

Projeto de EM-057

Introdução ao Método de

Elementos Finitos

2º Semestre 1999

**Formulação Variacional, aproximação e
uso do pacote ANSYS, no problema de
uma placa submetida a uma carga
transversal.**

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt - DPM

Alunos: Rogério G. Oliveira – RA:911168
Fábio G. Ferraz – RA:995318

ÍNDICE

1. HIPÓTESES BÁSICAS	2
2. DETERMINAÇÃO DA FORMA FORTE PARA CARGAS ATUANDO NUMA PLACA	2
2.1 DEFINIÇÃO CINEMÁTICA DA TEORIA DE KIRCHHOFF	2
2.2 DEFORMAÇÕES	4
2.3 RELAÇÕES DE MOMENTO-CURVATURA	6
2.3.1 Movimentos rígidos	6
2.3.2 Determinação da potência interna	7
2.3.3 Aplicação do princípio da potência virtual (PPV)	10
2.3.4 Caracterização dos esforços externos	10
2.3.5 Aplicação da equação constitutiva	12
3. DETERMINAÇÃO DA FORMA FRACA PARA CARGAS ATUANDO NUMA PLACA	13
4. APROXIMAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CARGAS ATUANDO NUMA PLACA	15
5. IMPLEMENTAÇÃO NO ANSYS.	17
5.1 - INTRODUÇÃO	17
5.1.1 Dados para análise	18
5.2 –ANÁLISE PELA LITERATURA (TIMOSHENKO, 1959)	18
5.2.2 Realização dos cálculos	19
5.2.3 Primeira Análise: Placa retangular – 4 lados fixos	20
5.2.4 Segunda Análise: Placa retangular – 4 lados simplesmente suportados	20
5.2.5 Terceira Análise: Placa retangular – 2 lados fixos e simplesmente suportados	20
5.3. ANÁLISE PELO PACOTE ANSYS	21
5.3.1 Considerações iniciais da análise	21
5.3.2 Primeira análise: Placa Retangular com os 4 lados Fixos	22
5.3.3 Segunda análise: Placa Retangular com os 4 lados Simplesmente Apoiados	24
5.3.4 Terceira análise: Placa Retangular com o 2 lados Simplesmente Apoiados e 2 lados Fixos	26
5.4. CONCLUSÃO DAS ANÁLISES	28
6. REFERÊNCIAS	29

1. HIPÓTESES BÁSICAS

Assume-se que a placa plana suporta cargas transversais através de sua flexão. Esta flexão é pequena em comparação com a espessura da placa. Assume-se que as extremidades estão livres para se mover no plano da placa. A partir destas considerações, as tensões no meio do plano da placa, podem ser desconsideradas.

Existem duas teorias para descrever as deformações de uma placa submetida a uma carga transversal. Para placas finas, as deformações podem ser descritas pela teoria de Kirchhoff, enquanto para placas grossas ou placas sobrepostas, as deformações são descritas pela teoria de Mindlin, que admite tensões de cisalhamento na direção transversal ao plano médio da placa. Este trabalho abordará apenas a teoria de Kirchhoff.

2. DETERMINAÇÃO DA FORMA FORTE PARA CARGAS ATUANDO NUMA PLACA

2.1 DEFINIÇÃO CINEMÁTICA DA TEORIA DE KIRCHHOFF

A hipótese cinemática no modelo de Kirchhoff consiste em supor que os pontos na superfície intermediária ($z=0$) da placa movem-se apenas na direção z quando a placa é fletida. Uma linha reta e normal a superfície intermediária permanece reta e normal após a flexão (vide linha AB na Fig. 1). A tensão de cisalhamento transversal é considerada 0.

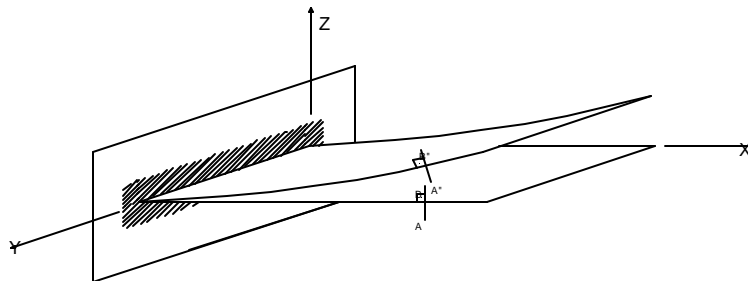


Figura 1. Cinemática da placa de Kirchhoff. Ação de movimento

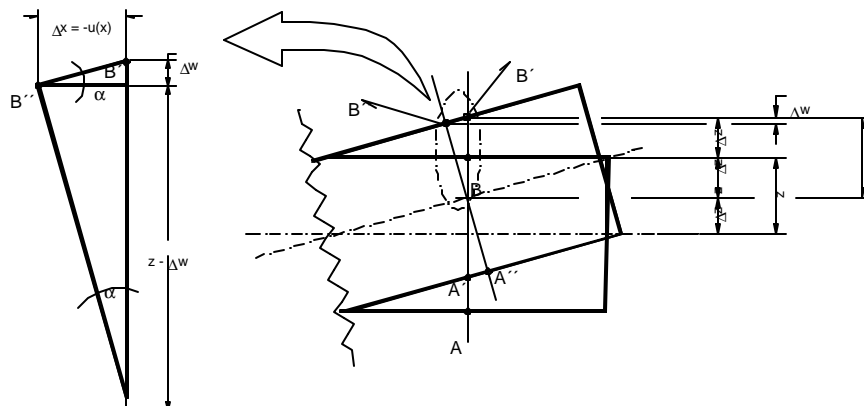


Figura 2. Cinemática da placa de Kirchhoff. Seção AB em detalhes

Os pontos que não estão na superfície intermediária, têm um descolamento u e v (vide deslocamento u na Fig. 2), nas direções x e y , respectivamente.

Pode-se perceber pela Fig. 2, que o deslocamento axial Δu do ponto A é obtido considerando-se a diferença entre a posição inicial e final deste ponto. Logo:

$$\Delta u = x - \Delta x - x = -\Delta x \quad (1)$$

Se o ponto A estiver a uma distância z do eixo x , o qual passa pelo centro da placa, obtém-se as seguintes relações para a tangente do ângulo α :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\Delta x}{z - \Delta w} = -\frac{u(x)}{z - \Delta w} \\ \tan \alpha &= \frac{\Delta w}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = -\frac{u(x)}{z - \Delta w} \Rightarrow u(x) = -z \frac{\Delta w}{\Delta x} + \frac{(\Delta w)^2}{\Delta x} \quad (3)$$

Se o ângulo α for pequeno, os termos Δx e Δw também são pequenos e o termo $\frac{(\Delta w)^2}{\Delta x}$ pode ser desprezado. Esta consideração é análoga a tomar o limite para $\Delta x \rightarrow 0$ e o deslocamento axial $u(x)$ na seção x é dado por:

$$u(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-z \Delta w}{\Delta x} \right) = -z \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad (4)$$

que equivale à:

$$u(x) = -z \frac{dw(x, y)}{dx} \quad (5)$$

O mesmo raciocínio utilizado para descrever a flexão na direção x pode ser usado para descrever a flexão na direção y , desta forma, as ações de movimento na flexão são dadas por um campo vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que apresenta as seguintes componentes:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{dw(x, y)}{dx} \\ -z \frac{dw(x, y)}{dy} \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

O conjunto das ações cinematicamente possíveis V é definido por:

$$V = \left\{ \mathbf{u} \mid u(x) = -z \frac{dw(x, y)}{dx}, v(x) = -z \frac{dw(x, y)}{dy}, w(x, y) = w(x, y) \right\} \quad (7)$$

Caso a placa não tenha nenhuma restrição, o conjunto de ações admissíveis coincide com V .

2.2 DEFORMAÇÕES

De acordo com a cinemática dotada para a placa, as seções transversais apresentam um deslocamento axial $u(x)$ e $v(y)$ que varia linearmente na seção. Para esses deslocamentos, associam-se as deformações específicas ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} . Para se determinar estas deformações, considera-se a variação dos deslocamentos axiais de duas seções arbitrárias da placa.

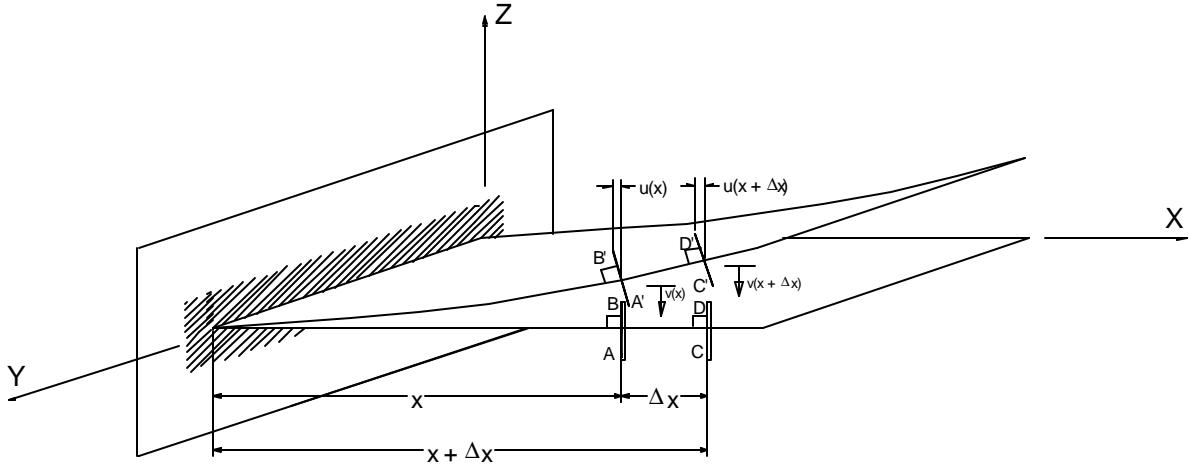


Figura 3. Deformação na placa segundo a teoria de Kirchhoff

Sejam duas seções arbitrárias AB e CD no eixo x , conforme a Fig. 3, que distam respectivamente x e $x + \Delta x$ da origem do sistema de referência da placa. Devido a ações de flexão no eixo x , estas seções apresentam deslocamentos axiais $u(x)$ e $u(x + \Delta x)$, que são funções dos deslocamentos transversais $w(x)$ e $w(x + \Delta x)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} u(x) &= -z \frac{dw(x)}{dx} \\ u(x + \Delta x) &= -z \frac{dw(x + \Delta x)}{dx} \end{aligned} \quad (8)$$

Escrevendo-se a variação específica do deslocamento destas seções transversais com:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{\left(-z \frac{dw(x + \Delta x)}{dx}\right) - \left(-z \frac{dw(x)}{dx}\right)}{\Delta x} = -z \frac{d[w(x + \Delta x) - w(x)]}{dx \Delta x} \quad (9)$$

Tomando-se o limite da relação anterior para $\Delta x \rightarrow 0$, fica-se com:

$$\mathbf{e}_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -z \frac{\frac{d[w(x + \Delta x) - w(x)]}{dx}}{\Delta x} \right\} = -z \frac{d}{dx} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad (10)$$

De acordo com a definição de derivado, a Eq. 10 fica:

$$\mathbf{e}_{xx}(x) = -z \frac{d}{dx} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = -z \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \quad (11)$$

Pode-se utilizar mesmo procedimento utilizado para obtenção de ϵ_{xx} , para se obter ϵ_{yy} .

