

ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА
В МЕХАНИКЕ

Новые результаты

В.И. Фабрикант

Моим родителям посвящается

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелегко найти что—то новое в математике. Трудно найти нечто новое в чём—то очень старом, как например, теория потенциала, которую изучали великие учёные прошлых веков. Особенно трудно найти что—то новое на элементарном уровне, используя только математический аппарат, который был хорошо известен даже во времена Пуассона. Это как раз то, что автор книги смог сделать: новый и элементарный метод описан в книге, который позволяет решать смешанные граничные задачи, с различными приложениями в технике. Метод позволяет решать несимметричные задачи так же легко, как симметричные, *точно и в замкнутой форме*.

Аналитическое решение задач для неклассических областей теперь становится возможным. Основные достижения метода включают вывод явных и элементарных выражений для функций Грина, относящихся к круглой трещине и круглому штампу; разработку *теории трещин и контактных задач для областей общего вида*; исследования различных *взаимодействий* между трещинами, штампами и внешними нагрузками. Как дополнительное полезное приложение, метод даёт нам инструмент для точного вычисления различных двумерных интегралов от выражений, содержащих расстояния между двумя и более точками. Большая часть этих результатов не может быть

достигнута другими методами.

Со времён аспирантуры в Москве, автор не переставал удивляться простоте многих решений в теории потенциала и колоссальной сложностью методов, которыми эти решения были получены — использование различных интегральных преобразований и разложений по специальным функциям — аппарат недоступный обычному инженеру. Авторский поиск базировался на убеждении, что простые результаты должны быть получены простыми методами. Теперь этот метод найден и представлен здесь в деталях. Остаётся только удивляться, почему этот метод не был найден по крайней мере 100 лет назад.

Книга адресована широкой аудитории читателей, начиная с инженеров, занимающихся упругим анализом и кончая физиками и математиками. Инженер может найти в книге элементарные готовые к использованию формулы, в то время, как специалист в математической физике может заинтересоваться новыми приложениями излагаемого математического аппарата, специалист в чистой математике может исследовать групповые свойства используемых операторов или, заметив, что автор не даёт строгого обоснования для излагаемого метода, захочет исправить ситуацию.

Благодаря существующей аналогии между смешанными задачами теории упругости и другими областями науки, *книга должна быть интересна специалистам в электромагнетизме, акустике, диффузии, механике жидкости*, и так далее. Несмотря на то, что некоторые приложения подобного рода были опубликованы автором, ограничения на объём книги не позволили включить их здесь, тем не менее соответствующие ссылки сделаны в нужных местах книги.

Книга *доступна любому* читателю с высшим техническим образованием, но должна быть также интересна маститым учёным. Метод, как таковой, элементарен, но преобразования иногда очень сложны, в то время, как окончательный результат обычно очень простой. Читатель, который интересуется

приложениями общих результатов, может пропустить вывод и использовать окончательные формулы, что обычно не требует больших усилий. Читатель, который хочет освоить метод для решения новых задач, должен повторить выводы формул во всех деталях. Предлагаемые упражнения очень важны для таких читателей. Упражнения даны различной степени трудности, начиная с очень простых и кончая очень сложными, некоторые могут быть основой для диссертации.

Содержание книги полностью базируется на результатах автора; по этой причине работы других авторов упоминаются только тогда, когда это абсолютно необходимо, например, численные результаты нужны для сравнения, для оценки точности приближённого решения или чтобы показать ошибки в существующих решениях. Существуют различные книги и обзорные статьи, которые дают полное представление о достижениях в теории упругости. Данная книга не ставила своей целью повторять их или вступать в соревнование с ними.

Развитие нового метода ни в коей мере не может считаться законченным, это только начало: результаты, представленные в книге, можно сравнить с верхушкой айсберга, принимая во внимание многочисленные приложения предлагаемого метода к различным областям науки, которые будут воплощены в будущем. Решение фундаментальных задач в простой форме позволяет нам рассматривать более сложные задачи, которые никто не осмеливался даже попробовать раньше. *Метод может быть расширен* приложениями к сферическим, тороидальным и другим системам координат, так что более сложные конфигурации могут быть рассмотрены. Метод оказался полезным также в обобщённой теории потенциала. Некоторые результаты в этой области были опубликованы автором, но не включены в эту книгу по причине ограничений на объём.

