ВВЕДЕНИЕ

Мы даём здесь короткий обзор методов решения смешанных граничных задач теории потенциала с указанием присущих им ограничений. Из этого следует необходимость нового метода. Краткое описание содержания каждой главы дано для удобства читателей.

Разные приложения теории потенциала в электростатике, теплопроводности, упругости, диффузии, и других областях науки хорошо известны и привлекли внимание таких учёных, как Лаплас, Пуассон, Грин, Бельтрами, Кирхгоф, лорд Кельвин, Гобсон и других, которые сделали значительный вклад в этой области в течении нескольких столетий.

Граничные задачи со смешанными условиями принадлежат к категории наиболее трудных для решения и в то же время, наиболее важных в технике. Вспомним знаменитую задачу электрически заряженного диска. Почти невозможно упомянуть каждого учёного, кто решил эту задачу тем или другим методом. Все методы можно разделить на две категории. Первая требует построения функции Грина, после чего каждое решение может быть выражено в квадратурах. Вторая категория требует использования различных интегральных преобразований.

Гобсон (1899) построил функцию Грина для круглого диска и сферического сегмента используя метод Зоммерфельда. Он использовал тороидальные координаты τ, σ, ϕ (в наших обозначениях), которые могут быть выражены через декартовы x, y и z следующим образом:

$$x = \frac{a\sinh\tau\cos\phi}{\cosh\tau - \cos\sigma},\quad y = \frac{a\sinh\tau\sin\phi}{\cosh\tau - \cos\sigma},\quad z = \frac{a\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma}.$$

Здесь a радиус диска. Потенциальная функция V во внешней к диску точке (τ_0,σ_0,ϕ_0), которая на диске принимает значения $v(\tau,\phi)$, может быть выражена

$$V(\tau_0,\sigma_0,\phi_0) = \frac{1}{\pi^2}\int\int_S \left\{ \frac{(1+\cosh\tau)\cos(\sigma_0/2)}{2aR[\cosh^2(\alpha/2)-\sin^2(\sigma_0/2)]^{1/2}} \right.$$

$$\left. + \frac{z}{R^3}\tan^{-1}\frac{(1-\cos\sigma_0)^{1/2}}{(\cosh\alpha+\cos\sigma_0)^{1/2}} \right\} v(\tau,\phi)\,dS, \qquad (0.1)$$

где R — расстояние между точками (τ_0,σ_0,ϕ_0) и (τ,σ,ϕ); α определена уравнением $\cosh\alpha = \cosh\tau_0\cosh\tau - \sinh\tau_0\sinh\tau\cos(\phi-\phi_0)$. Практическое значение выражения (0.1) очень ограничено, так как нет возможности вычислить точно интеграл даже в простейшем случае, когда $v(\tau,\phi)$ постоянен. Гобсон использовал очень своеобразный метод, чтобы найти потенциальную функцию для v=const и $v=\mu x$, μ=const.

С другой стороны, мы знаем, что интеграл в (0.1) может быть выражен через элементарные функции для любого полинома (в декартовых координатах). Это была одна из причин, которая заставила автора искать альтернативный подход, который был бы таким же общим, как (0.1), и в то же время, позволил бы простое и элементарное вычисление нужных интегралов.

Рассмотрение математически эквивалентной задачи о круглом штампе прижатом к упругому полупространству приводит к следующему интегральному уравнению (Галин, 1953)

$$\omega(\rho,\phi) = H\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)}{R}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \qquad (0.2)$$

Здесь a радиус штампа, H упругая константа, ω — нормальное перемещение под штампом (известная функция), σ обозначает давление под штампом (неизвестная функция), и R — расстояние между точками (ρ,ϕ) и (ρ_0,ϕ_0). Леонов (1953) получил точное замкнутое решение интегрального уравнения (0.2) используя очень изобретательный метод. Его результат в наших обозначениях может быть записан:

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{4\pi^2 H}\left\{\Delta\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\omega(\rho_0,\phi_0)}{R}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{R}{\eta}-\tan^{-1}\left(\frac{R}{\eta}\right)\right]\frac{\omega(\rho_0,\phi_0)}{R^3}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0\Bigg\}. \tag{0.3}$$

Здесь $\eta=[(a^2-\rho^2)(a^2-\rho_0^2)]^{1/2}/a$ и Δ обозначает двумерный оператор Лапласа. Можно заметить один недостаток в (0.3): трудность прямого вычисления интегралов, даже в простейшем случае, когда ω постоянна. Очевидно, что эти интегралы могут быть вычислены в элементарных функциях для любого полиномиального перемещения. Это указывает на недостаток в наших знаниях, который должен быть восполнен.

Метод интегральных преобразований, приводящий к интегральным уравнениям, был введён Вебером (1873) и Бельтрами (1881), и получил дальнейшее развитие в работах Басбриджа (1938) и других. Значительные достижения в систематическом применении этого метода к различным задачам принадлежат Снеддону. Мы можем упомянуть две книги Снеддона (1951, 1966). Некоторые замечательные результаты были получены Уфляндом (1966, 1977). Несмотря на этот успех, автор всегда был убеждён, что использование интегральных преобразований указывает на нашу неспособность решать задачи прямо. Мы можем представить два примера.

Вот как задача о круглом диске, заряженном постоянным потенциалом v_0 =const, решается при помощи дуальных интегральных уравнений. Нам нужно найти гармоническую функцию V, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую смешанным граничным уславиям в плоскости z=0:

$$V=v_0, \qquad \text{для } \rho\le a; \qquad \frac{\partial V}{\partial z}=0, \qquad \text{для } \rho>a. \tag{0.4}$$

Решение представлено в форме

$$V(\rho,z)=\int_0^\infty A(t)e^{-tz}J_0(t\rho)\frac{dt}{t}. \tag{0.5}$$

Здесь J_0 обозначает Бесселеву функцию нулевого порядка и $A(t)$ обозначает пока неизвестную функцию, которая должна быть выбрана так, чтобы удовлетворить (0.4). Подстановка граничных условий (0.4) в (0.5) приводит к дуальному интегральному уравневию

$$\int_0^\infty A(t)J_0(t\rho)\frac{\mathrm{d}t}{t} = v_0, \qquad \text{для} \quad 0\le\rho\le a;$$

$$\int_0^\infty A(t)J_0(t\rho)\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{для} \quad \rho>a. \tag{0.6}$$

Используя разрывные интегралы Вебера—Шафхейтлина, мы можем заключить, что

$$A(t) = \frac{2}{\pi}v_0\sin(at). \tag{0.7}$$

Решение (0.5) может теперь быть переписано как

$$V(\rho,z) = \frac{2}{\pi}v_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz}\sin(at)\,J_0(t\rho)\frac{\mathrm{d}t}{t}, \ \text{для} \ z\ge0, \tag{0.8}$$

и плотность заряда на диске σ даётся выражением

$$\sigma(\rho) = \frac{v_0}{\pi^2}\int_0^\infty J_0(t\rho)\sin(at)\,\mathrm{d}t. \tag{0.9}$$

Оба интеграла (0.8) и (0.9) могут быть выражены через элементарные функции. Например, последний интеграл даёт

$$\sigma(\rho) = \frac{v_0}{\pi^2(a^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{0.10}$$

Есть несоответствие между простотой окончательного результата и сложностью аппарата использованного для его получения. Общая идея, что элементарный результат должен быть получен элементарным способом, требует искать этот новый и простой метод.

Второй иллюстративный пример взят из рассмотрения простейшего случая круглой трещины радиуса a, под действием осесимметричного давления $p(\rho)$. Соответствующая потенциальная функция f представлена в книге (Kassir and Sih, 1975):

$$f(\rho,z) = \int_0^\infty A(s)\, J_0(\rho s)\exp(-sz)\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{0.11}$$

где

$$A(s) = -\frac{1}{\pi\mu}\int_0^a \sin st\,\mathrm{d}t \int_0^t \frac{rp(r)\,\mathrm{d}r}{(t^2-r^2)^{1/2}}. \tag{0.12}$$

Читатель должен подставить явное выражение для p в (0.12), и вычислить два последовательных интеграла. Результат следует подставить в (0.11), и несобственный интеграл от Бесселевой функции должен быть определён. Представляется естественным сэкономить одно интегрирование путём подстановки (0.12) в (0.11), изменения порядка интегрирования и вычисления получившегося интеграла (Градштейн и Рыжик, 1963, формула 6.752.1):

$$\int_0^\infty \sin(st)\, J_0(\rho s)\exp(-sz)\frac{\mathrm{d}s}{s} = \sin^{-1}\frac{t}{l_2(t)}, \tag{0.13}$$

где обозначение

$$l_2(t) = \frac{1}{2}\{[(\rho+t)^2+z^2]^{1/2} + [(\rho-t)^2+z^2]^{1/2}\} \tag{0.14}$$

было введено. Формулы (0.11) и (0.12) могут быть объединены, с результатом

$$f(\rho,z) = -\frac{1}{\pi\mu}\int_0^a \sin^{-1}\frac{t}{l_2(t)}\,\mathrm{d}t \int_0^t \frac{p(\rho_0)\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}}. \tag{0.15}$$

Заметим, что выражение (0.15) не содержит никаких следов использованного интегрального преобразования, и это подсказывает нам, что прямое и элементарное решение возможно. Например, в случае постояннной нагрузки p=const., и потенциальная функция (0.15) принимает форму:

$$f(\rho,z) = -\frac{p}{\pi\mu}\int_0^a t\sin^{-1}\frac{t}{l_2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{0.16}$$

Интеграл в (0.16), несмотря на то, что выглядит очень трудным, из–за (0.14), может быть выражен через элементарные функции, а именно,

$$f(\rho,z) = -\frac{p}{4\pi\mu}\left[(2a^2+2z^2-\rho^2)\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right)+l_1(\rho^2-l_1^2)^{1/2}-2z(a^2-l_1^2)^{1/2}\right]. \tag{0.17}$$

Здесь сокращения l_1 и l_2 обозначают $l_1(a)$ и $l_2(a)$ соответственно, l_2 определена в (0.14), и

$$l_1(t) = \frac{1}{2}\{[(\rho+t)^2+z^2]^{1/2}-[(\rho-t)^2+z^2]^{1/2}\}. \tag{0.18}$$

Легко показать, что произвольная полиномиальная нагрузка в (0.15) приводит к элементарным выражениям для потенциальной функции, и таким образом, к элементарному полному решению.

Мы можем просуммировать ситуацию следующим образом. Метод функций Грина является наиболее общим; основной недостаток – трудности вывода результатов, которые обычно *строятся* очень нетривиальным способом. Метод интегральных преобразований позволяет прямой вывод результатов, но является наименее общим, так как каждую новую задачу приходится решать с начала до конца. Метод наиболее эффективен для решения осесимметричных задач; в общем случае приходится рассматривать каждую гармонику отдельно. Неосесимметричные задачи о взаимодействиях (несколько *произвольно расположенных* заряженных дисков, взаимодействия между штампами и трещинами, и т.д.) очень трудно решать методом интегральных преобразований. Требуется найти новый метод, который был бы таким же общим, как и метод функций Грина и, в то же время, был бы прямым и элементарным, без использования интегральных преобразований или разложений по специальным функциям.

Когда какая–то задача уже решена одним способом, обычно нетрудно найти другой, более простой способ решения. Новый метод должен делать больше, чем давать более простое решение уже решённых задач, он должен дать нам возможность решать новые задачи. Основное преимущество излагаемого здесь метода заключается в том, что он позволяет решать неосесимметричные задачи так же легко, как и симметричные. Это в свою очередь открывает новые горизонты и позволяет нам решать некоторые задачи, которые не были рассмотрены ранее, а именно, аналитическое решение для неклассических областей, а также решение различных задач взаимодействий.

Общее описание метода дано в первой главе. Она начинается с вывода интегрального представления для величины обратной расстоянию между двумя точками и сопровождается несколькими обобщениями. Точное замкнутое решение даётся для неосесимметричной смешанной задачи с условиями Дирихле внутри круга и условиями Неймана вне круга и наоборот. Некоторые интегралы, имеющие фундаментальное значение для нашего метода, также вычислены через элементарные функции.

Вторая глава посвящена смешанным граничным задачам для упругого полупространства. Общее решение выражено через три гармонические функции. Введена классификация внутренних и внешних смешанных задач первого и второго рода. Проблемы первого рода характеризуются смешанными условиями для нормальных параметров (давление или нормальное перемещение), в то время как касательные напряжения известны на всей границе. Эти задачи решены для неоднородного полупространства, с модулем упругости представленным как степенная функция глубины. Случай, когда смешанные граничные условия даны относительно тангенциальных напряжений и перемещений с нормальным давлением известным на всей границе, называется граничной задачей второго рода. Каждый род граничных задач рассмотрен отдельно. Точные решения даны и различные примеры контактных задач и трещин рассмотрены.

Основная смешанная задача — это такая задача, где смешанные условия предписаны относительно нормальных и касательных параметров. Решение таких задач представляется наиболее трудным, потому что вместо одного интегрального уравнения, мы теперь должны решить систему интегральных уравнений.

Осесимметричные и неосесимметричные основные смешанные задачи рассмотрены в третьей главе. Точное решение дано для каждой гармоники отдельно. Плоский штамп, сцеплённый с трансверсально изотропным полупространством под действием произвольной нагрузки рассмотрен в деталях. Изучено влияние сосредоточенных сил, приложенных к полупространству, на сцеплённый штамп.

В то время, как задачи, решённые во второй главе, дают значения напряжений и перемещений только в плоскости z=0, *полное* решение различых задач теории трещин дано в четвёртой главе. Решение называется *полным*, когда даются выражения для всех напряжений и перемещений в произвольной точке пространства. Случаи круглой трещины под действием произвольной нормальной и касательной нагрузки рассмотрены отдельно. Явные выражения получены для всех функций Грина. Все результаты даны в элементарных функциях. Эти результаты позволяют нам решить более сложные задачи взаимодействия круглой трещины с внешними нагрузками. Система несингулярных интегральных уравнений описывает взаимодействие между копланарными круглыми трещинами под действием нормальных и касательных напряжений.

Приближённое аналитическое решение дано для случая плоской трещины произвольной формы под действием постоянного нормального или касательного напряжения. Решение становится точным в случае эллипса, и есть основания предполагать, что оно будет достаточно точным для широкого диапазона трещин разной формы. Сравнение с численными результатами в опубликованной литературе показывает хорошую точность наших результатов. Точность наших формул ухудшается в случае трещин с острыми углами и отношением длины к ширине $\gg 1$.