Para obter-se γ_{xy} , considera-se primeiramente a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta y} &= \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{y + \Delta y - y} = \frac{\left(-z \frac{dw(x + \Delta x)}{dx} \right) - \left(-z \frac{dw(x, y)}{dx} \right)}{\Delta y} \\ &= -z \frac{\frac{d[w(x + \Delta x, y) - w(x, y)]}{dx}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (12)$$

Tomando-se o limite da relação anterior para $\Delta y \rightarrow 0$, fica-se com:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ -z \frac{\frac{d[w(x + \Delta x, y) - w(x, y)]}{dx}}{\Delta y} \right\} = -z \frac{d}{dx} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} \quad (13)$$

De acordo com a definição de derivada, a Eq. 13 fica:

$$\mathbf{e}_{xy} = -z \frac{d}{dx} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} = -z \frac{d^2 w(x, y)}{dxdy} \quad (14)$$

Considerando-se agora, a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{\Delta x} &= \frac{v(y + \Delta y) - v(y)}{x + \Delta x - x} = \frac{\left(-z \frac{dw(x, y + \Delta y)}{dy} \right) - \left(-z \frac{dw(x, y)}{dy} \right)}{\Delta x} \\ &= -z \frac{\frac{d[w(x, y + \Delta y) - w(x, y)]}{dy}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (15)$$

Tomando-se o limite da relação anterior para $\Delta x \rightarrow 0$, fica-se com:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -z \frac{\frac{d[w(x, y + \Delta y) - w(x, y)]}{dy}}{\Delta x} \right\} = -z \frac{d}{dy} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad (16)$$

De acordo com a definição de derivada, a Eq.16 fica:

$$\mathbf{e}_{yx} = -z \frac{d}{dy} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = -z \frac{d^2 w(x, y)}{dy dx} \quad (17)$$

Sendo $\mathbf{g}_{xy} = \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{e}_{yx}$, fica-se com:

$$\mathbf{g}_{xy} = -z \frac{d^2 w(x, y)}{dx dy} - z \frac{d^2 w(x, y)}{dy dx} = -2z \frac{d^2 w(x, y)}{dx dy} \quad (18)$$

O operador de deformação D é dados por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} & 0 \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço W é o conjunto de todas as funções escalares ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e γ_{xy} relativas as deformações da placa e obtidas aplicando-se o operador D no espaço V , ou seja:

$$D : V \rightarrow W$$

2.3 RELAÇÕES DE MOMENTO-CURVATURA

Considerando-se as componentes de deformação não-nulas ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e γ_{xy} , devem existir funções σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} respectivamente, que representam o estado das forças internas nas seções da placa, nas direções x e y . As funções escalares σ_{xx} , σ_{yy} são denominadas respectivamente tensão normal ao plano x na direção x e tensão normal ao plano y na direção y enquanto a função escalar τ_{xy} é denominada tensão de cisalhamento no plano x , na direção y .

2.3.1 Movimentos rígidos

Para um movimento de corpo rígido, a potência interna do corpo é nula. Isto implica que todas as deformações são nulas nas seções x e y da placa. Analisando primeiramente a deformação ϵ_{xx} , tem-se a seguinte relação:

$$e_{xx}(x) = -z \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} = -z \frac{d\left(\frac{dw(x, y)}{dx}\right)}{dx} = 0$$

Para que a condição anterior seja satisfeita, é necessário que a rotação $\frac{dw(x, y)}{dx}$ seja constante em toda seção transversal ao longo do eixo x. Isto implica uma rotação rígida constante em torno do eixo y, conforme ilustrado na Fig. 4.

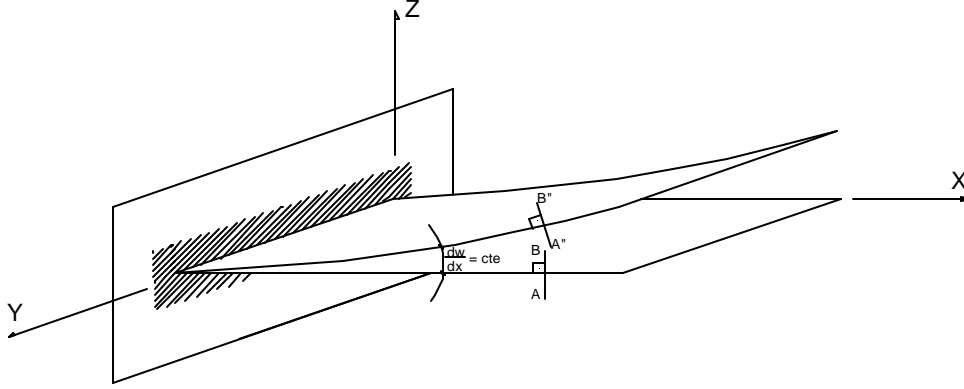


Figura 4. Movimento de corpo rígido na placa: Rotação em torno do eixo y.

Considerando-se a deformação ϵ_{yy} , a partir do mesmo raciocínio utilizado para a deformação ϵ_{xx} , obtém-se que a placa tem uma rotação rígida e constante ao redor do eixo x.

Para que a deformação γ_{xy} seja nula, também é necessário que a placa tenha uma rotação rígida em torno do eixo x e em torno do eixo y.

O conjunto de todas as ações rígidas em V , ou seja as ações $\mathbf{u} \in V$ tal que:

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \gamma_{xy} = \mathbf{D}\mathbf{u} = 0;$$

definem o subconjunto $N(D)$ das ações rígidas da placa. Este conjunto é definido formalmente como:

$$N(D) = \left\{ \mathbf{u}(x) \in V \mid \frac{dw}{dx} = cte, \frac{dw}{dy} = cte, \mathbf{D}\mathbf{u} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} - z \frac{d^2 w}{dy^2} - 2z \frac{d^2 w}{dxdy} = 0 \right\}$$

2.3.2 Determinação da potência interna

A soma do produto das tensões citadas pela sua respectiva deformação representa a densidade de trabalho interno em cada ponto da placa. Para se obter o trabalho interno total deve-se somar a densidade de trabalho de todos os pontos da placa. Sendo a placa um meio contínuo, emprega-se uma integral para representar esta soma. Desta forma obtemos a potência interna da placa pela seguinte equação:

$$Pi = - \int_V \mathbf{s}_{xx}(x) \mathbf{e}_{xx} + \mathbf{s}_{yy}(x) \mathbf{e}_{yy} + \mathbf{t}_{xy}(x, y) \mathbf{g}_{xy} dV \quad (19)$$

Introduzindo-se as equações de deformação deduzidas anteriormente na Eq. 19, fica-se com:

$$Pi = -\int_V \mathbf{s}_{xx}(x) \left(-z \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \right) + \mathbf{s}_{yy}(x) \left(-z \frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} \right) + \mathbf{t}_{xy}(x, y) \left(-2z \frac{d^2 w(x, y)}{dxdy} \right) dV \quad (20)$$

A Eq 20 pode ser escrita como:

$$Pi = -\int_V \mathbf{s}_{xx}(x) \left(-z \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \right) dV - \int_V \mathbf{s}_{yy}(x) \left(-z \frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} \right) dV - \int_V \mathbf{t}_{xy}(x, y) \left(-2z \frac{d^2 w(x, y)}{dxdy} \right) dV \quad (21)$$

Analizando separadamente cada termo, temos que o primeiro termo da equação pode ser descrito por uma integral ao longo do da espessura t da placa e da área do plano xy. Portanto:

$$-\int_V \mathbf{s}_{xx}(x) \left(-z \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \right) dV = -\int_A \left(-\int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{s}_{xx}(x) dz \right) \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} dA \quad (22)$$

O termo $\sigma_{xx}(x)dz$ representa uma força na direção x, que quando multiplicada pela distância z, resulta num momento na direção y. O efeito deste momento é a flexão da placa sendo por isso denominado momento fletor em relação ao eixo y, cujo símbolo é $M_y(x)$. Portanto:

$$M_y(x) = -\int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{s}_{xx}(x) dz \quad (23)$$

O segundo termo da Eq. 21 pode ser analisado de forma análoga ao primeiro termo, resultando em:

$$M_x(y) = -\int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{s}_{yy}(y) dz \quad (24)$$

O último termo da Eq. 21 também pode ser descrito por uma integral da espessura t e outra integral na área do plano xy. Portanto:

$$-2 \int_V \mathbf{t}_{xy}(x, y) \left(-z \frac{d^2 w(x, y)}{dxdy} \right) dV = -2 \int_A \left(-\int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{t}_{xy}(x, y) dz \right) \frac{d^2 w(x, y)}{dxdy} dA \quad (25)$$

O termo $\tau_{xy}dz$ representa uma força no plano x orientada na direção y que ao ser multiplicada pela distância z origina um momento torsor denotado por $M_{xy}(x, y)$. Portanto:

$$M_{xy} = -\int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{t}_{xy}(x, y) dz \quad (26)$$

Temos então, para uma placa fina de acordo com a teoria de Kirchhoff, um espaço de esforços internos definidos por funções contínuas M , que representam momentos fletores e torsor nas seções da placa.