Для удобства читателей, каждая глава (и каждый подраздел, где возможно) были сделаны взаимно независимыми. Читатель может пропустить несколько подразделов и продолжать читать, не теряя возможности понимать материал. С другой стороны, результатом такого подхода явилось повторение описаний и

определений. Автор считает, что добавочные удобства оправдывают несколько лишних страниц в книге.

Книга содержит так много нового материала, что некоторые ошибки и опечатки неизбежны, несмотря на все усилия автора. Автор будет благодарен за информацию о них. Читательские комментарии могут быть посланы автору по адресу:

*V.I. Fabrikant
prisoner #167932D
Archambault jail
Ste-Anne-des-Plaines
Quebec, Canada J0N 1H0*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	9
ГЛАВА 1. ОПИСАНИЕ НОВОГО МЕТОДА	
1.1 Интегральное представление для величины, обратной расстоянию между двумя точками	17
1.2 Свойства \mathcal{L} -операторов	24
1.3 Некоторые дальнейшие интегральные представления	27
1.4 Внутренняя смешанная граничная задача для полупространства	33
1.5 Внешняя смешанная граничная задача для полупространства	45
1.6 Некоторые фундаментальные интегралы	65
ГЛАВА 2. СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	
2.1 Общее решение	75
2.2 Решения для точечных сил	80
2.3 Внутренняя смешанная задача первого рода	84
2.4 Внешняя смешанная задача первого рода	95
2.5 Интегральное представление для q^2/R^3	104
2.6 Внутренняя смешанная задача второго рода	108
2.7 Внешняя смешанная задача второго рода	114
2.8 Обратная задача теории трещин в линейной упругости	133

ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ	
3.1	Общая формулировка задач 146
3.2	Внутренняя осесимметричная основная смешанная задача 148
3.3	Внешняя осесимметричная основная смешанная задача 174
3.4	Обобщение на неоднородные полупространства 181
3.5	Влияние сдвигающей силы и опрокидывающего момента на круглый штамп, сцеплённый с основанием 185
3.6	Неосесимметричная внутренняя основная смешанная задача 191
3.7	Неосесимметричная внешняя основная смешанная задача 203
	Аппендикс А3.1 210
	Аппендикс А3.2 214
	Аппендикс А3.3 218
ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ТРЕЩИН	
4.1	Плоская трещина под произвольным нормальным давлением 225
4.2	Точечная нагрузка на круглую трещину 232
4.3	Сосредоточенная сила, действующая вне круглой трещины 234
4.4	Плоская трещина под действием произвольной сдвигающей нагрузки 236
4.5	Круглая трещина под однородной нормальной нагрузкой 248
4.6	Круглая трещина под однородной сдвигающей нагрузкой 253
4.7	Асимптотическое поведение напряжений и перемещений около края трещины 257
4.8	Плоская трещина произвольной формы 264
4.9	Трещина произвольной формы под действием однородного сдвига 278
4.10	Близкие взаимодействия компланарных круглых трещин под действием нормального давления 280
4.11	Близкие взаимодействия компланарных круглых трещин

под действием сдвигающих напряжений	297
Аппендикс А4.1	312
Аппендикс А4.2	316
Аппендикс А4.3	317
Аппендикс А4.4	322
ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ	
5.1 Контактная задача для гладкого штампа	329
5.2 Плоский центрально нагруженный круглый штамп	333
5.3 Наклонный круглый штамп на упругом полупространстве	337
5.4 Плоский штамп произвольной формы под действием нормальной центрально приложенной силы	341
5.5 Наклонный штамп общей формы в плане	352
5.6 Неплоский штамп общей формы в плане	372
5.7 Плоский гибкий штамп общей формы в плане под сдвигающей нагрузкой	392
5.8 Задача Рейсснера—Сагоци для областей общей формы	398
5.9 Взаимодействие между нормально нагруженными штампами	407
5.10 Взаимодействие между гибкими штампами под сдвигающими нагрузками	417
5.11 Контактная задача для негладкого штампа	427
Аппендикс А5.1	430
ЛИТЕРАТУРА	447