В 5 главе дано общее решение, выраженное через одну гармоническую функцию, для задачи о плоском штампе, действующем на трансверсально–изотропное полупространство. Главная потенциальная функция и все функции Грина выражены через элементарные функции для круглого штампа произвольного профиля. Показано также, что полное решение в случае полиномиального профиля общего вида также может быть выражено в элементарных функциях. Знание полного решения в комбинации с теоремой взаимности позволяет нам решить более сложные задачи взаимодействия штампов с внешними нагрузками и взаимодействий между штампами.

Общий метод может быть использован для аналитического решения неклассических контактных задач. Это решение становится точным в случае эллиптического штампа и даёт удовлетворительную точность для штампа произвольной формы. Случаи плоского центрально и нецентрально загруженного штампа рассмотрены в деталях. Во всех случаях наши результаты сравниваются с многими ранее опубликованными в литературе. Так же, как и в случае трещин, результаты весьма удовлетворительны всюду, кроме областей с острыми углами или с отношением длины к ширине $\gg 1$. Аналитическое решение предложено для задачи о шероховатом штампе под действием нормальной и касательной нагрузки, с трением между базой и штампом, подчиняющимся закону Кулона.

Легче всего освоить новый метод через упражнения. Каждая глава содержит определённое количество упражнений, в большинстве случаев дан ответ, совет или полное решение. Читателю следует решить все примеры. Алгебраические преообразования элементарны, но требуют некоторую оригинальность и сообразительность.

ГЛАВА 1

ОПИСАНИЕ НОВОГО МЕТОДА

Некоторые интегральные представления, которые имеют фундаментальное значение для нового метода, представлены здесь. Точное решение в замкнутой форме дано для смешанной граничной задачи с круговой линией раздела граничных условий.

1.1 Интегральное представление величины обратной расстоянию между двумя точками

Автор решил начать вывод нового интегрального представления величины обратной расстоянию между двумя точками расположенными в плоскости z=0, так как эта величина очень важна в теории потенциала. Здесь мы повторяем вывод этого представления так, как это было сделано в (Фабрикант, 1971e). Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{1}{(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0))^{(1+u)/2}}, \tag{1.1.1}$$

где u константа и $-1<u<1$. Стандартное разложение (1.1.1) в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\psi}d\psi}{(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\psi)^{(1+u)/2}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{2\pi\rho_0^{1+u}} \frac{2\pi\Gamma[n+(1+u)/2]}{\Gamma[(1+u)/2]\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n F\left(\frac{1+u}{2}, n+\frac{1+u}{2}, n+1; \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right). \tag{1.1.2}$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Используя другое интегральное представление

$$F\left(\frac{1+u}{2}, n+\frac{1+u}{2}, n+1; z\right)$$

$$= \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma[n+(1+u)/2]\,\Gamma[1-(1+u)/2]} \int_0^1 \frac{t^{2n+u}(1-t^2)^{-(1+u)/2}}{(1-zt^2)^{(1+u)/2}}\,dt,$$

выражение (1.1.2) может быть преобразовано в

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{(\rho\rho_0)^n} \int_0^{min(\rho_0,\rho)} \frac{x^{2n+u}dx}{\left[(\rho^2-x^2)(\rho_0^2-x^2)\right]^{(1+u)/2}}. \tag{1.1.3}$$

Суммирование (1.1.3) окончательно даёт

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{1}{(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0))^{(1+u)/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2} \int_0^{min(\rho_0,\rho)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right) x^u dx}{\left[(\rho^2-x^2)(\rho_0^2-x^2)\right]^{(1+u)/2}}. \tag{1.1.4}$$

Здесь обозначено

$$\lambda(k,\psi) = \frac{1-k^2}{1+k^2-2k\cos\psi}. \tag{1.1.5}$$

После того, как сложный вывод закончен, мы всегда можем найти более простой способ получить тот же результат. Действительно, мы можем ввести новую переменную

$$\eta(x) = [(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{1/2}/x, \tag{1.1.6}$$

после чего выражение (1.1.4) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty \frac{\eta^{-u}d\eta}{R^2+\eta^2}. \tag{1.1.7}$$

Интеграл в (1.1.7) может быть найден, используя формулу (3.241.4) из (Градштейн и Рыжик, 1963), таким образом подтверждая равенство. Отмечаем, что параметр η будет использован во всей книге также для случая, когда $x > \max(\rho,\rho_0)$, и выражение (1.1.6) в этом случае интерпретируется как

$$\eta(x) = (x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}/x.$$

Из (1.1.7) следует, что когда $u=0$, интеграл (1.1.4) может быть вычислен, как неопределённый и мы имеем очень важное представление

$$\int \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)\, dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{1}{R}\tan^{-1}\left[\frac{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}{xR}\right]. \tag{1.1.8}$$

Все вышеприведённые результаты относятся к расстоянию между двумя точками на плоскости $z=0$. Нам нужно обобщить их, чтобы представлять

$$\frac{1}{R_0^{1+u}} = \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + z^2]^{(1+u)/2}}. \tag{1.1.9}$$

Можно заметить, что представление (1.1.4) остаётся справедливым если мы формально заменим ρ и ρ_0 произвольными параметрами l_1 и l_2. Мы должны определить их так, чтобы

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + z^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(\phi-\phi_0). \tag{1.1.10}$$

Это условие приводит к двум уравнениям

$$l_1^2 + l_2^2 = \rho^2 + \rho_0^2 + z^2, \quad l_1l_2 = \rho\rho_0. \tag{1.1.11}$$

Решение принимает вид

$$l_1(\rho_0,\rho,z) = \frac{1}{2}\{[(\rho+\rho_0)^2+z^2]^{1/2} - [(\rho-\rho_0)^2+z^2]^{1/2}\}, \tag{1.1.12}$$

$$l_2(\rho_0,\rho,z) = \frac{1}{2}\{[(\rho+\rho_0)^2+z^2]^{1/2} + [(\rho-\rho_0)^2+z^2]^{1/2}\}. \tag{1.1.13}$$

Здесь и в будущем, следующие сокращённые обозначения будут использованы:

$$l_1(x) \equiv l_1(x,\rho,z), \;\; l_2(x) \equiv l_2(x,\rho,z), \tag{1.1.14}$$

$$l_1 \equiv l_1(a,\rho,z), \quad l_2 \equiv l_2(a,\rho,z). \tag{1.1.15}$$

Заметим следующие предельные значения

$$\lim_{z\to 0} l_1(x) = \min(x,\rho), \quad \lim_{z\to 0} l_2(x) = \max(x,\rho). \tag{1.1.16}$$

Принимая во внимание вышеуказанные свойства, представление (1.1.4) может быть обобщено:

$$\frac{1}{R_0^{1+u}} = \frac{1}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{(1+u)/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2}\int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)\, x^u \mathrm{d}x}{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{(1+u)/2}}. \tag{1.1.17}$$

Формула (1.1.17) упрощается, когда u=0

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)\, \mathrm{d}x}{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{1/2}}. \tag{1.1.18}$$

Опять мы можем заметить, что интеграл в (1.1.18) может быть вычислен как неопределённый

$$\int \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)\, dx}{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{1/2}} = -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\frac{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{1/2}}{xR_0}. \tag{1.1.19}$$

Последнее представление очень важно и будет широко использоваться в книге.

Много других полезных формул может быть получено из вышеприведённых при помощи простой замены переменных, а именно,

$$\int \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0)\, dx}{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{1/2}} = \frac{1}{R_0}\tan^{-1}\frac{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{1/2}}{xR_0}, \tag{1.1.20}$$

$$\frac{1}{R_0^{1+u}} = \frac{1}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{(1+u)/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2}\int_{l_2(\rho_0)}^{\infty} \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0)\, x^u dx}{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{(1+u)/2}}, \tag{1.1.21}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{l_2(\rho_0)}^{\infty} \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0)\, dx}{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{1/2}}, \tag{1.1.22}$$

$$\int \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0)\, dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} = \frac{1}{R}\tan^{-1}\left[\frac{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}{xR}\right]. \tag{1.1.23}$$

Полученные предсталения будут полезны для решения внешних смешанных граничных задач.

Можно получить несколько модификаций формулы (1.1.19). Например, мы можем написать

$$\int \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)\, dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}} = -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\frac{(\rho^2-x^2)^{1/2}[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}{xR_0}. \tag{1.1.24}$$

Здесь

$$g(x) = x[1+z^2/(\rho^2-x^2)]^{1/2}. \tag{1.1.25}$$

Важно отметить, что функция $g(x)$ обратна l_1 для $x^2<\rho^2$, и обратна l_2 для $x^2>\rho^2+z^2$. Введение новой переменной $x = l_1(y)$, $y = g(x)$ преобразует (1.1.24) в

$$\int \frac{[l_2^2(y)-y^2]^{1/2}}{(\rho_0^2-y^2)^{1/2}[l_2^2(y)-l_1^2(y)]}\lambda\left(\frac{l_1^2(y)}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right)dy$$

$$= -\frac{1}{R_0}\tan^{-1}\frac{(\rho_0^2-y^2)^{1/2}[l_2^2(y)-y^2]^{1/2}}{yR_0} \tag{1.1.26}$$

Когда $z = 0$, формула (1.1.18) принимает вид

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{min(\rho_0,\rho)} \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0)\, dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}. \tag{1.1.27}$$

Тот же самый результат принимает другую форму из–за (1.1.22)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi}\int_{max(\rho_0,\rho)}^{\infty} \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0)\, dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}. \tag{1.1.28}$$

Интегральные представления в этом разделе могут быть обобщёны для сферы (Fabrikant, 1987d), и другая модификация в тороидальных координатах также возможна. Ограничения на объём кмиги не позволяют нам описывать детали.

Упражнение 1.1

1. Доказать справедливость формулы (η определена в 1.1.6)

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{\rho^2\rho_0^2 - x^4}{x^3\eta}.$$

2. Доказать справедливость формулы (R определён в первой строке 1.1.27)

$$\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right) = -\frac{x\eta}{R^2+\eta^2}\frac{d\eta}{dx}.$$

Совет: используйте формулу: $x^2 + \rho^2\rho_0^2/x^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) = R^2 + \eta^2$, и результат выше.

3. Доказать справедливость формулы

$$\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0\right) = \frac{x\eta}{R^2+\eta^2}\frac{d\eta}{dx}.$$

4. Доказать справедливость формул

$$(l_2^2-\rho^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2} = zl_2, \quad (a^2-l_1^2)^{1/2}(\rho^2-l_1^2)^{1/2} = zl_1,$$

$$(a^2-l_1^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2} = za, \quad (l_2^2-\rho^2)^{1/2}(\rho^2-l_1^2)^{1/2} = z\rho.$$

Напоминание: l_1 и l_2 обозначают $l_1(a,\rho,z)$ и $l_2(a,\rho,z)$ соответственно.
Совет: используйте (1.1.11)

5. Докажите, что $g(x)$ обратна обоим l_1 и l_2, а именно, докажите, что $g(l_1) = a$, и $g(l_2) = a$.

6. Доказать справедливость формул

$$\frac{\partial l_1}{\partial z} = -\frac{zl_1}{l_2^2-l_1^2}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial z} = \frac{zl_2}{l_2^2-l_1^2},$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \rho} = \frac{al_2-\rho l_1}{l_2^2-l_1^2} = \frac{\rho(a^2-l_1^2)}{l_1(l_2^2-l_1^2)}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \rho} = \frac{\rho l_2-al_1}{l_2^2-l_1^2} = \frac{\rho(l_2^2-a^2)}{l_2(l_2^2-l_1^2)}.$$

Совет: используйте результаты предыдущих упражнений.

7. Вычислите интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0}, \phi-\psi\right).$$

Ответ: $-\dfrac{1}{R_0}\tan^{-1}\dfrac{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{xR_0}.$

Совет: используйте (1.1.26)

8. Вычислите интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{(x^2-l_1^2(x))^{1/2}}{[l_2^2(x)-l_1^2(x)]} \lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right).$$

Ответ: $\dfrac{1}{R_0}\tan^{-1}\dfrac{(x^2-l_1^2(x))^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}{xR_0}.$

Совет: используйте (1.1.20)

9. Докажите справедливость интегрального представления

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{min(\rho_0,\rho)} \frac{\cos[\kappa(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}/x+(\pi\nu/2)]}{[(\rho^2-x^2)(\rho_0^2-x^2)]^{(1+\nu)/2}} \lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right) x^{\nu}\mathrm{d}x = \frac{e^{-\kappa R}}{R^{1+\nu}}.$$

Совет: пробуйте использовать это интегральное представление для решения уравнения Клейна—Гордона.

1.2 Свойства $\mathcal{L}$—операторов

Введём интегральный $\mathcal{L}$—оператор следующим образом:

$$\mathcal{L}(k)f(\phi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} k^{|n|}e^{in\phi}\int_0^{2\pi} e^{-in\phi_0} f(\phi_0)\mathrm{d}\phi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k^{|n|} f_n e^{in\phi}. \tag{1.2.1}$$

Здесь f_n обозначает n—ный коэффициент Фурье функции f. В случае, когда $k<1$, формула (1.2.1) может быть переписана как

$$\mathcal{L}(k)f(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(k, \phi-\phi_0)\, f(\phi_0)\, d\phi_0, \tag{1.2.2}$$

где $\lambda(\cdot,\cdot)$ определена в (1.1.5). $\mathcal{L}$–оператор может также быть назван оператором Пуассона, так как он был введён Пуассоном для решения двумерных задач Дирихле для круга.

Следующие свойства $\mathcal{L}$–операторов справедливы

$$\mathcal{L}(k_1)\mathcal{L}(k_2) = \mathcal{L}(k_1 k_2), \quad \lim_{k\to 1}\mathcal{L}(k)f = f. \tag{1.2.3}$$

Доказательство этих свойств элементарно, и оставлено читателю. Эти свойства будут широко использоваться в различных преобразованиях повсюду в книге и имеют большое значение для понимания нового метода.