Rescrevendo a Eq. 21 em termos de momentos fletores e torsores fica-se com:

$$Pi = - \int_A M_y(x) \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} dA - \int_A M_x(y) \frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} dA - \int_A M_{xy}(x, y) 2 \frac{d^2 w(x, y)}{dxdy} dA \quad (27)$$

Os deslocamentos $w(x)$, $w(y)$ e $w(x, y)$ estão com derivadas de ordem dois na expressão de potência interna. Se deseja-se obter uma relação contendo apenas $w(x)$, $w(y)$ e $w(x, y)$, deve-se integrar a Eq. 27 por partes duas vezes, onde obtém-se:

$$\begin{aligned} Pi &= \int_A \frac{dM_y(x)}{dx} \frac{dw(x, y)}{dx} dA - \int_{\partial A} M_y(x) \frac{dw(x, y)}{dx} \mathbf{h}_x \partial A + \\ &\quad \int_A \frac{dM_x(y)}{dy} \frac{dw(x, y)}{dy} dA - \int_{\partial A} M_x(y) \frac{dw(x, y)}{dy} \mathbf{h}_y \partial A + \\ &\quad \int_A \frac{dM_{xy}(x, y)}{dy} 2 \frac{dw(x, y)}{dx} dA - \int_{\partial A} M_{xy}(x, y) 2 \frac{dw(x, y)}{dx} \mathbf{h}_y \partial A \\ &= - \int_A \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} w(x, y) dA + \int_{\partial A} \frac{dM_y(x)}{dx} w(x, y) \mathbf{h}_x \partial A - \int_{\partial A} M_y(x) \frac{dw(x, y)}{dx} \mathbf{h}_x \partial A \\ &\quad - \int_A \frac{d^2 M_x(y)}{dy^2} w(x, y) dA + \int_{\partial A} \frac{dM_x(y)}{dy} w(x, y) \mathbf{h}_y \partial A - \int_{\partial A} M_x(y) \frac{dw(x, y)}{dy} \mathbf{h}_y \partial A \\ &\quad - \int_A \frac{d^2 M_{xy}(x, y)}{dxdy} 2w(x, y) dA + \int_{\partial A} \frac{dM_{xy}(x, y)}{dy} 2w(x, y) \mathbf{h}_x \partial A - \int_{\partial A} M_{xy}(x, y) 2 \frac{dw(x, y)}{dx} \mathbf{h}_y \partial A \end{aligned} \quad (28)$$

Após a integração por partes, obtém-se uma expressão com três integrais na área formada pelo plano xy e três integrais no contorno da área "A", relativas as condições de contorno da placa.

Deve-se notar que as derivadas $\frac{dM_y(x)}{dx}$ e $\frac{dM_x(y)}{dy}$ representam uma força pois, se o momento fletor estiver dado em Nm e o comprimento x estiver dado em m , obtém-se um termo em N .

Considerando-se o momento na direção y e o comprimento da viga na direção x , tem-se uma força transversal na direção z ou seja na seção transversal da placa. Esta força é denotada por $Q_z(x)$ e denominada força cortante. Ao considerar-se o momento na direção x e a largura da placa na direção y , também se obtém uma força transversal na direção z , isto é, obtém-se uma força cortante $Q_z(y)$ que varia ao longo da largura da placa.

Quando se considera o momento torsor M_{xy} e a largura da placa na direção y , obtém-se uma força cortante na direção x , denotada por $Q_x(y)$. De acordo com as considerações da hipótese básica, a placa não sofre cisalhamento nas seções paralelas ao plano xy portanto, a força $Q_x(y)$ é igual a 0.

Os termos $\frac{dw(x,y)}{dx}$ e $\frac{dw(x,y)}{dy}$ indicam rotações no eixo y e x respectivamente, sendo denotadas por θ_y e θ_x . Pode-se então, rescrever a Eq. 28 como:

$$\begin{aligned}
 Pi = & - \int_A \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} w(x,y) dA + \int_{\partial A} Q_z(x) w(x,y) \mathbf{h}_x \partial A - \int_{\partial A} M_y(x) \mathbf{q}_y \mathbf{h}_x \partial A \\
 & - \int_A \frac{d^2 M_x(y)}{dy^2} w(x,y) dA + \int_{\partial A} Q_z(y) w(x,y) \mathbf{h}_y \partial A - \int_{\partial A} M_x(y) \mathbf{q}_x \mathbf{h}_y \partial A \\
 & - \int_A \frac{d^2 M_{xy}(x,y)}{dxdy} 2w(x,y) dA - \int_{\partial A} M_{xy}(x,y) 2\mathbf{q}_y \mathbf{h}_y \partial A
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 = & - \int_A \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} w(x,y) + \frac{d^2 M_x(y)}{dy^2} w(x,y) + 2 \frac{d^2 M_{xy}(x,y)}{dxdy} w(x,y) dA \\
 & + \int_{\partial A} (Q_z(x) w(x,y) - M_y(x) \mathbf{q}_y \mathbf{h}_x) \partial A \\
 & + \int_{\partial A} (Q_z(y) w(x,y) - M_x(y) \mathbf{q}_x \mathbf{h}_y - 2M_{xy}(x,y) \mathbf{q}_y \mathbf{h}_y) \partial A
 \end{aligned}$$

Os termos $\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 M_x(y)}{dy^2}$ e $\frac{d^2 M_{xy}(x,y)}{dxdy}$ representam uma força por unidade de comprimento, ou seja, existe uma carga distribuída internamente ao longo das direções x e y. Assim como a força cortante, esta carga distribuída está presente na direção vertical, isto é, no eixo z do sistema de coordenadas.

Os esforços internos compatíveis com a cinemática da placa em flexão são forças cortantes, momentos fletores e momento torsor concentrados no perímetro da placa, assim como uma carga distribuída por toda a área da placa, nas direções x e y.

2.3.3 Aplicação do princípio da potência virtual (PPV)

Para caracterizar o conjunto de esforços externos f , compatíveis com a cinemática definida para o modelo de Placa de Kirchhoff, utiliza-se o PPV. A partir da Eq. 29 e do PPV, tem-se que para qualquer ação de movimento virtual $\hat{\mathbf{u}}(x,y,z) \in V$:

$$\begin{aligned}
 Pe + Pi = 0 \Rightarrow & \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle - \int_A \left(\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} + \frac{d^2 M_x(y)}{dy^2} + 2 \frac{d^2 M_{xy}(x,y)}{dxdy} \right) \hat{w}(x,y) dA + \\
 & \int_{\partial A} \left(Q_z(x) \hat{w}(x,y) - M_y(x) \hat{\mathbf{q}}_y \right) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} \left(Q_z(y) \hat{w}(x,y) - M_x(y) \hat{\mathbf{q}}_x - 2M_{xy}(x,y) \hat{\mathbf{q}}_y \right) \mathbf{h}_y \partial A = 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

2.3.4 Caracterização dos esforços externos

Quando um corpo encontra-se em equilíbrio, o PPV estabelece que a potência interna é igual a potência externa, para qualquer ação virtual de movimento. A partir da potência interna estabelecida pela Eq. 29 pode-se caracterizar os esforços externos compatíveis com o PPV.

Tem-se então, uma carga distribuída externa $q(S)\hat{w}$, normal ao eixo x e outra normal ao eixo y. Estas cargas externas, equilibram-se com os esforços internos presentes no perímetro da placa nas direções normais aos eixos x e y.

Para equilibrar as cargas distribuída na superfície da placa, deve haver uma densidade de força externa transversal denotada por $q(x,y)$ cuja potência $\int_A q(x,y)\hat{w}(x,y)dA$ associada a um deslocamento virtual arbitrário $\hat{w}(x,y)$, equilibre os termos da potência interna.

Os esforços externos f para a placa são:

$$f : \begin{Bmatrix} q(S)\mathbf{h}_x \\ q(S)\mathbf{h}_y \\ q(x,y) \end{Bmatrix}$$

Tem-se então uma potência externa das forças f para qualquer ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x,y,z) \in V$, da seguinte forma:

$$Pe = \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_A q(x,y)\hat{w}(x,y)dA + \int_{\partial A} \left[\left(q(S)\hat{w}(x,y) \right) \mathbf{h}_x + \left(q(S)\hat{w}(x,y) \right) \mathbf{h}_y \right] \partial A \quad (31)$$

Substituindo-se a Eq.31 na Eq. 30, fica-se com:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[q(x,y) - \left(\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} + \frac{d^2 M_x(x)}{dy^2} + 2 \frac{d^2 M_{xy}(x,y)}{dxdy} \right) \right] \hat{w}(x,y) dA + \\ & \int_{\partial A} \left(q(S)\hat{w}(x,y) + Q_z(x)\hat{w}(x,y) - M_y(x)\hat{\mathbf{q}}_y \right) \mathbf{h}_x \partial A + \\ & \int_{\partial A} \left(q(S)\hat{w}(x,y) + Q_z(y)\hat{w}(x,y) - M_x(y)\hat{\mathbf{q}}_x - 2M_{xy}(x,y)\hat{\mathbf{q}}_y \right) \mathbf{h}_y \partial A = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Para que a Eq. 34 seja verdadeira para toda ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x,y,z) \in V$, termos dentro das 3 integrais devem ser simultaneamente nulos, ou seja:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} + \frac{d^2 M_x(x)}{dy^2} + 2 \frac{d^2 M_{xy}(x,y)}{dxdy} \right) + q(x,y) = 0; & x,y \in (\Omega) \\ q(S)\hat{w}(x,y) + Q_z(x)\hat{w}(x,y) - M_y(x)\hat{\mathbf{q}}_y = 0; & x,y \in (S) \\ q(S)\hat{w}(x,y) + Q_z(y)\hat{w}(x,y) - M_x(y)\hat{\mathbf{q}}_x - 2M_{xy}(x,y)\hat{\mathbf{q}}_y = 0; & x,y \in (S) \end{cases} \quad (33)$$

A expressão anterior define a forma local ou o problema do valor de contorno da placa livre de restrições cinemáticas. Tem-se uma equação diferencial de segunda ordem com termos de momento fletor e torsor, assim como duas condições de contorno. Uma das condições de contorno refere-se um momento fletor, um momento torsor e uma força cortante, normais ao eixo x e enquanto a outra condição de contorno refere-se um momento fletor, um momento torsor e uma força cortante, normais ao eixo y.

