

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Detecção de Falhas em Estruturas Complexas
usando Síntese Modal dos Componentes e
Vetores de Ritz**

Autor: Fábio Guilherme Ferraz
Orientador: José Maria Campos dos Santos

12/2001

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Deteccção de Falhas em Estruturas Complexas usando Síntese Modal dos Componentes e Vetores de Ritz

Autor: Fábio Guilherme Ferraz

Orientador: José Maria Campos dos Santos

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2001
S.P. – Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Detecção de Falhas em Estruturas Complexas usando Síntese Modal dos Componentes e Vetores de Ritz

Autor: Fábio Guilherme Ferraz

Orientador: José Maria Campos dos Santos

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Marcos Antônio Viana Duarte
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Renato Pavanello
Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 07 de Dezembro de 2001

Dedicatória

À minha querida Ana Carolina, pelo amparo, paciência e compreensão, pelo carinho e amor recíprocos e verdadeiros.

Agradecimentos

À Deus, pelo o alimento de cada dia, e pela vida.

Este trabalho não poderia ter sido concluído sem a ajuda de diversas pessoas as quais presto minha homenagem:

Aos meus pais, irmãos e amigos pelo apoio, reconhecimento e valorização desta conquista, e de cada pequeno passo dado no percorrer deste trajeto.

Ao meu orientador, pela receptividade e empenho, por sua porta estar sempre aberta, obrigado.

À Unicamp, e a todos os funcionários.

Ao CNPQ, CAPES e FAPESP pelo apoio financeiro.

Ocorre-me ainda de agradecer à todos aqueles que jamais terão acesso à estas páginas, e mesmo tendo, dificilmente poderão decifrá-las. E também aos colegas que eventualmente possam decifrá-las, aos quais deixo a seguinte reflexão:

"Qual a finalidade do vosso trabalho? Considero que a única finalidade da ciência consiste em aliviar o peso da existência humana. No dia em que os cientistas, intimidados por aqueles que interesseiramente detêm o poder, se contentarem apenas com a acumulação de conhecimentos, pelo prazer do conhecimento, nesse dia a ciência pode ser transformada em aleijão, e as vossas máquinas poderão significar apenas novos tormentos. É possível que com o tempo, vocês venham a descobrir tudo o que há para descobrir, mas esse progresso será apenas um afastamento em relação à humanidade. O abismo entre vocês e ela pode tornar-se tão grande, que um dia, quando gritarem alegres com qualquer nova aquisição, podem ouvir em resposta um grito universal de horror."

B. Brecht

"É evidente que um cavalo que caia da altura de três ou quatro varas pode partir as pernas, enquanto que um cão, caindo da mesma altura, não sofre nada. Bem como não sofrem nada um gato, que caia da altura de oito a dez varas, um grilo, que caia do alto de uma torre, ou uma formiga, que caia da Lua. E assim como os animais pequenos são relativamente mais fortes e resistentes do que os grandes, também as plantas pequenas tem melhor resistência: um carvalho com a altura de duzentas varas não poderia suportar os seus ramos da mesma maneira que um carvalho pequeno, e a Natureza não pode permitir que um cavalo atinja o tamanho de vinte cavalos, nem que um gigante seja dez vezes maior que um homem normal, a não ser alterando as proporções de todos os seus membros, sobretudo dos ossos, que teriam que ser fortalecidos, muito para além da medida de um tamanho proporcional. A opinião corrente de que as máquinas grandes e as pequenas tem a mesma resistência está manifestamente errada."

Galileu Galilei, *Discorsi*

Resumo

FERRAZ, Fabio Guilherme, *Detecção de Falhas em Estruturas Complexas Usando Síntese Modal dos Componentes e Vetores de Ritz*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 14 p. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho explora o uso de métodos de Síntese Modal dos Componentes (SMC), a Teoria da Perturbação por Mínimo Rank (MRPT) e o Algoritmo de Realização de vetores de Ritz (RRA) como uma ferramenta para a detecção de danos estruturais. A SMC consiste em modelar separadamente componentes individuais de uma estrutura e então acoplá-los num sistema único. Os métodos de SMC podem ser generalizados para se permitir o uso de outros vetores, tais como os vetores de Ritz em substituição aos modos normais. Os vetores de Ritz são obtidos a partir de relações de recorrência, e representam uma ótima base de vetores como alternativa aos modos naturais de vibrar dos componentes. O MRPT é um método de detecção de danos baseado em modelo, que usa o fato de que um dano discreto pode ser manifestado num modelo de elementos finitos (MEF) como uma pequena perturbação no rank das matrizes que compõe as propriedades da estrutura. O RRA converte as matrizes em tempo discreto identificadas pelo algoritmo ERA para o tempo contínuo, a partir das quais pode-se extrair os vetores de Ritz experimentais usados para se complementar a matriz de forças dinâmicas residuais na formulação do MRPT. Através do modelo sem danos sintetizado, e do modelo medido com danos, o MRPT com RRA é usado para se detectar a localização do dano e sua extensão, ou no mínimo o componente que contém o dano. Diferentes considerações de modelagem subestruturada são exploradas na detecção de danos usando exemplos numéricos. Em particular um MEF de vigas da estação espacial internacional é implementado e os efeitos de danos localizados em diferentes componentes são investigados.

Palavras Chave:

Vetores de Ritz, ERA ,Detecção de Danos, Síntese Modal, Estruturas Complexas.

Abstract

FERRAZ, Fabio Guilherme, *Damage Detection in Complex Structures Using Component Mode Synthesis and Ritz Vectors*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 14 p. Dissertação (Mestrado)

This work explores the use of Component Mode Synthesis methods (CMS), Minimum Rank Perturbation Theory (MRPT), and Ritz Realization Algorithm (RRA) as a structural damage detection tool. The CMS consists in to modeling individual components of a structure separately and then to couple them to form an assembled system. CMS methods can be generalized to allow the use of other vectors, like Ritz vectors, rather than normal modes. The Ritz vectors are obtained from recurrence relations, and represent a suitable basis vectors as an alternative to component vibration modes. MRPT is a model-based damage detection method, which utilizes the fact that discrete damage is manifested in a structural finite element model (FEM) as a low rank perturbation to the structural property matrices. RRA converts the discrete time system matrices identified by Eigensystem Realization Algorithm (ERA) to continuous time system matrices, from which one can extract the experimental Ritz vectors used to complement the matrix of dynamic residual forces in the MRPT formulation. With the coupled healthy model and the measured damaged model, the MRPT with RRA is used to detect the damage location and his extent, or at least the component that contains the damage. Different substructure modeling assumptions on damage detectability are explored using numerical examples. In particular a beam FEM of the international space station structure is implemented and the effects of different localized component damages are investigated.

Keywords:

Ritz Vectors, ERA , Damage Detection ,Modal Synthesis, Complex Structures.

Índice

DEDICATÓRIA.....	i
AGRADECIMENTOS.....	ii
RESUMO.....	iv
ABSTRACT.....	v
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO E DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 SISTEMAS ESTRUTURAIS COMPLEXOS E OBJETIVOS DO TRABALHO	4
CAPÍTULO 2	10
VETORES DE RITZ	10
2.1 INTRODUÇÃO	10
2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.	11
2.3 APLICAÇÃO DOS VETORES DE RITZ NA REDUÇÃO DE MODELOS	13
2.4 ALGORITMO DE WILSON	16
2.5 ALGORITMO DE LANZOS	17
2.6 ALGORITMO DE LEGER	19
2.7 VETORES DE RITZ QUASE-ESTÁTICOS	19
2.8 FATOR DE PARTICIPAÇÃO	21
2.9 EXEMPLO NUMÉRICO	23
CAPÍTULO 3	31
SÍNTESE MODAL DOS COMPONENTES	31
3.1 INTRODUÇÃO	31
3.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.	34
3.3 MODELO DINÂMICO DAS SUBSTRUTURAS.....	36
3.3.1 <i>Transformação em Coordenadas Generalizadas</i>	37
3.4 MÉTODOS DE SÍNTESE IMPLEMENTADOS	43
3.4.1 <i>Método de Craig e Bampton</i>	44
3.4.2 <i>Método de Craig e Chang</i>	48
3.4.3 <i>Método de Síntese com Blocos de Krylov</i>	55
3.4.4 <i>Método de Síntese com Vetores de Ritz Quase Estáticos</i>	59
CAPÍTULO 4	61
TEORIA DA PERTURBAÇÃO POR MÍNIMO RANK.....	61
4.1 INTRODUÇÃO	61
4.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	63
4.3 CONCEITUAÇÃO TEÓRICA DO MRPT	65
4.4 SELEÇÃO DO SUBESPAÇO	72
4.5 EXEMPLO NUMÉRICO.	74
4.6 ALGORITMO DE REALIZAÇÃO DE VETORES DE RITZ	82
4.6.1 <i>Extensão do MRPT para Vetores de Riz Experimentais</i>	83
CAPÍTULO 5	87

APLICAÇÃO DOS MÉTODOS PROPOSTOS	87
5.1 INTRODUÇÃO	87
5.2 EXEMPLO DA VIGA BIENGASTADA.....	91
5.2.1 <i>Localização e Extensão do dano em uma Subestrutura</i>	<i>97</i>
5.2.2 <i>Localização e Extensão do dano em Várias Subestruturas.....</i>	<i>119</i>
5.3 EXEMPLO DA ESTAÇÃO ESPACIAL INTERNACIONAL	125
5.3.1 <i>Localização e Extensão do dano em uma Subestrutura</i>	<i>133</i>
5.3.2 <i>Localização e Extensão do dano em Várias Subestruturas.....</i>	<i>144</i>
CAPÍTULO 6	150
CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	150
APÊNDICE A - ERA	155
BIBLIOGRAFIA.....	164

Lista de Figuras

Figura 1.2-1- Veículo de Lançamento	7
Figura 1.2-2 - Aeronave	7
Figura 1.2-3 - Estação Espacial.....	7
Figura 1.2-4- Moinho de vento	7
Figura 1.2-5 - Análise de Vibração de uma estrutura. (a) Fases de uma Análise de Vibração Teórica,	8
Figura 2.9-1 - Modelo da Estrutura Plana.	23
Figura 2.9-2 - Seis primeiros modos da estrutura plana.....	24
Figura 2.9-3 - Resposta no tempo, usando 6 vetores.....	26
Figura 2.9-4 - Erro na participação, usando 6 vetores.....	26
Figura 2.9-5 - Resposta no tempo, usando 12 vetores.....	26
Figura 2.9-6 - Erro na participação, usando 12 vetores.....	26
Figura 2.9-7 - Resposta no tempo, usando 18 vetores.....	26
Figura 2.9-8 - Erro na participação, usando 18 vetores.....	26
Figura 2.9-9 - Resposta no tempo, usando 24 vetores.....	27
Figura 2.9-10 - Erro na participação, usando 24 vetores.....	27
Figura 2.9-11 - FRF exata obtida pelo impulso unitário	28
Figura 2.9-12 - Resposta ao impulso usando 6 vetores.....	28
Figura 2.9-13 - Erro na participação, usando 6 vetores.....	29
Figura 2.9-14 - Erro na participação, usando 12 vetores.....	29
Figura 2.9-15 - Erro na participação, usando 18 vetores.....	29
Figura 2.9-16 - Erro na participação, usando 24 vetores.....	29
Figura 3.3-1 - Viga bi-engastada substruturada e coordenadas físicas particionadas em internas e de junção.	37
Figura 3.4-1 - Exemplo de Viga bi-engastada substruturada	44
Figura 3.4-1 - Divisão das coordenadas físicas em internas e de junção	45
Figura 4.5-1 - Exemplo massa-mola com 8 GDL	74
Figura 4.5-2 - Quatro primeiros modos sem e com danos	77
Figura 4.5-3 - vetor dinâmico residual e ângulo de perturbação usando o modo 1.....	78
Figura 4.5-4 - ângulo de perturbação usando o modo 2.....	78
Figura 4.5-5 - ângulo de perturbação usando o modo 3.....	79
Figura 4.5-6 - ângulo de perturbação usando o modo 4.....	79
Figura 4.5-7 - ângulo de perturbação para os quatro modos medidos.....	79
Figura 4.5-8 - ângulo de perturbação usando todos os modos com dano e sem ruído	79
Figura 4.5-9 - extensão do dano usando a Eq.(152) com os quatro modos medidos	80
Figura 4.5-10 - extensão do dano usando a Eq.(152) com os modos medidos 3 e 4.....	80
Figura 4.5-11 - extensão do dano usando a seleção subspacial pela Eq.(162) com os quatro modos medidos.....	81
Figura 4.5-12 - extensão do dano usando a seleção subspacial pela Eq.(162) com os modos medidos 3 e 4.....	81
Figura 4.5-13 - extensão do dano usando a Eq.(152) com os modos medidos 2 e 3.....	81
Figura 4.5-14 - extensão do dano usando a seleção subspacial pela Eq.(162) com os modos medidos 2 e 3.....	81
Figura 4.5-15 - extensão do dano obtida subtraindo-se a matriz de rigidez sem danos	81
Figura 5.1-1 - Fluxo de dados utilizado na solução modal.....	88
Figura 5.1-2 - Fluxo de dados utilizado na solução de Ritz	88
Figura 5.2-1 - Viga biengastada	91
Figura 5.2-2 - FRF "medida" da estrutura.....	92
Figura 5.2-3 - IRF "medida" da estrutura.....	93
Figura 5.2-4 - Diagonal da matriz de valores singulares - Viga biengastada	93
Figura 5.2-5 - Critério IAE -Integral of Absolute Error - Viga biengastada	95
Figura 5.2-6 - IRF "medida" e identificada (a), erro estimado (b)	96
Figura 5.2-7 - FRF "medida" e identificada - Viga biengastada	96
Figura 5.2-1 - VARM sem ruído, usando método de BK - Viga bi-engastada.....	98
Figura 5.2-2 - VARM com ruído, usando método de BK - Viga bi-engastada	99
Figura 5.2-3 - VARM sem ruído, usando método de QE - Viga bi-engastada	99
Figura 5.2-4 - VARM com ruído, usando método de QE - Viga bi-engastada.....	100
Figura 5.2-5 - VARM sem ruído, usando método de CB - Viga bi-engastada.....	100

Figura 5.2-6 – VARM com ruído, usando método de CB - Viga bi-engastada	101
Figura 5.2-7 – VARM sem ruído, usando método de CC - Viga bi-engastada	101
Figura 5.2-8 – VARM com ruído, usando método de CC - Viga bi-engastada	102
Figura 5.2-9 - VARM e VARR usando 5 modos normais e 5 vetores de Ritz dinâmicos - Viga bi-engastada	105
Figura 5.2-10 - VARM e VARR usando 3 modos normais e 1 vetore de Ritz estático - Viga bi-engastada	106
Figura 5.2-11 - 1º e 2º VDPM, ruído: [15 0.2], dano: 75% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada.....	108
Figura 5.2-12 - 1º e 2º VDPR, ruído: [15 0.2], dano: 75% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada	108
Figura 5.2-13 - 1º e 2º VDPM, ruído: [10 0.1], dano: 50% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada.....	109
Figura 5.2-14 - 1º e 2º VDPR, ruído: [10 0.1], dano: 50% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada	109
Figura 5.2-15 - 1º e 2º VDPM, ruído: [5 0.1], dano: 25% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada.....	110
Figura 5.2-16 - 1º e 2º VDPR, ruído: [5 0.1], dano: 25% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada	110
Figura 5.2-17 - 1º e 2º VDPM, ruído: [15 0.2], dano: 25% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada.....	111
Figura 5.2-18 - 1º e 2º VDPR, ruído: [15 0.2], dano: 25% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada	111
Figura 5.2-19 - CPF referente à Figura 5.2-11 até a Figura 5.2-18 - Viga bi-engastada	113
Figura 5.2-20 - VARM - para os 5 modos e para os modos 1 até 5 - Viga bi-engastada	114
Figura 5.2-21 - VARM - para os 5 VRs e para os VRs 1 até 5 - Viga bi-engastada	115
Figura 5.2-22 - Matriz de perturbação de rigidez do MEF - Viga bi-engastada.....	116
Figura 5.2-23 - Matriz de perturbação de rigidez usando os 5 modos - Viga bi-engastada	116
Figura 5.2-24 - Matriz de perturbação de rigidez usando os modos selecionados - Viga bi-engastada	117
Figura 5.2-25 - Matriz de perturbação de rigidez usando os 5 VRs - Viga bi-engastada	117
Figura 5.2-26 - Matriz de perturbação de rigidez usando os VRs selecionados - Viga bi-engastada.....	118
Figura 5.2-1 - 1º e 2º VDPM, ruído: [5 0.1] - Viga bi-engastada.....	120
Figura 5.2-2 - 1º e 2º VDPR, ruído: [5 0.1] - Viga bi-engastada.....	120
Figura 5.2-3 - 1º e 2º VDPM, ruído: [7 0.15] - Viga bi-engastada.....	121
Figura 5.2-4 - 1º e 2º VDPR, ruído: [7 0.15] - Viga bi-engastada.....	121
Figura 5.2-5 - 1º e 2º VDPM, ruído: [10 0.2].....	122
Figura 5.2-6 - 1º e 2º VDPR, ruído: [10 0.2].....	122
Figura 5.2-7 - 1º e 2º VDPM, ruído: [15 0.2].....	123
Figura 5.2-8 - 1º e 2º VDPR, ruído: [15 0.2] - Viga bi-engastada.....	123
Figura 5.2-9-CPF para Figura 5.2-1 até a Figura 5.2-8 - Viga bi-engastada	124
Figura 5.3-1 - Localização dos componentes da Estação Espacial Internacional	125
Figura 5.3-2 - Modelo da EEI-7S.....	126
Figura 5.3-3 - Seis primeiros Modos da EEI-7S	128
Figura 5.3-4 - FRF "medida" da EEI-7S.....	129
Figura 5.3-5 - IRF "medida" da EEI-7S	130
Figura 5.3-6 - Diagonal da matriz de valores singulares - EEI-7S.....	130
Figura 5.3-7 - Critério IAE -Integral of Absolute Error - EEI-7S.....	131
Figura 5.3-8 - Função de resposta ao impulso "medida" e identificada (a), erro estimado (b) - EEI-7S	132
Figura 5.3-9 - Função de resposta em Frequência medida e identificada - EEI-7S	132
Figura 5.3-1 – 1º VPDM usando método de CB - EEI-7S	134
Figura 5.3-2 – 1º VPDM usando método de BK - EEI-7S.....	134
Figura 5.3.3 - Posições de excitação utilizadas na obtenção dos vetores de Ritz "experimentais".	136
Figura 5.3-4 - VARM - seis modos - dano E1 - EEI-7S	137
Figura 5.3-5 - VARR - quatro VRS - dano E1 - EEI-7S.....	137
Figura 5.3-6 - VARR - seis VRD - dano E1 - EEI-7S	137
Figura 5.3-7 - VARR - VRS selecionado - dano E1 - EEI-7S	137
Figura 5.3-8 - VARR - VRD selecionado - dano E1 - EEI-7S.....	138
Figura 5.3-9 - $\Delta K_d = \text{abs}[K_f - K_d]$ - dano E1 - EEI-7S	138
Figura 5.3-10 - ΔK_d - seis modos - dano E1 - EEI-7S.....	138
Figura 5.3-11 - ΔK_d - VRS selecionado - dano E1 - EEI-7S.....	138
Figura 5.3-12 - VARM - seis modos - dano E2 - EEI-7S	139
Figura 5.3-13 - VARR - quatro VRS - dano E2 - EEI-7S.....	139
Figura 5.3-14 - VARR - seis VRD - dano E2 - EEI-7S	140
Figura 5.3-15 - VARR - VRS selec. - dano E2 - EEI-7S	140
Figura 5.3-16 - VARR - VRD selec. - dano E2 - EEI-7S	140
Figura 5.3-17 - $\Delta K_d = \text{abs}[K_f - K_d]$ - dano E2 - EEI-7S	140