Упражнение 1.2

1. Докажите справедливость формулы $\mathcal{L}(k)\lambda(m,\phi) = \lambda(km,\phi)$, для $k < 1$ и $m < 1$.
Совет: используйте (1.2.3)

2. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)][r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\phi-\psi)]}, \quad \text{для } \rho>\rho_0 \text{ и } r>r_0.$$

$$\textit{Ответ}: \frac{2\pi(\rho^2 r^2 - \rho_0^2 r_0^2)}{(\rho^2-\rho_0^2)(r^2-r_0^2)[\rho^2 r^2 + \rho_0^2 r_0^2 - 2\rho\rho_0 r r_0\cos(\phi_0-\psi)]}.$$

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{[1 + k^2 - 2k\cos(\phi-\phi_0)]^2[1 + k_1^2 - 2k_1\cos(\phi-\psi)]}, \quad \text{для } k<1 \text{ и } k_1<1.$$

$$\textit{Ответ}: \frac{2\pi}{1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)}\left\{\frac{2k^2}{(1-k^2)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)}\left[\frac{k_1^2}{1-k_1^2}+\frac{1-k^4k_1^2}{(1-k^2)^2}\right]\right\}.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\phi}\,d\phi}{[1+k^2-2k\cos(\phi-\phi_0)]^2[1+k_1^2-2k_1\cos(\phi-\psi)]}, \qquad \text{для } k<1 \text{ и } k_1<1.$$

$$\textit{Ответ}: \frac{2\pi}{[1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)]^2}\left\{\frac{k_1^3e^{i\Psi}}{1-k_1^2}\right.$$

$$\left.+\frac{ke^{i\phi_0}[2(1+k^4k_1^2)-kk_1(1+k^2)e^{-i(\psi-\phi_0)}]+k_1e^{i\Psi}(1-3k^2)}{(1-k^2)^3}\right\}.$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\phi}\,d\phi}{[1+k^2-2k\cos(\phi-\phi_0)]^2[1+k_1^2-2k_1\cos(\phi-\psi)]}, \qquad \text{для } k<1 \text{ и } k_1<1.$$

$$\textit{Ответ}: \frac{2\pi}{[1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)]^2}\left\{\frac{k_1^2e^{2i\Psi}}{1-k_1^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2kk_1e^{-i(\psi-\phi_0)}[e^{2i\Psi}(k^4-3k^2+1)-k^2e^{2i\phi_0}]-k^2e^{2i\phi_0}(k^2+k_1^2-3-3k^2k_1^2)}{(1-k^2)^3}\right\}.$$

1.3 Дальнейшие интегральные преставления

Здесь выведено интегральное представление для z/R_0^3, где R_0=[ρ^2 + ρ_0^2 – $2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{1/2}$. Рассмотрим интеграл:

$$I_1=\frac{1}{\rho_0}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_0^{\rho_0}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\,\frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\,\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)},\,\phi-\phi_0\right). \tag{1.3.1}$$

Интеграл (1.3.1) выглядит громоздким, и первое впечатление, что он может в лучшем случае быть выражен в эллиптических интегралах. В действительности, интеграл является квази—эллиптическим и может быть выражен через элементарные функции. Используя правило дифференцирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_0^{\rho_0}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]+\rho_0\int_0^{\rho_0}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{x}\right], \tag{1.3.2}$$

интеграл (1.3.1) может быть переписан в виде

$$I_1=\int_0^{\rho_0}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\,\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0},\,\phi-\phi_0\right)\right]. \tag{1.3.3}$$

Введём новую переменную:

$$j=\frac{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}\,[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{x},$$

$$j'=\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}=-\frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}\,[\rho_0^2 l_2^2(x)-x^2 l_1^2(x)]}{x^2[l_2^2(x)-l_1^2(x)]\,(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}. \tag{1.3.4}$$

Преобразуем выражение для λ:

$$\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0},\,\phi-\phi_0\right)=\lambda\left(\frac{l_1^2(x)}{\rho\rho_0},\,\phi-\phi_0\right)=-\frac{l_1^2(x)-\rho^2\rho_0^2/l_1^2(x)}{l_1^2(x)+\rho^2\rho_0^2/l_1^2(x)-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}$$

$$= \frac{-l_1^2(x) + \rho^2\rho_0^2/l_1^2(x)}{l_1^2(x) + \rho^2\rho_0^2/l_1^2(x) - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + \rho^2+\rho_0^2+z^2 - l_1^2(x)-l_2^2(x) + x^2-\rho_0^2}$$

$$= -\frac{x^2 l_1^2(x) - \rho_0^2 l_2^2(x)}{x^2(R_0^2+j^2)} = -\frac{[l_2^2(x) - l_1^2(x)]\,(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}} \frac{j'}{R_0^2+j^2} \tag{1.3.5}$$

Подстановка (1.3.4) и (1.3.5) в (1.3.3) позволяет нам продолжать преобразования:

$$I_1 = -\int_0^{\rho_0} \frac{\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}} \frac{j'}{R_0^2+j^2}\right]$$

$$= -\int_0^{\rho_0} \frac{\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{xz(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}{l_2^2(x) - x^2} \frac{j'}{R_0^2+j^2}\right]$$

$$= -z\int_0^{\rho_0} \frac{\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(\rho_0^2-x^2)^{3/2}j'}{xj^2(R_0^2+j^2)}\right]$$

$$= -z\left\{\left.\frac{(\rho_0^2-x^2)j'}{xj^2(R_0^2+j^2)}\right|_0^{\rho_0} - \int_0^{\rho_0} \frac{\mathrm{d}j(x)}{j^2(R_0^2+j^2)}\right\}$$

$$= -z\left.\left\{\frac{(\rho_0^2-x^2)j'}{xj^2(R_0^2+j^2)} + \frac{1}{R_0^2 j} + \frac{1}{R_0^3}\tan^{-1}\frac{j}{R_0}\right\}\right|_0^{\rho_0} = \frac{\pi}{2}\frac{z}{R_0^3} \tag{1.3.6}$$

Наконец, (1.3.6) позволяет написать нужное представление:

$$\frac{z}{R_0^3} = \frac{2}{\pi\rho_0}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_0^{\rho_0} \frac{x\mathrm{d}x}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)}\,\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)}, \phi-\phi_0\right). \tag{1.3.7}$$

Теперь мы рассмотрим второй интеграл:

$$I_2 = -\frac{1}{\rho_0}\mathcal{L}(\rho_0)\frac{d}{d\rho_0}\int_{\rho_0}^{a}\frac{x dx}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(x)},\phi-\phi_0\right). \tag{1.3.8}$$

Мы используем следующее правило дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{F(\rho)\,d\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{F(a)x}{a(a^2-x^2)^{1/2}} + x\int_x^a\frac{d\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{F(\rho)}{\rho}\right]$$

$$= -\frac{F(a)a}{x(a^2-x^2)^{1/2}} + \frac{1}{x}\int_x^a\frac{\rho d\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{d}{d\rho}F(\rho). \tag{1.3.9}$$

Выражение (1.3.8) примет вид:

$$I_2 = \frac{(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2-l_1^2)}\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2},\phi-\phi_0\right)$$

$$-\int_{\rho_0}^{a}\frac{dx}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\left[\frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(x)},\phi-\phi_0\right)\right]. \tag{1.3.10}$$

Введём новую переменную

$$h = \frac{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{x},$$

$$h' = \frac{dh}{dx} = \frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}[x^2l_2^2(x)-\rho_0^2l_1^2(x)]}{x^2(x^2-\rho_0^2)^{1/2}[l_2^2(x)-l_1^2(x)]}. \tag{1.3.11}$$

Выражение для λ может быть представлено в виде, аналогичном (1.3.5), а именно,

$$\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right) = \frac{[l_2^2(x) - l_1^2(x)](x^2-\rho_0^2)^{1/2}}{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}} \frac{h'}{R_0^2+h^2}. \tag{1.3.12}$$

Подстановка (1.3.11) и (1.3.12) в (1.3.10) даёт

$$I_2 = \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2 - l_1^2)} \lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2}, \phi-\phi_0\right)$$

$$-\int_{\rho_0}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{xz(x^2-\rho_0^2)^{1/2}h'}{[x^2 - l_1^2(x)](R_0^2+h^2)}\right]$$

$$= \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2 - l_1^2)} \lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2}, \phi-\phi_0\right)$$

$$-z\int_{\rho_0}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(x^2-\rho_0^2)^{3/2}h'}{xh^2(R_0^2+h^2)}\right]. \tag{1.3.13}$$

После интегрирования по частям в (1.3.13) мы получаем

$$-\frac{1}{\rho_0}\mathcal{L}(\rho_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_{\rho_0}^{a} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right) =$$

$$= \frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right]. \tag{1.3.14}$$

Здесь h обозначает $h(a)$, в соответствии с определением в первом выражении (1.3.11). В предельном случае, когда $a \to \infty$, выражение (1.3.14) даёт ещё одно представление для z/R_0^3, а именно,

$$\frac{z}{R_0^3} = -\frac{2}{\pi\rho_0}\mathcal{L}(\rho_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right).$$

(1.3.15)

Последнее выражение полезно для решения внешний задач, в то время, как его эквивалент (1.3.6) нужен для решения внутренний задач. После вычисления интеграла в (1.3.1) как неопределённого, мы можем рассмотреть его обобщение

$$I_3 = \frac{1}{\rho_0}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{d}{d\rho_0}\int_a^{\rho_0}\frac{x\,dx}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)},\phi-\phi_0\right). \tag{1.3.16}$$

Мы используем следующее правило дифференцирования

$$\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{F(\rho)\,d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} = \frac{F(a)x}{a(x^2-a^2)^{1/2}} + x\int_a^x\frac{d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{F(\rho)}{\rho}\right]$$

$$= \frac{F(a)a}{x(x^2-a^2)^{1/2}} + \frac{1}{x}\int_a^x\frac{\rho d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{d}{d\rho}F(\rho). \tag{1.3.17}$$

Выражение (1.3.16) примет вид:

$$I_3 = \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{(\rho_0^2-a^2)^{1/2}[l_2^2-l_1^2]}\lambda\left(\frac{l_1^2}{\rho\rho_0},\phi-\phi_0\right)$$

$$+\int_a^{\rho_0}\frac{dx}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\left[\frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0},\phi-\phi_0\right)\right]. \tag{1.3.18}$$

Путём введения обозначения

$$F(y) = \frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{j(y)} + \tan^{-1}\left(\frac{j(y)}{R_0}\right)\right], \tag{1.3.19}$$

где $j(y)$ определён в (1.3.4), выражение (1.3.18) может быть переписано как

$$I_3 = \frac{\rho_0^2 - a^2}{a}\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a} + \int_a^{\rho_0} \frac{\mathrm{d}y}{(\rho_0^2 - y^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{(\rho_0^2 - y^2)^{3/2}}{y}\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y}\right]. \tag{1.3.20}$$

Интегрирование (1.3.20) может быть выполнено по частям, с очень простым результатом $F(a)$, что означает вывод ещё одного интегрального представления

$$\frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{j} + \tan^{-1}\left(\frac{j}{R_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho_0}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_a^{\rho_0} \frac{x\mathrm{d}x}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}\frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)}\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)}, \phi - \phi_0\right). \tag{1.3.21}$$

Упражнение 1.3

1. Докажите, что h в (1.3.14) может быть определён любым из следующих выражений

$$h \equiv h(a) = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} = \frac{z(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{[l_2^2 - l_1^2(\rho_0)]^{1/2}[l_2^2 - l_2^2(\rho_0)]^{1/2}}{l_2} = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2}.$$

2. Докажите, что j в (1.3.4) может быть определён одним из следующих способов:

$$j \equiv j(a) = \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{a} = \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}(\rho^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_1}$$

$$= \frac{z(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} = \frac{[l_1^2(\rho_0) - l_1^2]^{1/2}[l_2^2(\rho_0) - l_1^2]^{1/2}}{l_1}.$$

3. Докажите справедливость (1.3.15).

1.4 Внутренняя смешанная граничная задача для полупространства

Материал в этом разделе следует статье (Fabrikant, 1986h). Введём цилиндрические координаты (ρ,ϕ,z). Рассмотрим задачу нахождения потенциальной функции V, гармоническую в полупространстве $z\geq 0$, исчезающую на бесконечности, и удовлетворяющую граничным условиям на плоскости $z=0$

$$V=v(\rho,\phi),\qquad \text{для}\ \ \rho\leq a,\ 0\leq\phi<2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=0,\qquad \text{для}\qquad \rho>a,\ \ 0\leq\phi<2\pi. \tag{1.4.1}$$

Задача (1.4.1) может быть истолкована, как электростатическая задача о заряженном диске, с потенциалом предписанным на его поверхности или она может быть интерпретирована как упругая контактная задача о круглом штампе прижатом к упругому полупространству; другие интерпретации тоже возможны. Мы называем задачу внутренней, потому что ненулевые граничные условия заданы внутри диска. Потенциальная функция V может быть представлена через потенциал простого слоя следующим образом:

$$V(\rho,\phi,z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)}{R_0}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0+\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\sigma(\rho_0,\phi_0)}{R_0}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{1.4.2}$$

Здесь

$$R_0=[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+z^2]^{1/2},\ \ \text{и}\ \ \sigma=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Подстановка (1.1.18) и (1.1.22) в (1.4.2) даёт, после изменения порядка интегрирования

$$V(\rho,\phi,z)=4\int_0^{l_1}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_{g(x)}^{a}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$+4\int_{l_2}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^{g(x)}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.4.3}$$

Здесь $\mathcal{L}$–оператор определён в (1.2.1), g дан в (1.1.25), сокращения l_1 и l_2 понимаются, как $l_1(a,\rho,z)$ и $l_2(a,\rho,z)$ соответственно; и следующее правило было использовано для изменения порядка интегрирования:

$$\int_0^a d\rho_0 \int_0^{l_1(\rho_0)} dx = \int_0^{l_1} dx \int_{g(x)}^a d\rho_0, \quad \int_a^\infty d\rho_0 \int_{l_2(\rho_0)}^\infty dx = \int_{l_2}^\infty dx \int_a^{g(x)} d\rho_0. \tag{1.4.4}$$

Это правило проиллюстриривано на рисунке 1.4.1, где области интегрирования заштрихованы.

Рис. 1.4.1 Области интегрирования.