2.3.5 Aplicação da equação constitutiva

Para uma placa linearmente elástica e isotrópica, as componentes de tensão $\sigma_{xx}(x)$, $\sigma_{yy}(y)$, e τ_{xy} estão relacionadas respectivamente com as deformações $\epsilon_{xx}(x)$, $\epsilon_{yy}(y)$ e $\gamma_{xy}(x,y)$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{s}_{xx}(x) = \frac{E(x,y)}{1-\nu^2} (\mathbf{e}_{xx}(x) + \nu \mathbf{e}_{yy}(y)) \quad (34)$$

$$\mathbf{s}_{yy}(y) = \frac{E(x,y)}{1-\nu^2} (\mathbf{e}_{yy}(y) + \nu \mathbf{e}_{xx}(x)) \quad (35)$$

$$\mathbf{t}_{xy}(x,y) = \frac{E(x,y)}{2(1+\nu)} \mathbf{g}_{xy}(x,y) \quad (36)$$

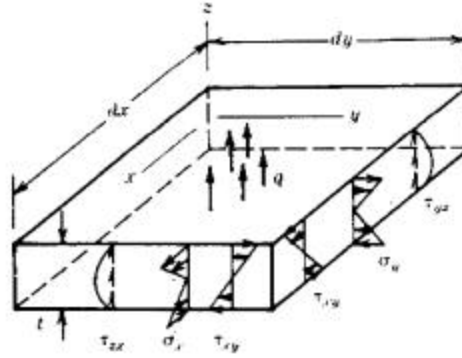


Figura 5. Tensões que agem num elemento diferencial de uma placa linearmente elástica e homogênea

Introduzindo as deformações expressas nas Eqs. 11 e 18, nas Eqs. 34 a 36, obtém-se:

$$\mathbf{s}_{xx}(x) = -z \frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} \right) \quad (37)$$

$$\mathbf{s}_{yy}(y) = -z \frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} \right) \quad (38)$$

$$\mathbf{t}_{xy}(x,y) = -z \frac{E(x,y)}{(1+\nu)} \frac{d^2 w(x,y)}{dxdy} \quad (39)$$

Substituindo-se as expressões 37 a 39 nos momentos fletores e tissor definidos nas Eqs. 23 a 26, fica-se com:

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -\int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} \right) dz \\ &= -\frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} \right) \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
M_x(y) &= -\int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} \right) dz \\
&= -\frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} \right) \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz
\end{aligned} \tag{41}$$

$$M_{xy}(x,y) = -\int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E(x,y)}{(1+\nu)} \frac{d^2 w(x,y)}{dxdy} dz = \frac{E(x,y)}{(1+\nu)} \frac{d^2 w(x,y)}{dxdy} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \tag{42}$$

Sendo $\int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = \frac{t^3}{12}$ pode se escrever D da seguinte maneira:

$$D = \frac{E(x,y)t^3}{12(1-\nu^2)} \tag{43}$$

As Eqs. 40 a 42 podem ser rescritas como:

$$M_y(x) = D \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} \right) \tag{44}$$

$$M_x(y) = D \left(\frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} + \nu \frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} \right) \tag{45}$$

$$M_{xy}(x,y) = D(1-\nu) \frac{d^2 w(x,y)}{dxdy} \tag{46}$$

Substituindo-se as Eqs. 44 a 56 na Eq. 33 chega-se na forma forte do problema de placa, que corresponde a:

$$\left(\frac{d^4 w(x,y)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x,y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x,y)}{dx^2 dy^2} \right) = \frac{q(x,y)}{D} \tag{47}$$

A Eq. 47 pode ser escrita através de um operador linear “A” da seguinte maneira:

$$Aw = f \tag{48}$$

Onde o operador “A” é um vetor da seguinte forma:

$$A = D \left[\frac{d^4}{dx^4} \quad \frac{d^4}{dy^4} \quad 2 \frac{d^4}{dx^2 dy^2} \right] \tag{49}$$

E a carga distribuída $q(x,y)$, corresponde à função f .

3. DETERMINAÇÃO DA FORMA FRACA PARA CARGAS ATUANDO NUMA PLACA

Para obter a forma fraca para uma placa sujeitas a cargas perpendiculares ao plano xy, deve-se primeiramente multiplicar a Eq. 47 por uma função $v = v(x,y)$ pertencente ao domínio do operador “A”.

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[\left(\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) - \frac{q(x, y)}{D} \right] v(x, y) dA = \\
& \int_A \left(\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) v(x, y) dA - \int_A \frac{q(x, y)}{D} v(x, y) dA
\end{aligned} \tag{50}$$

A seguir, integra-se a Eq. 50 por parte, duas vezes, ficando-se com:

$$\begin{aligned}
& \int_A \left(\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) v(x, y) dA - \int_A \frac{q(x, y)}{D} v(x, y) dA = \\
& \int_A \frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} v(x, y) dA + \int_A \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} v(x, y) dA + \int_A 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} v(x, y) dA - \int_A \frac{q(x, y)}{D} v(x, y) dA = \\
& - \int_A \frac{d^3 w(x, y)}{dx^3} \frac{dv(x, y)}{dx} dA + \int_{\partial A} \left(\frac{d^3 w(x, y)}{dx^3} v(x, y) \right) \mathbf{h}_x \partial A \\
& - \int_A \frac{d^3 w(x, y)}{dy^3} \frac{dv(x, y)}{dy} dA + \int_{\partial A} \left(\frac{d^3 w(x, y)}{dy^3} v(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A \\
& - \int_A 2 \frac{d^3 w(x, y)}{dx^2 dy} \frac{dv(x, y)}{dy} dA + \int_{\partial A} \left(2 \frac{d^3 w(x, y)}{dx^2 dy} v(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A - \int_A \frac{q(x, y)}{D} v(x, y) dA = \\
& \int_A \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \frac{d^2 v(x, y)}{dx^2} dA - \int_{\partial A} \left(\frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \frac{dv(x, y)}{dx} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{d^3 w(x, y)}{dx^3} v(x, y) \right) \mathbf{h}_x \partial A \\
& \int_A \frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} \frac{d^2 v(x, y)}{dy^2} dA - \int_{\partial A} \left(\frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} \frac{dv(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_y \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{d^3 w(x, y)}{dy^3} v(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A \\
& \int_A 2 \frac{d^2 w(x, y)}{dx dy} \frac{d^2 v(x, y)}{dx dy} dA - \int_{\partial A} \left(2 \frac{d^2 w(x, y)}{dx dy} \frac{dv(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} \left(2 \frac{d^3 w(x, y)}{dx^2 dy} v(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A \\
& - \int_A \frac{q(x, y)}{D} v(x, y) dA
\end{aligned} \tag{51}$$

Introduzindo-se as Eqs. 44 a 46 na Eq. 51, fica-se com:

$$\begin{aligned}
& \int_A D \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \frac{d^2 v(x, y)}{dx^2} dA - \int_{\partial A} \left(M_y(x) \frac{dv(x, y)}{dx} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{dM_y(x)}{dx} v(x, y) \right) \mathbf{h}_x \partial A \\
& \int_A D \frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} \frac{d^2 v(x, y)}{dy^2} dA - \int_{\partial A} \left(M_x(y) \frac{dv(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_y \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{dM_x(y)}{dy} v(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A \\
& \int_A 2D \frac{d^2 w(x, y)}{dx dy} \frac{d^2 v(x, y)}{dx dy} dA - \int_{\partial A} \left(2 \frac{M_{xy}(x, y)}{(1-\nu)} \frac{dv(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \\
& \int_{\partial A} \left(\frac{2}{(1-\nu)} \frac{dM_{xy}(x, y)}{dy} v(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A - \int_A q(x, y) v(x, y) dA
\end{aligned} \tag{52}$$

Os termos $\frac{dM_y(x)}{dx}$ e $\frac{dM_x(y)}{dy}$ representam uma força cortante perpendicular ao plano xy, denotada por $Q_z(x)$ e $Q_z(y)$. O termo $\frac{dM_{xy}(y)}{dy}$ representa uma força cortante na direção x denotada $Q_x(y)$ que é nula pois, o modelo de placa de Kirchhoff não apresenta cisalhamento no plano xy. Os termos $\frac{dv(x,y)}{dx}$ e $\frac{dv(x,y)}{dy}$ representam os ângulos de rotação do deslocamento v , ao redor do eixo y e x, respectivamente, sendo denotados por θ_y e θ_x . Pode se rescrever a Eq. 52 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_A D \frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} \frac{d^2 v(x,y)}{dx^2} dA - \int_{\partial A} (M_y(x) \mathbf{q}_y) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} (Q_z(x) v(x,y)) \mathbf{h}_x \partial A \\ & \int_A D \frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} \frac{d^2 v(x,y)}{dy^2} dA - \int_{\partial A} (M_x(y) \mathbf{q}_x) \mathbf{h}_y \partial A + \int_{\partial A} (Q_z(y) v(x,y)) \mathbf{h}_y \partial A \\ & \int_A 2D \frac{d^2 w(x,y)}{dxdy} \frac{d^2 v(x,y)}{dxdy} dA - \int_{\partial A} \left(\frac{2M_{xy}(x,y)}{1-\nu} \mathbf{q}_x \right) \mathbf{h}_x \partial A - \int_A q(x,y) v(x,y) dA \end{aligned} \quad (53)$$

Fica-se então com 5 termos referentes as condições de contorno. Estes termos são esforços distribuídos no perímetro da placa, normais ao eixo x e y, representados por momentos fletores $M_y(x)$ e $M_x(y)$, torsor $M_{xy}(y)$ e pelo produto de forças cortantes $Q_z(x)$ e $Q_z(y)$ pelo deslocamento $v(x,y)$. Para uma placa em equilíbrio, os esforços cortantes compensam os momentos fletores e torsões e a Eq. pode ser rescrita como:

$$\begin{aligned} & \int_A D \frac{d^2 w(x,y)}{dx^2} \frac{d^2 v(x,y)}{dx^2} dA + \int_A D \frac{d^2 w(x,y)}{dy^2} \frac{d^2 v(x,y)}{dy^2} dA + \\ & \int_A 2D \frac{d^2 w(x,y)}{dxdy} \frac{d^2 v(x,y)}{dxdy} dA = \int_A q(x,y) v(x,y) dA \end{aligned} \quad (54)$$

A Eq. 54 é denominada forma fraca pois, apresenta diferenciações de ordem inferior a da forma forte definida na Eq. 47. Enquanto a forma forte do problema apresenta diferenciações de até quarta ordem, a forma fraca apresenta diferenciações de segunda ordem. As funções w e v podem ser menos regulares na forma fraca pois, basta que pertençam ao conjunto de funções contínuas $C^2(\Omega)$ ou contínuas por partes $C_{cp}^2(\Omega)$. Na forma forte, estas funções necessitariam ser contínuas em $C^4(\Omega)$ ou contínuas por partes $C_{cp}^4(\Omega)$.

4. APROXIMAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CARGAS ATUANDO NUMA PLACA

Para o problema de deformação de uma placa plana cuja solução exata é $w(x,y)$, tem-se uma solução aproximada $w_n(x,y)$ da seguinte forma:

$$w_n(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i(x,y) \quad (55)$$

Onde $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto de n funções linearmente independentes denominadas funções de base, de forma ou interpolação. É necessário que estas funções escolhidas tenham ordem de diferenciação compatível com aquela presente na forma fraca. É importante também, que satisfaçam

as condições de contorno essenciais, uma vez que as condições de contorno naturais são satisfeitas pela forma fraca do problema.

Para obter-se os coeficientes a_i presentes na solução aproximada, existem diferentes métodos, tais como Resíduos ponderados (Colocação e Garlekin), Ritz e Mínimos Quadrados.

O conjunto de todas as combinações lineares das funções \mathbf{f}_i forma um subespaço linear denotado por $\text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$. Desta forma, a aproximação w_n pertence ao subespaço gerado pelas funções \mathbf{f}_i , ou seja $w_n \in \text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$. Devido ao fato da solução aproximada não coincidir exatamente com a solução w , tem-se um resíduo que no caso da placa, pode ser escrito como uma função da seguinte forma:

$$r_n(x, y) = \left(\frac{d^4 w_n(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w_n(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w_n(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) - \frac{q(x, y)}{D} \quad (56)$$

Utilizando-se o método de Garlekin para determinar a aproximação w_n , temos que o resíduo r_n deve ser ortogonal a todo elemento do $\text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ para que ele seja o mínimo possível. Quando se utiliza vetores, no sentido algébrico, a condição de ortogonalidade entre duas funções f e g implica que o produto interno das mesmas seja nulo. No caso de funções, temos que o produto interno pode ser obtido por uma integral das duas funções. Desta forma, a ortogonalidade das funções g e f pode ser escrita como:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \quad (57)$$

No caso da placa, para qualquer função $v_n \in \text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ definida por $v_n(x, y) = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{f}_i(x, y)$ a condição de ortogonalidade do resíduo ao subespaço $\text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ implica em:

$$\begin{aligned} r_n(x, y) &= \int_A \left[\left(\frac{d^4 w_n(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w_n(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w_n(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) - \frac{q(x, y)}{D} \right] v_n dA \\ &= \int_A \left(\frac{d^4 w_n(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w_n(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w_n(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) v_n dA - \int_A \frac{q(x, y)}{D} v_n dA = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Integrando-se por partes a Eq. 58, obtém-se uma equação semelhante a forma fraca do problema que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\int_A D \frac{d^2 w_n(x, y)}{dx^2} \frac{d^2 v_n(x, y)}{dx^2} dA - \int_{\partial A} \left(M_y(x) \frac{dv_n(x, y)}{dx} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{dM_y(x)}{dx} v_n(x, y) \right) \mathbf{h}_x \partial A + \\ &\int_A D \frac{d^2 w_n(x, y)}{dy^2} \frac{d^2 v_n(x, y)}{dy^2} dA - \int_{\partial A} \left(M_x(y) \frac{dv_n(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_y \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{dM_x(y)}{dy} v_n(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A + \\ &\int_A 2D \frac{d^2 w_n(x, y)}{dxdy} \frac{d^2 v_n(x, y)}{dxdy} dA - \int_{\partial A} \left(2 \frac{M_{xy}(x, y)}{(1-\nu)} \frac{dv_n(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \\ &\int_{\partial A} \left(\frac{2}{(1-\nu)} \frac{dM_{xy}(x, y)}{dy} v_n(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A - \int_A q(x, y) v_n(x, y) dA = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

A diferença básica de que é necessário que o resíduo associado a aproximação w_n seja ortogonal ao subespaço de dimensão finita, gerado por $\text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$.

Como $v_h \in \text{span}\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$, a condição de que o resíduo r_h seja ortogonal a v_h implica que o mesmo seja ortogonal a qualquer função \mathbf{f}_i . Pode-se então, escrever a Eq. 59 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_A D \frac{d^2 w_n(x, y)}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{f}_i(x, y)}{dx^2} dA - \int_{\partial A} \left(M_y(x) \frac{d\mathbf{f}_i(x, y)}{dx} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{dM_y(x)}{dx} \mathbf{f}_i(x, y) \right) \mathbf{h}_x \partial A + \\ & \int_A D \frac{d^2 w_n(x, y)}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{f}_i(x, y)}{dy^2} dA - \int_{\partial A} \left(M_x(y) \frac{d\mathbf{f}_i(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_y \partial A + \int_{\partial A} \left(\frac{dM_x(y)}{dy} \mathbf{f}_i(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A + \\ & \int_A 2D \frac{d^2 w_n(x, y)}{dxdy} \frac{d^2 \mathbf{f}_i(x, y)}{dxdy} dA - \int_{\partial A} \left(2 \frac{M_{xy}(x, y)}{(1-\nu)} \frac{d\mathbf{f}_i(x, y)}{dy} \right) \mathbf{h}_x \partial A + \\ & \int_{\partial A} \left(\frac{2}{(1-\nu)} \frac{dM_{xy}(x, y)}{dy} \mathbf{f}_i(x, y) \right) \mathbf{h}_y \partial A - \int_A q(x, y) \mathbf{f}_i(x, y) dA \end{aligned} \quad (60)$$

Substituindo a Eq. 55 na Eq. 60 e considerando que a placa esteja somente apoiada, isto é, $v_h(S) = 0$, chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \int_A D \frac{d^2 \mathbf{f}_i(x, y)}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{f}_j(x, y)}{dx^2} dA + \int_A D \frac{d^2 \mathbf{f}_i(x, y)}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{f}_j(x, y)}{dy^2} dA \\ & + \int_A 2D \frac{d^2 \mathbf{f}_i(x, y)}{dxdy} \frac{d^2 \mathbf{f}_j(x, y)}{dxdy} dA = \int_A q(x, y) \mathbf{f}_i(x, y) dA \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (61)$$

5. IMPLEMENTAÇÃO NO ANSYS.

5.1 - INTRODUÇÃO

Nos exemplos que seguem, apresentam-se modelos de placa plana submetido a um carregamento uniforme considerando-se a teoria de Kirchhof (tensões de cisalhamento transversais iguais a zero) para pequenas deflexões, onde propõe-se a comparação entre dois cálculos, um analítico, colhido da literatura (Timoshenko, 1959) e sua devida análise feita pelo pacote ANSYS.

Considerou-se as propriedades simétricas da geometria e do carregamento para modelar apenas metade da placa, além do mapeamento da malha. Para tanto, simulou-se três configurações clássicas de engaste, ou seja, quatro lados fixos, quatro lados simplesmente apoiados e por último, dois lados simplesmente apoiados e dois fixos. Ver Fig. 6.a, 6.b e 6.c.

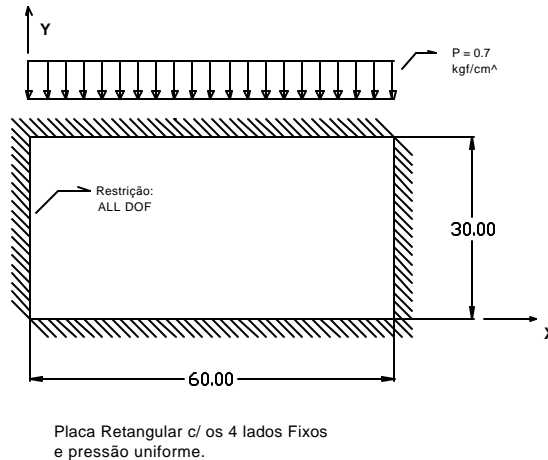


Figura 6.a

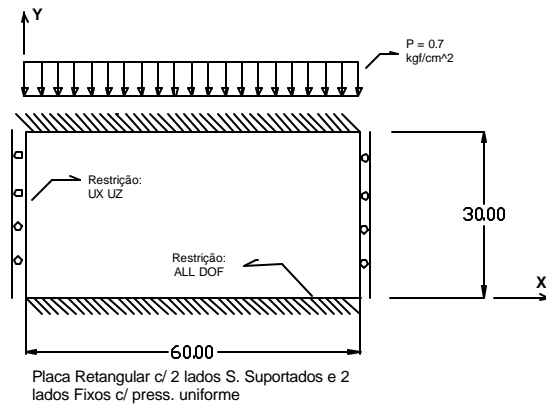


Figura 6.b

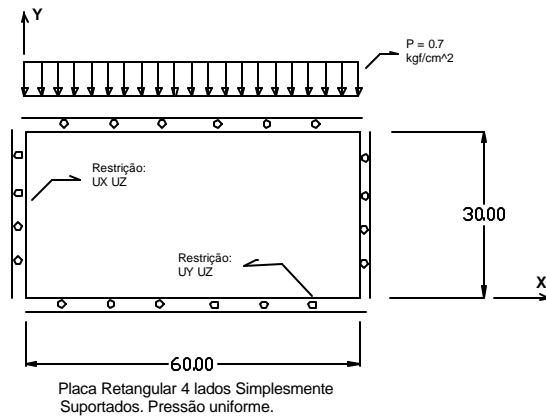


Figura 6.c

5.1.1 Dados para análise

- MATERIAL DA PLACA	AÇO CARBONO A-36	(-)
- DIMENSÕES DA PLACA	60 x 30	cm
- ESPESSURA ÚNICA	0.95	cm
- TENSÃO ADMISSÍVEL	1019	kgf/cm ²
- TENSÃO DE ESCOAMENTO	2531	kgf/cm ²
- TENSÃO ÚLTIMA	4077	kgf/cm ²
- MODULO DE ELASTICIDADE [E]	2.1E6	kgf/cm ²
- COEFICIENTE DE POASON [V]	0.3	(-)
- TEMPERATURA DE PROJETO	AMBIENTE	°C
- PRESSÃO DE PROJETO	0.7	kgf/cm ²

5.2 –ANÁLISE PELA LITERATURA (TIMOSHENKO, 1959)

5.2.1 Considerações iniciais da análise

Numa placa sujeita a flexão pura, toma-se o plano médio antes da flexão ocorrer como o plano xy . Durante a flexão, os pontos que estavam no plano xy , sofrem um pequeno deslocamento

perpendicular ao plano xy e formam a superfície média da placa (ver capítulo 2). Tais deslocamentos da superfície média são chamados deflexões (w).