Figura 5.3-18 - ΔK_d - seis modos - dano E2 - EEI-7S	141
Figura 5.3-19 - ΔK_d - VRS selec. - dano E2 - EEI-7S	141
Figura 5.3-20 - VARM - seis modos - dano E6 - EEI-7S	142
Figura 5.3-21 - VARR - quatro VRS - dano E6 - EEI-7S	142
Figura 5.3-22 - VARR - seis VRD - dano E6 - EEI-7S	142
Figura 5.3-23 - VARR - VRS selecionado - dano E6 - EEI-7S	142
Figura 5.3-24 - VARR - VRD selecionado - dano E6 - EEI-7S	142
Figura 5.3-25 - $\Delta K_d = \text{abs}[K_f - K_d]$ - dano E6 - EEI-7S	142
Figura 5.3-26 - ΔK_d - seis modos - dano E6 - EEI-7S	143
Figura 5.3-27 - ΔK_d - VRS selecionado - dano E6 - EEI-7S	143
Figura 5.3-1 - 1 ^o e 2 ^o VPDM - ruído: [5 0.1] - EEI-7S	144
Figura 5.3-2 - 3 ^o VPDM e VDPM médio - ruído: [5 0.1] - EEI-7S	145
Figura 5.3-3 - 1 ^o e 2 ^o VPDR - ruído: [5 0.1] - EEI-7S	145
Figura 5.3-4 - 3 ^o VPDM e VDPR médio - ruído: [5 0.1] - EEI-7S	146
Figura 5.3-5 - 1 ^o e 2 ^o VPDR - ruído: [10 0.2] - EEI-7S	146
Figura 5.3-6 - 3 ^o VPDM e VDPR médio - ruído: [10 0.2] - EEI-7S	147
Figura 5.3-7 - 1 ^o e 2 ^o VPDR - ruído: [20 0.3] - EEI-7S	147
Figura 5.3-8 - 3 ^o VPDM e VDPR médio - ruído: [20 0.3] - EEI-7S	148

Lista de Tabelas

Tabela 2.9.1- Vinte primeiras frequências exatas da estrutura plana em Hz.....	25
Tabela 4.5.1 - Autovalores sem dano e com dano.....	75
Tabela 4.5.2 - MAC entre autovetores sem e com dano	78
Tabela 5.2.1 - primeiras frequências da estrutura sem danos.....	92
Tabela 5.2.1.1 - Conjuntos de Truncamentos modais nos componentes - viga biengastada.....	98
Tabela 5.2.1.2 - CPF método de BK, Figura 5.2-2 - Viga bi-engastada.....	103
Tabela 5.2.1.3 - CPF método de QE, Figura 5.2-4 - Viga bi-engastada.....	104
Tabela 5.2.1.4 - CPF método de CB, Figura 5.2-6 - Viga bi-engastada.....	104
Tabela 5.2.1.5 - CPF método de CC, Figura 5.2-8 - Viga bi-engastada.....	104
Tabela 5.2.1.6- Valores da extensão do dano e % de erro - Viga bi-engastada.....	119
Tabela 5.3.1 - Dados referentes ao modelo substruturado.	127
Tabela 5.3.2 - primeiras frequências	129
Tabela 5.3.1.1 - Conjuntos de Truncamentos nos modos e.....	133
Tabela 5.3.1.2 - Localização e característica dos danos simulados - EEI-7S.....	135
Tabela 5.3.2.1 – CPF - Figura 5.3-1 até Figura 5.3-8 – EEI-7S.....	149

NOMENCLATURA

Letras Latinas

M, m	- matriz de massa;
K, k	- matriz de rigidez;
C	- matriz de amortecimento ou matriz retangular de restrições;
S	- matriz de transformação;
G	- matriz de flexibilidade;
B	- matriz dinâmica residual;
A	- matriz de ângulo residual;
U₁	- matriz cujas colunas são os vetores principais de dano do componente;
V	- matriz de vetores de Ritz estáticos;
q	- vetor de deslocamento generalizado;
\ddot{q}	- vetor de aceleração generalizada;
u	- vetor de deslocamento;
\dot{u}	- vetor de velocidade;
\ddot{u}	- vetor de aceleração;
F	- vetor de forças atuantes no sistema;
f	- vetor de forças atuantes no sistema ou distribuição do carregamento;
p	- vetor de coordenadas generalizadas;
d	- vetor dinâmico residual;
y	- vetores de Ritz;
C	- conjunto de modos de restrição;
K	- conjunto de modos normais mantidos;
J	- conjunto de coordenadas de junção;
D	- conjunto referente ao número de modos descartados da base modal;
A	- área da seção;
E	- módulo de elasticidade do material;
I	- momento de inércia;
g	- forças de contorno impostas por componentes adjacentes;
n	- número de graus de liberdade do sistema;
p	- fator de participação;
e	- erro na representação de um carregamento;
e	- erro normalizado;
b	- base da seção de uma viga;
h	- altura da seção de uma viga;
g	- carregamento em função do tempo;

Letras Gregas

Ψ	- matriz de transformação de coordenadas;
Ψ_c	- modos de restrição;
Ψ_d	- modos de flexibilidade residual;
$\Psi_c^{(r)}$	- bloco de Krylov índice r ;

ψ	- vetores de Ritz;
μ	- matriz de massa generalizada;
κ	- matriz de rigidez generalizada;
α	- vetor de ângulo residual;
Φ	- matriz de autovetores;
Λ	- matriz diagonal de autovalores;
ω^2	- autovalor;
ϕ	- autovetor;
ρ	- densidade do material;
α, β	- escalares, fatores de ruído e de escala,

Superescritos

α, β	- componentes genéricos de uma estrutura;
r	- índice de recorrência;
o	- vetores ortogonalizados;

Subscritos

i, j	- partição dos graus de liberdade em internos e de junção;
d	- coordenadas linearmente dependentes ou estrutura com danos;
l	- coordenadas linearmente dependentes;
s	- coordenadas da estrutura sintetizada ou estrutura sem danos;
p	- coordenadas físicas da estrutura acoplada;
A	- coordenadas do sistema acoplado analiticamente;
f	- coordenadas físicas de um componente com interface fixa;
l	- coordenadas físicas de um componente com interface livre;
e	- coordenadas elásticas;
r	- coordenadas reduzidas;

Abreviações

GDL	- graus de liberdade;
MEF	- modelo de elementos finitos
CB	- método de Craig e Bampton;
CC	- método de Craig e Chang;
BK	- método de blocos de Krylov;
QE	- método de vetores de Ritz quase estáticos;
MAC	- "modal assurance criteria";
COMAC	- "coordinate modal assurance criteria";
VRW	- Vetores de Ritz por Wilson;
VRL	- Vetores de Ritz por Lanczos;
VRQE	- Vetores de Ritz Quase Estáticos
MRPT	- "Minimum Rank Perturbation Theory";
RRA	- Algoritmo de realização de vetores de Ritz
IRF	- função de resposta ao impulso;
FRF	- função de resposta em frequência;

IAE	- critério "Integral of Absolute Error";
VARM	- vetor de ângulo residual modal;
VARR -	vetor de ângulo residual por Ritz;
CPF	- "component peak factor";
VDPM	- vetor principal de dano modal;
VDPR	- vetor principal de dano por Ritz;
VRD	- vetor de Ritz dinâmico
VRS	- vetor de Ritz estático
EEI	- estação espacial internacional;
EEI-7S	- MEF da estação espacial internacional em escala

Capítulo 1

Introdução e Descrição do Problema

1.1 Motivação

Vem de longa data o interesse na garantia da confiabilidade de componentes estruturais, bem como o aperfeiçoamento das formas de dimensionamento e projeto. Galileu, em seu famoso livro, "*Discorsi e dimostrazioni matematiche a due nuove scienze*", escrito de 1633 a 1637, na fase final de sua vida, quando era prisioneiro da inquisição e estava condenado a não sair de sua casa, nos arredores de Florença, foi o primeiro sábio que considerou a resistência dos materiais de maneira experimental e no sentido do cálculo estrutural, como foi também precursor da teoria do cálculo da ruptura. A partir de então muito se avançou nestas áreas, porém, nada se compara ao extraordinário impulso verificado durante o século XX, denominado por Eric Hobsbawm como a "*Era dos extremos*", título de seu livro de 1995. Século edificado sobre catástrofes, incertezas e crises, tema que caracterizaria outro campo de pesquisa altamente complexo e abrangente. Pôde-se notar um rápido aperfeiçoamento das técnicas e tecnologias neste período, impulsionados principalmente por uma racionalização técnico-científica exacerbada, de muitos prós e contras, que no entanto, serviria também como tema de outro estudo, com objetivos e fins próprios. Para o que se propõe neste trabalho, sem dúvida, o período importante a se destacar inicia-se em meados da metade do século XX, com o advento e aperfeiçoamento do computador e das técnicas e métodos computacionais, culminando na era espacial, e na corrida espacial entre EUA e URSS, que apesar do clima e caráter bélicos, reuniu juntos, num empreendimento vários dos maiores cientistas e pesquisadores da época, que acabaram por levar o homem à lua e dar como retorno à humanidade uma infinidade de soluções e inovações tecnológicas que nos dias de hoje fazem parte do dia-dia de todo e qualquer indivíduo.

No entanto, apesar do grande avanço verificado em diversas áreas da engenharia, desde o início da era espacial, na década de 60, até primórdios dos anos 90 a pesquisa em detecção de falhas estruturais se detinha em demonstrar e validar novos algoritmos utilizando principalmente modelos simplificados de massa-mola, com poucos graus de liberdade. A partir de então, muitos trabalhos foram apresentados propondo diferentes métodos de detecção de danos para serem aplicados em estruturas maiores e modelos mais refinados*, no entanto, poucos pesquisadores conduziram seu trabalho para uma metodologia mais adequada para se lidar com estruturas e modelos em elementos finitos (MEF) complexos.

A medida que a configuração dos sistemas estruturais se tornam maiores e mais complexos, o uso de diferentes tipos de materiais se tornam mais comuns, e os requerimentos funcionais destes sistemas mais complexos e críticos. Portanto, torna-se essencial a capacidade de se detectar eventuais danos nestes sistemas de forma rápida e, se possível automática. Um atributo comum a todas estas configurações é a complexidade do sistema estrutural. Uma configuração típica consiste de muitos componentes os quais, muitas vezes são fabricados por diferentes corporações e conectados de forma complicada, cada qual configurando por si um sistema estrutural complexo. A construção de modelos espaciais que reproduzam com fidelidade as características dinâmicas de tais sistemas acoplados e de seus componentes, é muitas vezes inviável, ou no mínimo complicada e extremamente trabalhosa. Os métodos de síntese modal dos componentes (SMC) surgiram na década de 60 [1], como uma ferramenta atrativa para se lidar com tais problemas de modelagem analítica de sistemas complexos.

Muitas falhas verificadas em estruturas, tais como a ruptura de um membro numa treliça espacial, podem ser suficientemente localizadas e acessadas através de inspeção visual. Entretanto, é muito difícil observar visualmente algum dano provocado pela degradação do material, por exemplo, visto que aparentemente permanece inalterado. Ademais, a dificuldade de acesso a regiões específicas em estruturas de grande porte podem dificultar, e impossibilitar a devida inspeção na procura de danos localizados, ou mesmo inviabilizar a devida realização de ensaios não destrutivos, tais como ensaios acústicos, por ultrassom, radiografias, etc. Portanto, idealmente, métodos de detecção de falhas devem ser capazes de identificar a ocorrência do dano

* A referência bibliográfica específica para estes métodos pode ser obtida no item 4.2 .

em seu estágio inicial, indicar a localização espacial do dano, e fornecer alguma estimativa a respeito da severidade do dano. A necessidade de métodos de detecção de danos que possam ser aplicados à estruturas complexas e de larga escala conduziu ao desenvolvimento de métodos que investigam as mudanças nas características dinâmicas da estrutura.

A consideração mais comum nos métodos de detecção de falhas que usam as características dinâmicas da estrutura é a seguinte: assume-se inicialmente que um MEF corrigido* da estrutura tenha sido construído antes que algum dano tenha ocorrido, e que as frequências naturais e modos de vibrar tenham sido obtidos a partir deste modelo. Durante sua vida útil, tais estruturas estão sujeitas a algum tipo de dano estrutural que resultará em mudanças nos parâmetros modais da estrutura, ou seja, nas frequências naturais e modos normais de vibrar medidos. A partir da discrepância entre as propriedades modais sem danos do MEF original, e as propriedades modais com dano medidas, tais métodos podem ser usados na detecção do dano.

Um problema que imediatamente surge nestes métodos é a questão das medições incompletas. Tal problema traz duas variações: medições experimentais de um número incompleto de modos de vibrar do que aquele usado pelo MEF, e uma menor quantidade de GDL medidos do que aqueles do modelo analítico. Em relação à questão da quantidade de GDL medidos, existem métodos de expansão ou redução de modelos que podem ser usados para se lidar com este problema, como a redução estática de Guyan [2] por exemplo. No entanto, quando se lida com apenas um subconjunto parcial de informações medidas a respeito das características dinâmicas da estrutura, pode-se questionar se o ponto de vista "modal" deste subconjunto de informações é o único ponto de vista representativo para se analisar a estrutura. Apesar do significativo avanço presenciado em métodos globais de detecção de falhas que usam parâmetros modais, é de grande interesse verificar a possibilidade de se usar outros pontos de vista através dos dados experimentais medidos na detecção de falhas estruturais, bem como na síntese modal dos componentes.

Os vetores de Ritz tem sido usados extensivamente nas áreas analíticas e numéricas para redução de modelos [3], síntese modal dos componentes [4], solução de autoproblemas [5] e

* Como um MEF corrigido, entende-se que as propriedades modais analíticas e experimentais estão em acordo

predição de resposta transiente [6]. O primeiro vetor de Ritz calculado representa a deflexão estática da estrutura devido à uma carga particular aplicada. Sucessivos vetores ortogonais podem ser obtidos usando interação inversa e procedimentos de ortogonalização e normalização. Algumas vantagens dos vetores de Ritz em relação aos tradicionais modos normais de vibrar são [3, 6]: os vetores de Ritz são computacionalmente menos dispendiosos para se obter do que os modos normais de vibrar; todos os vetores de Ritz gerados por um carregamento serão excitados por este carregamento; comparados com os modos normais de vibrar, poucos vetores de Ritz são tipicamente necessários para se reproduzir os mesmos níveis de precisão na redução de modelos e na predição de resposta transiente.

Portanto, sucintamente o que se propõe neste trabalho é o seguinte: mostrar através de exemplos simplificados a metodologia adequada para se dividir uma estrutura complexa em componentes, e usando o MEF de cada componente, construir um MEF da estrutura completa através do uso de métodos de síntese modal dos componentes, de forma que se possa obter satisfatoriamente suas características dinâmicas, e que possibilite o posterior uso de métodos de detecção de danos que sejam adequados ao uso em estruturas complexas e subestruturadas. Além de mostrar a viabilidade do uso dos vetores de Ritz tanto na síntese modal como da detecção de falhas.

Segue agora uma explanação sobre como se define um sistema estrutural complexo, e como a SMC pode ser aplicada a tais sistemas.

1.2 Sistemas Estruturais Complexos e Objetivos do Trabalho

Um bom exemplo de aplicação dos métodos de SMC, são os sistemas aeroespaciais [7]. Tais sistemas tem se tornado suficientemente complexos desde o início da era espacial, e a construção de modelos analíticos para a determinação de suas características dinâmicas se tornou o principal empreendimento e um desafio para os pesquisadores da Força Aérea Norte Americana e da NASA (National Aeronautics and Space Administration) que desenvolvem tais sistemas. Os veículos de lançamento que representavam a parte dominante da massa total do sistema, eram projetados para suportar as severas cargas impostas pelos vôos de alta velocidade através da atmosfera e possuíam as características dinâmicas estruturais de uma viga. No entanto, os

satélites por exemplo, eram envolvidos por objetos em forma esférica pesando pouco mais de uma tonelada cada um, compondo sistemas estruturais altamente complexos. As cargas sofridas por tais estruturas são resultantes da exposição atmosférica durante a ascensão até a entrada em órbita e são portanto, principalmente o resultado da interação dinâmica entre os diversos componentes que juntos compõem tais sistemas. Era portanto crucial a necessidade de se construir modelos analíticos de tais estruturas que reproduzissem com fidelidade tais características dinâmicas. E que pudessem ser usados nas mais diversas simulações numéricas das várias situações de carregamento sofridas por tais estruturas, com a intenção de se validar e dar confiabilidade aos projetos.

Neste primeiro período da era espacial, as massas dos satélites eram freqüentemente a única propriedade dos veículos espaciais que tinha algum efeito sobre as características dinâmicas do sistema completo, e eram tratadas como massas pontuais incluídas no modelo analítico do veículo de lançamento. No entanto, este período não teve longa duração. Rapidamente, os projetos estruturais envolvidos tiveram que atender uma série de requerimentos funcionais necessários em órbita, como por exemplo, a necessidade de se separar diferentes elementos do sistema por razões térmicas. Os projetos resultantes consistiam de um sistema estrutural central que suportava uma coleção de componentes isolados, sendo que cada um dos quais poderia ser tratado como um sistema dinâmico complexo completo.

A necessidade de integridade estrutural tinha que ser satisfeita, e sofisticadas técnicas para análise dinâmica estrutural foram introduzidas cedo na história da indústria aeroespacial. Os requerimentos para a construção de modelos analíticos que reproduzam com fidelidade e eficiência as características dinâmicas destes sistemas conduziram ao uso de métodos de SMC. Os veículos de lançamento, apesar de seu tamanho, puderam então ser modelados pelos métodos relativamente simples da teoria de vigas, e os demais componentes eram modelados separadamente para em seguida serem acoplados ao veículo de lançamento pelo uso da SMC.

A maneira na qual os sistemas aeroespaciais eram produzidos, com vários componentes sendo fornecidos por diferentes corporações, foi outro fator que tornou a síntese modal dos componentes um método atrativo para acoplar os diversos componentes num modelo final do sistema estrutural completo. O fabricante do veículo de lançamento, por exemplo, podia montar o modelo de seu próprio sistema, e, confiando em modelos modais fornecidos pelos fabricantes dos

demais componentes, podia acopla-los ao seu modelo para completar a tarefa de modelagem final do sistema. Outra importante consideração que adicionou confiabilidade aos métodos de SMC foi a necessidade de se verificar experimentalmente os modelos analíticos construídos. Devido à complexidade das estruturas espaciais, os resultados de uma modelagem puramente analítica eram questionáveis pois testes modais mostravam que tais modelos eram freqüentemente sujeitos a sérias imprecisões.