Подстановка граничных условий (1.4.1) в (1.4.3) ведёт к основному интегральному уравнению

$$4\int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi) = \nu(\rho,\phi). \tag{1.4.5}$$

Выражение (1.4.5) теперь представлено, как последовательнпсть двух операторов Абеля и один $\mathcal{L}$–оператор. Мы вспомним, что общее интегральное уравнение Абеля

$$\int_x^a \frac{F(y)\,\mathrm{d}y}{(y^2 - x^2)^{(1+u)/2}} = f(x) \tag{1.4.6}$$

имеет решение

$$F(r) = -\frac{2\cos(\pi u/2)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^a \frac{f(x)\,x\mathrm{d}x}{(x^2 - r^2)^{(1-u)/2}}. \tag{1.4.7}$$

Так как параметры в Абелевых операторах (1.4.5) смешаны с параметрами $\mathcal{L}$–оператора, мы должны использовать их комбинации, чтобы обратить (1.4.5). Первый оператор, приложенный к обеим сторонам (1.4.5), имеет вид

$$\mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right). \tag{1.4.8}$$

Здесь мы ввели фиктивный параметр ζ, чтобы сделать параметр $\mathcal{L}$–оператора безразмерным, и также чтобы обеспечить требование, чтобы этот параметр был меньше, чем 1 почти всюду на интервале интегрирования, так как это условие обязательно для использования свойств (1.2.3). Мы называем параметр ζ фиктивным , потому что он был введён только по формальным причинам; он исчезнет в окончательном результате и никак не влияет на преобразования.

Конечно, введение фиктивного параметра не даёт строгого обоснования для использования свойств (1.2.3). Такое обоснование выходит за рамки целей данной книги: автор удовлетворён тем фактом, что окончательный результат везде правилен. Чтобы строго обосновать промежуточные преобразования, нужно доказать теорему следующего содержания: свойства (1.2.3) могут быть использованы в математических преобразованиях в выражениях типа $\mathcal{L}(k_1)\mathcal{M}_1\mathcal{L}(k_2)\mathcal{M}_2\mathcal{L}(k_3)...$, где $\mathcal{M}$ обозначает линейные операторы, если произведение $k_1k_2k_3...$ меньше, чем 1, в то же время позволяя некоторым k быть больше, чем 1. Мы надеемся, что некоторые читатели пожелают и смогут доказать теорему.

Результат приложения (1.4.8) к обеим сторонам (1.4.5) есть

$$2\pi\int_t^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-t^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{t}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=\mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)v(\rho,\phi). \tag{1.4.9}$$

Второй оператор, нужный для преобразования (1.4.9), есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{y}{\zeta}\right)\frac{d}{dy}\int_y^a \frac{t dt}{(t^2-y^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right)$$

с результатом

$$\sigma(y,\phi)=-\frac{1}{\pi^2 y}\mathcal{L}\left(\frac{y}{\zeta}\right)\frac{d}{dy}\int_y^a \frac{t dt}{(t^2-y^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\zeta^2}{t^2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)v(\rho,\phi). \tag{1.4.10}$$

Правила дифференцирования под знаком интеграла и свойства $\mathcal{L}$—операторов позволяют нам переписать (1.4.10) в виде

$$\sigma(y,\phi)=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\Phi(a,y,\phi)}{(a^2-y^2)^{1/2}}-\int_y^a \frac{dt}{(t^2-y^2)^{1/2}}\frac{d}{dt}\Phi(t,y,\phi)\right]. \tag{1.4.11}$$

Здесь

$$\Phi(t,y,\phi)=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right)v(\rho,\phi)\right]. \tag{1.4.12}$$

Заметим, что фиктивный параметр ζ исчез из окончательного решения, и параметр $\mathcal{L}$—оператора меньше, чем единица, как и должнен быть. В будущем, мы не будем больше использовать фиктивный параметр, предполагая, что использование свойств (1.2.3) оправдано. Используя интегрирование по частям и факт, что $\lambda(k,\psi)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа в полярных координатах, мы может вывести следующее равенство

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,y,\phi)=\int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right)\Delta v(\rho,\phi), \tag{1.4.13}$$

где Δ обозначает двумерный оператор Лапласа в полярных координатах. Подстановка (1.4.13) в (1.4.12) ведёт к другой форме решения, а именно,

$$\sigma(y,\phi)=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\Phi(a,y,\phi)}{(a^2-y^2)^{1/2}}-\int_y^a\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-y^2)^{1/2}}\int_0^t\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right)\Delta v(\rho,\phi)\right],$$

(1.4.14)

Изменение порядка интегрирования в (1.4.14) и интегрирование по t (смотри (1.1.23)) даёт

$$\sigma(y,\phi)=\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\Phi(a,y,\phi)}{(a^2-y^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\tan^{-1}\left[\frac{(a^2-\rho^2)^{1/2}(a^2-y^2)^{1/2}}{a[\rho^2+y^2-2\rho y\cos(\phi-\psi)]^{1/2}}\right]\frac{\Delta v(\rho,\psi)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\psi}{[\rho^2+y^2-2\rho y\cos(\phi-\psi)]^{1/2}}\right\}.$$

(1.4.15)

Полученное здесь решение состоит из двух частей: первая часть сингулярна на границе, в то время, как вторая исчезает на границе. В различных приложениях требуется, чтобы решение было несингулярно на границе. Необходимое и достаточное условие этого есть $\Phi(a,a,\phi)=0$. В упругих контактных задачах это условие определяет радиус области контакта. Отметим также, что в случае, когда v является двумерной гармонической функцией, нетривиальное решение сингулярно.

Представляет интерес выразить потенциал V в полупространстве непосредственно через его значение v предписанное внутри диска $\rho=a$. Подстановка (1.4.10) в (1.4.3) даёт после интегрирования

$$V(\rho,\phi,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{l_1}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho g^2(x)}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g(x)}\int_0^{g(x)}\frac{r\mathrm{d}r}{[g^2(x)-r^2]^{1/2}}\mathcal{L}(r)v(r,\phi).$$

(1.4.16)

Здесь следующее свойство Абелевых операторов было использовано:

$$\int_y^a\frac{\mathrm{d}r}{(r^2-y^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^a\frac{tf(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)^{1/2}}=-\frac{\pi}{2}f(y). \qquad (1.4.17)$$

Введение новой переменной $t=g(x)$, $x=l_1(t)$, превращает (1.4.16) в

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\mathrm{d}l_1(t)}{[\rho^2 - l_1^2(t)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{l_1^2(t)}{\rho t^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}(\rho_0)v(\rho_0,\phi). \tag{1.4.18}$$

Изменяя порядок интегрирования в (1.4.18) согласно правилу

$$\int_0^a F(r)\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^r \frac{\rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} = -\int_0^a f(\rho)\mathrm{d}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{F(r)r\mathrm{d}r}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}, \tag{1.4.19}$$

мы получаем следующее выражение

$$V(\rho,\phi,z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \left\{\mathcal{L}(\rho_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho_0}\int_{\rho_0}^a \frac{t\mathrm{d}l_1(t)}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}[\rho^2-l_1^2(t)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{l_2^2(t)}\right)\right\}v(\rho_0,\phi)\mathrm{d}\rho_0. \tag{1.4.20}$$

Интеграл в фигурных скобках может быть вычислен согласно (1.3.14), с результатом

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\right]\frac{z}{R_0^3}v(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\phi_0. \tag{1.4.21}$$

Здесь

$$R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + z^2]^{1/2}, \quad h = (a^2 - l_1^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}/a. \tag{1.4.22}$$

Формулы (1.4.18) и (1.4.21) определяют потенциальную функцию V в полупространстве $z\geq 0$, выраженную непосредственно через его значения v предписанном на диске $\rho \leq a$, $z = 0$. Выражение (1.4.18) полезно, когда явное вычисление интегралов возможно, в то время, как выражение (1.4.21) более удобно для численного интегрирования.

Заметим, что в предельном случае, когда z=0, уравнение (1.4.21) переходит в хорошо известный результат, а именно,

$V(\rho,\phi,0) = v(\rho,\phi)$, для $\rho\leq a$; и

$$V(\rho,\phi,0)=\frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{v(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]},\qquad \text{для}\qquad \rho>a.$$

Решение смешанной граничной задачи первого типа закончено. Основные результаты даются формулами (1.4.10) и (1.4.18).

Рассмотрим теперь другую внутреннюю задачу, со следующими смешанными условиями на границе $z=0$:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-2\pi\sigma(\rho,\phi),\quad \text{для}\quad \rho\le a,\ \text{и}\quad 0\le\phi<2\pi;$$

$$V=0,\qquad \text{для}\quad \rho>a,\ \text{и}\quad 0\le\phi<2\pi. \tag{1.4.23}$$

Задача (1.4.23) мижет быть интерпретирована как электростатическая задача о заряженном диске $\rho\le a$ внутри бесконечной заземлённой диафрагмы $\rho>a$. Математически аналогичная задача возникает при рассмотрении круглой трещины под действием произвольного нормального давления σ.

Подстановка (1.4.23) в (1.4.3) ведёт к интегральному уравнению для $\rho>a$,

$$\int_0^a\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$+\int_\rho^\infty\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x\frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=0. \tag{1.4.24}$$

Отметим, что σ в первом члене (1.4.24) известна из (1.4.23), в то время, как σ во втором члене пока неизвестна. Используя интегральное представление (1.1.27) и (1.1.28), уравнение (1.4.24) может быть переписано в виде

$$\int_\rho^\infty\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^x\frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= -\int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \qquad (1.4.25)$$

Действие на обе стороны (1.4.25) оператором

$$\mathcal{L}(t)\frac{d}{dt}\int_t^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

ведёт к

$$\int_a^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right)\sigma(\rho_0,\phi) = -\int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \qquad (1.4.26)$$

Следующий оператор есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d}{d\rho}\int_a^{\rho} \frac{t dt}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} \mathcal{L}(t),$$

и окончательный результат принимает вид

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{2}{\pi(\rho^2-a^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\rho_0 d\rho_0}{\rho^2-\rho_0^2} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= -\frac{1}{\pi^2(\rho^2-a^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}\sigma(\rho_0,\phi_0)\, \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}. \qquad (1.4.27)$$

Формула (1.4.27) определяет значение σ вне круга $\rho=a$ непосредственно через её значения внутри. Теперь σ известна по всей плоскости z=0, и подстановка (1.4.27) во второй член (1.4.3) позволяет нам выразить потенциальную функцию V прямо через заданные значения σ. Первое интегрирование даёт

$$V(\rho,\phi,z) = 4\int_0^{l_1} \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^{a} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$-4\int_{l_2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^{a} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \qquad (1.4.28)$$

Здесь мы использовали следующий интеграл

$$\int_a^{\rho} \frac{y\mathrm{d}y}{(\rho^2-y^2)^{1/2}(y^2-a^2)^{1/2}(y^2-r^2)} = \frac{\pi}{2(\rho^2-r^2)^{1/2}(a^2-r^2)^{1/2}}, \quad \text{для } r<a.$$

(1.4.29)

Первый член в (1.4.28) может быть преобразован, используя (1.1.22), следующим образом:

$$\int_0^{l_1} \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^{a} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= \int_0^{a} \rho_0 \mathrm{d}\rho_0 \int_{l_2(\rho_0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= \int_{l_2(0)}^{l_2} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^{g(x)} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0\phi)$$

$$+ \int_{l_2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^{a} \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0\phi). \qquad (1.4.30)$$

Подстановка (1.4.30) в (1.4.29) даёт:

$$V(\rho,\phi,z) = 4\int_{l_2(0)}^{l_2} \frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0\phi). \tag{1.4.31}$$

Введение новой переменной $t = g(x), \quad x = l_2(t),$ превращает (1.4.31) в

$$V(\rho,\phi,z) = 4\int_0^a \frac{dl_2(t)}{[l_2^2(t)-\rho^2]^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.4.32}$$

Изменение порядка интегрирования в (1.4.32), и интегрирование по t (смотри 1.1.20), даёт:

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \tag{1.4.33}$$

Формулы (1.4.31–33) дают три эквивалентные представления потенциальной функции V, первая более удобна для явного вычисления интегралов, в то время, как третья имеет некоторые преимущества для численного интегрирования. Два примера рассмотрены ниже.

Пример 1. Пусть следующий потенциал дан внутри диска $v(\rho,\phi) = v_n\rho^n\cos n\phi$, v_n=const. Решение согласно (1.4.16) есть

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{2v_n}{\sqrt{\pi}\,\rho^n}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\cos n\phi \int_0^{l_1} \frac{x^{2n}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}$$

$$= v_n\rho^n\cos n\phi\left[1 - \frac{2\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2}F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{l_2^2-a^2}{l_2^2}\right)\right]. \tag{1.4.34}$$

Гипергеометрическая функция в (1.4.34) может быть выражена через элементарные (Bateman and Erdelyi, 1955)

$$F(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \zeta) = \frac{(1-\zeta)^{n+1/2}}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{\zeta^{n-1/2}}{\sqrt{1-\zeta}}\sin^{-1}\sqrt{\zeta}\right]. \tag{1.4.35}$$

Пример 2. Пусть распределение электрического заряда дано в форме $\sigma(\rho,\phi)=\sigma_n\rho^n\cos n\phi$, σ_n=const. Решение даётся (1.4.32)

$$V(\rho,\phi,z)=2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\sigma_n\rho^n\cos n\phi\int_0^b\frac{x^{2n+2}\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)^{n+1}}$$

$$=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{5}{2})}\sigma_n\rho^n\cos n\phi\,\frac{b^{2n+3}}{z^{2n+2}}F(n+1,n+\frac{3}{2};n+\frac{5}{2};-\frac{b^2}{z^2}),\qquad(1.4.36)$$

где $b=(a^2-l_1^2)^{1/2}$, и гипергеометрическая функция может быть выражена через элементарные (Bateman and Erdelyi, 1955)

$$F(n+1,n+\frac{3}{2};n+\frac{5}{2};\zeta)=\frac{2n+3}{\Gamma(n+1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n}\left\{\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\ln\frac{1+\sqrt{\zeta}}{1-\sqrt{\zeta}}-1\right]\right\}.$$

(1.4.37)

Библиографическая заметка. Степень эффективности нового метода может быть оценена путём сравнения с результатами опубликованными в литературе. Формулы аналогичные (1.4.21) могут быть найдены в работах лорда Кельвина, Гейне, Гобсона и других. Как упоминалось раньше, их практическое использование было весьма ограничено. Эквивалентные выражения, как (1.4.18), позволяют нам вычислять интегралы непосредственным и элементарным образом. Это было показано на двух примерах выше. Общее решение теперь стало рабочим инструментом, доступном любому с инженерным образованием в математике.