Conforme Timoshenko (1959), cap. 2 pg 42, as magnitudes de tensão numa placa que sofre flexão pura ocorrem normais às seções paralelas aos planos xz e yz . Tais tensões normais são máximas, e definidas como:

$$S_{yy}(máx) = \frac{6M_x(máx)}{t^2} \quad (62)$$

$$S_{xx}(máx) = \frac{6M_y(máx)}{t^2} \quad (63)$$

A Hipótese acima será precisa o suficiente somente nos casos onde as tensões correspondentes aos alongamentos sofridos pela superfície média são pequenas em comparação com as tensões máxima de flexão fornecidas pelas Eqs. 62 e 63, ou, o que é equivalente, se a deformação da superfície média é pequena em comparação com a deformação máxima de flexão ($t/2r_{mín}$), onde $r_{mín}$ é o raio de curvatura da placa após a deformação e ' t ' é a espessura da placa. Este requerimento impõe uma limitação adicional nas deflexões ' w ' da placa, ou seja, que as mesmas devem ser pequenas em comparação com sua espessura ' t ', sendo que o cálculo das deflexões ' w ' e dos momentos $M_x(máx)$ e $M_y(máx)$ varia de acordo com o caso.

A solução analítica destes valores consiste em determinar a solução para a equação diferencial abaixo (Eq. 47), de acordo com as condições de contorno e carregamento proposto em cada caso. Tal equação representa a forma forte da formulação de placas (vide Cap. 2).

$$\left(\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} \right) = \frac{q(x, y)}{D}$$

Onde:

- ' q ' representa a pressão uniformemente distribuída sobre a placa;
- $D = \frac{E(x, y)t^3}{12(1-\nu^2)}$, representa a rigidez flexional da placa (Eq.43), que no caso de uma viga, seria representado por EI .

Portanto, para o nosso caso, com ' E ' constante, temos:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = D = \frac{2.1e6 * 0.95^3}{12(1-0.3^2)} = 164879.81$$

5.2.2 – Realização dos cálculos

Conforme Timoshenko (1959), o momento máximo e a deflexão máxima são dados pelas seguintes equações:

$$M(máx) = \mathbf{b}qa^2 \quad (64)$$

$$w(máx) = \frac{\mathbf{a}qa^4}{D} \quad (65)$$

Onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são constantes definidas pela geometria da placa, sendo que nos casos em consideração, temos uma placa 60 x 30 cm, tomando-se $a = 30$ cm e $b = 60$ cm, definimos a razão

$b/a = 2$. Com este valor, obtêm-se os valores das constantes ***a*** e ***b***. Munido de tais valores, substitui-se nas Eqs. 64 e 65. Segue abaixo a descrição dos cálculos feitos conforme esta sistemática.

5.2.3 Primeira Análise: Placa retangular – 4 lados fixos

Conforme Timoshenko (1959), cap. 6, pg, 202, Tab. 35, os valores das constantes para este caso são ***a*** = 0.00254 e ***b*** = 0.08290 , portanto temos:

$$M_y(máx) = \mathbf{b}qa^2 = 0.08290 * 0.7 * 30^2 = 52.227 \text{ kgf*cm}$$

$$w(máx) = \frac{\mathbf{a}qa^4}{D} = \frac{0.00254 * 0.7 * 30^4}{164879.81} = 0.008735 \text{ cm}$$

Assim, conforme a Eq. 63 a tensão máxima é:

$$\mathbf{s}_{xx}(máx) = \frac{6M_y(máx)}{t^2} = \frac{6 * 52.227}{0.95^2} = 347.22 \text{ kgf/cm}^2$$

5.2.4 Segunda Análise: Placa retangular – 4 lados simplesmente suportados

Conforme Timoshenko (1959), cap. 5, pg, 120, Tab. 8, os valores das constantes para este caso são ***a*** = 0.01013 e ***b*** = 0.10170 , portanto temos:

$$M_y(máx) = \mathbf{b}qa^2 = 0.10170 * 0.7 * 30^2 = 64.071 \text{ kgf*cm}$$

$$w(máx) = \frac{\mathbf{a}qa^4}{D} = \frac{0.01013 * 0.7 * 30^4}{164879.81} = 0.034836 \text{ cm}$$

Assim, conforme a Eq. 63, a tensão máxima é:

$$\mathbf{s}_{xx}(máx) = \frac{6M_y(máx)}{t^2} = \frac{6 * 64.071}{0.95^2} = 425.96 \text{ kgf/cm}^2$$

5.2.5 Terceira Análise: Placa retangular – 2 lados fixos e simplesmente suportados

Conforme Timoshenko (1959), cap. 5, pg, 120, Tab. 8, os valores das constantes para este caso são ***a*** = 0.00260 e ***b*** = 0.08420 , portanto temos:

$$M_y(máx) = \mathbf{b}qa^2 = 0.08420 * 0.7 * 30^2 = 53.046 \text{ kgf*cm}$$

$$w(máx) = \frac{\mathbf{a}qa^4}{D} = \frac{0.00260 * 0.7 * 30^4}{164879.81} = 0.008941 \text{ cm}$$

Assim, conforme a Eq. 63, a tensão máxima é:

$$\mathbf{s}_{xx}(máx) = \frac{6M_y(máx)}{t^2} = \frac{6 * 53.046}{0.95^2} = 352.66 \text{ kgf/cm}^2$$

5.3. ANÁLISE PELO PACOTE ANSYS

5.3.1 Considerações iniciais da análise

Para as análises propostas, usou-se o elemento SHELL63. Tal elemento possui capacidades de flexão e membrana, permitindo carregamentos no plano principal e perpendiculares ao mesmo. Tem seis graus de liberdade em cada nó: translação nas direções x, y e z (UX UY UZ nos nós) e rotação nos eixos X, Y e Z (ROTX ROTY ROTZ). Inclui também capacidade de análise com tensões de rigidez e o efeito de grandes deflexões. Tal efeito ocorre se as rotações são grandes mas as deformações que causam tensões são baixas. A relação força-deslocamento, neste caso contém não linearidades cuja solução usa de um algoritmo especial, onde, uma transformação relaciona as coordenadas originais do elemento com suas coordenadas rotacionadas (no sistema global) separando os corpos rígidos de rotação da deformação original.

No entanto, nos casos propostos, considerou-se somente pequenas deflexões, sendo o carregamento considerado como cargas de superfície distribuídas uniformemente nas faces do elemento. Para habilitar este tipo de carregamento selecionou-se a opção KEYOP(6)=2 do elemento. As cargas de pressão equivalentes nos elementos resultam em tensões mais acuradas com elementos planos representando uma superfície curvada.

As funções de forma usadas no elemento SHELL63 são as seguintes:

$$u = \frac{1}{4} \left[u_i(1-x)(1-y) + u_j(1+x)(1-y) + u_k(1+x)(1+y) + u_l(1-x)(1+y) + u_1(1-x^2) + u_2(1-y^2) \right] \quad (66)$$

$$v = \frac{1}{4} \left[v_i(1-x)(1-y) + v_j(1+x)(1-y) + v_k(1+x)(1+y) + v_l(1-x)(1+y) + v_1(1-x^2) + v_2(1-y^2) \right] \quad (67)$$

Tais funções de forma são para um elemento quadrilateral incluindo graus de liberdade em rotação, porém sem deflexões por cisalhamento transversal (Teoria de Kirchhoff), sendo u_1 , u_2 , v_1 e v_2 , funções de forma extra.

Para os três casos propostos, usou-se o comando LESIZE que divide as linhas especificadas no tamanho desejado antes da geração da malha pelo comando AMAP, possibilitando assim o mapeamento da malha. A Fig. 6 mostra a malha utilizada com o número dos nós.

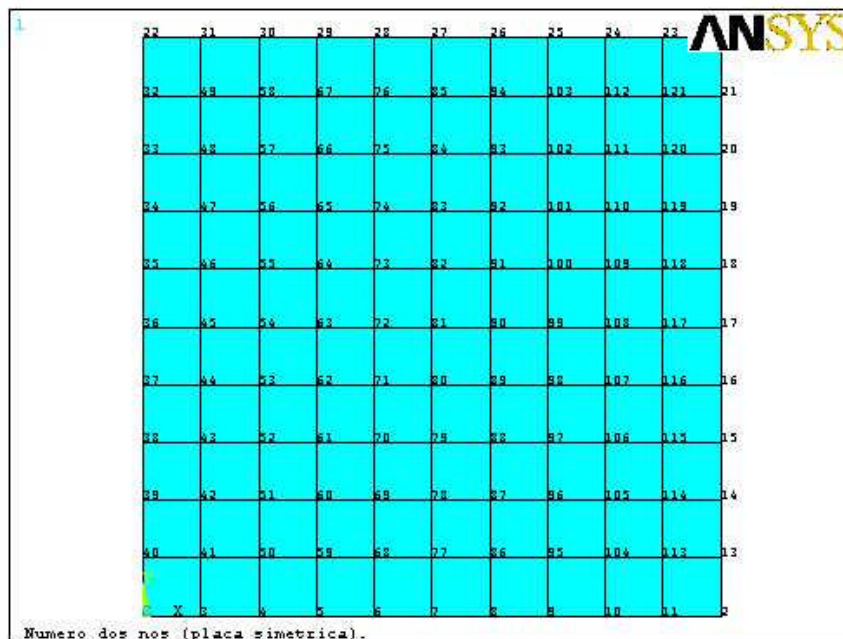


Figura 7. Malha gerada na Placa com o número dos nós

5.3.2 Primeira análise: Placa Retangular com os 4 lados Fixos

O seguinte arquivo Log foi usado para esta análise:

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! Placa Retangular (60 x 30 cm) 4 Lados Fixos (usando simetria). !
! Theory off Plates and Shells, TIMOSHENKO, 2ª Ed, Pg. 202, Tab.35. !
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

/CLEAR,START
/COM,ANSYS REL. 5.4
/PREP7
/TITLE, Placa Retangular 4 Lados Fixos c/ press. uniforme.
C*** Theory off Plates and Shells, TIMOSHENKO, 2ª Ed, Pg. 120, Tab.8.
ANTYPE,STATIC
ET,1,SHELL63,,,,,2      !Elemento Shell63, pressão na face do elemento.
MAT,1
R,1,,95
MP,EX,1,2.1E6           !Modolo de Elasticidade: 2.1E6 kgf/cm^2
MP,NUXY,1,0.3           !Coeficiente de Poason: 0.3
BLC4,0,0,30,30         !Cria uma area retangular de 30 cm x 30 cm

LESIZE,ALL,3,,,1       !Divide todas as linhas que compoe a area em !tamanho = 3 cm x 3 cm.
                        !ALL - todas as linhas. 3 - tamanho. 1 - linhas
AMAP,1,1,2,3,4         !Mapeamento
!                       !Engastes Fixos
D,ALL,ROTZ
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,30
D,ALL,ALL
NSEL,ALL
!                       !Geracao da simetria
NSEL,S,LOC,X,30
DSYM,SYMM,X,0,30
NSEL,ALL
NUMMRG,NODE            !Merge
!
FINISH
/SOLU
SFE,ALL,2,PRES,0,0.7   !Aplicação da pressão uniforme
OUTPR,BASIC,LAST       !Controla o tipo de solução
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,1
PLNSOL,S,Y             !Plota graficamente as tensões SY
NSEL,S,LOC,Y,0         !Seleciona os nós onde ocorre a tensão máxima
SHELL,BOT             !Habilita tensões do fundo da placa
PRNSOL,S,COMP          !Tabela as tensões SX SY e SZ
PRNSOL,S,PRIN          !Tabela as tensões Principais
NSEL,S,LOC,Y,15        !Seleciona os nós onde ocorre a deflexão máxima
PRNSOL,U,Z             !Tabela as deflexões selecionadas
FINISH
```

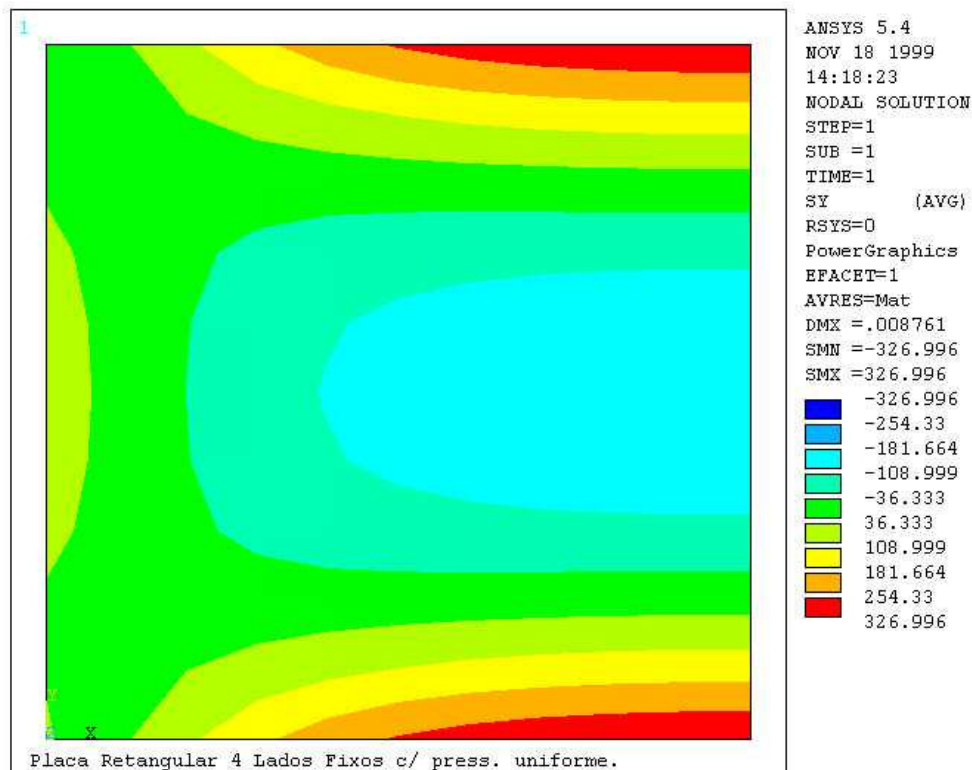


Figura 8. Plot das Tensões SY

Valores obtidos na primeira análise

. Para localização dos nós, ver Fig. 7.

Tabela 1. Tensões SX SY e SXY (kgf/cm²).

NÓ	SX	SY	SXY
1	13.889	13.864	6.2833
2	98.602	327.00	-8.7196
3	3.3197	21.386	-5.5832
4	29.535	98.651	-5.5409
5	52.060	169.20	-4.1296
6	68.957	224.48	-2.8407
7	80.808	264.40	-1.8584
8	88.690	291.61	-1.1606
9	93.668	309.16	-0.68670
10	96.610	319.73	-0.37347
11	98.134	325.28	-0.16218

Tabela 2. Deslocamentos em UZ (cm).

NÓ	UZ	NÓ	UZ	NÓ	UZ
17	-0.87608E-02	63	-0.39869E-02	99	-0.81071E-02
36	0.00000	72	-0.54676E-02	108	-0.84869E-02
45	-0.76147E-03	81	-0.66439E-02	117	-0.86948E-02
54	-0.23133E-02	90	-0.75102E-02		

**Tabela 3. Valores máximos:
Tensões SX SY e SXY (kgf/cm²).**

	SX	SY	SXY
NÓ	2	2	2
Valor	98.602	327.00	-8.7196

**Tabela 4. Valores máximos:
Deslocamentos em UZ (cm).**

	UZ
NÓ	17
Valor	-0.87608E-02

5.3.3 Segunda análise: Placa Retangular com os 4 lados Simplesmente Apoiados

O seguinte arquivo Log foi usado para esta análise:

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! Placa Retangular (60 x 30) 4 lados Simplesmente Apoiados !
! Theory off Plates and Shells, TIMOSHENKO, 2ª Ed, Pg. 202, Tab.35. !
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
/CLEAR,START
/COM,ANSYS REL. 5.4
/PREP7
/TITLE, Placa Retangular Simplesmente Apoiada c/ press. uniforme.
C*** Theory off Plates and Shells, TIMOSHENKO,2ª Ed,Pg.120,Tab. 8.
ANTYPE,STATIC
ET,1,SHELL63,,,,,2 !Elemento Shell63, pressão na face do elemento.
MAT,1
R,1,.95
MP,EX,1,2.1E6 !Modulo de Elasticidade: 2.1E6 kgf/cm^2
MP,NUXY,1,0.3 !Coeficiente de Poason: 0.3
BLC4,0,0,30,30 !Cria uma area retangular de 30 cm x 30 cm
LESIZE,ALL,3,,,1 !Divide todas as linhas que compoe a area em !tamanho != 3 cm x 3 cm.
!ALL - todas as linhas. 3 - tamanho. 1 - linhas selecionadas.
AMAP,1,1,2,3,4 !Mapeamento
!Engastes Simp. apoiado
D,ALL,ROTZ
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,,,,,UZ
D,1, UX,,,,,UY,UZ
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,UY,,,,,UZ
NSEL,S,LOC,Y,30
D,ALL,UY,,,,,UZ
NSEL,ALL
!Geracao da simetria
NSEL,S,LOC,X,30
DSYM,SYMM,X,0,30
NSEL,ALL
NUMMRG,NODE !Merge
!
FINISH
/SOLU
SFE,ALL,2,PRES,0,0.7 !Aplicação da pressão uniforme
OUTPR,BASIC,LAST !Controla o tipo de solução
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,1
PLNSOL,S,Y !Plota graficamente as tensões SY
NSEL,S,LOC,Y,15 !Seleciona os nós onde ocorre a tensão máxima
```

SHELL,BOT
 PRNSOL,S,COMP
 PRNSOL,S,PRIN
 PRNSOL,U,Z
 FINISH

!Habilita tensões do fundo da placa
 !Tabela as tensões SX SY e SZ
 !Tabela as tensões Principais
 !Tabela as deflexões seleccionadas

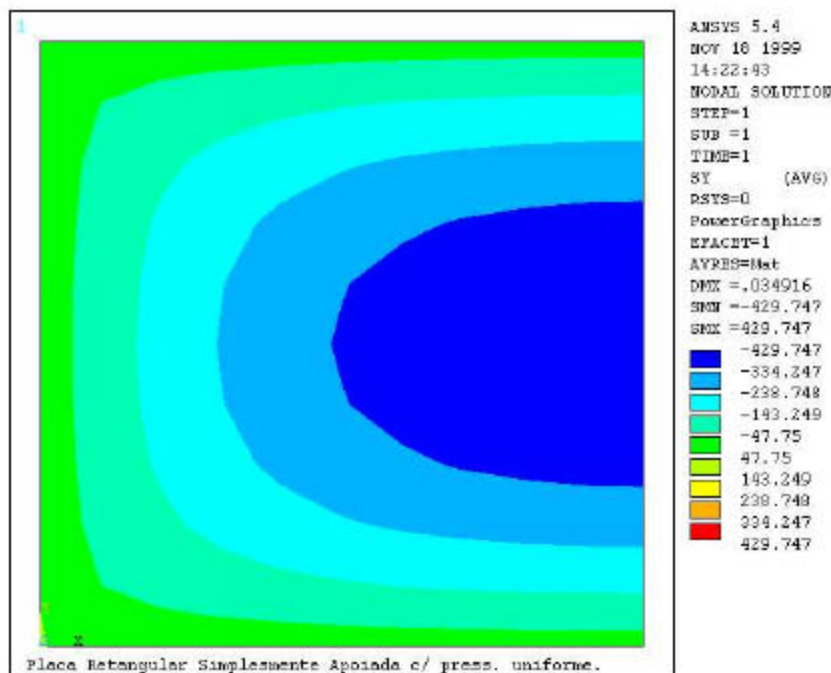


Figura 9. Plot das Tensões SY

Valores obtidos na segunda análise

. Para localização dos nós, ver Fig. 7.