Ademais, descobriu-se que ajustes e correções nestes modelos analíticos para se produzir a convalidação com os resultados dos testes modais eram extremamente difíceis e não se conseguia uma boa correlação. Esta situação chegou a um ponto em que os modos medidos por testes modais representavam o único modelo confiável para uso nas simulações numéricas de carregamento. Os métodos de síntese modal, que permitem o acoplamento dos modos normais do veículo de lançamento com os modos normais dos demais componentes, forneceram o "insight" necessário para se resolver esta deficiência de análise.

O exemplo citado acima refere-se ao uso de métodos de SMC em sistemas aeroespaciais, (maiores detalhes, ver referência [7]) e nos foi válido aqui para se demonstrar algumas formas de utilização, o histórico de seu desenvolvimento e a importância representada pelos métodos de SMC na solução dinâmica de sistemas estruturais complexos. No entanto, com um pouco de bom senso, pode-se tão logo identificar que a definição de sistemas estruturais complexos não se limita apenas aos sistemas aeroespaciais, sendo que tal definição pode ser dada a todo sistema formado por componentes de característica dinâmicas complexas e adversas, uns muito mais rígidos, outros muito mais flexíveis, uns muito mais leves, outros muito mais pesados e assim por diante, como por exemplo veículos de lançamento, Figura 1.2-1, aeronaves, Figura 1.2-2, estações espaciais, Figura 1.2-3, moinhos de vento, Figura 1.2-4, além de outros exemplos como plataformas de petróleo, edifícios, pontes, etc.



Figura 1.2-1- Veículo de Lançamento



Figura 1.2-2 - Aeronave



Figura 1.2-3 - Estação Espacial



Figura 1.2-4- Moinho de vento

Neste trabalho, alguns métodos de síntese modal foram implementados e utilizados em conjunto com métodos de detecção de falhas em estruturas, e para tanto alguns exemplos simplificados foram estudados através de simulações numéricas, onde se utilizou modelos espaciais dos componentes. Todos os gráficos e resultados apresentados foram obtidos utilizando-se o software MATLAB® [57]. Considerações padrões de projeto para estes tipos de estrutura foram adotadas, incluindo a consideração de que a estrutura se comporta linearmente. Ademais, o amortecimento foi considerado desprezível, e portanto, não é parte do escopo a implementação e o estudo de métodos de síntese modal em sistemas com amortecimento pois a inclusão de amortecimento na detecção de falhas em estruturas pouco amortecidas não interfere crucialmente na precisão dos resultados finais obtidos [12].

Antes de prosseguir cabe aqui uma explanação a respeito dos diferentes estágios que envolvem a análise de vibração de uma estrutura. A Figura 1.2-5-(a) mostra as três fases através das quais uma análise de vibração teórica típica progride. Geralmente, inicia-se a descrição da estrutura através de suas características físicas, em termos de sua distribuição de *massa*, *rigidez* e *amortecimento*, e tal descrição é referida como sendo o Modelo Espacial ou Analítico.

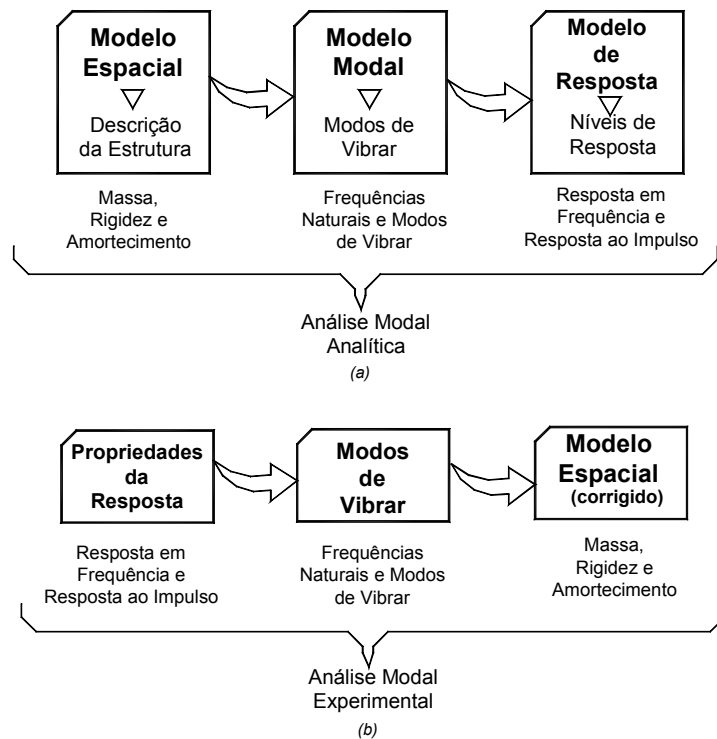


Figura 1.2-5 - Análise de Vibração de uma estrutura. (a) Fases de uma Análise de Vibração Teórica, (b) Fases de uma Análise de Vibração Experimental

Em seguida, é feita uma análise modal analítica do modelo espacial, o que fornece a descrição do comportamento da estrutura através de um conjunto de frequências naturais com seus correspondentes modos naturais de vibrar e fatores de amortecimento modal, o chamado Modelo Modal. Basta um único modo e correspondente frequência natural e fator de amortecimento para se obter um modelo modal da estrutura, no entanto, um modelo mais preciso deste tipo é obtido simplesmente formando-se um conjunto de modos numa matriz e respectivos frequências naturais e fatores de amortecimento em outra matriz. Cabe lembrar que tal solução descreve as várias formas nas quais a estrutura é capaz de vibrar naturalmente sem qualquer

excitação ou força externa e portanto tais modos são chamados de modos 'normais' ou 'naturais' de vibrar da estrutura.

O terceiro estágio determina como a estrutura irá vibrar sob uma dada condição de excitação e especialmente, com quais amplitudes. Logicamente, isto não dependerá somente das propriedades inerentes da estrutura, mas também da natureza e magnitude da excitação imposta. Entretanto, é conveniente se executar a análise da resposta da estrutura para uma excitação dita 'padrão', onde tais níveis de resposta descrevem o Modelo da Resposta da estrutura. Portanto, o modelo predito consistirá de um conjunto de *funções de resposta em frequência* (FRFs) ou um conjunto de correspondentes *funções de resposta ao impulso* (FRIs), os quais devem ser definidos sobre uma faixa de frequência aplicável.

A Figura 1.2-5-(b) mostra o processo inverso, ou seja, a partir da descrição das propriedades da resposta medida experimentalmente (tal como as FRFs ou FRIs medidas), pode-se deduzir as propriedades modais e as propriedades espaciais, sendo que no último caso deve-se lançar mão de métodos de correção ou ajuste de modelos com o objetivo de se ajustar os modelos teóricos à luz das medições pelo uso do modelo modal provido pelo modelo da resposta experimental.

Nos casos onde se lidam com problemas de tamanho e complexidade consideráveis, é desejável reduzir-se o tamanho do modelo e a complexidade da análise efetuada. Isto pode ser obtido através da subdivisão da estrutura em componentes e da subsequente análise modal de cada componente em separado, para que em seguida se possa descartar a informação que concerne os modos de alta frequência natural. Tal procedimento tem o efeito de se reduzir o conjunto de dados do modelo, sem que se prejudique seriamente sua validade. Seguindo este procedimento para cada modelo de componente por vez, a análise final de acoplamento é então efetuada usando as propriedades modais, sendo que, o modelo modal final de cada componente pode ser obtido diretamente a partir das propriedades da resposta medida experimentalmente para cada componente, ou pelo uso de modelos espaciais corrigidos.

Capítulo 2

Vetores de Ritz

2.1 Introdução

Os vetores de Ritz são usados extensivamente na aproximação das respostas dinâmicas de estruturas, em técnicas de redução de modelos e solução de autoproblemas em combinação com um procedimento de Rayleigh-Ritz [5] (daí o nome vetores de Ritz). Os modos naturais de vibrar constituem um tipo especial de vetores de Ritz obtidos pela aplicação de algoritmos mais robustos que possibilitam a extração completa dos modos normais de vibrar e das correspondentes frequências naturais. Neste trabalho, os vetores assim obtidos serão sempre denominados *modos normais de vibrar* ou *autovetores*, enquanto que, os aqui denominados simplesmente por *vetores de Ritz*, ou *vetores de Ritz dependentes do carregamento*, formam uma classe particular de vetores na qual a informação sobre o carregamento na estrutura é usada na geração dos vetores subsequentes, pela aplicação de relações de recorrência. Por último, os *vetores de Ritz genéricos* denominarão o conjunto de todos os vetores que podem ser usados num procedimento de Rayleigh-Ritz, ou seja tanto os modos normais de vibrar quanto os vetores de Ritz dependentes do carregamento, e quaisquer outros tipos de vetores que sejam adequados para este fim.

Garantindo que os vetores de Ritz formam o mesmo espaço, eles são uma alternativa atrativa aos autovetores padrão, visto que os vetores de Ritz podem ser obtidos a um menor custo computacional [3, 12]. No entanto, por um longo período a maior motivação para seu uso foi, antes evitar-se autoproblemas de larga escala, do que obter-se resultados mais precisos. A solução das frequências naturais e modos normais de vibrar exatos pode requerer uma enorme quantidade de operações numéricas, porém, o significado direto desta informação pode ser de valor limitado.

Frequências naturais indicam possíveis condições de ressonância, e os modos naturais de vibrar associados às baixas frequências podem indicar quais regiões da estrutura são mais flexíveis. Em muitas análises, a única razão para a extração dos autovetores exatos, é para seu subsequente uso na redução do tamanho do sistema através de uma análise por superposição modal.

O uso apropriado dos vetores de Ritz pode melhorar a precisão em casos onde os autovetores não são a melhor escolha como base vetorial. A participação de determinados autovetores na solução final irá depender das propriedades do carregamento dinâmico aplicado na estrutura. Os modos normais cuja frequência natural se encontre próximo às frequências dominantes do carregamento irão participar significativamente da solução. No entanto, autovetores que são ortogonais ao carregamento não são excitados, mesmo que suas frequências estejam contidas na faixa de frequência do padrão de excitação. E ainda, para cargas concentradas, uma grande quantidade de autovetores pode ser requerida para se capturar os efeitos da resposta estática da estrutura. Se os autovetores exatos são usados numa análise de superposição modal por exemplo, alguns problemas são verificados: além de não serem excitados por carregamentos ortogonais, a solução será altamente dispendiosa para sistemas de larga escala e o número de autovetores requerido para se obter uma solução dinâmica precisa não será conhecido até que o autoproblema seja resolvido [3, 6,12,14].

O uso dos vetores de Ritz, no entanto, elimina boa parte destes problemas e permite uma análise dinâmica precisa com um reduzido custo computacional [3]. Ademais, os vetores de Ritz são aplicados como vetores iniciais em alguns algoritmos de solução de autoproblemas, pois a escolha apropriada de um conjunto de vetores de Ritz pode acelerar substancialmente o processo iterativo de solução do autoproblema.

2.2 Revisão Bibliográfica.

Um dos primeiros métodos interativos para solução de autoproblemas lineares foi apresentado em 1950 por Lanczos [8], época em que os computadores digitais ainda se encontravam na sua infância. Ao contrário de vários métodos conhecidos até então que eram abertos, aproximados e não especificavam o número de interações requeridas, o método de Lanczos era um processo exato que convergiria em n interações para um sistema com n graus de

liberdade [11]. No entanto, o algoritmo original de Lanczos requeria atenção especial para se evitar instabilidades numéricas, e caso algum procedimento de reortogonalização fosse incluído, a estabilidade numérica de seu algoritmo se tornava equivalente àquela obtida pelo método de Householder. Por este motivo, o método original de Lanczos caiu no esquecimento e permaneceu assim por mais de 25 anos, quando foi reexaminado em 1970 por Ojavo e Newman [9] que utilizaram o método de Lanczos em combinação com um procedimento de Rayleigh-Ritz [5] na representação da resposta modal de sistemas dinâmicos de larga escala.

Em 1982, Wilson, *et al.* [3], desenvolveram um algoritmo para extração de vetores de Ritz dependentes do carregamento baseado numa sequência de Krylov que utiliza a resposta estática da estrutura como vetor inicial, atendendo assim o requisito de adequação estática ao carregamento, ou a necessidade de se capturar os efeitos da resposta estática da estrutura, e demonstraram que a geração de tais vetores normalizados pela matriz de massa é muito menos dispendiosa do que a geração dos modos normais. Em 1984 Nour-Omid e Clough [6] utilizaram o algoritmo de Lanczos para geração dos vetores de Ritz, o qual apresentou as ótimas características de convergência do método de aceleração modal, porém com um custo computacional muito menor. Os métodos de Wilson e de Nour-Omid e Clough são muito semelhantes, sendo que a principal diferença reside no fato de que o primeiro perfaz reortogonalização completa de cada novo vetor gerado sobre todos os anteriores, enquanto que o segundo algoritmo perfaz a reortogonalização somente sobre dois vetores precedentes por vez. Em ambos os algoritmos podem ocorrer perdas de ortogonalidade devido a erros numéricos de arredondamento durante os procedimentos de recorrência. Com a intenção de se evitar tais erros, em 1986 Leger *et al.* [10] propuseram um novo algoritmo mais estável que introduz um vetor temporário no processo de recorrência, além de perfazer a ortogonalização completa de cada vetor gerado com todos os precedentes.

Em 1985, Nour-Omid e Clough [11] apresentaram um algoritmo para extração de vetores de Ritz em blocos. Também baseado no algoritmo de Lanczos, permite a inclusão de mais de uma excitação simultânea na extração de um bloco de vetores estáticos iniciais. Sendo que os demais vetores serão obtidos em blocos, tendo como bloco inicial o bloco de vetores estáticos. Em 1987, Craig e Hale [4] utilizam blocos de vetores de Ritz, ou os denominados blocos de Krylov em substituição aos modos normais de vibrar em métodos de síntese modal dos

componentes. Zimmerman [12], apresenta em 1999 um método para extração de vetores de Ritz experimentais. Utilizando-se o ERA (Eigensystem Realization Algorithm) [13], que é um método de identificação de sistemas no domínio do tempo, identificam-se as matrizes de estado A, B e C em tempo contínuo. As matrizes obtidas são convertidas para tempo discreto e finalmente os vetores de Ritz experimentais são extraídos através de relações de recorrência. Zimmerman usa estes vetores na detecção de falhas estrutural, onde mostra em exemplos numéricos simulados que os vetores de Ritz são mais sensíveis ao dano do que os modos normais de vibrar. Em 2000, Jianmin Gu, *et al.* [14], apresentam um novo método para extração de vetores de Ritz. O método proposto utiliza de uma relação de recorrência quase estática, onde introduz um parâmetro de ponderação na tentativa de capturar os efeitos inerciais numa faixa de frequência desejada. Alguns exemplos numéricos mostram maior eficiência e precisão na utilização deste método em relação a outros métodos de extração de vetores de Ritz, entretanto é necessário o conhecimento prévio de uma faixa de frequência aplicável.

2.3 Aplicação dos Vetores de Ritz na Redução de Modelos

A equação do movimento para um sistema estrutural tem a seguinte forma matricial,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1)$$

O número de coordenadas de deslocamento, n , empregadas na discretização depende da complexidade da estrutura e da precisão desejada na descrição da resposta dinâmica. Sistemas estruturais de larga escala podem conter centenas, ou até mesmo milhares de graus de liberdade, e para se lidar com este problema, costuma-se reduzir as equações do movimento para uma quantidade muito menor, antes de se resolver o problema dinâmico correlacionado. Na análise de estruturas lineares, tem se tornado uma prática comum expressar as respostas dinâmicas em termos dos modos naturais de vibrar não amortecidos, usando apenas uma quantidade suficiente de modos de baixa frequência para se expressar o comportamento adequadamente.

O procedimento de Rayleigh-Ritz [5] é usado para o desacoplamento e redução da dimensão das equações do movimento, o que pode ser visto basicamente como uma

transformação de coordenadas. Portanto, uma aproximação para os deslocamentos \mathbf{u} pode ser obtida através da aplicação da seguinte transformação linear,

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{p} \quad (2)$$

onde, \mathbf{p} representa m coordenadas generalizadas do sistema reduzido, sendo $m \ll n$. Substituindo a equação (2) na equação (1), e pré multiplicando a equação resultante por Ψ^T , teremos,

$$\mathbf{M}^* \mathbf{p} + \mathbf{C}^* \mathbf{p} + \mathbf{K}^* \mathbf{p} = \Psi^T \mathbf{F} \quad (3)$$

onde as matrizes reduzidas serão dadas por,

$$\mathbf{M}^* = \Psi^T \mathbf{M} \Psi, \quad \mathbf{C}^* = \Psi^T \mathbf{C} \Psi, \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^* = \Psi^T \mathbf{K} \Psi \quad (4)$$

A matriz de transformação Ψ , de dimensão $n \times m$, pode ser uma matriz modal contendo m modos normais de vibrar do sistema, sendo que as matrizes reduzidas terão tamanho $m \times m$. Este processo de redução modal representa exatamente o método de superposição modal padrão, ou o método de deslocamento modal, e a Eq. (3) representa um conjunto de equações diferenciais ordinárias desacopladas. De forma mais abrangente, Ψ pode conter m vetores de Ritz genéricos, e assim, tanto os modos normais de vibrar quanto os vetores de Ritz dependentes do carregamento podem ser usados em Ψ , e obviamente a seleção destes vetores para a sua formação é crítica. Caso os vetores de Ritz dependentes do carregamento sejam usados em Ψ , as matrizes reduzidas \mathbf{C}^* e \mathbf{K}^* não serão diagonais, no entanto, a equação (3) pode ser desacoplada pela solução dos autovetores exatos do sistema reduzido, como se demonstra a seguir.