Копсон (1947) был очень близок к открытию нового метода. Он установил равенство

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\psi)\,\mathrm{d}\phi}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}$$

$$=\frac{4\cos n(\phi_0-\psi)}{(\rho\rho_0)^n}\int_0^{min(\rho_0,\rho)}\frac{x^{2n}\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}.\qquad(1.4.38)$$

Копсон получил решение, аналогичное (1.4.10), в виде ряда Фурье. Остаётся неясным, почему на не сделал суммирования в (1.4.38), которое бы привело к (1.1.27), что служит фундаментом нового метода.

Галин (1953) получил несингулярную часть (соответствующую второму члену общего решения (1.4.15) уравнения (1.4.5). Леонов (1953) получил замкнутое решение (0.3). Оба решения имели то же самое ограничение, как и предыдущие классические решения: трудность практического использования.

Другой тип решения уравнения (1.4.5) может быть выражен через z—производную (1.4.21) для $z=0$, согласно соотношению

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{1.4.39}$$

Результат есть

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi^3}\left\{-\Delta\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{1}{R}\tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right)\omega(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0\right.$$

$$\left. -\frac{a}{(a^2-\rho^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{1-t\bar{t}}{(1-t)(1-\bar{t})}\frac{\omega(\rho_0,\phi_0)}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}\rho_0 d\rho_0 d\phi_0\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left\{-\Delta\int_\rho^{a}\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^{x}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\omega(\rho_0,\phi)\right.$$

$$\left. -\frac{a}{(a^2-\rho^2)^{3/2}}\int_0^{a}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{a^2}\right)\omega(\rho_0,\phi_0)\right\}, \tag{1.4.40}$$

где

$$t = \frac{\rho\rho_0}{a^2}e^{i(\phi-\phi_0)}, \tag{1.4.41}$$

и черта над буквой обозначает комплексное сопряжение. Формула (1.4.40) соответствует решению Моссаковского и других (1985). Разработанный аппарат может быть использован для решения задач о нескольких зараяженных коаксиальных (Fabrikant, 1987e) и произвольно расположенных (Fabrikant, 1988a) круглых дисках.

Упражнение 1.4

1. Круглый проводящий диск заряжен до потенциала v_0. Требуется найти потенциальную функцию V.

Ответ: $V(\rho,z) = \frac{2}{\pi} v_0 \sin^{-1}(l_1/\rho) = \frac{2}{\pi} v_0 \sin^{-1}(\frac{a}{l_2})$.

Совет: используйте формулу (1.4.18)

2. В условиях предыдущей задачи, найти распределение заряда σ используя формулаы (1.4.10) и (1.4.39). Доказать, что в обоих случаях результат тот же самый.

Ответ: $\sigma = \frac{v_0}{\pi^2(a^2-\rho^2)^{1/2}}$.

3. Решите задачи 1 и 2 для $v=v_1\rho\cos\phi$, $v_1=\text{const}$.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \frac{2}{\pi} v_1\rho\cos\phi\left[\sin^{-1}(\frac{a}{l_2}) - \frac{a}{l_2}\sqrt{1-(a/l_2)^2}\right]$,

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{2v_1\rho\cos\phi}{\pi^2(a^2-\rho^2)^{1/2}}.$$

4. Однородное распределение плотности зараяда $\sigma=\sigma_0=\text{const}$ предписано на круглом диске радиуса a, и потенциал $V=0$ для $\rho\geq a$. Требуется найти потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho,z) = 4\sigma_0\left[(a^2-l_1^2)^{1/2} - z\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})\right]$.

5. Решите предыдущую задачу для случая, где $\sigma=\sigma_1\rho\cos\phi$, $\sigma_1=\text{const}$.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \frac{8}{3}\sigma_1\rho\cos\phi\left[(a^2-l_1^2)^{1/2}\left(\frac{3}{2}-\frac{a^2}{2l_2^2}\right) - \frac{3}{2}z\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})\right]$.

6. Потенциальная функция задана выражением

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{8}{3}\sigma_1\rho\cos\phi\left[(a^2-l_1^2)^{1/2}\left(\frac{3}{2}-\frac{a^2}{2l_2^2}\right) - \frac{3}{2}z\sin^{-1}(\frac{a}{l_2})\right].$$

Найдите распределение заряда на плоскости $z=0$.

Ответ: $\sigma = \sigma_1\rho\cos\phi$, для $\rho\leq a$; $\sigma = -\frac{4}{3\pi}\sigma_1\rho\cos\phi\left[\frac{a}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{a^2}{2\rho^2}\right) - \frac{3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right]$, для $\rho > a$.

Sovet: используйте (1.4.39).

7. Решите смешанную граничную задачу теории потенциала для сферы. *Совет*: смотри (Fabrikant, 1987i).

1.5 Внешняя смешанная граничная задача для полупространства

Материал в этой секции следует статье (Fabrikant, 1986f). Задача называется внешней, когда ненулевые граничные условия предписаны вне диска. Как и в предыдущей секции, мы рассматриваем два типа задач.

Задача 1. Необходимо найти функцию, гармоническую в полупространстве $z \geq 0$, исчезающую на бесконечности, и удовлетворяет смешанным граничным условиям на плоскости $z=0$, а именно,

$$\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$V = v(\rho,\phi), \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \tag{1.5.1}$$

Задача (1.5.1) может быть интерпретирована, как электростатическая о зараяженной диафрагм, или как внешняя контактная задача теории упругости. Потенциал V представлен через распределение простого слоя (1.4.3). Подстановка граничных условий (1.5.1) в (1.4.3) приводит к основному интегральному уравнению

$$4\int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_{a}^{x} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0,\phi) = v(\rho,\phi). \tag{1.5.2}$$

Его решение получается точно также, как и решение (1.4.5), а именно

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi^2\rho} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_{a}^{\rho} \frac{x dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} \mathcal{L}(x^2) \frac{d}{dx} \int_{x}^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) v(\rho_0,\phi). \tag{1.5.3}$$

Правила дифференцирования (1.3.2) и (1.3.9) позволяют нам переписать (1.5.3) следующим образом

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\chi(a,\rho,\phi)}{(\rho^2-a^2)^{1/2}} + \int_a^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}\chi(x,\rho,\phi)\right\}, \qquad (1.5.4)$$

где

$$\chi(x,\rho,\phi) = x\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\rho_0}\left[\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)v(\rho_0\phi)\right]. \qquad (1.5.5)$$

Выполним следующее преобразование:

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(x,\rho,\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}(\mathcal{L}v)'\right]$$

$$= \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}[(\mathcal{L}v)' + \rho_0(\mathcal{L}v)'' - 2(\mathcal{L}'\rho_0 v)']$$

$$= \int_x^\infty \frac{\rho_0\mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\left[\mathcal{L}\left(v'' + \frac{1}{\rho_0}v'\right) - \left(\mathcal{L}'' + \frac{1}{\rho_0}\mathcal{L}'\right)v\right]. \qquad (1.5.6)$$

Здесь для краткости знак (´) обозначает частную производную по ρ_0, $\mathcal{L}$ обозначает $\mathcal{L}(x^2/\rho\rho_0)$, $v\equiv v(\rho_0,\phi)$, и следующее равенство было использовано

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) = -2\left(\frac{\rho_0}{x}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_0}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right).$$

Так как

$$\mathcal{L}\frac{1}{\rho_0^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2} = \frac{1}{\rho_0^2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\phi^2}v,$$

его добавление и вычитание из (1.5.6) даёт:

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(x,\rho,\phi)=\int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\left[\mathcal{L}\Delta v-(\Delta\mathcal{L})v\right], \tag{1.5.7}$$

где Δ является двумерным оператором Лапласа в полярных координатах. Так как λ является гармонической функцией, $\Delta\mathcal{L}=0$, и (1.5.7) упрощается

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(x,\rho,\phi)=\int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\,\mathcal{L}\Delta v. \tag{1.5.8}$$

Подстановка (1.5.8) в (1.5.4) даёт

$$\sigma(\rho,\phi)=-\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\chi(a,\rho,\phi)}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}+\int_a^\rho \frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\Delta v(\rho_0,\phi)\right\}. \tag{1.5.9}$$

Следует заметить, что первый член в (1.5.9) становится сингулярным, когда $\rho\to a$, в то время, как второй член исчезает на краю диска. В случае, когда v является гармонической функцией, второй член в (1.5.9) исчезает, и решение представляется первым членом. Последующее интегрирование по x становится возможным в (1.5.9), используя (1.1.8) после изменения порядка интегрирования. Следующий результат получен

$$\sigma(\rho,\phi)=-\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\chi(a,\rho,\phi)}{(\rho^2-a^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{\Delta v(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}\tan^{-1}\frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}(\rho_0^2-a^2)^{1/2}}{a[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}}\right\}. \tag{1.5.10}$$

Решения, подобные (1.5.3) и (1.5.9), удобны в тех случаях, когда точное вычисление интегралов возможно, в то время, как решение в форме (1.5.10) имеет некоторые преимущества, когда численное интегрирование становится необходимым.

Теперь мы можем выразить потенциальную функцию V непосредственно через её граничное значение v. Так как $\sigma=0$ внутри круга $\rho=a$, потенциальная функция (1.4.3) принимает вид

$$V(\rho,\phi,z)=4\int_{l_2}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^{g(x)}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.5.11}$$

Подстановка (1.5.3) в (1.5.11) даёт после первого интегрирования

$$V(\rho,\phi,z)=-\frac{2}{\pi}\int_{l_2}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho g^2(x)}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial g(x)}\int_{g(x)}^{\infty}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)v(\rho_0,\phi). \tag{1.5.12}$$

Здесь свойства $\mathcal{L}$–операторов (1.2.3) были использованы, вместе со следующим равенством, которое действительно для Абелевых операторов

$$\int_a^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\int_a^{x}\frac{f(t)\,t dt}{(x^2-t^2)^{1/2}}=\frac{\pi}{2}f(\rho). \tag{1.5.13}$$

Введение новой переменной $y=g(x)$, $x=l_2(y)$, в (1.5.12), позволяет нам переписать (1.5.12) в виде

$$V(\rho,\phi,z)=-\frac{2}{\pi}\int_a^{\infty}\frac{dl_2(y)}{[l_2^2(y)-\rho^2]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{l_1^2(y)}{\rho}\right)\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-y^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)v(\rho_0,\phi). \tag{1.5.14}$$

Изменение порядка интегрирования в (1.5.14) даёт

$$V(\rho,\phi,z)=-\frac{2}{\pi}\int_a^{\infty}\left\{\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{d}{d\rho_0}\int_a^{\rho_0}\frac{y dl_2(y)}{(\rho_0^2-y^2)^{1/2}[l_2^2(y)-\rho^2]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{l_1^2(y)}{\rho}\right)\right\}v(\rho_0,\phi)d\rho_0. \tag{1.5.15}$$

Здесь следующая общая формула была использована

$$\int_a^{\infty}F(\rho)d\rho\frac{d}{d\rho}\int_{\rho}^{\infty}\frac{xf(x)dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}=-\int_a^{\infty}f(x)\,dx\frac{d}{dx}\int_a^{x}\frac{\rho F(\rho)\,d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{1.5.16}$$

Интеграл в фигурных скобках (1.5.15) может быть вычислен, согласно (1.3.21), с результатом

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{z}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{j} + \tan^{-1}\left(\frac{j}{R_0}\right)\right] v(\rho_0,\phi_0)\rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \qquad (1.5.17)$$

Здесь R_0 определено в (1.4.22), и

$$j(x) = \frac{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{x}. \qquad (1.5.18)$$

Сокращение j в (1.5.17) обозначает $j(a)$. В особом случае, когда $z = 0$, выражение (1.5.17) упрощается

$$V(\rho,\phi,0) = \frac{1}{\pi^2}(a^2 - \rho^2)^{1/2}\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{v(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]},$$

для $\rho<a$;

$$V(\rho,\phi,0) = v(\rho,\phi), \text{ для } \rho\geq a. \qquad (1.5.19)$$

Общее решение закончено. Плотность зараяда σ даётся двумя эквивалентными выражениями (1.5.3) и (1.5.10), потенциал определён в (1.5.14) и (1.5.17), первое выражение более удобно для точного вычисления интегралов, в то время, как второй лучше для численного интегрирования.

Задача 2. Рассмотрим задачу нахождения гармонической функции, исчезающей на бесконечности, и удовлетворяющую следующим смешанным граничным условиям в плоскости $z = 0$

$$V = 0, \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma(\rho,\phi), \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \qquad (1.5.20)$$

Задача может быть интерпретирована как электростатическая задача о заряженной бесконечной диафрагме, с заземлённым диском внутри, или как задачу о внешней круглой трещине в линейной теории упругости. Подстановка граничных условий (1.5.20) в (1.4.3) приводит к основному интегральному уравнению

$$\int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^{a} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= -\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.5.21}$$

Следует отметить, что σ во втором члене (1.5.21) известна из граничных условий (1.5.20), в то время, как значение σ в первом члене подлежит определению. Правая сторона (1.5.21) может быть преобразована, используя (1.1.28),

$$\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$= -\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} \int_a^\infty \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi),$$

с немедленным результатом

$$\int_x^a \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi) = -\int_a^\infty \frac{\rho_0 \mathrm{d}\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.5.22}$$

Приложение оператора

$$\mathcal{L}(\rho)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_\rho^a \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{x}\right)$$

к обеим сторонам (1.5.22) даёт, после необходимых преобразований

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{2}{\pi(a^2-\rho^2)^{1/2}} \int_a^\infty \frac{(\rho_0^2-a^2)^{1/2}}{\rho_0^2-\rho^2} \mathcal{L}(\frac{\rho}{\rho_0})\,\sigma(\rho_0,\phi)\,\rho_0 \mathrm{d}\rho_0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \tag{1.5.23}$$

или, интерпретируя $\mathcal{L}$—оператор, мы получим

$$\sigma(\rho,\phi) = -\frac{1}{\pi^2(a^2-\rho^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{(\rho_0^2-a^2)^{1/2}\sigma(\rho_0,\phi_0)\,\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}. \tag{1.5.24}$$

Теперь значение σ известно на всей плоскости $z = 0$, и (1.4.3) может быть использовано для выражения потенциала V непосредственно через заданные значения σ. Подстановка (1.5.23) в (1.4.3) даёт, после первого интегрирования:

$$V(\rho,\phi,z) = -4\int_0^{l_1}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_a^{\infty}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$+4\int_{l_2}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}}\int_a^{g(x)}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.5.25}$$

Второй член в (1.5.25) эквивалентен второму члену в (1.4.2), который, в свою очередь, может быть представлен, используя (1.1.18), как

$$4\int_a^{\infty}\left\{\int_0^{l_1(\rho_0)}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\right\}\sigma(\rho_0,\phi)\,\rho_0 d\rho_0.$$

Следующая схема изменения порядка интегрирования была использована

$$\int_a^{\infty}d\rho_0\int_0^{l_1(\rho_0)}dx = \int_0^{l_1}dx\int_a^{\infty}d\rho_0 + \int_{l_1}^{l_1(\infty)}dx\int_{g(x)}^{\infty}d\rho_0,$$

и второй член в (1.5.25) может быть переписан в виде

$$4\int_0^{l_1}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_a^{\infty}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi)$$

$$+4\int_{l_1}^{l_1(\infty)}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_{g(x)}^{\infty}\frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.5.26}$$

Подстановка (1.5.26) в (1.5.25) даёт, используя $l_1(\infty) = \rho$,

$$V(\rho,\phi,z) = 4\int_{l_1}^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right)\sigma(\rho_0,\phi). \tag{1.5.27}$$

Изменение порядка интегрирования в (1.5.27), и интегрирование по x, согласно (1.1.24), приводит к результату

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{1}{R_0}\tan^{-1}\left(\frac{j}{R_0}\right) \sigma(\rho_0,\phi_0)\, \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \tag{1.5.28}$$

где R_0 определён в (1.4.22), и j обозначает $j(a)$, согласно (1.3.4).

