u}_{-n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right]\right\}$$

$$\text{dl}\}\quad \rho \le a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8.40}$$

$$\tau_{-n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)}\left[\frac{G_1}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}\int_0^{\rho}\frac{x^{2n-1}\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{u_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{G_2}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}\int_0^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\left(x^{2n+1}\int_x^a\frac{\bar{u}_{n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right)\right]$$

$$\text{для} \quad \rho \le a, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.8.41}$$

Выражения (2.8.40) и (2.8.41) справедливы внутри трещины только. Чтобы выразить сдвигающее напряжение вне трещины, мы вспоминаем формулы (2.7.23) и (2.7.27) которые связывают одно с другим. Подстановка (2.8.41) в (2.7.27) позволяет нам вычислить

$$A_n = -\frac{4G_2\Gamma(n + 3/2)}{\pi^{3/2}(G_1^2 - G_2^2)\,\Gamma(n)}\int_0^a\bar{u}_{-n+1}(\rho)\,\rho^n d\rho \tag{2.8.42}$$

Наконец, подстановка (2.8.40—2.8.42) в (2.7.23) даёт:

$$\tau_{n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)}\left[\frac{G_1}{\rho^{n+2}}\frac{d}{d\rho}\int_0^{a}\frac{x^{2n+3}\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{u_{n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{G_2}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}\int_0^{a}\frac{x^{2n-1}dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{\bar{u}_{-n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right]$$

$$\text{для} \quad \rho > a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8.43}$$

$$\tau_{-n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)}\left[\frac{G_1}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}\int\limits_0^a \frac{x^{2n-1}\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int\limits_x^a \frac{u_{-n+1}(\rho_0)\,d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{G_2}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}\int\limits_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\left(x^{2n+1}\int\limits_x^a \frac{\overline{u}_{n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\right)\right]$$

$$\text{для} \quad \rho > a, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.8.44}$$

Формулы (2.8.43) и (2.8.44) могут быть использованы для определения коэффициента концентрации напряжений непосредственно через тангенциальные перемещения, заданные *внутри* трещины. Мы припоминаем, что коэффициент концентрации напряжений был дан в (2.7.31). Используя свойства

$$\lim_{\rho \to a}\left[(\rho - a)^{1/2}\frac{d}{d\rho}\int\limits_0^\rho \frac{f(x)\,dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}\right] = -\frac{f(a)}{\sqrt{2a}},$$

$$\lim_{\rho \to a}\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^a \frac{f(x)\,dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2}\lim_{\rho \to a}\frac{f(\rho)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \tag{2.8.45}$$

соответствующие гармоники коэффициента концентрации напряжений могут быть записаны в виде:

$$k_{n+1} = -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}}\lim_{\rho \to a}\left[\frac{G_1 u_{n+1}(\rho) + G_2 \overline{u}_{-n+1}(\rho)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}\right],$$

$$k_{-n+1} = -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}}\lim_{\rho \to a}\left[\frac{G_1 u_{-n+1}(\rho) + G_2 \overline{u}_{n+1}(\rho)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}\right].$$

Их суммирование может быть выполнено элементарно и окончательный результат есть:

$$k(\phi) = -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}}\lim_{\rho \to a}\left[\frac{G_1 u(\rho, \phi) + G_2 e^{2i\phi}\overline{u}(\rho, \phi)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.8.46}$$

Простое выражение (2.8.46) для коэффициента концентрации напряжений будет очень полезно для исследования взаимодействия трещин, так как решение интегральных уравнений в перемещениях намного легче, чем решение интегральных уравнений в напряжениях из–за сингулярности напряжений на границе трещины. Выражение (2.8.46) может быть сделано более симметрично путём введения полярных перемещений $u^{(\rho)}=u_\rho+iu_\phi=e^{-i\phi}u$, и аналогичное сдвигающее напряжение $\tau^{(\rho)}=\tau_{\rho z}+i\tau_{\phi z}=e^{-i\phi}\tau$. Соответствующий коэффициент концентрации напряжений $k^{(\rho)}$ примет вид:

$$k^{(\rho)}=-\frac{a}{\pi(G_1^2-G_2^2)\sqrt{2a}}\lim_{\rho\to a}\left[\frac{G_1u^{(\rho)}(\rho,\phi)+G_2\overline{u}^{(\rho)}(\rho,\phi)}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\right]. \qquad (2.8.47)$$

Заметим, что $k^{(\rho)}$ пропорционален комбинации k_2+ik_3 второго и третьего мода коэффициента концентрации напряжений.

Суммирование (2.8.40—2.8.41) и (2.8.43—2.8.44) ведёт к другой простой формуле

$$\tau=-\frac{1}{2\pi^2(G_1^2-G_2^2)}\left[G_1\Delta\int_S\int\frac{u}{R}dS+G_2\Lambda^2\int_S\int\frac{\overline{u}}{R}dS\right]. \qquad (2.8.48)$$

Мы покажем далее, что последнее выражение действительно не только для круглой трещины, но и для плоской трещины произвольной формы везде на плоскости $z=0$.

Упражнение 2.8

1. Нормальное перемещение сторон трещины w задано выражением $w=w_0(a^2-\rho^2)^{1/2}$, с $w_0=\text{const}$. Найдите распределение нормальных напряжений σ в плоскости $z=0$.

Ответ: $\sigma=w_0/(4H)$, для $\rho\le a$;

$$\sigma=-\frac{w_0}{2\pi H}\left[\frac{a}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}-\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right],\quad \text{для}\quad \rho>a$$

2. Докажите, что главный вектор P, вызванный включением, может быть определён как

$$P = \frac{1}{\pi^2 H}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} \mathrm{d}x \int_x^a \frac{w(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho}{(a^2-\rho^2)(\rho^2-x^2)^{1/2}}.$$

Совет: используйте (2.8.13)

3. Докажите, что сдвигающий момент M может быть определён в виде

$$M = -\frac{i}{\pi^2 H}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi \int_0^a \frac{x^2(3a^2-2x^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \int_x^a \frac{w(\rho,\phi)\mathrm{d}\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}.$$

Совет: интегрируйте (2.8.15) по частям.