Depois de montada a matriz Ψ usando os vetores de Ritz, e encontradas as matrizes reduzidas dadas pela Eq. (4), o autop problema associado ao sistema reduzido é calculado e usado na solução final, pois representa uma aproximação reduzida do sistema completo que pode conter milhares de GDL. Ademais, a quantidade de equações a ser resolvida nesta fase é trivial se comparado com a quantidade de operações numéricas envolvidas na obtenção dos próprios vetores de Ritz. Esta aproximação requer a solução de:

$$\left[\mathbf{K}^* - \omega_r^2 \mathbf{M}^* \right] \phi_r^* = 0 \quad (5)$$

onde ω_r^2 representa um autovalor exato do sistema reduzido e ω_r , uma frequência natural aproximada do sistema completo. Os autovetores ϕ_r^* são normalizados para satisfazer:

$$\phi_r^{*\top} \mathbf{M}^* \phi_r^* = 1 \quad \text{e} \quad \phi_r^{*\top} \mathbf{K}^* \phi_r^* = \omega_r^2 \quad (6)$$

O conjunto final de vetores de Ritz ortogonalizados ${}^o\Psi$ é obtido através de:

$${}^o\Psi = \Psi \Phi^* \quad (7)$$

O conjunto de vetores ${}^o\Psi$ é ortogonal com respeito às matrizes de massa e rigidez do sistema completo, e representam uma boa aproximação para os modos normais exatos da estrutura. Basicamente, todos os algoritmos para extração de vetores de Ritz baseiam-se numa seqüência de Krylov. Dadas as matrizes de massa e rigidez, \mathbf{M} e \mathbf{K} , e um vetor inicial Ψ_1 , uma seqüência de Krylov pode ser obtida em j interações:

$$\left[\psi_1, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\psi_1, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^2\psi_1, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^3\psi_1, \dots, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^j\psi_1 \right] \quad (8)$$

Assume-se que a dimensão de ψ_1 é $n \times 1$, e que a dimensão de \mathbf{M} e \mathbf{K} é $n \times n$. Dependendo da escolha de ψ_1 , \mathbf{M} e \mathbf{K} , a base de vetores formada na Eq. (8) poderá ser incompleta para algum j menor que n , ou formará inteiramente o espaço vetorial n -dimensional quando $j = n$. Dependendo do algoritmo utilizado na geração dos vetores de Ritz, diferentes procedimentos de ortogonalização e normalização destes vetores serão empregados.

Esta claro que a escolha do vetor inicial ψ_1 é extremamente importante, no entanto, teoricamente, um vetor aleatório qualquer poderia ser utilizado como inicial e os sucessivos seriam gerados pelas relações de recorrência. Porém, o que torna os vetores de Ritz particularmente vantajosos em análise dinâmica é exatamente a escolha apropriada deste vetor inicial quando lida-se com carregamentos aplicados do tipo,

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}.g(t) \quad (9)$$

onde \mathbf{F} representa o carregamento aplicado na estrutura, \mathbf{f} representa a distribuição do carregamento e $g(t)$ é uma função do tempo. Ou seja, o uso dos vetores de Ritz é vantajoso quando a distribuição do carregamento \mathbf{f} permanece constante, e apenas suas amplitudes variam com o tempo. O vetor inicial, neste caso, pode ser tomado na direção do deslocamento estático, ou seja,

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (10)$$

Tal escolha fornece a estes vetores a importante vantagem de se incluir automaticamente o deslocamento estático evitando-se qualquer necessidade por uma correção estática [6].

Na seqüência, serão apresentados dois procedimentos tradicionais para extração de vetores de Ritz, e um terceiro mais recente. Em seguida serão apresentados alguns exemplos numéricos de utilização dos vetores de Ritz. Nos capítulos que seguem serão introduzidos alguns métodos que utilizam estes vetores para outros fins além do uso no tradicional procedimento de Rayleigh-Ritz, ou seja, na síntese modal de componentes e na detecção de falhas estruturais, o que compõe as principais utilizações destes vetores neste trabalho.

2.4 Algoritmo de Wilson

Wilson *et al.* [3], empregaram uma seqüência de Krylov para gerar os vetores de Ritz, aqui denominados de VRW, utilizando a seguinte forma de recorrência:

$$\boldsymbol{\psi}_i^* = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n \quad (11)$$

onde o vetor inicial é dado por:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (12)$$

Cada novo vetor gerado é ortogonalizado com todos os precedentes e normalizado pela matriz de massa:

$$\bar{\Psi}_i = \Psi_i^* - \sum_{j=1}^{i-1} (\Psi_j^T \mathbf{M} \Psi_i^*) \Psi_j \quad (13)$$

$$\Psi_i = \frac{\bar{\Psi}_i}{\left(\bar{\Psi}_i^T \mathbf{M} \bar{\Psi}_i \right)^{1/2}} \quad (14)$$

A seqüência de passos usada na geração dos VRW tem uma interessante interpretação física. O primeiro vetor de Ritz representa a resposta estática ao vetor de carregamento \mathbf{f} . Os efeitos inerciais negligenciados nesta análise estática são do tipo $\omega^2 \mathbf{M} \Psi_1$, onde ω representa uma componente típica de freqüência do carregamento. Estes efeitos são aproximados por $\mathbf{M} \Psi_1$ e aplicados como um carregamento estático no passo seguinte para a geração do novo vetor de Ritz com o objetivo de se aproximar os efeitos inerciais negligenciados. Este processo é repetido até que uma quantidade suficiente de vetores tenha sido gerada, ou até que não se possa mais gerar nenhum vetor linearmente independente. Portanto, como observou-se no item 2.3, a característica de capturar os efeitos da resposta estática da estrutura estará automaticamente presente nos vetores de Ritz assim gerados.

2.5 Algoritmo de Lanczos

Baseado no algoritmo de Lanczos, Nour-Omid e Clough [6] propuseram um outro algoritmo para geração de um conjunto de vetores de Ritz, que aqui serão denominados por VRL. Este algoritmo é baseado na mesma seqüência de Krylov usada no algoritmo de Wilson, e a diferença entre ambos os algoritmos é que neste caso, a ortogonalização é aplicada somente com respeito a dois vetores precedentes por vez, o que torna este algoritmo mais rápido. O mesmo vetor inicial Ψ_1 utilizado na geração dos VRW é utilizado aqui, e, considerando $\Psi_0 = \bar{\Psi}_0 = 0$, a extração dos vetores subsequentes é expressa pela seguinte seqüência de equações:

$$\boldsymbol{\psi}_i^* = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i \quad (15)$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_i = \boldsymbol{\psi}_i^* - \alpha_i \boldsymbol{\psi}_i - \beta_i \boldsymbol{\psi}_{i-1} \quad (16)$$

$$\alpha_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i^* \quad (17)$$

$$\beta_{i+1} = \left(\bar{\boldsymbol{\psi}}_i^T \mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{i+1} = \frac{1}{\beta_{i+1}} \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \quad (19)$$

Este procedimento irá produzir o segundo vetor $\boldsymbol{\psi}_2$, e o processo continuará até a produção de tantos vetores quantos forem desejados, ou até que algum critério seja satisfeito. Pode-se notar que o custo de se gerar cada vetor sucessivo é constante depois que $\boldsymbol{\psi}_3$ tenha sido obtido, pois é necessário impor ortogonalização apenas com respeito aos dois vetores precedentes [6]. Este algoritmo pode ainda ser modificado para lidar com blocos de vetores durante o processo de recorrência. Tal procedimento é utilizado neste trabalho e será exposto em mais detalhes no item 3.4.3 .

Nour-Omid e Clough mostraram que o procedimento de ortogonalização empregado no algoritmo de VRL é equivalente à ortogonalização completa empregada no algoritmo de VRW. Entretanto, na prática, devido a erros de arredondamento, os vetores de Ritz gerados por ambos métodos tendem a perder sua ortogonalidade. Se tais erros não são corrigidos quando atingem um tamanho crítico, os vetores podem se tornar linearmente dependentes. Portanto, uma reortogonalização completa sobre todos os vetores precedentes será necessária quando certa dependência linear é observada.

2.6 Algoritmo de Leger

Com o objetivo de se obter um algoritmo de geração de vetores de Ritz mais estável, Leger *et al.* [11] introduziram um conjunto adicional de vetores temporários que são calculados a cada interação pelas seguintes expressões,

$$\boldsymbol{\psi}_i^* = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{u}_i \quad (20)$$

onde \mathbf{u}_i representa o vetor de resposta estática devido ao padrão de carregamento em \mathbf{f} dado por,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (21)$$

Para $i \geq 2$, o vetor \mathbf{u}_i será antes ortogonalizado com a matriz de massa pela equação (22), para em seguida se reaplicar a equação (20).

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} - \left(\mathbf{u}_{i-1}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}_{i-1} \right) \boldsymbol{\Psi}_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n \quad (22)$$

Em seguida se aplica o procedimento de ortonormalização padrão dado pelas equações (13) e (14).

2.7 Vetores de Ritz Quase-estáticos

Proposto recentemente por Jianmin Gu, *et al.* [14], o algoritmo para extração dos chamados Vetores de Ritz Quase Estáticos (VRQE) emprega um procedimento de recorrência baseado na técnica de superposição modal. Introduz-se um parâmetro de ponderação, denominado frequência central, nas relações de recorrência para se atingir uma melhor aproximação sobre o efeito inercial negligenciado. Neste algoritmo, a sequência de Krylov é dada por,

$$\left[\boldsymbol{\psi}_1, (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_1, ((\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M})^2 \boldsymbol{\psi}_1, \dots, ((\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M})^j \boldsymbol{\psi}_1 \right] \quad (23)$$

O vetor inicial neste caso é dado por,

$$\boldsymbol{\psi}_1 = (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{f} \quad (24)$$

onde, ω_c representa a frequência central numa faixa de frequência de interesse.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, a relação de recorrência quase estática é,

$$\boldsymbol{\psi}_i^* = (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_{i-1} \quad (25)$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_i = \boldsymbol{\psi}_i^* - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i^*) \boldsymbol{\psi}_j \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i = \frac{\bar{\boldsymbol{\psi}}_i}{(\bar{\boldsymbol{\psi}}_i^T \mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\psi}}_i)^{1/2}} \quad (27)$$

Fisicamente, o vetor inicial $\boldsymbol{\psi}_1$ representa a deformação de um sistema não amortecido dada pelo vetor de carregamento \mathbf{f} na frequência ω_c . Ou seja, através do uso de uma solução quase estática, o efeito dinâmico do carregamento, ou o termo inercial negligenciado na solução estática da Eq.(12) é incluído. Em geral, assume-se que ω_c é o principal componente na faixa de frequência de interesse, portanto, $\boldsymbol{\psi}_1$ fornece o principal vetor de deformação da estrutura. O vetor seguinte $\boldsymbol{\psi}_2$ representa a deformação devido a aplicação da força inercial dada por $\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_1$ e o procedimento continua até que o último vetor desejado seja gerado ou até que algum critério seja satisfeito.

Pode-se notar que caso $\omega_c = 0$, o algoritmo de VRQE se reduz ao algoritmo de VRW. Portanto, o parâmetro de ponderação ω_c estende a flexibilidade e a generalidade do algoritmo de VRW.

No entanto, necessita-se saber previamente qual frequência central deve ser utilizada, além da localização da excitação. Caso o carregamento imposto na estrutura seja executado

utilizando-se apenas uma frequência de excitação, utiliza-se esta frequência como central, excitando-se no local onde a estrutura se mostra mais flexível.

Porém, numa análise modal por exemplo, aplica-se uma excitação, e mede-se a resposta da estrutura, onde o tipo de excitação pode ser contínuo (senoidal, aleatório, etc), que requerem o uso de um "shaker", ou do tipo transiente (pulso, etc), que podem ser obtidos pelo uso de um martelo por exemplo.

Tais excitações requerem que uma faixa de frequências seja coberta, onde as magnitudes variam de caso para caso. Portanto, de acordo com o tipo de excitação, procede-se passando de uma frequência para outra sucessivamente até percorrer toda a faixa, ou varrendo as frequências suave e continuamente, para que desta forma a estrutura possa vibrar com maior intensidade nas frequências mais próximas às suas frequências naturais. O que possibilita a posterior identificação destas frequências através do uso de métodos de identificação de parâmetros modais.

O uso dos vetores de Ritz quase estáticos para este tipo de excitação requer o conhecimento prévio de uma frequência central dentro da faixa de frequências aplicável ao problema. Caso a frequência central usada não seja representativa quanto ao problema para o qual se quer utilizar os vetores obtidos, (como por exemplo no uso de métodos de detecção de danos, onde certo dano afeta com maior intensidade uma, ou algumas frequências em particular do que as demais) tais vetores não seriam de grande utilidade, o que nos conduziria ao uso de um dos métodos tradicionais apresentados anteriormente.

2.8 Fator de Participação

Definido por Nour-Omid e Clough [11], o fator de participação, p_i , mede a significância de um vetor, ψ_i , em particular na resposta total,

$$p_i = \psi_i^T \mathbf{f} \quad (28)$$

No uso de autovetores exatos ou dos vetores de Ritz numa análise por superposição modal, o fator de participação é uma indicação direta de quanto o vetor irá participar na solução dinâmica final. Para o caso com um vetor de carregamento independente, o carregamento pode ser expresso pela seguinte série finita:

$$\mathbf{f} = \sum_j p_j \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j \quad (29)$$

Portanto, o erro na representação do carregamento pode ser expresso por um número finito de vetores através de:

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} - \sum_j p_j \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j \quad (30)$$

Finalmente, o erro é normalizado como:

$$e = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{e}}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \quad (31)$$

Portanto, para cada grupo de vetores utilizados na solução teremos um erro correspondente. Pode-se finalmente calcular o erro para cada grupo individual dentro do grupo total de vetores utilizados, ou seja, primeiro calcula-se o erro para somente um dos vetores utilizados, ou para $j = 1$, em seguida calcula-se o erro para $j = 2$, e assim sucessivamente até encontramos o erro do último grupo de vetores $j = m$. Teremos por fim o seguinte vetor final de erros de participação normalizados:

$$\mathbf{e}_f = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_m] \quad (32)$$

2.9 Exemplo numérico

A intenção deste exemplo é comparar as soluções obtidas pela aplicação da superposição modal, utilizando-se três tipos de vetores, VRLs, VRQEs e os modos normais de vibrar. Trata-se de uma estrutura plana, modelada com elementos de viga bidimensional, possuindo 3 GDL por nó, deslocamentos em x e y , e rotação em z , totalizando 57 GDL, como pode ser observado pela Figura 2.9-1. Os demais valores usados são: altura da seção transversal $h = 15 \text{ mm}$, largura $b = 30 \text{ mm}$, módulo de elasticidade $E = 2.07\text{e}11 \text{ N/m}^2$, densidade do material $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$.

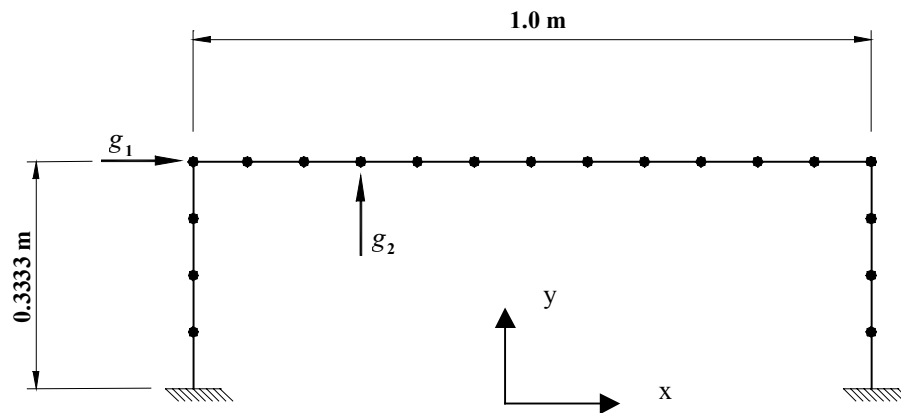


Figura 2.9-1 - Modelo da Estrutura Plana.

Os seis primeiros modos normais de vibrar desta estrutura podem ser vistos na Figura 2.9-2. Observando esta figura pode-se notar que diversos autovetores contém movimentos verticais predominantes em suas formas. Ou seja, devido à sua distribuição física espacial, a estrutura é mais flexível verticalmente. Portanto, os modos de baixa frequência tendem a se "deformar naturalmente" com maior intensidade na direção vertical do que na direção horizontal, e conseqüentemente, sofrerão maiores influências de carregamentos impostos verticalmente.

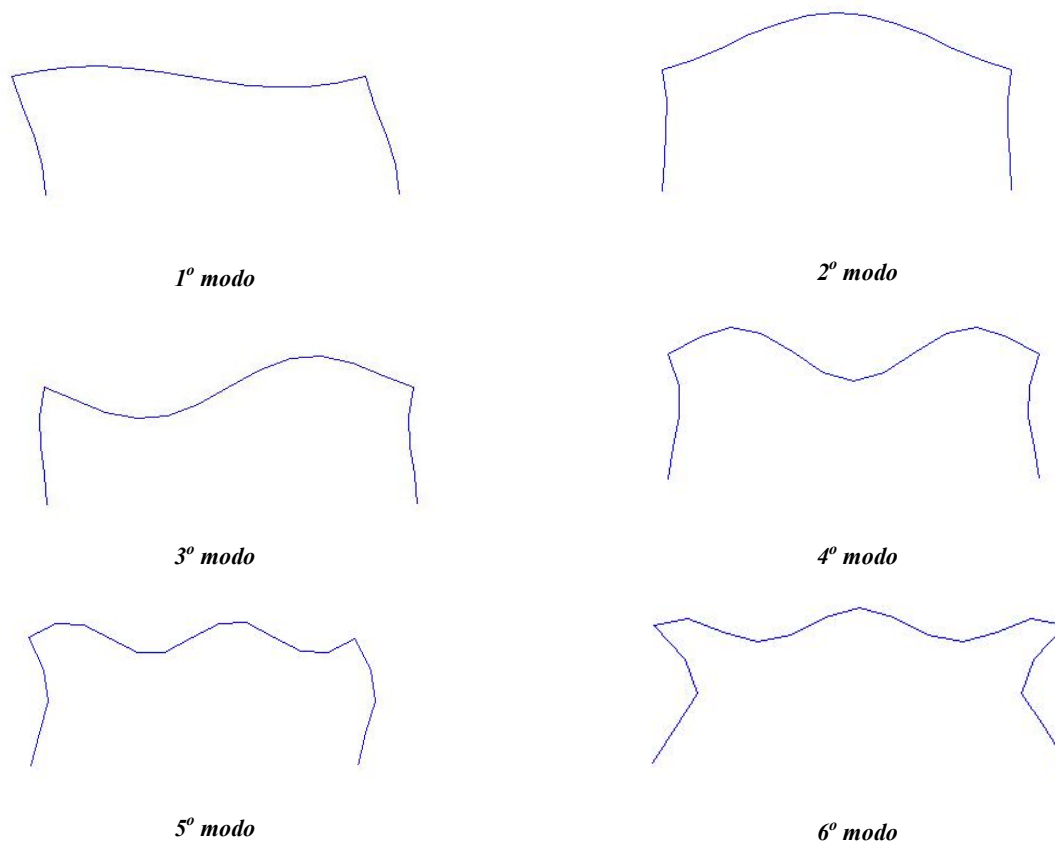


Figura 2.9-2 - Seis primeiros modos da estrutura plana

Dois tipos de carregamento foram simulados neste exemplo. O primeiro carregamento, representado na Figura 2.9-1 como g_1 , trata-se de um carregamento senoidal dado por $\text{sen}(\omega_e t)$, aplicado numa única frequência de excitação ω_e , e é ortogonal à direção preferencial dos modos de baixa Frequência. O segundo, representado como g_2 , trata-se de um impulso unitário ou um delta de Dirac unitário atuando na direção predominante dos modos, e excita todas as frequências naturais na faixa de frequência analisada.