Вторая задача теперь решена. Выражение (1.5.24) определяет плотность распределения заряда σ внутри круга непосредственно через её значения вне круга. Потенциал V даётся двумя эквивалентными выражениями (1.5.27) и (1.5.28), первое для точного вычисления интегралов, в то время, как второе имеет определённые преимущества в случае численного интегрирования. Некоторые специфические примеры рассмотрены ниже.

Пример 1. Рассмотрим внешнюю смешанную задачу со следующими граничными условиями на плоскости $z = 0$

$$V = v_0/\rho^n, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \tag{1.5.29}$$

Условия (1.5.29) соответствуют Задаче 1. Решение даётся формулами (1.5.14) и (1.5.3). Подстановка (1.5.29) в (1.5.14) даёт после интегрирования

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)} \int_{l_2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2} g^n(x)}, \tag{1.5.30}$$

где $g(x)$ определен в (1.1.25), и следующий интеграл был использован (Градштейн и Рыжик, 1963)

$$\int_x^\infty \frac{d\rho}{\rho^n(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)}{2\Gamma[(n+1)/2]\,x^n}. \tag{1.5.31}$$

Интеграл (1.5.30) может быть вычислен в элементарных функциях для любого целого n, но прецедура частично различается для чётных и нечётных значений n. Например, для чётных $n = 2k$, задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_{l_2}^\infty \frac{(x^2 - \rho^2)^{k-1/2}dx}{x^{2k}(x^2 - \rho^2 - z^2)^k},$$

который может быть вычислен введением новой переменной $t = x/(x^2 - \rho^2)^{1/2}$.

Окончательный результат есть

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)z^n}\left\{\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{2m-1}[1 - Q_0^{2m-1}]\right.$$

$$\left. + 2B_1 \ln Q + \sum_{m=2}^{k}\frac{B_m}{1-m}\left[(Q_1^{m-1} - Q_2^{m-1}) - (Q_3^{m-1} - Q_4^{m-1})\right]\right\}, \tag{1.5.32}$$

где

$$A_{k-m+1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\eta^{m-1}}\left[\frac{(\eta-1)^{k-1}}{(r^2-\eta)^k}\right], \quad \text{для} \quad \eta=0, \quad \text{и} \quad r^2 = 1 + \rho^2/z^2;$$

$$B_{k-m+1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[\frac{(t^2-1)^{k-1}}{t^{2k}(r^2+t)^k}\right], \quad \text{для} \quad t = \sqrt{1 + \rho^2/z^2};$$

$$Q_0 = \frac{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2}, \qquad Q = \frac{l_2[(\rho^2+z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2+z^2)^{1/2} + z]},$$

$$Q_1 = \frac{z[(\rho^2+z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{l_1^2}, \qquad Q_2 = \frac{z[(\rho^2+z^2)^{1/2} - (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{l_1^2},$$

$$Q_3=\frac{z[(\rho^2+z^2)^{1/2}+z]}{\rho^2},\qquad Q_4=\frac{z[(\rho^2+z^2)^{1/2}-z]}{\rho^2}. \tag{1.5.33}$$

Для случая нечётных $n=2k+1$, интегрирование может быть выполнено при помощи подстановки $t=(x^2-\rho^2-z^2)^{1/2}$, и окончательный результат есть

$$V(\rho,\phi,z)=\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)}\left\{\sum_{m=1}^{k}\frac{C_m}{(2m-1)(a^2-l_1^2)^{m-1/2}}+\sum_{m=1}^{k+1}D_mE_m\right\}, \tag{1.5.34}$$

где

$$C_m=\frac{1}{(k-m)!}\frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}}\left[\frac{(t+z^2)^k}{(t+\rho^2+z^2)^{k+1}}\right],\ \text{для}\ \ t=0;$$

$$D_m=\frac{1}{(k+1-m)!}\frac{d^{k+1-m}}{dt^{k+1-m}}\left[\frac{(t+z^2)^k}{t^k}\right],\ \text{для}\ \ t=-(\rho^2+z^2);$$

$$E_m=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{t}}{(a^2-l_1^2)^{1/2}}\right],\ \text{для}\ \ t=\rho^2+z^2. \tag{1.5.35}$$

Подстановка (1.5.29) в (1.5.3) даёт после интегрирования

$$\sigma(\rho,\phi)=\frac{v_0\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{3/2}\Gamma(n/2)}\left\{\frac{1}{a^n(\rho^2-a^2)^{1/2}}-\frac{n(\rho^2-a^2)^{1/2}}{\rho^{n+2}}F\left(\tfrac{1}{2}n+1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right\}, \tag{1.5.36}$$

и гипергеометрическая функция может быть выражена в элементарных функциях (Bateman and Erdelyi, 1955), а именно, для чётных $n=2k$, $k=1,2,3\,...$,

$$F\left(k+1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};t\right)=\frac{1}{2k!}\frac{d^k}{dt^k}\left[t^{k-1/2}\ln\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right],$$

и для нечётных $n=2k+1$, $k=0,1,2,\,...$,

$$F\left(k+\frac{3}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};t\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}\,\Gamma(k+\frac{3}{2})}\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{t^{k+1/2}}{\sqrt{1-t}}\right]. \tag{1.5.37}$$

распределение плотности зараяда, вычисленое по (1.5.36), неотрицательно для

$n=1$, и меняет знак когда $n \geq 2$, с отрицательным максимумом увеличивающимся с n, в то время, как полный заряд остаётся равным нулю.

Пример 2. Рассмотрим граничные условия при $z=0$

$$V=(v_n/\rho^n)\,e^{in\phi}, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \tag{1.5.38}$$

где $v_н$ является константой. Решение даётся в (1.5.3) и (1.5.14). Подстановка (1.5.38) в (1.5.14) даёт , после интегрирования

$$V(\rho,\phi,z)=\frac{2\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)}\rho^n e^{in\phi}\int_{l_2}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{1.5.39}$$

и окончательное интегрирование ведёт к

$$V(\rho,\phi,z)=\frac{2v_n}{\sqrt{\pi}\rho^n}e^{in\phi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\Gamma(n+1/2)}{(2k-1)\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)}(1-Q_0^{2k-1}), \tag{1.5.40}$$

где Q_0 определено в (1.5.33). Подставляя (1.5.38) в (1.5.3), мы получим, после интегрирования

$$\sigma(\rho,\phi)=\frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{3/2}\Gamma(n)}\frac{v_n e^{in\phi}}{\rho^n(\rho^2-a^2)^{1/2}}. \tag{1.5.41}$$

Очевидно, выражение (1.5.41) может также быть получено дифференцированием (1.5.40) по z для $z=0$.

Пример 3. Рассмотрим случай, относящийся Задаче 2, с граничными условиями

$$V=0, \quad \text{для} \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-2\pi\frac{\sigma_0}{\rho^n} \quad \text{для} \quad \rho > a, \; 0 \leq \phi < 2\pi; \tag{1.5.42}$$

решение даётся в (1.5.23) и (1.5.27). Подстановка (1.5.42) в (1.5.27) даёт , после интегрирования с использованием (1.5.31),

$$V(\rho,\phi,z)=2\sqrt{\pi}\sigma_0\frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)}\int_{l_1}^{\rho}\frac{\mathrm{d}x}{(\rho^2-x^2)^{1/2}g^{\mathrm{n-1}}(x)}, \tag{1.5.43}$$

где $g(x)$ определено в (1.1.25). Техника, использованная в предыдущем примере может быть использована здесь для дальнейшего интегрирования. Окончательный результат зависит от чётности n. Для чётных $n=2k$, $k=1,2,3,\ldots$, потенциал есть

$$V(\rho,\phi,z)=2\sqrt{\pi}\sigma_0\frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)}\left\{2B_1\ln Q\right.$$

$$+\sum_{\mathrm{m=1}}^{\mathrm{k-1}}\frac{A_{\mathrm{m}}}{(2m-1)\,z^{\mathrm{2m-1}}}\left[1-\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\right)^{\mathrm{2m-1}}\right]$$

$$\left.+\sum_{\mathrm{m=1}}^{\mathrm{k-1}}\frac{B_{\mathrm{m+1}}}{mz^{\mathrm{m}}}[Q_1^{\mathrm{m}}-Q_2^{\mathrm{m}}-(Q_3^{\mathrm{m}}-Q_4^{\mathrm{m}})]\right\}. \tag{1.5.44}$$

Здесь Q, Q_1, Q_2, Q_3, и Q_4 определены в (1.5.33), и

$$A_{\mathrm{k-m}}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m-1}}}{\mathrm{d}t^{\mathrm{m-1}}}\left[\frac{(t-z^2)^{\mathrm{k-1}}}{(\rho^2+z^2-t)^{\mathrm{k}}}\right]\qquad \text{для}\qquad t=0;$$

$$B_{\mathrm{k-m+1}}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m-1}}}{\mathrm{d}t^{\mathrm{m-1}}}\left[\frac{(t^2-z^2)^{\mathrm{k-1}}}{t^{\mathrm{2k-2}}[(\rho^2+z^2)^{1/2}-t]^{\mathrm{k}}}\right],\qquad \text{для}\qquad t=-(\rho^2+z^2)^{1/2}. \tag{1.5.45}$$

Для нечётных $n=2k+1$, результатом является

$$V(\rho,\phi,z)=2\sqrt{\pi}\;\frac{\sigma_0\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)\,z^{\mathrm{n-1}}}\sum_{\mathrm{m=1}}^{\mathrm{k}}\left\{\frac{G_{\mathrm{m}}}{2m-1}\left(\frac{(l_2^2-a^2)^{1/2}}{a}\right)^{\mathrm{2m-1}}-H_{\mathrm{m}}L_{\mathrm{m}}\right\}. \tag{1.5.46}$$

Здесь

$$G_{\mathrm{k-m+1}}=\frac{1}{\Gamma(m)}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m-1}}}{\mathrm{d}t^{\mathrm{m-1}}}\left[\frac{(1+t)^{\mathrm{k-1}}}{(\xi+t)^{\mathrm{k}}}\right],\qquad \text{для}\qquad t=0,\quad \xi=(\rho^2+z^2)/z^2;$$

$$H_{\text{k-m+1}} = \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{\mathrm{d}^{\text{m-1}}}{\mathrm{d}t^{\text{m-1}}} \left[\frac{(1+t)^{\text{k-1}}}{t^{\text{k}}} \right], \quad \text{для} \quad t = -(\rho^2 + z^2)/z^2;$$

$$L_{\text{m}} = \frac{(-1)^{\text{m}}}{\Gamma(m)} \frac{\mathrm{d}^{\text{m-1}}}{\mathrm{d}t^{\text{m-1}}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \right) \right], \quad \text{для} \quad t = (\rho^2 + z^2)/z^2. \tag{1.5.47}$$

Пример 4. Рассмотрим граничные условия на плоскости $z = 0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \ \rho \le a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_{\text{n}}/\rho^{\text{n}})\mathrm{e}^{in\phi}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \le \phi < 2\pi; \tag{1.5.48}$$

Подстановка (1.5.48) в (1.5.27) даёт после интегрирования,

$$V(\rho,\phi,z) = 2\sqrt{\pi} \ \frac{\sigma_{\text{n}}\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)\rho^{\text{n}}} \mathrm{e}^{in\phi} \left\{ (l_2^2 - a^2)^{1/2} - z \right.$$

$$\left. - z\sum_{\text{k=2}}^{\text{n}} \frac{(-1)^{\text{k}}\Gamma(n)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)(2k-3)} [1 - (1 - l_1^2/a^2)^{\text{k-3/2}}] \right\}, \tag{1.5.49}$$

и на плоскости $z = 0$

$$V(\rho,\phi,0) = 2\sqrt{\pi} \ \frac{\sigma_{\text{n}}\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)\rho^{\text{n}}} \mathrm{e}^{in\phi} \Re(\rho^2 - a^2)^{1/2}.$$

символ $\Re$ обозначает действительнуючасть комплексного параметра. Плотность заряда определена согласно (1.5.23),

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\sigma_{\text{n}}\Gamma(n-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)\rho^{\text{n}}} \mathrm{e}^{in\phi} \Re \left\{ 1 - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right.$$

$$\left. + \sum_{\text{k=2}}^{\text{n}} \frac{(-1)^{\text{k}}\Gamma(n)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)(2k-3)} [1 - (1 - \rho^2/a^2)^{\text{k-3/2}}] \right\}. \tag{1.5.50}$$

Более общий случай граничных условий, а именно,

$$V = 0, \quad \text{для} \ \rho \le a, \ 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_{jn}/\rho^j)e^{in\phi}, \quad \text{для} \ \rho > a, \ 0 \le \phi < 2\pi; \tag{1.5.51}$$

также может быть рассмотрен, используя ту же технику, как и в предыдущих примерах, и окончательный результат может всегда быть выражен в элементарных функциях. Форма результата будет различна для $(j+n)$ чётного и для $(j+n)$ нечётного. Как пример, следующее выражение может быть получено при помощи подстановки (1.5.51) в (1.5.23), для случай когда $j + n = 2k$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\sigma_{jn}}{\rho^j} e^{in\phi} \Re\left\{1 - \frac{a}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\left[1 - \sum_{m=2}^{k} \frac{\Gamma(m-3/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m-2}\right]\right\}, \tag{1.5.52}$$

и для нечётных $j+n=2k+1$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{2\sigma_{jn}}{\pi\rho^j} e^{in\phi} \Re\left\{\sin^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right) - \frac{a}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\left[1 - \sum_{m=2}^{k} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(m-1)}{4\Gamma(m+1/2)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m-2}\right]\right\}, \tag{1.5.53}$$

Выражения (1.5.52) и (1.5.53) представляют общие формулы, которые покрывают все особые случай рассмотренные в Примерах 3 и 4.