Tabela 5. Tensões SX SY e SXY (kgf/cm²).

NÓ	SX	SY	SXY
17	196.62	429.75	0.71314E-09
36	27.013	8.2141	-0.10556E-06
45	85.622	94.806	-0.47163E-07
54	138.47	175.78	0.37124E-07
63	169.50	243.52	0.10053E-06
72	186.29	298.57	-0.18042E-07
81	194.36	342.12	0.14421E-07
90	197.44	375.53	0.27793E-07
99	197.97	400.08	0.19334E-08
108	197.48	416.83	0.10783E-07
117	196.88	426.56	0.23965E-08

Tabela 6. Deslocamentos em UZ (cm).

NÓ	UZ	NÓ	UZ	NÓ	UZ
17	-0.34916E-01	63	-0.18456E-01	99	-0.32150E-01
36	0.00000	72	-0.23109E-01	108	-0.33704E-01
45	-0.67202E-02	81	-0.26912E-01	117	-0.34615E-01
54	-0.12959E-01	90	-0.29906E-01		

Tabela 7. Valores máximos: Tensões SX SY e SXY (kgf/cm²).

	SX	SY	SXY
NÓ	99	17	36
Valor	197.97	429.75	0.10556E-06

5.3.4 Terceira análise: Placa Retangular com o 2 lados Simplesmente Apoiados e 2 lados Fixos

O seguinte arquivo Log foi usado para esta análise:

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! Placa Retangular (60 x 30) 2 Idos Simpl Apoiados 2 Idos Fixos !
! Theory off Plates and Shells, TIMOSHENKO, 2ª Ed, Pg. 187, Tab.29. !
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

/CLEAR,START
/COM,ANSYS REL. 5.4
/PREP7
/TITLE, Placa Retang 2 Idos S. Apoiad 2 Idos Fixos c/ press. uniforme.
C*** Theory off Plates and Shells, TIMOSHENKO, 2ª Ed, Pg. 120, Tab. 8.
ANTYPE,STATIC
ET,1,SHELL63,,,,,2 !Elemento Shell63, pressão na face do elemento.
MAT,1
R,1,.95
MP,EX,1,2.1E6
MP,NUXY,1,0.3
BLC4,0,0,30,30 !Cria uma area retangular de 30 cm x 30 cm
LESIZE,ALL,3,,,1 !Divide todas as linhas que compoe a area em !tamanho = 3 cm x 3 cm.
!ALL - todas as linhas. 3 - tamanho. 1 - linhas !selecionadas.
AMAP,1,1,2,3,4 !Mapeamento
!Engastes 2 Simp. apoiado 2 fixo

D,ALL,ROTZ
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,,,,UZ
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,30
D,ALL,ALL
NSEL,ALL
!Geracao da simetria

NSEL,S,LOC,X,30
DSYM,SYMM,X,0,30
NSEL,ALL
NUMMRG,NODE !Merge
!
FINISH
/SOLU
SFE,ALL,2,PRES,0,0.7 !Aplicação da pressão uniforme
OUTPR,BASIC,LAST !Controla o tipo de solução
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,1
PLNSOL,S,Y !Plota graficamente as tensões SY
NSEL,S,LOC,Y,0 !Seleciona os nós onde ocorre a tensão máxima
SHELL,BOT !Habilita tensões do fundo da placa

```

PRNSOL,S,COMP
 PRNSOL,S,PRIN
 NSEL,S,LOC,Y,15
 PRNSOL,U,Z
 FINISH

!Tabela as tensões SX SY e SZ
 !Tabela as tensões Principais
 !Seleciona os nós onde ocorre a deflexão máxima
 !Tabela as deflexões selecionadas

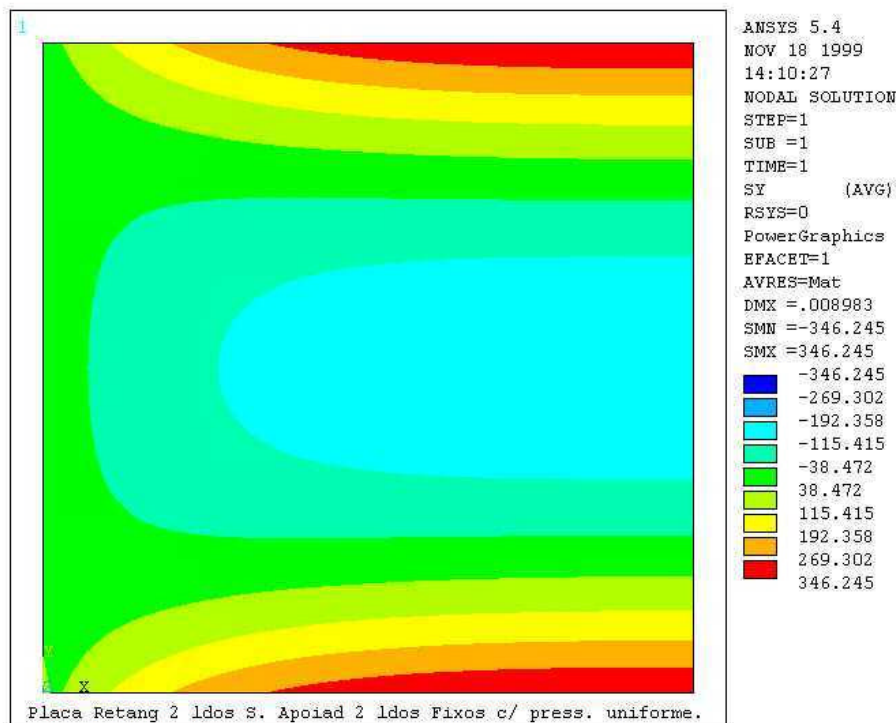


Figura 10. Plot das Tensões SY

Valores obtidos na terceira análise

. Para localização dos nós, ver Fig. 7.

Tabela 8. Tensões SX SY e SXY (kgf/cm²).

NÓ	SX	SY	SXY
1	28.477	19.232	-10.287
2	99.874	332.25	8.9898
3	35.850	113.26	6.5846
4	59.940	191.35	3.8422
5	75.731	245.34	2.4009
6	85.951	281.04	1.4592
7	92.293	303.72	0.84559
8	96.042	317.47	0.46042
9	98.138	325.37	0.23208
10	99.229	329.63	0.10549
11	99.731	331.66	0.38926E-01

Tabela 9. Deslocamentos em UZ (cm).

NÓ	UZ	NÓ	UZ	NÓ	UZ
17	-0.90221E-02	63	-0.59188E-02	99	-0.87075E-02
36	0.00000	72	-0.70697E-02	108	-0.88962E-02
45	-0.23302E-02	81	-0.78634E-02	117	-0.89927E-02
54	-0.43425E-02	90	-0.83836E-02		

Tabela 10. Valores máximos: Tensões SX SY e SXY (kgf/cm²).

	SX	SY	SXY
NÓ	2	2	1
Valor	99.874	332.25	-10.287

5.4. CONCLUSÃO DAS ANÁLISES

Apresenta-se abaixo, três tabelas onde estão resumidos os valores obtidos pelas análises feitas com o pacote Ansys e por Timoshenko (1959). Deve-se ter em mente que os valores obtidos pela literatura provém de aproximações numéricas propostas para cada caso (pela solução da equação diferencial geral da placa, Eq. 47), variando conforme as dimensões da placa, o tipo de carregamento e o tipo de engaste da placa. Tais valores foram usados somente como parâmetro de comparação, como forma de se consolidar a confiabilidade dos valores obtidos pelo pacote Ansys.

As figuras e valores apresentados no capítulo anterior, foram obtidas utilizando-se um tamanho de malha 3 no mapeamento (ver arquivos tipo log), porém realizou-se mais duas análises para cada caso, sendo uma com malha tamanho 2 e outra com tamanho 1, colhendo-se somente os valores de tensão pois, para as deflexões, a malha tamanho 3 já forneceu resultados satisfatórios.

Verifica-se genericamente, que os valores máximos de tensão calculados pelo pacote Ansys aproximam-se do valor máximo proposto pela literatura a medida que se refina a malha.

Tabela 10. Comparação entre os valores obtidos por Timoshenko e pelo ANSY: Placa Retangular com os 4 lados Fixos e Pressão uniforme.

Tensão(máx) - [kgf/cm²]				W (cm)		
Timoshenko -----	Ansys -----		Razão (%)	Timoshenko -----	Ansys -----	Razão (%)
347.21	Malha # 3	326.99	-5.824	0.008735	0.008761	+0.297
	Malha # 2	337.73	-2.730			
	Malha # 1	340.43	-1.953			

Tabela 11. Comparação entre os valores obtidos por Timoshenko e pelo ANSY: Placa Retangular com os 4 Simplesmente Suportados e Pressão uniforme.

Tensão (máx) - [kgf/cm²]				W (cm)		
Timoshenko -----	Ansys -----		Razão (%)	Timoshenko -----	Ansys -----	Razão (%)
425.96	Malha # 3	429.75	+0.889	0.034836	0.034916	+0.230
	Malha # 2	425.80	-0.038			
	Malha # 1	426.31	+0.082			

Tabela 12. Comparação entre os valores obtidos por Timoshenko e pelo ANSY: Placa Retangular com o 2 Simplesmente Suportados e 2 lados Fixos com Pressão uniforme.

Tensão (máx) - [kgf/cm²]				W (cm)		
Timoshenko -----	Ansys -----		Razão (%)	Timoshenko -----	Ansys -----	Razão (%)
352.66	Malha # 3	332.25	-5.787	0.008941	0.009022	+0.906
	Malha # 2	339.35	-3.774			
	Malha # 1	346.25	-1.818			

6. REFERÊNCIAS

Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 1989.

Szabó B., Babuška I.; Finite Element Analysis, John Wiley & Sons Inc., 1991.

Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.; Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 2^a ed., 1959.

Arquivos viga.pdf, forvar.pdf, barra.pdf e torsão.pdf de <http://www.fem.unicamp.br/~em421/textos.htm>

Arquivos metvaria.pdf e barfem.pdf de [http://www.fem.unicamp.br/~em057/info semII-1999.html](http://www.fem.unicamp.br/~em057/info_semII-1999.html) .