Como já foi dito no item 2.1, os autovetores que são ortogonais ao carregamento não são excitados, mesmo que as frequências de excitação sejam próximas das frequências naturais. No entanto, os vetores de Ritz não apresentam esta deficiência, e para mostrar tal fato, nesta primeira simulação, o carregamento g_1 foi utilizado excitando-se e medindo-se na posição indicada pela Figura 2.9-1, ou seja, uma entrada e uma saída. A expressão de superposição modal [15] foi utilizada para obtenção das FRFs $\mathbf{H}(\omega)$:

$$\mathbf{H}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^m \frac{{}^o\boldsymbol{\Psi}_{jr} {}^o\boldsymbol{\Psi}_{kr}}{\omega_e - \omega} \quad (33)$$

onde ${}^o\boldsymbol{\Psi}$ pode representar um VRL ou um VRQE ortogonais obtidos pela Eq.(7) ou ainda um modo normal de vibrar, sendo todos normalizados pela matriz de massa. O GDL medido é representado por j , o GDL excitado por k , e r representa um dos m vetores usados. A faixa de frequência percorrida ω vai de 0 a 500 Hz, num período de 0 a 5 segundos, e a frequência de excitação ω_e é de 60 Hz. A resposta no domínio do tempo pode ser obtida pela aplicação da transformada de Fourier discreta inversa da FRF,

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{H}(\omega) e^{2\pi n\omega / N} \quad (34)$$

A Tabela 2.9.1 apresenta as vinte primeiras frequências do modelo completo, em Hz, da estrutura plana obtidas pela solução do autoproblema associado ao sistema com 57 GDL.

Tabela 2.9.1- Vinte primeiras frequências exatas da estrutura plana em Hz

k	$\omega(k)$	k	$\omega(k)$	k	$\omega(k)$	k	$\omega(k)$
1	57.48	6	601.46	11	1809.03	16	3367.50
2	62.91	7	723.26	12	1902.98	17	3541.21
3	180.59	8	972.56	13	2369.15	18	3616.94
4	350.91	9	1327.40	14	2491.46	19	3765.12
5	537.92	10	1630.37	15	2885.54	20	4094.11

Na sequência várias soluções são mostradas usando-se diferentes quantidades de VRLs e VRQEs ortogonais ou modos normais. Para cada solução duas curvas são geradas, a primeira apresenta o módulo da resposta no domínio do tempo de 0 até 0.05 s e a segunda curva apresenta o erro normalizado referente a participação de cada vetor utilizado na participação da solução, dado pela Eq.(32).

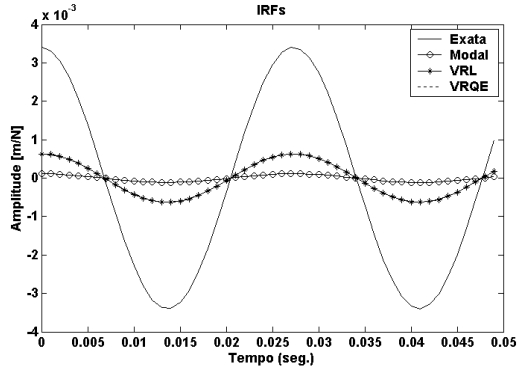


Figura 2.9-3 - Resposta no tempo, usando 6 vetores

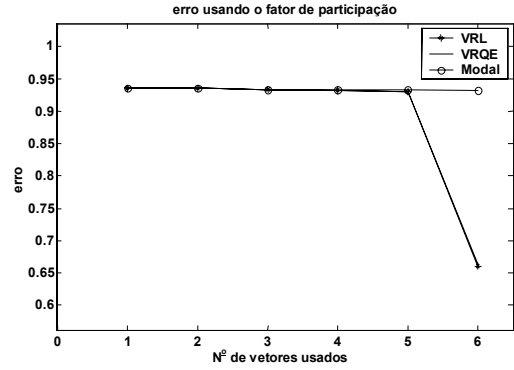


Figura 2.9-4 - Erro na participação, usando 6 vetores

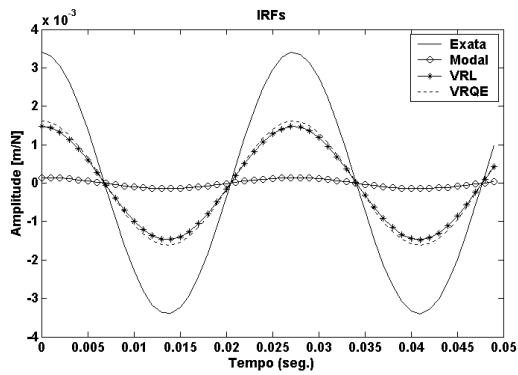


Figura 2.9-5 - Resposta no tempo, usando 12 vetores

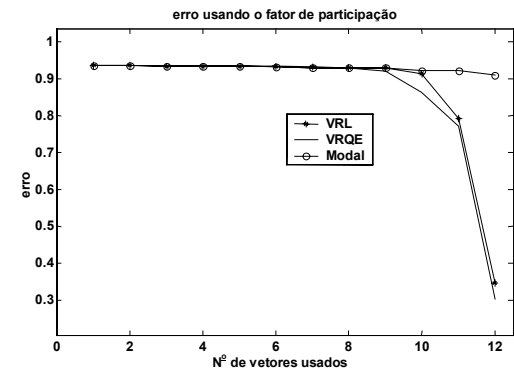


Figura 2.9-6 - Erro na participação, usando 12 vetores

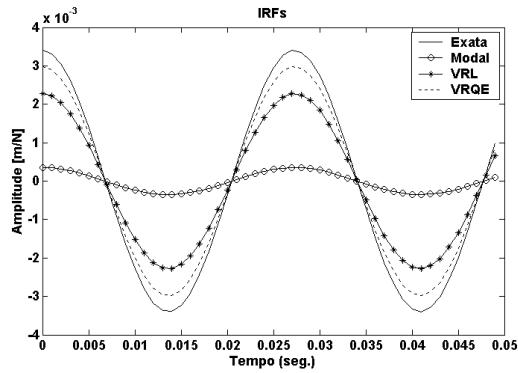


Figura 2.9-7 - Resposta no tempo, usando 18 vetores

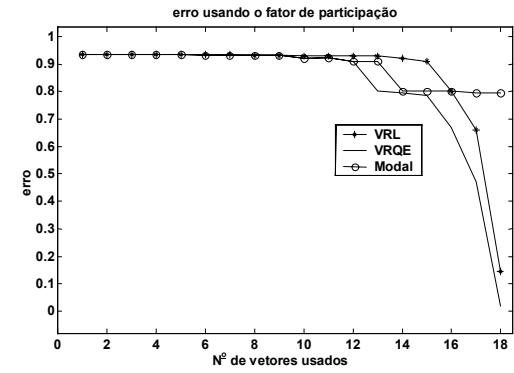


Figura 2.9-8 - Erro na participação, usando 18 vetores

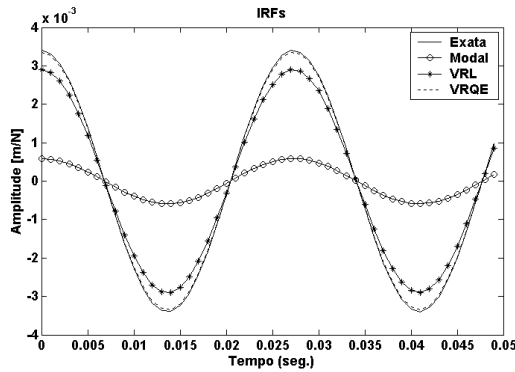


Figura 2.9-9 - Resposta no tempo, usando 24 vetores

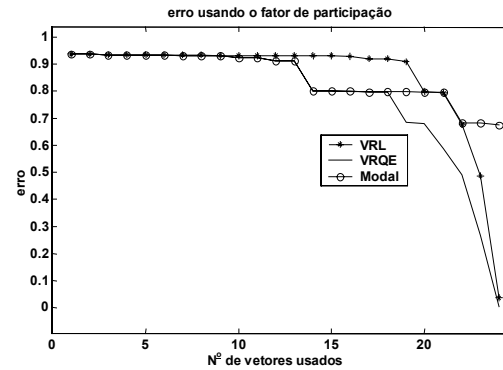


Figura 2.9-10 - Erro na participação, usando 24 vetores

Estes primeiros resultados, Figura 2.9-3 até a Figura 2.9-10, foram obtidos através da aplicação do carregamento g_1 , posicionado ortogonalmente à direção preferencial dos modos normais de vibrar, ou seja, é desfavorável aos modos de baixa frequência. Este tipo de excitação é comum em engenharia, onde carregamentos pontuais excitam a estrutura numa certa frequência e direção, como por exemplo análise dinâmica de estruturas devido a terremotos, estruturas metálicas que carregam máquinas e motores elétricos, etc. A intenção é mostrar a viabilidade de se utilizar os vetores de Ritz como alternativa aos modos para este tipo de excitação.

Pela Figura 2.9-3, que usa 6 vetores, pode-se observar que a solução dada pelos VRLs e pelos VRQEs são coincidentes, o que pode ser comprovado pelo erro na participação dado pela Figura 2.9-4, porém, nenhuma das soluções se aproxima da solução exata. No entanto, a partir da Figura 2.9-5, que usa 12 vetores, as soluções dadas pelos VRQEs convergem mais rapidamente para a solução exata do que as demais soluções, sendo que a solução que usa 24 VRQEs, na Figura 2.9-9, praticamente coincide com a solução exata. Pode-se notar também pela Figura 2.9-9 que apesar de serem menos precisos que os VRQEs, os VRLs apresentam maior tendência para a solução exata do que os modos normais de vibrar. Como esperado, em todos os casos os modos normais de vibrar apresentam as piores soluções.

Outra observação a ser feita refere-se aos erros na participação. Em todas as soluções, o erro referente aos 5 primeiros modos, VRQEs e VRLs são praticamente iguais, situando-se um pouco acima de 0.9, o que indica que tais modos e vetores tiveram pouca participação na obtenção da solução através das respostas no domínio do tempo. A medida que o número de vetores aumenta, os VRQEs apresentaram erros menores ou no máximo iguais aos demais

vetores. Alguns VRLs apresentam erros maiores que os modos normais em alguns casos, como por exemplo na Figura 2.9-10, onde pode-se notar que do 10^o ao 20^o modo normal, os erros apresentados são menores que os respectivos VRLs, porém, na solução final, a participação destes modos acabou não sendo suficiente devido principalmente ao erro dos últimos dois modos que é substancialmente maior do que os respectivos VRLs e VRQEs.

As próximas figuras mostram as curvas geradas pela aplicação de um impulso unitário na posição indicada na Figura 2.9-1 pelo carregamento g_2 , e medidas na mesma posição. Este tipo de excitação percorre todas as frequências naturais dentro da faixa de frequência analisada e é muito comum na análise modal, podendo ser obtida pela utilização de um martelo equipado com uma célula de carga numa das extremidades.

Também neste caso a Eq.(33) é utilizada para extração das FRFs, no entanto, substitui-se a única frequência de excitação ω_e anterior pelas frequências naturais ω_r , que são obtidas pela solução do autoproblema correlacionado com as matrizes de massa e rigidez reduzidas, dado pela Eq.(5). Lembrando que as matrizes reduzidas \mathbf{M}^* e \mathbf{K}^* são obtidas pela superposição modal de um dos tipos de vetores usados. Os demais parâmetros utilizados são os mesmos, ou seja, ${}^0\psi$ representa um dos tipos de vetores usados, e a faixa de frequência analisada é a mesma. Deve-se observar que neste caso, para cada frequência natural ω_r usada, teremos um vetor de Ritz ortogonal ou um modo normal de vibrar correspondente. Depois de se obter as FRFs, pode-se obter as FRIs, e o erro na participação da solução.

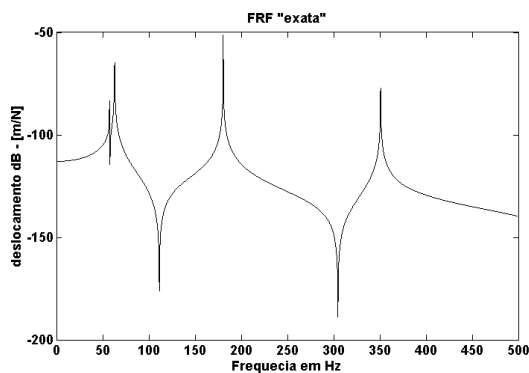


Figura 2.9-11 - FRF exata obtida pelo impulso unitário

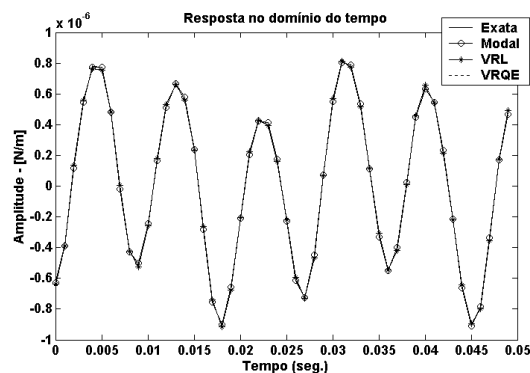


Figura 2.9-12 - Resposta ao impulso usando 6 vetores

A Figura 2.9-11 mostra a FRF "exata" da estrutura plana obtida pela aplicação do pulso unitário numa faixa de 0 a 500 Hz utilizando-se os autovalores e autovetores associados ao sistema completo com 57 GDL. Pode-se observar a presença das duas primeiras frequências naturais próximas de 60 Hz, e as outras duas a 180.59 e 350.91 Hz, como visto na Tabela 2.9.1. A Figura 2.9-12 mostra as IRFs, de 0 até 0.05 seg., obtidas pelo uso de 6 VRLs, 6 VRQEs e 6 modos normais de vibrar. Pode-se notar por esta figura que as quatro soluções apresentam resultados bem próximos, o que dificulta examinarmos cada solução em particular. Para se quantificar com maior precisão cada uma das soluções estudadas, a Figura 2.9-13 até a Figura 2.9-16 apresentam somente os erros normalizados referentes a participação dos vetores utilizados nas soluções finais encontradas.

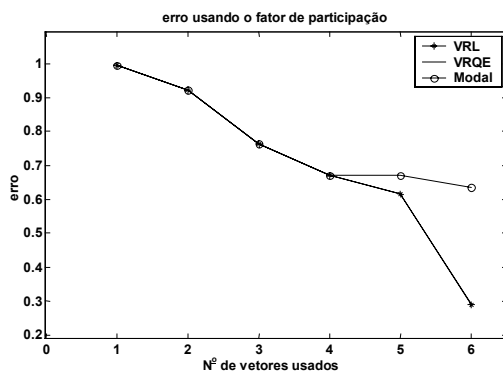


Figura 2.9-13 - Erro na participação, usando 6 vetores

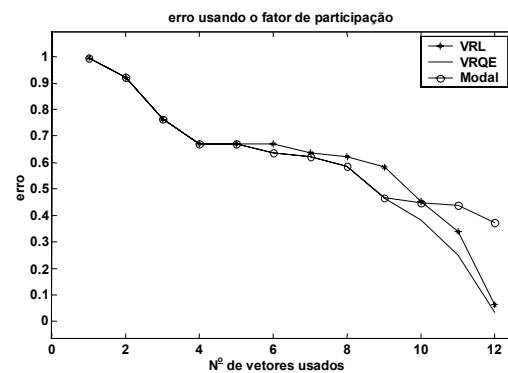


Figura 2.9-14 - Erro na participação, usando 12 vetores

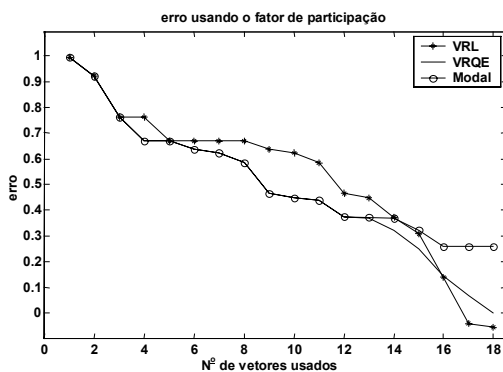


Figura 2.9-15 - Erro na participação, usando 18 vetores

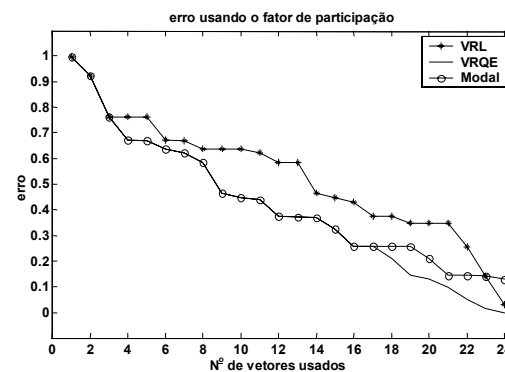


Figura 2.9-16 - Erro na participação, usando 24 vetores

Em todas as soluções, os 3 primeiros modos e vetores de Ritz apresentam erros praticamente idênticos, ou seja, forneceriam resultados semelhantes na obtenção da resposta impulsiva. A medida que o número de vetores usados aumenta, os VRQEs tendem a apresentar

erros menores ou no máximo iguais aos modos normais, enquanto que os VRLs apresentam erros menores somente nos últimos vetores. Pela Figura 2.9-13, pode-se observar que a solução modal foi a de maior erro nos vetores 5 e 6, enquanto as soluções dadas pelos VRLs e VRQEs apresentaram praticamente o mesmo erro de participação. Na maioria dos casos, como se observa pela Figura 2.9-14 até a Figura 2.9-16, a medida que o número de vetores usados aumenta, o erro na participação segue uma tendência semelhante para os três tipos de vetores, o que indica que tanto o uso dos vetores de Ritz, como o uso dos modos normais de vibrar tendem a apresentar resultados semelhantes para o carregamento g_2 nesta estrutura.

Capítulo 3

Síntese Modal dos Componentes

3.1 Introdução

Os métodos de síntese modal de componentes foram introduzidos há mais de quarenta anos, e atualmente são largamente usados no campo da análise dinâmica estrutural [16,17] para solução de problemas dinâmicos de grandes dimensões; especialmente quando a estrutura consiste de diversos componentes, como por exemplo, aeronaves, edifícios, estruturas offshore, veículos espaciais, etc. Frequentemente as diversas estruturas analisadas em engenharia são complexas, sendo seus principais componentes projetados e produzidos por diferentes corporações em diferentes localizações, portanto, torna-se uma tarefa difícil a modelagem em elementos finitos para a estrutura completa de maneira oportuna, visto que o modelo em elementos finitos certamente conterá muitos graus de liberdade, e diferentes componentes de características dinâmicas complexas e adversas. Além do mais, problemas de convergência numérica e erros cumulativos fatalmente poderão incorrer em resultados imprecisos, com graves consequências de projeto.

Devido a tais fatos, deve-se procurar uma alternativa que nos permita reduzir o tamanho e a complexidade do problema e dar uniformidade ao modelo final. Diversos métodos tem sido utilizados com este fim, dentre os quais, os métodos de redução de GDLs e os métodos de subestruturação são os mais usados. Nos Métodos de redução de GDLs, como por exemplo a redução de Guyan [2], a estrutura é modelada como um todo e sobre a equação matricial resultante é realizada a redução de GDLs. Os métodos de subestruturação permitem que a estrutura completa seja subdividida em *componentes* ou *subestruturas* onde a maior parte da análise é efetuada com um tamanho reduzido das equações matriciais que serão utilizadas para o

cálculo do autoproblema a fim de construir um modelo matemático aproximado do sistema estrutural completo. Desta forma, obtém-se a diminuição do problema matricial, pois a estrutura é dividida em partes que são analisadas separadamente e os resultados dos componentes são utilizados para obtenção de uma equação matricial global que fornece as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura completa. Existe ainda a aplicação dos métodos de subestruturação, em casos onde um ou mais componentes são representados por modelos os quais são derivados a partir de dados experimentais ao invés de um processo de modelagem analítica como no MEF.