Рассмотренные выше примеры продемонстрировали простоту метода. Процесс решения теперь стал простой и элементарной процедурой.

Упражнение 1.5

1. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = v_0/\rho, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{2v_0}{\pi(\rho^2+z^2)^{1/2}} \sin^{-1}\left(\dfrac{(\rho^2+z^2)^{1/2}}{l_2}\right),$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{v_0 a}{\pi^2\rho^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}.$$

полный заряд равен v_0.

2. Следующие граничные условия заданы на z=0

$$V = v_0/\rho^2, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $$V(\rho,\phi,z) = \frac{v_0}{\rho^2 + z^2}\left[1 - \frac{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2}\right.$$

$$\left. + \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \ln\frac{l_2[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]}\right],$$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{v_0}{2\pi\rho^2}\left[\frac{1}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{1}{\rho}\ln\frac{\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}}{a}\right].$$

3. Следующие граничные условия заданы на z=0

$$V = v_0/\rho^3, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $$V(\rho,\phi,z) = \frac{4v_0}{(\rho^2 + z^2)^2}\left[\frac{z^2}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} - \frac{l_1^2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{2a^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\rho^2 - 2z^2}{2(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \sin^{-1}\left(\frac{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}{l_2}\right)\right].$$

Заметьте, что потенциал в начале координат конечен, а именно, $V(0,0,0) = 4v_0/(3\pi a^3)$.

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{2v_0(2a^2 - \rho^2)}{\pi^2 a\rho^4(\rho^2 - a^2)^{1/2}}.$$

4. Следующие граничные условия заданы на $z = 0$

$$V = v_0/\rho^4, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{3v_0}{2(\rho^2+z^2)^2}\left\{\dfrac{\rho^2-z^2}{\rho^2+z^2}\left[1-\dfrac{(l_2^2-\rho^2)^{1/2}}{l_2}\right]\right.$

$$-\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{(l_2^2-\rho^2)^{1/2}}{l_2}\right)^3\right]+\frac{z}{2(\rho^2+z^2)}\left[\frac{l_2^2}{a^2}(l_2^2-a^2)^{1/2}-z\right]$$

$$-\frac{z(2z^2-3\rho^2)}{2(\rho^2+z^2)^{3/2}}\ln\frac{l_2[(\rho^2+z^2)^{1/2}+(l_2^2-a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2+z^2)^{1/2}+z]},$$

последнее выражение упрощается при $z = 0$:

$$V(\rho,\phi,0) = \frac{v_0}{\rho^4}\left[1-\frac{(a^2-\rho^2)^{1/2}}{a}-\frac{\rho^2(a^2-\rho^2)^{1/2}}{2a^3}\right], \quad \text{для} \quad \rho \le a;$$

и $V(\rho,\phi,0) = v_0/\rho^4$, для $\rho > a$. Заметьте, что потенциал в начале координат конечен, а именно, $V(0,0,0)=3v_0/(8a^4)$.

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{3v_0}{8\pi\rho^4}\left\{\frac{3a^2-\rho^2}{a^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}-\frac{3}{\rho}\ln\left[\frac{\rho+(\rho^2-a^2)^{1/2}}{a}\right]\right\}.$$

5. Следующие граничные условия заданы на $z = 0$

$$V = (v_1/\rho)\,e^{i\phi}, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{v_1}{\rho}e^{i\phi}\left[1-\dfrac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\right]$

6. Следующие граничные условия заданы на $z = 0$

$$V = (v_2/\rho^2)\,e^{2i\phi}, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a,\ 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{3v_2}{2\rho^2} e^{2i\phi} \left\{ \left[1 - \dfrac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right] - \dfrac{1}{3} \left[1 - \left(\dfrac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^3 \right] \right\}.$

7. Следующие граничные условия заданы на $z = 0$

$$V = (v_3/\rho^3)\, e^{3i\phi}, \quad \text{для} \quad \rho \ge a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{15v_3}{4\rho^3} e^{3i\phi} \left\{ \dfrac{1}{2} \left[1 - \dfrac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right] \right.$

$$\left. - \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^3 \right] + \frac{1}{10} \left[1 - \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^5 \right] \right\}.$$

8. Пусть следующие граничные условия заданы на $z = 0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \quad \rho \le a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma_0/\rho^2, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{2\pi\sigma_0}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \ln \dfrac{l_2[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]},$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\sigma_0}{\rho^2} \Re \left[1 - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right], \quad \sigma(0,0) = -\frac{\sigma_0}{2a^2}.$$

9. Пусть следующие граничные условия заданы на $z = 0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \quad \rho \le a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma_0/\rho^3, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{4\sigma_0}{\rho^2+z^2}\left[\dfrac{(l_2^2-a^2)^{1/2}}{a} - \dfrac{z}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\sin^{-1}\left(\dfrac{(\rho^2+z^2)^{1/2}}{l_2}\right)\right],$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{2\sigma_0}{\pi\rho^2}\left[\frac{1}{\rho}\sin^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right) - \frac{1}{(a^2-\rho^2)^{1/2}}\right], \quad \text{для} \quad \rho < a; \quad \sigma(0,0) = -2\sigma_0/(3\pi a^3).$$

10. Пусть следующие граничные условия заданы на $z = 0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \quad \rho \le a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma_0/\rho^4, \quad \sigma_0=\text{const}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{\pi\sigma_0}{2(\rho^2+z^2)^2}\left\{\dfrac{2z}{a}(a^2-l_1^2)^{1/2} - 3z + \dfrac{l_2^2}{a^2}(l_2^2-a^2)^{1/2}\right.$

$$\left.\frac{\rho^2-2z^2}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\ln\frac{l_2[(\rho^2+z^2)^{1/2}+(l_2^2-a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2+z^2)^{1/2}+z]}\right\},$$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\sigma_0}{\rho^4}\Re\left[1 - \frac{2a^2-\rho^2}{2a(a^2-\rho^2)^{1/2}}\right], \quad \sigma(0,0) = -\frac{\sigma_0}{8a^4}.$$

11. Рассмотрим граничные условия на плоскости $z = 0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \quad \rho \le a, \quad 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_1/\rho)e^{i\phi}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = 2\pi(\sigma_1/\rho)\, e^{i\phi}[(l_2^2-a^2)^{1/2} - z],$

$$\sigma(\rho,\phi) = (\sigma_1/\rho)e^{i\phi}\Re[1 - a/(a^2-\rho^2)^{1/2}].$$

12. Рассмотрим граничные условия на плоскости z=0:

$$V = 0, \quad \text{для } \rho \le a, \ 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_2/\rho^2)e^{2i\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \ 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \pi(\sigma_2/\rho^2)\, e^{2i\phi}[(l_2^2 - a^2)^{1/2} - 2z + z(a^2 - l_1^2)^{1/2}/a]$,

$$\sigma(\rho,\phi) = (\sigma_2/\rho^2)e^{i\phi}\Re\left[1 - \frac{2a^2-\rho^2}{2a(a^2-\rho^2)^{1/2}}\right].$$

13. Рассмотрим граничные условия на плоскости z=0:

$$V = 0, \quad \text{для } \rho \le a, \ 0 \le \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_3/\rho^3)e^{3i\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \ 0 \le \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho,\phi,z) = \dfrac{3\pi\sigma_3}{4\rho^3}\, e^{3i\phi}\left[(l_2^2 - a^2)^{1/2} - \dfrac{8}{3}z\right.$

$$\left. + 2\frac{z}{a}(a^2 - l_1^2)^{1/2} - \frac{1}{3}z\left(\frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a}\right)^3\right],$$

$$\sigma(\rho,\phi) = \frac{\sigma_3}{\rho^3}e^{3i\phi}\Re\left[1 - \frac{3a}{8(a^2-\rho^2)^{1/2}} - \frac{3(a^2-\rho^2)^{1/2}}{4a} + \frac{(a^2-\rho^2)^{3/2}}{8a^3}\right].$$

14. Докажите, что полный заряд Q_T в Задаче 2 (1.5.20) может быть выражено прямо через заданную плотность заряда σ как

$$Q_T = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \sigma(\rho,\phi)\cos^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\rho d\rho d\phi.$$

Совет: интегрируйте (1.5.23).

15. Решите задачу 14 в случае, когда $\sigma = \sigma_0/\rho^n$.

Ответ: $Q_{\rm T} = \dfrac{2\sigma_0\sqrt{\pi}\,\Gamma[(n-1)/2]}{(n-2)\,\Gamma(n/2)a^{\rm n\text{-}2}}$.

1.6 Некоторые фундаментальные интегралы

Рассмотренные здесь интегралы названы фундаментальными, потому что они особо важны для нового метода, и также потому что почти все интегральные представления, выведеные раньше, представляют собой особый случайс фундаментальных. Рассмотрим три точки в системе цилиндрических координат, а именно, $M(\rho,\phi,z)$, $M_0(\rho_0,\phi_0,z_0)$, и $N(r,\psi,0)$. Введём следующие обозначения:

$$l_1(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\{[(\rho+t)^2+z^2]^{1/2} - [(\rho-t)^2+z^2]^{1/2}\}\,, \tag{1.6.1}$$

$$l_2(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\{[(\rho+t)^2+z^2]^{1/2} + [(\rho-t)^2+z^2]^{1/2}\}\,, \tag{1.6.2}$$

$$l_{10}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\{[(\rho_0+t)^2+z_0^2]^{1/2} - [(\rho_0-t)^2+z_0^2]^{1/2}\}\,, \tag{1.6.3}$$

$$l_{20}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\{[(\rho_0+t)^2+z_0^2]^{1/2} + [(\rho_0-t)^2+z_0^2]^{1/2}\}. \tag{1.6.4}$$

Согласно предыдущему, l_{10} обозначает сокращение для $l_{10}(a)$, и так далее; $R(\cdot,\cdot)$ обозначает расстояние между двумя точками.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z}{R^3(M,N)}\frac{1}{R(N,M_0)}\tan^{-1}\left[\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi\,, \tag{1.6.5}$$

где

$$h_0 = [a^2 - l_{10}]^{1/2}\,[a^2-r^2]^{1/2}/a \tag{1.6.6}$$

Мы используем интегральное представление (1.1.23)

$$\frac{1}{R(N,M_0)}\tan^{-1}\left[\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right]=\int_r^a \frac{\mathrm{d}l_{20}(x)}{[l_{20}^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}\,(x^2-r^2)^{1/2}}\,\lambda\left(\frac{\rho_0 r}{l_{20}^2(x)},\,\psi-\phi_0\right) \tag{1.6.7}$$

где $\lambda(\cdot,\cdot)$ определена в (1.1.5).

Подстановка (1.6.7) в (1.6.5) даёт , после изменения порядка интегрирования:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^a \frac{\mathrm{d}l_{20}(x)}{[l_{20}^2(x)-\rho_0^2]^{1/2}}\int_0^x \frac{r\mathrm{d}r}{(x^2-r^2)^{1/2}}\,\lambda\left(\frac{\rho_0 r}{l_{20}^2(x)},\,\psi-\phi_0\right)\frac{z}{R^3(M,N)}. \tag{1.6.8}$$

Подставляя интегральное представление (1.3.7),

$$\frac{z}{R^3(M,N)}\equiv\frac{z}{[\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)+z^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{2}{\pi r}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^r \frac{t\mathrm{d}t}{(r^2-t^2)^{1/2}}\,\frac{[t^2-l_1^2(t)]^{1/2}}{l_2^2(t)-l_1^2(t)}\,\lambda\left(\frac{l_1(t)t}{l_2(t)},\,\phi-\psi\right) \tag{1.6.9}$$

в (1.6.8), следующий результат может быть получен после интегрирования по ψ:

$$I_1=4\int_0^a \frac{\mathrm{d}l_{20}(x)}{[l_{20}(x)-\rho_0^2]^{1/2}}\int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{(x^2-r^2)^{1/2}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^r \frac{t\mathrm{d}t}{(r^2-t^2)^{1/2}}$$

$$\times\frac{[t^2-l_1^2(t)]^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}\,\lambda\left(\frac{l_1(t)t\rho_0}{l_{20}^2(x)l_2(t)},\,\phi-\phi_0\right) \tag{1.6.10}$$

Здесь следующие свойства $\mathcal{L}$—операторов были использованы:

$$\mathcal{L}(k)\,\lambda(k_1,\cdot)=\lambda(kk_1,\cdot),\qquad \text{для}\quad k,k_1<1 \tag{1.6.11}$$

Хорошо известные свойства Абелевых операторов, а именно,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{(x^2-r^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_0^r \frac{f(t)\,t\mathrm{d}t}{(r^2-t^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} f(x), \tag{1.6.12}$$

позволяют нам значительно упростить (1.6.10):

$$I_1 = 2\pi \int_0^a \frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \frac{[x^2-l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right)\mathrm{d}x. \tag{1.6.13}$$

Следует отметить, что подинтегральное выражение в (1.6.13) симметрично по отношению к точкам M и M_0 в то время как это не было заметно в начальном выражении (1.6.5). Подинтегральное выражение в (1.6.13) является полным дифференциалом, так что интеграл может быть вычислен как неопределённый:

$$\int \frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \frac{[x^2-l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2R_1} \tan^{-1} \frac{\Theta_1(x)}{R_1} + \frac{1}{2R_2} \tan^{-1} \frac{\Theta_2(x)}{R_2}, \tag{1.6.14}$$