Na literatura pode-se encontrar diversas implementações para subestruturação, dentre estas, a mais largamente usada, e a que tem apresentado um grande desenvolvimento é a ***síntese modal dos componentes***, SMC ou métodos de subestruturação para análise dinâmica. O termo SMC é empregado genericamente referindo-se a qualquer processo analítico onde os modos normais da estrutura completa são sintetizados utilizando-se os modos de seus componentes individuais. Tal procedimento foi introduzido por Hurty [1] e representa basicamente um procedimento de Rayleigh-Ritz [18]. Idealmente, os métodos de síntese modal de componentes devem atender aos seguintes objetivos:

Fornecer um problema computacional reduzido dentro de uma certa faixa de frequência; ser preciso e eficiente, ou seja, o método deve reproduzir a resposta do sistema de forma precisa, enquanto minimiza os requisitos de tempo de execução e espaço de memória computacional utilizado. A precisão requerida para o sistema completo deve ser obtida com um número reduzido de graus de liberdade; independência total dos componentes analisados, onde não se necessita nenhum conhecimento prévio do sistema completo para a análise de cada subestrutura, e cada análise pode ser feita em diferentes estágios do projeto. Possibilidade de incluir-se um novo componente na estrutura completa em qualquer estágio do projeto. Compatibilidade com procedimentos práticos de teste em relação às condições de contorno para o teste modal a ser realizado, e em relação aos requerimentos de teste para toda informação necessária além dos modos normais.

A classificação dos métodos de síntese modal está baseada nas condições de contorno impostas nas interfaces (junções) entre uma subestrutura e sua adjacente, e nos tipos de vetores utilizados na obtenção dos modos. Existem quatro variantes básicas do método, a saber: ***métodos com interface fixa***, ***métodos com interface livre***, ***métodos com interface carregada***, e ainda

métodos que permitem interface arbitrária, os quais podem ser uma combinação dos três tipos citados acima, tais métodos são chamados de *métodos híbridos*, e finalmente, existem métodos que substituem os modos naturais de vibrar por outros tipos de vetores de forma, tal como os vetores de Ritz que podem ser obtidos em blocos ou um a um. Tais métodos serão denominados *métodos com vetores de Ritz*. Cada um dos tipos de métodos ainda podem variar na combinação entre os modos de vibrar ou entre os vetores de Ritz na definição das coordenadas generalizadas das subestruturas pela formação do chamado superconjunto modal de transformação. Maiores detalhes a respeito das características de cada tipo de modo de vibrar, dos vetores de Ritz e do superconjunto modal serão dadas em capítulos subsequentes. As combinações de modos mais usadas são as seguintes:

- modos normais de interface fixa mais modos estáticos de restrição ou de junção para interface fixa;
- modos normais de interface livre, possivelmente acrescidos dos modos estáticos de junção para interface livre, dos modos de junção com alívio de inércia, ou dos modos de flexibilidade residual, sendo o último uma contribuição pelo efeito residual dos modos descartados do superconjunto modal;
- e por último, modos com interface híbrida, ou seja, uma mistura de modos normais de interface livre e fixa mais modos de restrição, modos de junção, modos de junção com alívio de inércia ou modos de flexibilidade residual.

Alguns métodos de síntese modal não são bem adaptados para aplicações que usam dados experimentais diretamente, pois requerem que algumas propriedades modais das subestruturas sejam obtidas numa configuração de contorno restringido, e, apesar de tal restrição ser facilmente aplicável em análises teóricas, as implicações para o procedimento de teste experimental nesta configuração tornam sua aplicabilidade inviável. Ademais, referente ao amortecimento, a maioria dos trabalhos que utiliza o método de síntese modal para a solução de problemas dinâmicos de grandes estruturas não consideram o amortecimento na formulação, ou no caso mais geral, consideram amortecimento proporcional. Apesar de tal suposição não ser válida para algumas estruturas em engenharia, a consideração de amortecimento proporcional ou mesmo desprezível, se mostra uma escolha razoável para estruturas pouco amortecidas.

3.2 Revisão Bibliográfica.

Em alguns dos primeiros trabalhos [19,20] sobre métodos matriciais de análise estrutural, os autores trabalhavam com estruturas complexas subdividindo-as em componentes que eram tratados separadamente para produzir resultados que eram em seguida acoplados matricialmente para obter as propriedades elásticas da estrutura completa. Estes métodos que relacionam as propriedades de partes separadas de um sistema estrutural representam a base para os métodos de força e deslocamento tratados por métodos matriciais.

Hurty [1] desenvolveu o primeiro método de síntese modal dos componentes capaz de analisar subestruturas com conexões de interface redundantes, cuja ênfase primária é dirigida para os métodos de força e deslocamento, onde o problema de lidar com sistemas de conexões entre componentes é manuseado considerando-se o equilíbrio de forças das interações redundantes, e sugere que o problema da interconexão pode ser resolvido pelo equacionamento "casado" dos deslocamentos do contorno. Para tanto, propôs o uso de modos normais de interface fixa, modos de corpo rígido e modos de restrição redundantes para a definição das coordenadas generalizadas das subestruturas. Craig e Bampton [21] introduziram um método similar ao de Hurty utilizando modos de restrição e modos normais de interface fixa. Apontaram também não ser necessário separar o conjunto de modos de restrição em modos de corpo rígido e modos de restrição redundantes. Bamford [22] melhorou a precisão do método proposto por Hurty utilizando modos de junção, além de desenvolver um método híbrido de síntese. Os modos de junção são obtidos através dos deslocamentos dos componentes enquanto uma força unitária é aplicada a um grau de liberdade do contorno mantendo todos os outros graus de liberdade restantes livres de força.

Goldman [23] introduziu o método de interface livre, empregando somente modos de corpo rígido e modos normais livre-livre. Hou [24] apresentou um método similar ao de Goldman utilizando apenas modos normais livres. Benfield e Hruda [25] implementaram um novo método onde introduziram dois novos conceitos: empregaram a redução de Guyan [2] para determinar as cargas na interface da subestrutura, introduzindo rigidez e inércia, e usaram uma estratégia de acoplamento que difere ligeiramente da usada por autores anteriores. MacNeal [26] utilizou modos com interface híbrida, onde emprega modos normais com interface fixa e modos normais

com interface livre, juntamente com modos sem a presença de movimento de corpo rígido, denominados modos com alívio de inércia. Ele também utilizou flexibilidade e inércia residual para aproximar a contribuição estática de modos truncados de alta ordem de um componente. Rubin [27] fez uma extensão do método de MacNeal incluindo efeitos residuais de segunda ordem, referentes aos modos truncados de um conjunto de modos normais com interface livre. Afirma ainda que os métodos que possuem melhor potencial para realização da síntese através de dados experimentais são aqueles que empregam modos normais de interface livre mais efeito residual.

Hintz [28] apresentou uma discussão completa de métodos para conjuntos de modos de interface estaticamente completos e introduziu o método dos modos estáticos de restrição e o método dos modos estáticos de junção. Craig e Chang [29] demonstram que a diferença entre os vários métodos de síntese modal, resulta do uso de diferentes superconjuntos modais na descrição das coordenadas generalizadas das subestruturas, e nas diferentes formas de forçar a compatibilidade das interfaces entre as subestruturas. Craig e Chang [30] fazem uma revisão dos procedimentos de acoplamento generalizado, e uma descrição detalhada dos métodos que empregam modos de junção. Faz ainda alguns estudos de convergência onde compara os métodos de Rubin, Hintz, Craig e Bampton, MacNeal, e o método híbrido, e apresentam uma redefinição melhorada ao método de Rubin. Curnier [31] faz uma comparação entre três variantes do método de síntese, interface livre, fixa e carregada, sem considerar efeitos residuais, e apresenta uma prova formal da exatidão das três variantes do método na ausência de truncamento. Craig [32] dedica um capítulo de seu livro ao tema síntese modal dos componentes, onde apresenta uma revisão dos principais métodos de síntese modal.

Craig [33] demonstra a equivalência dos vários superconjuntos modais em uso, sendo que a grande diferença está no fato de as bases modais das subestruturas terem sido derivadas de modelos espaciais ou de análise modal experimental. Craig e Hale [4] apresentam um novo método onde propõe o uso de blocos de vetores de Ritz, ou blocos de Krylov, como alternativa ao uso dos modos normais de vibrar. Baseado no conceito de subespaço formado por blocos de Krylov, e através de modelos espaciais de cada componente, utiliza-se os modos estáticos de restrição para gerar blocos de vetores de Ritz por simples relações de recorrência para cada componente. Utiliza-se então os vetores de Ritz gerados em substituição aos modos normais de

vibrar na metodologia de interface fixa. Duarte [17] utiliza em sua tese um superconjunto modal composto de modos normais mantidos, modos de flexibilidade residual e modos de corpo rígido. Os modos de flexibilidade residual são obtidos utilizando-se alguns modos que são eliminados da base modal. Afirma ainda que nos casos em que o modelo seja obtido diretamente via análise modal experimental, sem um modelo espacial por elementos finitos de apoio, o melhor superconjunto modal é aquele que usa dos modos de flexibilidade residual. Araújo [16] usa um método similar ao de Craig e Chang, considerando que os modos de corpo rígido ficarão incluídos nas bases modais das subestruturas. Define um procedimento similar para o caso com amortecimento geral com um superconjunto modal formado por autovetores complexos, utilizando equações de estado de primeira ordem. Propõe ainda um processo de eliminação automática dos modos da base modal, onde afirma que um alto nível de energia das parcelas modais do contorno das subestruturas interligadas influencia na precisão do método.

3.3 Modelo Dinâmico das Subestruturas

Conforme Craig [33], a diferença entre os vários métodos de síntese modal, resulta do uso de diferentes superconjuntos modais na descrição das coordenadas generalizadas das subestruturas, e nas diferentes formas de forçar a compatibilidade das interfaces entre as subestruturas. Para que um conjunto de autovetores das subestruturas possam representar adequadamente o movimento do sistema sintetizado, para qualquer condição de contorno, os modos normais precisam ser enriquecidos com modos estáticos que prevêm os movimentos devido a vinculação dos contornos das subestruturas. A combinação destes modos definem os superconjuntos modais.

A Figura 3.3-1 mostra uma viga bi-engastada que foi dividida em dois componentes α , β . O conjunto F de coordenadas físicas dos componentes pode ser dividido em dois subconjuntos, J e I , sendo que J representa as coordenadas \mathbf{u}_j da junção e I representa as coordenadas \mathbf{u}_i internas das subestruturas. As coordenadas da junção são portanto aquelas onde os componentes são unidos e como tal, podem ainda ser subdivididas em coordenadas de corpo rígido R e de excesso E (ou redundantes).

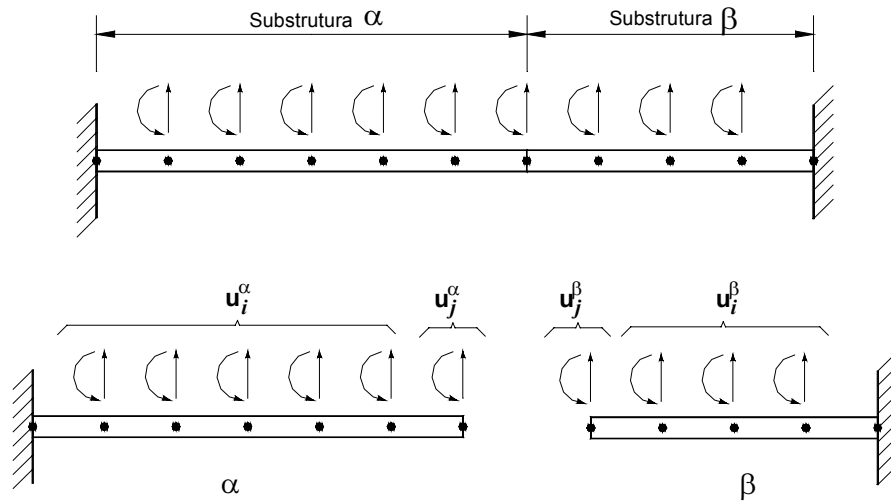


Figura 3.3-1 - Viga bi-engastada subestruturada e coordenadas físicas particionadas em internas e de junção.

Em seguida, para simplificar a análise, serão considerados sistemas sem amortecimento, e sem modos de corpo rígido. Serão enfocados métodos usando apenas dois componentes. Entretanto, qualquer número de componentes pode ser devidamente acoplado pelos métodos de síntese.

3.3.1 Transformação em Coordenadas Generalizadas.

A equação do movimento para um sistema estrutural linear completo, não amortecido, escrita em termos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} tem a seguinte forma matricial,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (35)$$

Dividindo-se tal sistema estrutural completo em duas subestruturas α e β , a equação do movimento para o componente estrutural linear genérico α , não amortecido, escrita por hora em termos das coordenadas físicas \mathbf{u} tem a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}_\alpha \ddot{\mathbf{u}}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha \quad (36)$$

Expandindo em termos das coordenadas internas e da junção, tem-se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ii} & \mathbf{m}_{ij} \\ \mathbf{m}_{ji} & \mathbf{m}_{jj} \end{bmatrix}^{\alpha} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_j \end{Bmatrix}^{\alpha} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} \end{bmatrix}^{\alpha} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{Bmatrix}^{\alpha} \quad (37)$$

As coordenadas físicas \mathbf{u} de ambos componentes podem ser representadas em termos de coordenadas generalizadas \mathbf{p} , pela seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{p} \quad (38)$$

onde Ψ é a matriz de transformação que forma o chamado superconjunto modal de transformação dos componentes. Vários pesquisadores [29, 16] observaram que o superconjunto modal que apresenta os melhores resultados nos métodos de síntese são aqueles contendo modos normais de vibrar pré selecionados dos componentes acrescidos de outros modos que não são modos normais de vibrar. Tais modos não normais podem ser dos seguintes tipos: modos estáticos de restrição, modos estáticos de junção, modos de junção com alívio de inércia, modos de flexibilidade residual. Conforme já dito, tais modos são usados de acordo com enfoque dado na interface da estrutura.

Aplicando a transformação linear da Eq. (38) na Eq.(36) do componente α , e pré multiplicando ambos os lados da equação pela matriz de transformação transposta, tem-se:

$$\mu^{\alpha} \ddot{\mathbf{p}}^{\alpha} + \kappa^{\alpha} \mathbf{p}^{\alpha} = \Psi^{\alpha T} \mathbf{f}^{\alpha} \quad (39)$$

onde,

$$\mu^{\alpha} = \Psi^{\alpha T} \mathbf{M}^{\alpha} \Psi^{\alpha} \quad (40)$$

$$\kappa^{\alpha} = \Psi^{\alpha T} \mathbf{K}^{\alpha} \Psi^{\alpha} \quad (41)$$

A Eq. (39) define o modelo dinâmico de um componente, α , em coordenadas generalizadas. O mesmo processo também se aplica ao componente β , e de forma similar montaríamos as equações de cada um dos outros componentes separados que comporiam o

sistema estrutural completo. Ao escrever tais equações, deseja-se agrupar as coordenadas relacionadas a cada componente em particular; portanto,

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^\alpha & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^\beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^\alpha & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\kappa}^\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}^\alpha \\ \ddot{\mathbf{p}}^\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^\alpha \\ \mathbf{f}^\beta \end{bmatrix} \quad (42)$$

Definindo a seguinte equação,

$$\boldsymbol{\mu} \ddot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{p} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f} \quad (43)$$

A formação da matriz de transformação $\boldsymbol{\Psi}$, que reúne as informações contidas em $\boldsymbol{\Psi}^\alpha$ e $\boldsymbol{\Psi}^\beta$ dependerá da ordenação dada às coordenadas dependentes e independentes no acoplamento dos componentes, ordenação que na verdade depende das equações de restrição impostas e do método de síntese utilizado. Numa interpretação física, a Eq. (43) pode ser considerada como um conjunto de equações de movimento para o grupo de componentes não conectados. Do processo físico de conectar tais componentes originam-se as equações de restrição entre os elementos do vetor \mathbf{p} . Supondo que na interface entre os dois componentes α e β exista uma restrição que requer que os deslocamentos de um ponto em comum entre os dois componentes sejam iguais, define-se a primeira equação de restrição:

$$\mathbf{u}_j^\alpha = \mathbf{u}_j^\beta \quad (44)$$

Outras restrições podem ser empregadas, dependendo do tipo de modo escolhido para completar o superconjunto modal junto dos modos normais de vibrar das subestruturas. Se existem m componentes no vetor \mathbf{p} , e k equações de restrição relacionando-os, então, existirá um subconjunto destes componentes contendo $n = m - k$ deslocamentos \mathbf{q} que são linearmente independentes. Tal subconjunto pode ser identificado diretamente com o conjunto de coordenadas generalizadas, linearmente dependentes, do sistema estrutural completo \mathbf{p} através da seguinte transformação:

$$\mathbf{p} = \mathbf{S} \mathbf{q} \quad (45)$$

A matriz de transformação \mathbf{S} é de ordem $m \times n$, onde $m > n$. Visto que as coordenadas \mathbf{q} são independentes, temos n graus de liberdade no sistema estrutural completo. A construção da matriz \mathbf{S} requer o conhecimento das restrições impostas em todos os componentes pelo sistema de conexões. Um tratamento similar em todas as conexões conduz a um conjunto de equações de restrição lineares em relação a \mathbf{p} o qual, toma a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = 0 \quad (46)$$

Onde \mathbf{C} é uma matriz retangular de coeficientes constantes de ordem $k \times m$ sendo k o número de equações de restrição e m o número de coordenadas generalizadas. Visto que $m > k$, a matriz pode ser particionada da seguinte maneira:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{dd} \mid \mathbf{C}_{dl}] \quad (47)$$

onde \mathbf{C}_{dl} é uma submatriz de \mathbf{C} escolhida para incluir as variáveis linearmente independentes e \mathbf{C}_{dd} outra submatriz escolhida para incluir as variáveis linearmente dependentes, sendo a última uma matriz quadrada de ordem $k \times k$. A Eq. (46) pode então ser escrita como segue,

$$\mathbf{C}_{dd}\mathbf{p}_d + \mathbf{C}_{dl}\mathbf{p}_l = 0 \quad (48)$$

Nesta equação, \mathbf{p}_l representa um subconjunto de \mathbf{p} que é escolhido para incluir as coordenadas linearmente independentes, e \mathbf{p}_d representa um subconjunto de coordenadas dependentes. Tais subconjuntos devem ser escolhidos de forma que a matriz \mathbf{C}_{dd} escolhida seja não singular. Invertendo tal matriz, o subconjunto de coordenadas dependentes pode ser escrito em termos do subconjunto linearmente independente,

$$\mathbf{p}_d = -\mathbf{C}_{dd}^{-1}\mathbf{C}_{dl} \quad (49)$$

Podemos identificar \mathbf{p}_l diretamente com o conjunto de coordenadas generalizadas do sistema estrutural completo \mathbf{q} , fazendo, $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_l$ então,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{p}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{dd}^{-1} & \mathbf{C}_{dl} \\ & \mathbf{I}_{ll} \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (50)$$

Remetendo a Eq. (45). Pode-se então escrever,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{dd}^{-1} & \mathbf{C}_{dl} \\ \mathbf{I}_{ll} & \end{bmatrix} \quad (51)$$

A matriz \mathbf{S} permite escrever as coordenadas linearmente dependentes do sistema \mathbf{p} em função das coordenadas linearmente independentes \mathbf{q} . A obtenção desta matriz depende exclusivamente do tratamento dado às interfaces entre os componentes que definirão as equações de restrição utilizadas. Nos itens 3.4.1 e 3.4.2 pode-se obter maiores detalhes sobre as formas de se montar a matriz \mathbf{S} para utilização nos métodos de CB e CC, que utilizam metodologias de interface fixa e livre respectivamente.