где

$$R_1 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + (z-z_0)^2]^{1/2},$$

$$R_2 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + (z+z_0)^2]^{1/2},$$

$$\Theta_1(x) = \Theta(x) + zz_0/\Theta(x), \quad \Theta_2(x) = \Theta(x) - zz_0/\Theta(x),$$

$$\Theta(x) = [x^2-l_1^2(x)]^{1/2}\,[x^2-l_{10}^2(x)]^{1/2}/x. \tag{1.6.15}$$

Заметим, что когда $z_0 = 0$, $\Theta(x)$ преобразуется в $h(x)$, как эта величина определена в (1.3.11), и интеграл (1.6.14) сводится к интегралу, рассмотренному в Упражнение 1.1.8. Правильность интеграла в (1.6.14) может быть проверена дифференцированием. Нужные для этого алгебраические преобразования очень нетривиальны. Мы приводим здесь некоторые промежуточные преобразования:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Theta(x) = \frac{\Theta(x)\,[l_2^2(x)l_{20}^2(x) - l_1^2(x)l_{10}^2(x)]}{x\,[l_2^2(x) - l_1^2(x)]\,[l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)]}, \tag{1.6.16}$$

$$\lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right) = \frac{l_2^2(x)l_{20}^2(x) - l_1^2(x)l_{10}^2(x)}{2x^2}\left[\frac{1}{R_1^2+\Theta_1^2(x)} + \frac{1}{R_2^2+\Theta_2^2(x)}\right] \tag{1.6.17}$$

Формула (1.6.14) позволяет нам вычислить интеграл (1.6.5):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z}{R^3(M,N)}\frac{1}{R(N,M_0)}\tan^{-1}\left[\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right] r\,dr\,d\psi$$

$$= \pi\frac{|z|}{z}\left\{\frac{1}{R_1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\Theta_1}{R_1}\right) - \frac{\pi}{2}\frac{|zz_0|}{zz_0}\right] + \frac{1}{R_2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\Theta_2}{R_2}\right) + \frac{\pi}{2}\frac{|zz_0|}{zz_0}\right]\right\}, \tag{1.6.18}$$

где сокращения Θ_1 и Θ_2 обозначают соответственно $\Theta_1(a)$ и $\Theta_2(a)$. Заметим важный особый случай, когда $z_0 = 0$. Формула (1.6.18) в этом случае преобразуется в:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z}{R^3(M,N)}\frac{1}{R(N,N_0)}\tan^{-1}\left[\frac{(a^2-r^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right] r\,dr\,d\psi$$

$$= \frac{2\pi}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left[\frac{h}{R(M,N_0)}\right], \quad \text{для} \quad \rho_0 < a, \tag{1.6.19}$$

и интеграл исчезает когда $\rho_0 \geq a$. Здесь точка N_0 имеет цилиндрические координаты $(\rho_0, \phi_0, 0)$, и h определён в (1.4.22).

Рассмотрим второй фундаментальный интеграл:

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{h_0} + \tan^{-1}\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right]\frac{r\,dr\,d\psi}{R(M,N)}, \tag{1.6.20}$$

где h_0 определено в (1.6.6). Мы используем интегральное представление для величины обратной расстоянию

$$\frac{1}{R(M,N)} = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{(r^2-x^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)r}, \phi-\psi\right), \tag{1.6.21}$$

что представляет собой вариацию (1.1.26). Подставляя (1.6.21) в (1.6.20), следующее выражение получается, после изменения порядка интегрирования:

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_0^a \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \mathrm{d}x \int_x^a \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2-x^2)^{1/2}}$$

$$\times\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)r}, \phi-\psi\right)\frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{h_0} + \tan^{-1}\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right], \tag{1.6.22}$$

Мы используем интегральное представление (1.3.14):

$$\frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{h_0} + \tan^{-1}\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right]$$

$$= -\frac{\mathcal{L}(r)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^a \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)^{1/2}} \frac{[l_{20}^2(t)-t^2]^{1/2}}{l_{20}^2(t)-l_{10}^2(t)} \lambda\left(\frac{l_{10}(t)}{t\,l_{20}(t)}, \phi_0-\psi\right). \tag{1.6.23}$$

Подстановка (1.6.23) в (1.6.22) даёт, после интегрирования по ψ:

$$I_2 = -4\int_0^a \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \mathrm{d}x \int_x^a \frac{\mathrm{d}r}{(r^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^a \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)^{1/2}}$$

$$\times\frac{[l_{20}^2(t)-t^2]^{1/2}}{l_{20}^2(t)-l_{10}^2(t)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(t)x}{l_2(x)l_{20}(t)t}, \phi-\phi_0\right). \tag{1.6.24}$$

Мы припоминаем хорошо известные свойства Абелевых операторов:

$$\int_x^a \frac{\mathrm{d}r}{(r^2-x^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^a \frac{f(t)t\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2}f(x). \tag{1.6.25}$$

Приложение (1.6.25) к (1.6.24) даёт:

$$I_2 = 2\pi \int_0^a \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \frac{[l_{20}^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right) \mathrm{d}x. \tag{1.6.26}$$

Отметим определённое сходство между (1.6.26) и (1.6.13). Подинтегральное выражение в (1.6.26) есть полный дифференциал, и может быть вычислен в элементарных функциях:

$$\int \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \frac{[l_{20}^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right) \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2R_1}\tan^{-1}\frac{\Xi_1(x)}{R_1} - \frac{1}{2R_2}\tan^{-1}\frac{\Xi_2(x)}{R_2}, \tag{1.6.27}$$

где R_1 и R_2 определены в (1.6.15), и

$$\Xi_1(x) \;–\; \xi(x) + zz_0/\xi(x)\ , \qquad \Xi_2(x) \;–\; \xi(x) - zz_0/\xi(x)\ ,$$

$$\xi(x) \;–\; [l_2^2(x) - x^2]^{1/2}\ [l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}/x \tag{1.6.28}$$

Опять мы можем заметить, что в случай, когда $z_0 = 0$, $\xi(x)$ преобразуется в $j(x)$, согласно определению этой величины в (1.3.4), и интеграл (1.6.27) совпадает с (1.1.26). Как и раньше, правильность интегрирования может быть проверена дифференцированием, используя (1.6.17) и свойства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x) = -\frac{\xi(x)\,[l_2^2(x)l_{20}^2(x) - l_1^2(x)l_{10}^2(x)]}{x\,[l_2^2(x)-l_1^2(x)]\,[l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)]}, \tag{1.6.29}$$

Окончательно, интеграл (1.6.20) может быть вычислен следующим образом:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{h_0} + \tan^{-1}\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(M,N)}$$

$$= \pi\frac{|z_0|}{z_0}\left\{\frac{1}{R_1}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\Xi_1}{R_1}\right] + \frac{1}{R_2}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\Xi_2}{R_2}\right]\right\}. \tag{1.6.30}$$

Согласно нашим правилам, Ξ_1 и Ξ_2 обозначает $\Xi_1(a)$ и $\Xi_2(a)$ соответственно.

Рассмотрим особый случай, когда $z_0 = 0$, и $\rho_0 > a$. Согласно соотношению

$$\frac{az_0}{(a^2 - l_{10}^2)^{1/2}} \rightarrow (\rho_0^2 - a^2)^{1/2}, \quad \text{для} \quad z_0 \rightarrow 0,$$

интеграл (1.6.30) принимает вид:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - r^2)^{1/2}} \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(M,N)\, R^2(N_0,N)}$$

$$= \frac{2\pi}{R_0}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{aR_0}\right]. \tag{1.6.31}$$

Здесь $R_0 = R(M,N_0) = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Интегрирование в (1.6.30) для $z_0 = 0$ и $\rho_0 < a$ даёт π^2/R_0. Случай $z = 0$ может быть рассмотрен аналогичным образом.

Вычисленные выше интегралы могут быть названы внутренними, потому что область интегрирования была внутренность диска. Мы можем также вычислить соответствующие внешние интегралы. Например, рассмотрим интеграл

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{z}{R^3(M,N)} \frac{1}{R(N,M_0)} \tan^{-1}\frac{j_0}{R(N,M_0)}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi, \tag{1.6.32}$$

где
$$j_0 = (r^2 - a^2)^{1/2}(l_{20}^2 - a^2)^{1/2}/a. \tag{1.6.33}$$

Интегральные представления (1.1.26) и (1.3.15), а именно,

$$\frac{1}{R(N,M_0)}\tan^{-1}\frac{j_0}{R(N,M_0)} = \int_a^r \frac{[l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}\,\mathrm{d}x}{(r^2 - x^2)^{1/2}[l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)]}\lambda\left(\frac{l_{10}^2(x)}{\rho_0 r}, \phi_0 - \psi\right) \tag{1.6.34}$$

$$\frac{z}{R^3(M,N)} = -\frac{2}{\pi r}\mathcal{L}(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^\infty \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)^{1/2}}\frac{[l_2^2(t)-t^2]^{1/2}}{l_2^2(t)-l_1^2(t)}\lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(t)}, \phi-\psi\right),$$

(1.6.35)

могут быть подставлены в (1.6.32), с результатом

$$I_3 = -4\int_a^\infty \frac{[l_{20}^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)}\mathrm{d}x\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}r}{(t^2-r^2)^{1/2}}\frac{[l_2^2(t)-t^2]^{1/2}}{l_2^2(t)-l_1^2(t)}\lambda\left(\frac{l_{10}^2(x)\rho}{l_2^2(t)\rho_0}, \phi-\phi_0\right)$$

$$= 2\pi\int_a^\infty \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)}\frac{[l_{20}^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)}\lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right)\mathrm{d}x. \qquad (1.6.36)$$

Этот интеграл уже был вычислен в (1.6.27), так что мы можем написать окончательный результат

$$\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{z}{R^3(M,N)}\frac{1}{R(N,M_0)}\tan^{-1}\frac{j_0}{R(N,M_0)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi$$

$$= \pi\frac{|z|}{z}\left\{\frac{1}{R_1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\Xi_1}{R_1}\right)-\frac{\pi}{2}\frac{|zz_0|}{zz_0}\right]+\frac{1}{R_2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\Xi_2}{R_2}\right)+\frac{\pi}{2}\frac{|zz_0|}{zz_0}\right]\right\},$$

(1.6.37)

Сравнение с соответствующим внутренним интегралом (1.6.18) указывает на сходство, если мы заменим Θ на Ξ.

Второй внешний интеграл есть

$$I_4 = \int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{j_0}+\tan^{-1}\frac{j_0}{R(N,M_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(M,N)},$$

(1.6.38)

где j_0 определено в (1.6.33). Мы используем интегральные представления (смотри Упражнение 1.1.8 и (1.3.21))

$$\frac{1}{R(M,N)} = \frac{2}{\pi}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{1/2}} \frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)r}{l_2(x)x}, \phi-\psi\right),$$

(1.6.39)

$$\frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{j_0} + \tan^{-1}\frac{j_0}{R(N,M_0)}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_a^r \frac{x\mathrm{d}x}{(r^2-x^2)^{1/2}} \frac{[x^2-l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_{10}(x)x}{l_{20}(x)}, \psi-\phi_0\right).$$

(1.6.40)

Подстановка (1.6.39) и (1.6.40) в (1.6.38) приводит к

$$I_4 = 2\pi\int_a^\infty \frac{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \frac{[x^2-l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_{20}^2(x)-l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi-\phi_0\right)\mathrm{d}x.$$

(1.6.41)

Этот интеграл был вычислен в (1.6.14), и окончательный результат есть

$$\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{j_0} + \tan^{-1}\frac{j_0}{R(N,M_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(M,N)}$$

$$= \pi\frac{|z_0|}{z_0}\left\{\frac{1}{R_1}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\Theta_1}{R_1}\right] + \frac{1}{R_2}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\Theta_2}{R_2}\right]\right\}. \quad (1.6.42)$$

Мы можем заметить то же сходство между внутренним (1.6.30) и внешним (1.6.42) интегралами. Сходство идёт дальше. Используя свойства

$$(l_2^2(x)-x^2)(x^2-l_1^2(x)) = x^2z^2,$$

мы можем заключить, что для $zz_0 > 0$,

$$\Xi_1(x) = \xi(x) + \Theta(x), \quad \Xi_2(x) = \xi(x) - \Theta(x),$$

$$\Theta_1(x) = \Theta(x) + \xi(x), \quad \Theta_2(x) = \Theta(x) - \xi(x).$$

(1.6.43)

Это означает, что $\Xi_1 = \Theta_1$ и $\Xi_2 = -\Theta_2$ для $zz_0 > 0$. В случае, когда $zz_0 < 0$, соотношения меняются, а именно, $\Xi_1 = -\Theta_1$ и $\Xi_2 = \Theta_2$.

Упражнение 1.6

Введём следующие точки: $M(\rho,\phi,z)$, $M_0(\rho_0,\phi_0,z_0)$, $N(r,\psi,0)$, $N_0(\rho_0,\phi_0,0)$, $P(\rho,\phi,0)$; как и раньше, $R(\cdot,\cdot)$ обозначает расстояние между двумя точками.

1. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z_0}{R^3(N,M_0)}\left[\frac{R(N,M_0)}{h_0} + \tan^{-1}\frac{h_0}{R(N,M_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(P,N)},\ \text{for}\ \rho>a.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{R(M_0,P)}\left[\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{(l_{20}^2-a^2)^{1/2}(\rho^2-a^2)^{1/2}}{aR(M_0,P)}\right].$

Совет: используйте (1.6.30) для $z=0$.

2. Вычислите интеграл выше для $\rho<a$.

Ответ: $\pi^2/R(M_0,P)$.

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{z}{R^3(M,N)}\frac{1}{R(N,N_0)}\tan^{-1}\left[\frac{(r^2-a^2)^{1/2}(\rho_0^2-a^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)}\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{R(M,N_0)}\tan^{-1}\left[\dfrac{(\rho_0^2-a^2)^{1/2}(l_2^2-a^2)^{1/2}}{aR(M,N_0)}\right].$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{(r^2-a^2)^{1/2}}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi}{R(M,N)\,R^2(N_0,N)}$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{R(M,N_0)}\left[\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{(a^2-l_1^2)^{1/2}(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(M,N_0)}\right].$