Retornando à Eq (35), o próximo passo da análise envolve a aplicação da transformação imposta. Substituindo a Eq. (45) na Eq. (35), junto da correspondente transformação da aceleração, e pré multiplicando todos os termos pela matriz transposta \mathbf{S}^T , conduz-se à seguinte equação:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{S} \mathbf{q} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f} \quad (52)$$

Esta equação é identificada com a Eq. (35) e mostra como as propriedades do sistema são sintetizadas a partir das propriedades dos componentes através da aplicação da matriz de transformação \mathbf{S} . Pode-se notar as seguintes propriedades:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{S} \quad (53)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{S} \quad (54)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f} \quad (55)$$

Finalmente, usando a relação entre as forças nas interfaces entre os componentes,

$$\mathbf{f}_j^\alpha + \mathbf{f}_j^\beta = 0 \quad (56)$$

e através das transformações de $\boldsymbol{\Psi}$ e \mathbf{S} , obtemos a equação final dada por,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad (57)$$

No caso de haver truncamento nos modos mantidos no superconjunto modal de transformação dos componentes, as matrizes de massa e rigidez das equações (53) e (54) serão encontradas na forma reduzida, e o retorno às coordenadas físicas é obtido aplicando-se a transformação de Ritz inversa sobre as coordenadas independentes \mathbf{q} . O retorno às coordenadas físicas é conduzido substituindo-se a transformação linear dada pela equação (45) na equação (38):

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{S} \mathbf{q} \quad (58)$$

Ou seja, aplicando-se uma transformação linear que nos possibilite escrever as coordenadas físicas do sistema acoplado \mathbf{u} em termos das coordenadas independentes \mathbf{q} através da transformação dada por $\Psi \mathbf{S}$. Portanto, identificando-se as coordenadas independentes \mathbf{q} como sendo os autovetores obtidos pela solução do autoproblema correlacionado às matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} dadas pelas equações (53) e (54), e identificando-se as coordenadas físicas \mathbf{u} como sendo os autovetores do sistema acoplado em coordenadas físicas, temos

$$\Lambda_p = \Lambda_s \quad \Phi_p = \Psi \mathbf{S} \Phi_s \quad (59)$$

Em seguida, elimina-se as coordenadas redundantes de Φ_p , para finalmente obtermos as matrizes de massa e rigidez analíticas do sistema acoplado em coordenadas físicas, pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{M}_A = [\Phi_p \Phi_p^T]^T; \quad \mathbf{K}_A = [\Phi_p \Lambda_p^{-1} \Phi_p^T]^T \quad (60)$$

As matrizes \mathbf{M}_A e \mathbf{K}_A terão rank deficiente devido exatamente ao truncamento dado nos modos mantidos no superconjunto modal de transformação dos componentes. A obtenção das matrizes em coordenadas físicas é necessária pois elas serão utilizadas em métodos de detecção de falhas baseados em modelos. A formação da matriz de transformação \mathbf{S} que relaciona as coordenadas generalizadas das subestruturas com as coordenadas generalizadas do sistema estrutural completo depende exclusivamente do tipo de modo escolhido para a definição das restrições empregadas nas interfaces entre as subestruturas. Tais modos se unirão aos modos normais de vibrar para formar a matriz de transformação Ψ , definindo o superconjunto modal de

transformação que converte as coordenadas físicas em coordenadas generalizadas de cada subestrutura. Na síntese modal para uma estrutura não amortecida, todos os modos dos componentes são reais e podem ser classificados das seguintes formas: Modos normais de interface fixa; modos normais de interface livre; modos normais híbridos; modos normais de interface carregada; modos estáticos de restrição; modos de corpo rígido; modos estáticos de junção com interface fixa; modos estáticos de junção com interface livre; modos estáticos de junção com alívio de inércia. modos de flexibilidade residual.

3.4 Métodos de Síntese Implementados

Neste trabalho foram implementados quatro métodos de síntese dos componentes, sendo três deles já publicados pela literatura: o método de Craig e Bampton [21], que utiliza modos normais com interface fixa complementados com modos de restrição, o método de Craig e Chang [30] que utiliza modos normais com interface livre complementados com modos de flexibilidade residual, o método de Craig e Hale [4], que utiliza blocos de vetores de Ritz ou os Blocos de Krylov substituindo os modos normais com interface fixa, e um quarto método que usa os vetores de Ritz quase estáticos [14] em substituição aos modos normais de vibrar também numa metodologia de interface fixa.

A intenção aqui não é exatamente qualificar ou comparar os métodos estudados, pois cada um deles possui vantagens e desvantagens que dependerão da aplicação que se quer dar, do caso estudado, dos recursos computacionais disponíveis, etc. Portanto, a intenção principal é simplesmente expor a viabilidade da utilização de tais métodos na solução de problemas dinâmicos, mostrando através de exemplos numéricos simplificados como se lidar com problemas supostamente mais complexos, e, obviamente, mostrar a viabilidade do uso dos vetores de Ritz em substituição aos modos normais de vibrar aplicados a métodos de síntese dos componentes. E finalmente, em capítulos subsequentes tais métodos serão usados em conjunto com métodos de detecção de falhas aplicados a estruturas complexas o que compõe o corpo principal desta dissertação.

Nos próximos capítulos, serão apresentadas as conceituações teóricas de cada método utilizando-se do exemplo mostrado na Figura 3.4-1. Trata-se de uma viga bidimensional livre-

livre com 11 nós, 2 GDL por nó, 22 GDL no total, e parâmetros físicos unitários dividida em duas subestruturas α e β . Este mesmo exemplo foi utilizado em 1987 no artigo de Craig e Hale [4].

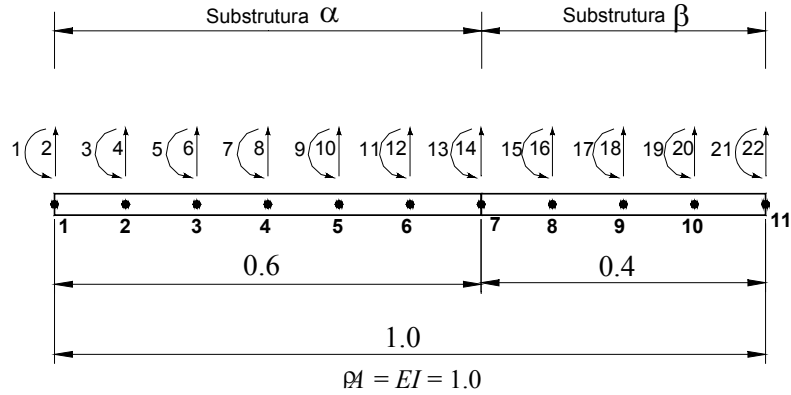


Figura 3.4-1 - Exemplo de Viga bi-engastada subestruturada

3.4.1 Método de Craig e Bampton

Os modos normais com interface fixa são obtidos pela solução do autoproblema definido pela Eq. (37), utilizando apenas coordenadas físicas internas do componente. Neste caso, as parcelas das coordenadas da interface são consideradas nulas. Com isso obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{m}_{ii}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{k}_{ii}\mathbf{u}_i = 0 \quad (61)$$

Sendo o autoproblema dado por,

$$(\mathbf{k}_{ii} - \Lambda_{fi}^2 \mathbf{m}_{ii})\Phi_{fi} = 0 \quad (62)$$

Em seguida, os modos de interface fixa, são normalizados pela matriz de massa \mathbf{m}_{ii} para satisfazer

$$\Phi_{fi}^T \mathbf{m}_{ii} \Phi_{fi} = \mathbf{I}_{fi} \quad \text{e} \quad \Phi_{fi}^T \mathbf{k}_{ii} \Phi_{fi} = \Lambda_{fi} \quad (63)$$

através da expressão

$$\Phi_{fi} = \Phi_{fi} \left(\Phi_{fi}^T \mathbf{m}_{ii} \Phi_{fi} \right)^{-1/2} \quad (64)$$

Com isso, os modos normais de interface fixa são dados por:

$$\Phi_f = \begin{bmatrix} \Phi_{fi} \\ 0_{ff} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Sendo que 0_{ff} representa a parcela considerada nula das coordenadas da interface. A equação (65) representa um conjunto *completo* de modos de interface fixa definidos para um componente, no entanto, pode-se representar as coordenadas físicas de cada um dos dois componentes da Figura 3.4-1 por um conjunto K truncado (ou mesmo completo) de modos normais de interface fixa mantidos acrescidos de um conjunto C , que no exemplo é formado por 2 modos de restrição, referentes às coordenadas J da interface, através da seguinte transformação linear*:

$$\mathbf{u} = \Phi_k \mathbf{p}_k + \Psi_c \mathbf{p}_c \quad (66)$$

Analicamente, os modos normais de interface fixa são obtidos através da solução do autoproblema definido pela Eq.(62), correlacionado às coordenadas internas de cada subestrutura, restringindo-se os GDL das interfaces, ou seja, fixa-se o nó 7 para a subestrutura α e o nó 1 para a subestrutura β .

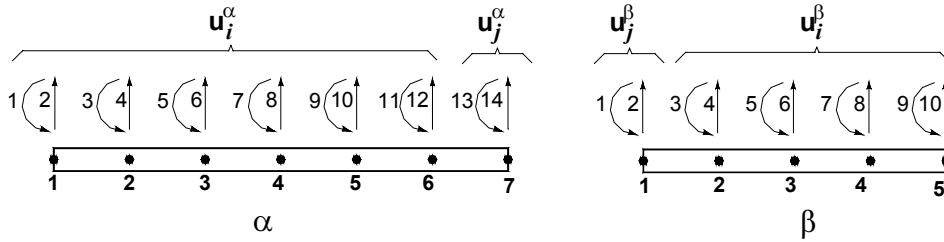


Figura 3.4-1 - Divisão das coordenadas físicas em internas e de junção

* A sequência de transformações e a simbologia utilizada na conceituação teórica dos métodos de síntese segue as definições já dadas no item 3.3.1, que apresenta a transformação em coordenadas generalizadas.

A Figura 3.4-1 mostra as coordenadas físicas dos componentes α e β subdivididas nos conjuntos I e J , ou seja, internos e de junção. Cada modo com interface fixa da subestrutura α conterá 12 linhas e da subestrutura β conterá 8 linhas. Portanto, como os modos normais são de interface fixa e visto que $\mathbf{p}_c \equiv \mathbf{u}_j$, temos que, para cada componente, a Eq.(66) pode também ser escrita de forma particionada,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{ic} \\ 0_{jk} & \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_c \end{Bmatrix} \quad (67)$$

A equação (67) relaciona-se com a Eq.(38) na transformação que representa as coordenadas físicas \mathbf{u} de um dos componentes em termos de coordenadas generalizadas \mathbf{p} . Portanto, considerando-se a princípio o componente α , temos a seguinte matriz de transformação que forma o superconjunto modal de transformação:

$$\Psi^\alpha = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{ic} \\ 0_{jk} & \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix}^\alpha = [\Phi_k \quad \Psi_c]^\alpha \quad (68)$$

Os modos estáticos de restrição são definidos como sendo a deformação estática da estrutura quando um deslocamento estático unitário é aplicado em uma coordenada física do conjunto de coordenadas da junção, enquanto as coordenadas restantes deste conjunto são restringidas, considerando-se deslocamentos nulos, e os graus de liberdade restantes da estrutura são livres de carregamentos. São normalmente definidos para as coordenadas da junção e usados junto dos modos normais de interface fixa. Com isso, definimos um conjunto $C \equiv J$ de coordenadas referentes a tais modos. Assim, pode-se escrever,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{ic} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{ic} \\ \mathbf{R}_{cc} \end{bmatrix} \quad (69)$$

onde \mathbf{R}_{cc} representa as reações nas coordenadas em c . A partir da linha superior, tem-se

$$\Psi_{ic} = -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ic} \quad (70)$$

Dessa forma, a matriz que representa os modos estáticos de restrição será dada por:

$$\Psi_c \equiv \begin{bmatrix} \Psi_{ic} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Portanto, a partir da Eq.(71), Ψ_{ic} é dado por,

$$\Psi_{ic} = -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ij} \quad (72)$$

Em seguida, obtém-se as matrizes de massa μ^α e rigidez κ^α generalizadas do componente α , através das equações (40) e (41) respectivamente. Repete-se o mesmo procedimento para o componente β , obtendo-se as matrizes de massa μ e rigidez κ generalizadas do sistema, dadas pela Eq. (42). Visto que no método de Craig e Bampton (CB), os modos normais são de interface fixa, ou seja, sem forças nas interfaces, teremos somente uma equação de restrição que relaciona os deslocamentos nas interfaces, dada pela Eq.(44), $\mathbf{u}_j^\alpha = \mathbf{u}_j^\beta$, e ainda, sabendo-se que $\mathbf{p}_c^\alpha = \mathbf{u}_j^\alpha$ e $\mathbf{p}_c^\beta = \mathbf{u}_j^\beta$, define-se a seguinte equação:

$$\mathbf{p}_c^\alpha = \mathbf{p}_c^\beta \quad (73)$$

através da qual se pode determinar diretamente a matriz de transformação \mathbf{S} pela da Eq.(45), $\mathbf{p} = \mathbf{S}\mathbf{q}$, ou seja, ordena-se as coordenadas fazendo \mathbf{p}_c^β ser a coordenada dependente, temos:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k^\alpha \\ \mathbf{p}_c^\alpha \\ \mathbf{p}_k^\beta \\ \mathbf{p}_c^\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k^\alpha \\ \mathbf{p}_k^\beta \\ \mathbf{p}_c^\alpha \end{Bmatrix} \quad (74)$$

A ordenação das coordenadas fica a critério do projetista sendo importante obedecer a ordem definida aqui na posterior formação da matriz Ψ . Portanto, considerando um truncamento mantendo-se $K = 5$ primeiros modos com interface fixa para a subestrutura α e $K = 3$ primeiros modos para a subestrutura β , a matriz \mathbf{S} terá a seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{5,5} & 0_{5,3} & 0_{5,2} \\ 0_{2,5} & 0_{2,3} & \mathbf{I}_{2,2} \\ 0_{3,5} & \mathbf{I}_{3,3} & 0_{3,2} \\ 0_{2,5} & 0_{2,3} & \mathbf{I}_{2,2} \end{bmatrix}_{12,10} \quad (75)$$

Ordenadas as coordenadas pela Eq.(74), podemos definir matriz que forma o superconjunto modal de transformação do sistema completo, Ψ , através da Eq.(38):

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^\alpha \\ \mathbf{u}_j^\alpha \\ \mathbf{u}_i^\beta \\ \mathbf{u}_j^\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_k & \Psi_c]^\alpha & 0 \\ 0 & [\Phi_k & \Psi_c]^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k^\alpha \\ \mathbf{p}_c^\alpha \\ \mathbf{p}_k^\beta \\ \mathbf{p}_c^\beta \end{Bmatrix} \quad (76)$$

ou seja,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^\alpha & 0 \\ 0 & \Psi^\beta \end{bmatrix} \quad (77)$$

Portanto, no exemplo dado, a matriz Ψ_{ic}^α será de tamanho 12×2, e a matriz Ψ_{ic}^β será de tamanho 8×2. Teremos um superconjunto modal de transformação Ψ^α , de tamanho 14×7 e Ψ^β de tamanho 10×5. Obtidas as matrizes μ e κ de tamanho 12×12, e \mathbf{S} , de tamanho 12×10 aplica-se as equações (53) e (54) para se obter as matrizes de massa \mathbf{M} e rigidez \mathbf{K} do sistema acoplado que, devido ao truncamento, estarão na forma reduzida, ou seja, serão de tamanho 10×10.

Finalmente, pode-se aplicar a Eq.(59) para se obter os autovetores do sistema acoplado em coordenadas físicas, e pela posterior aplicação da Eq.(60) obtém-se as matrizes de massa \mathbf{M}_A e rigidez \mathbf{K}_A finais do sistema acoplado em coordenadas físicas, de tamanho 22×22, que possuirão rank deficiente devido ao truncamento nos componentes.

3.4.2 Método de Craig e Chang

De forma análoga aos modos normais com interface fixa, os modos com interface livre também são obtidos pela solução do autoproblema definido pela Eq. (37), no entanto, utilizando ambas coordenadas físicas internas e do contorno. Com isso, são utilizados todos os termos das matrizes de massa e rigidez, ou seja;

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (78)$$

Sendo o autoproblema dado por,

$$(\mathbf{K} - \Lambda_l^2 \mathbf{M})\Phi_l = 0 \quad (79)$$

Em seguida os modos são também normalizados pela matriz de massa \mathbf{M} de forma análoga às equações (63) e (64). Com isso, os modos normais de interface livre são dados por:

$$\Phi_l = \begin{bmatrix} \Phi_{li} \\ 0_{lj} \end{bmatrix} \quad (80)$$

A equação (80) representa um conjunto completo de modos de interface livre definidos para um componente. No entanto, também neste caso, pode-se representar as coordenadas físicas de cada um dos dois componentes da Figura 3.4-1 por um conjunto K truncado de modos normais de interface livre mantidos, acrescidos de um conjunto D , que no exemplo é formado por 2 modos de flexibilidade residual referentes aos modos descartados da base modal e definidos pela aplicação de forças unitárias sobre as coordenadas J da interface. Portanto, as coordenadas físicas de cada componente podem ser representadas através da seguinte transformação linear:

$$\mathbf{u} = \Phi_k \mathbf{p}_k + \Psi_d \mathbf{p}_d \quad (81)$$

Novamente para o método de Craig e Chang, caso utilizássemos 3 GDL por nó, teríamos 3 GDL na interface e o conjunto D seria formado por 3 modos de flexibilidade residual. Analiticamente, os modos normais de interface livre são obtidos através da solução do autoproblema correlacionado às coordenadas completas de cada subestrutura dado pela Eq.(79). Em seguida os modos são também normalizados pela matriz de massa \mathbf{M} de forma análoga às equações (63) e (64). Dessa forma, cada modo com interface livre da subestrutura α conterá 14 linhas e da subestrutura β conterá 10 linhas. A equação (81) pode ainda ser escrita como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Phi_k & \Psi_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{id} \\ \Phi_{jk} & \Psi_{jd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_d \end{Bmatrix} \quad (82)$$

Considerando-se o componente α , temos a seguinte matriz de transformação que forma o superconjunto modal de transformação:

$$\Psi^\alpha = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{id} \\ \Phi_{jk} & \Psi_{jd} \end{bmatrix}^\alpha = [\Phi_k \quad \Psi_d]^\alpha \quad (83)$$

Onde, Φ_{ik} e Φ_{jk} representam as porções relativas aos GDL internos e de junção dos modos com interface livre mantidos Φ_k , e de forma análoga em relação aos modos de flexibilidade residual Ψ_d .

Os modos de flexibilidade residual são usados principalmente na análise modal experimental [16, 34-36] e são chamados também de modos de junção residual. Tais modos representam um resíduo aproximado sobre as coordenadas da junção de cada componente, obtido através do uso dos modos flexíveis que são eliminados da base modal, ou seja, os modos que não são usados no método de síntese modal. Podem ser analíticos, obtidos experimentalmente, ou ainda uma combinação de ambos. Considere um componente composto por um conjunto R de modos de corpo rígido e por modos normais de interface livre. A matriz de rigidez pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (84)$$

Os deslocamentos físicos serão uma combinação das deformações elásticas dadas pelos modos normais de vibrar com interface livre, e dos movimentos de corpo rígido, dados pelos modos de corpo rígido, portanto podemos escrever os deslocamentos em termos das coordenadas modais através da seguinte transformação linear:

$$\mathbf{u} = \Phi_l \boldsymbol{\eta}_e + \Psi_r \boldsymbol{\eta}_r \quad (85)$$

ou ainda

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r \quad (86)$$

Considerando a transformação linear

$$\mathbf{u}_r = \Psi_r \boldsymbol{\eta}_r \quad (87)$$

Uma vez que para o movimento de corpo rígido não existem forças elásticas internas, tem-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_r = 0 \quad (88)$$

Pelas equações (87) e (88) sabemos que o segundo termo do lado direito da Eq. (85) é nulo. Utilizando portanto as equações (84) e (85), e pré-multiplicando a equação resultante pela matriz transposta dos modos elásticos, temos:

$$\mathbf{\Phi}_l^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_l \boldsymbol{\eta}_e = \mathbf{\Phi}_l^T \mathbf{f} \quad (89)$$

A equação (89) pode ser escrita em função dos autovalores elásticos como:

$$\boldsymbol{\eta}_e = \mathbf{\Lambda}_l^{-1} \mathbf{\Phi}_l^T \mathbf{f} \quad (90)$$

Das equações (89) e (90), podemos escrever que:

$$\mathbf{K} \mathbf{\Phi}_l \mathbf{\Lambda}_l^{-1} \mathbf{\Phi}_l^T \mathbf{f} = \mathbf{f} \quad (91)$$

Ou de forma compacta:

$$\mathbf{K} \mathbf{G}_e \mathbf{f} = \mathbf{f} \quad (92)$$

onde,

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{\Phi}_l \mathbf{\Lambda}_l^{-1} \mathbf{\Phi}_l^T \quad (93)$$

sendo que a matriz \mathbf{G}_e pode ainda ser definida como:

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{\Phi}_e \mathbf{\Lambda}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi}_e^T \quad (94)$$

onde $\mathbf{\Phi}_e, \mathbf{\Lambda}_{ee}$ são um conjunto de modos elásticos ortonormais (flexíveis) e a matriz diagonal dos autovalores, respectivamente. A equação (93) define a matriz de flexibilidade elástica, e que aqui utiliza como modos elásticos os modos normais de vibrar com interface livre. Esta equação também pode ser determinada pela inversa da matriz de rigidez. Portanto, mantendo-se K modos na base modal de transformação e descartando-se D modos, a matriz de flexibilidade elástica pode ser escrita como:

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{\Lambda}_{kk}^{-1} \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{\Phi}_d \mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1} \mathbf{\Phi}_d^T \quad (95)$$

O segundo termo do lado direito da equação (95) representa a flexibilidade da estrutura relativa aos modos não selecionados ou fora da faixa de análise. Dessa forma, podemos escrever a denominada matriz de flexibilidade residual como:

$$\mathbf{G}_d = \mathbf{\Phi}_d \mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1} \mathbf{\Phi}_d^T \quad (96)$$

Portanto, os modos de flexibilidade residual podem ser definidos como:

$$\mathbf{\Psi}_d = \mathbf{G}_d \mathbf{f}_d \quad (97)$$

onde,

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} 0_{ij} \\ \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} \quad (98)$$

representa forças unitárias aplicadas nas coordenadas da junção, portanto teremos:

$$\mathbf{\Psi}_d = \mathbf{G}_d \mathbf{f}_d = (\mathbf{\Phi}_d \mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1} \mathbf{\Phi}_d^T) \mathbf{f}_d = (\mathbf{G} - \mathbf{\Phi}_k \mathbf{\Lambda}_{kk}^{-1} \mathbf{\Phi}_k^T) \mathbf{f}_d \quad (99)$$

Onde \mathbf{G} representa a matriz de flexibilidade de uma estrutura livre-livre. Podemos ainda substituir a equação (98) na equação (99) obtendo-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{\Psi}_d = \mathbf{\Phi}_d \mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1} \mathbf{\Phi}_d^T = \mathbf{\Phi}_d (\mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1} \mathbf{\Phi}_d^T) \quad (100)$$

Em seguida, obtém-se as matrizes de massa μ^α e rigidez κ^α generalizadas do componente α , através das equações (40) e (41) respectivamente. Repete-se o procedimento para o componente β , obtendo-se em seguida as matrizes de massa μ e rigidez κ generalizadas do sistema, dadas pela Eq. (42).

Neste caso, os modos normais são de interface livre, e teremos forças atuando nas interfaces entre os componentes, portanto, define-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{f}_j \quad (101)$$

que representa uma aproximação pseudoestática para as coordenadas generalizadas \mathbf{p}_d , as quais são as respostas dos modos de flexibilidade residual^{*}. Portanto, visto que os componentes α e β satisfazem a Eq.(56) quando estão acoplados, as equações (56) e (101) são combinadas para se obter:

$$\mathbf{p}_d^\alpha + \mathbf{p}_d^\beta = 0 \quad (102)$$

Portanto, teremos duas equações de restrição a serem obedecidas, definidas pelas equações (102) e (44) e em consequência, duas coordenadas dependentes. As coordenadas são ordenadas da seguinte forma:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_d^\alpha \\ \mathbf{p}_d^\beta \\ \mathbf{p}_k^\alpha \\ \mathbf{p}_k^\beta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k^\alpha \\ \mathbf{p}_k^\beta \end{Bmatrix} \quad (103)$$

Sendo que, também aqui, a ordenação das coordenadas fica a critério do projetista e deve ser obedecida na formação da matriz Ψ . Podemos escrever a linha inferior da Eq.(82) para \mathbf{u}_j^α e \mathbf{u}_j^β , ou seja:

$$\mathbf{u}_j^\alpha = \Phi_{jk}^\alpha \mathbf{p}_k^\alpha + \Psi_{jd}^\alpha \mathbf{p}_d^\alpha \quad (104)$$

$$\mathbf{u}_j^\beta = \Phi_{jk}^\beta \mathbf{p}_k^\beta + \Psi_{jd}^\beta \mathbf{p}_d^\beta \quad (105)$$

^{*} Maiores detalhes sobre a conceituação teórica e implementação dos métodos de síntese podem ser obtidos na referência [32].

Através da Eq.(44), $\mathbf{u}_j^\alpha = \mathbf{u}_j^\beta$, temos que:

$$\Phi_{jk}^\alpha \mathbf{p}_k^\alpha + \Psi_{jd}^\alpha \mathbf{p}_d^\alpha = \Phi_{jk}^\beta \mathbf{p}_k^\beta + \Psi_{jd}^\beta \mathbf{p}_d^\beta \quad (106)$$

ou ainda:

$$\Psi_{jd}^\alpha \mathbf{p}_d^\alpha - \Psi_{jd}^\beta \mathbf{p}_d^\beta + \Phi_{jk}^\alpha \mathbf{p}_k^\alpha - \Phi_{jk}^\beta \mathbf{p}_k^\beta = 0 \quad (107)$$

Combinando as equações (46), (103) e (107), obtemos a matriz \mathbf{C} como sendo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{dd} & \mathbf{C}_{dl} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \Psi_{jd}^\alpha & -\Psi_{jd}^\beta & \Phi_{jk}^\alpha & -\Phi_{jk}^\beta \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (108)$$

A partir da Eq.(51), repetida aqui por conveniência, temos:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{dd}^{-1} & \mathbf{C}_{dl} \\ \mathbf{I}_{ll} & \end{bmatrix} \quad (109)$$

Considerando um truncamento mantendo-se $K = 5$ primeiros modos com interface livre (e descartando-se os $D = 9$ modos e frequências restantes) para a subestrutura α e mantendo-se $K = 3$ primeiros modos (e descartando-se os $D = 7$ modos e frequências restantes) para a subestrutura β , o tamanho da matriz \mathbf{S} , será 12×8 . Definimos agora a matriz que forma o superconjunto modal de transformação do sistema completo, Ψ , através das equações.(38) e (103):

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_j^\alpha \\ \mathbf{u}_j^\beta \\ \mathbf{u}_i^\alpha \\ \mathbf{u}_i^\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_d^\alpha & 0 & \Phi_k^\alpha & 0 \\ 0 & \Psi_{jd}^\beta & 0 & \Phi_{jk}^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_d^\alpha \\ \mathbf{p}_d^\beta \\ \mathbf{p}_k^\alpha \\ \mathbf{p}_k^\beta \end{Bmatrix} \quad (110)$$

Portanto, no exemplo dado, a matriz Ψ_d^α será de tamanho 14×2 , e a matriz Ψ_d^β será de tamanho 10×2 . O superconjunto modal de transformação Ψ^α será de tamanho 14×7 e Ψ^β será de tamanho 10×5 .

Obtidas as matrizes μ e κ de tamanho 12×12 , e S , de tamanho 12×8 , aplica-se as equações (53) e (54) para se obter as matrizes de massa M e rigidez K do sistema acoplado que, devido ao truncamento, estarão na forma reduzida, ou seja, serão de tamanho 8×8 . Pode-se observar que as matrizes reduzidas M e K obtidas pelo método de CB são de tamanho 10×10 , ou seja, possui 2 linhas e colunas a mais que as correspondentes matrizes obtidas pelo método de CC. Isto ocorre devido à quantidade de equações de restrição ou coordenadas linearmente dependentes utilizadas em cada método. Lembrando que o método de CB necessita de somente uma equação de restrição, enquanto que o método de CC necessita de duas, e como em nosso exemplo cada coordenada de contorno possui dois GDL, resulta que o método de CC acaba identificando matrizes cujas linhas e colunas possuirão dois GDL a menos.

Finalmente, pode-se aplicar a Eq.(59) para se obter os autovetores do sistema acoplado em coordenadas físicas, e pela posterior aplicação da Eq.(60) obtém-se as matrizes de massa M_A e rigidez K_A finais do sistema acoplado em coordenadas físicas, de tamanho 22×22 , que possuirão rank deficiente devido ao truncamento nos componentes.

3.4.3 Método de Síntese com Blocos de Krylov

O método de síntese dos componentes que utiliza blocos de Krylov (BK) foi introduzido em 1987 por Craig e Hale [4] em duas metodologias: de interface fixa e de interface livre. Basicamente, a metodologia de interface fixa, apresentada aqui, utiliza-se da mesma conceituação teórica apresentada anteriormente para o método de CB, com uma única diferença, a de se usar blocos de vetores de Ritz dependentes do carregamento, ou os blocos de Krylov obtidos por relações de recorrência, em substituição aos modos normais com interface fixa. O método de BK é sugerido por relações de recorrência, as quais podem ser derivadas a partir das equações dinâmicas dos componentes:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{g} \quad (111)$$

Onde \mathbf{g} constitui forças no contorno impostas por componentes adjacentes. Escrevendo a Eq.(111) de forma particionada temos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ii} & \mathbf{m}_{ij} \\ \mathbf{m}_{ji} & \mathbf{m}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_j \end{Bmatrix} \quad (112)$$

A porção superior da Eq.(112) pode ser resolvida para ϕ_i e o resultado combinado com a matriz de identidade para ϕ_j obtendo-se:

$$\phi \equiv \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} \phi_j + \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{m}_{ii} & \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{m}_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad (113)$$

A equação (112) pode ser escrita na forma abreviada,

$$\phi = \Psi_c \phi_j + \omega^2 \mathbf{G}_c \phi \quad (114)$$

Onde Ψ_c é o modo estático de restrição, definido pela Eq.(71) e a matriz \mathbf{G}_c é definida por:

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{m}_{ii} & \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{m}_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Baseado na Eq.(114), a seguinte fórmula de relação de recorrência para interface fixa pode ser obtida:

$$\phi^{(k)} = \Psi_c \phi_j^{(k)} + \omega^2 \mathbf{G}_c \phi^{(k-1)}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (116)$$

Iniciando-se com $\phi^{(0)} = 0$, aplica-se a Eq.(116) repetidamente para se obter:

$$\phi^{(k)} = \Psi_c \phi_j^{(k)} + \sum_{n=1}^{k-1} \omega^{2n} \mathbf{G}_c^n \phi^{(k-1)} \quad (117)$$

A equação (117) mostra que ϕ é uma combinação dos vetores em Ψ_c , $\Psi_c \mathbf{G}_c$, $\Psi_c \mathbf{G}_c^2$, etc. Portanto, um subspaço de blocos de Krylov pode ser definido para o componente através de:

$$\Psi_c^k \equiv [\Psi_c, \Psi_c^{(1)}, \Psi_c^{(2)}, \dots, \Psi_c^{(k-1)}] \quad (118)$$

Onde, Ψ_c é dado pela Eq.(71) e

$$\Psi_c^{(r)} = \begin{bmatrix} \Psi_{ic}^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_c^{(r)} \Psi_c \quad (119)$$

Portanto, o primeiro bloco de Krylov é dado por,

$$\Psi_c^{(1)} = \begin{bmatrix} \Psi_{ic}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_c \Psi_c = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} (\mathbf{m}_{ii} \Psi_{ic} + \mathbf{m}_{ij}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (120)$$

E subsequentemente,

$$\Psi_c^{(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{m}_{ii} \Psi_{ic}^{(r-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad r = 2, 3, \dots \quad (121)$$

A quantidade de vetores de Ritz presente em cada bloco de Krylov será igual ao número de GDL presentes na interface do componente com seus adjacentes.

Neste ponto, uma importante observação deve ser feita acerca da extração dos blocos de Krylov diretamente através da relação de recorrência dada pela Eq.(121). Conforme Craig e Hale [4]: "um mau condicionamento numérico pode ser encontrado na formação das colunas de vetores que formam o subspaço de Krylov. Consequentemente, algum procedimento de ortogonalização deve ser incorporado numa implementação prática do método. Devido à limitada precisão numérica das operações computacionais, as colunas de Ψ_c , $\Psi_c \mathbf{G}_c$, $\Psi_c \mathbf{G}_c^2$, ..., podem se tornar linearmente dependentes, mesmo quando são teoricamente independentes. Portanto, é apropriado ortogonalizar os vetores a medida que são gerados. Este problema é acentuado quando se trabalha com blocos de vetores. (...)". Na seqüência do artigo, o algoritmo de Lanczos é citado como uma alternativa para se lidar com tais problemas, no entanto, não se demonstra como se proceder na prática para se implementar a relação de recorrência da Eq.(121) através do

algoritmo de Lanczos. Nour-Omid e Clough [9] introduziram um algoritmo para extração de vetores de Ritz em blocos, baseado no algoritmo de Lanczos.

No entanto, aqui, o algoritmo utilizado foi deduzido diretamente a partir da Eq. (121), ou seja, as porções internas dos blocos de vetores obtidos pelas relações de recorrência para cada componente, $\Psi_{ic}^{(r)}$, serão ortogonalizados e normalizados utilizando-se um procedimento baseado no algoritmo original de Lanczos [8], item 2.5, modificado para se lidar com blocos de vetores, conforme segue:

$$\Psi_{ic}^{(r)*} = \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{m}_{ii} \Psi_{ic}^{(r)} \quad (122)$$

$$\overline{\Psi}_{ic}^{(r)} = \Psi_{ic}^{(r)*} - \left(\mathbf{A}^{(r)} \Psi_{ic}^{(r)*T} \right)^T - \left(\mathbf{B}^{(r)} \Psi_{ic}^{(r-1)T} \right)^T \quad (123)$$

$$\mathbf{A}^{(r)} = \Psi_{ic}^{(r)T} \mathbf{m}_{ii} \Psi_{ic}^{(r)*} \quad (124)$$

$$\mathbf{B}^{(r+1)} = \left(\overline{\Psi}_{ic}^{(r)T} \mathbf{m}_{ii} \Psi_{ic}^{(r)*} \right)^{1/2} \quad (125)$$

$$\Psi_{ic}^{(r+1)} = \left(\left(\mathbf{B}^{(r+1)} \right)^{-1} \Psi_{ic}^{(r)*} \right)^T \quad (126)$$

Definido o número de blocos r desejado, extrai-se o primeiro bloco pela equação (120), e, iniciando-se com $\Psi_{ic}^{(1)}$, extrai-se as subseqüentes porções internas dos demais blocos, $\Psi_{ic}^{(r)}$, através das equações (122) até (126). Em seguida, os blocos são formados completando-se com zeros conforme a Eq.(121). Um subspaço de blocos de Krylov é então formado para cada componente através da Eq.(118). Identifica-se este subspaço com o subspaço formado pela matriz de transformação que forma o superconjunto modal de transformação de cada componente numa metodologia de interface fixa.

Podemos agora voltar ao exemplo da Figura 3.4-1. Caso se queira fazer um truncamento mantendo-se $K = 5$ primeiros vetores de Ritz para a subestrutura α e mantendo-se $K = 3$ primeiros vetores de Ritz para a subestrutura β , pelo algoritmo, serão gerados 3 blocos $\Psi_{ic}^{(r)}$ (6 vetores) para a subestrutura α e 2 blocos $\Psi_{ic}^{(r)}$ (4 vetores) para a subestrutura β . Dessa forma, a quantidade K de vetores desejada pode ser obtida eliminando-se os vetores excedentes em cada bloco, que serão posteriormente completados com zeros conforme a Eq.(121), para finalmente montarmos a matriz

final de transformação de cada componente Ψ^α e Ψ^β , identificadas pelo subspaço formado pela Eq. (118). No exemplo, as matrizes Ψ^α e Ψ^β possuirão as mesmas dimensões das correspondentes matrizes obtidas pelo método de CB.

Na seqüência, visto que o método de BK exposto adota uma metodologia de interface fixa, o mesmo procedimento usado no método de CB para se acoplar os componentes é usado na obtenção das matrizes de massa \mathbf{M}_A e rigidez \mathbf{K}_A finais do sistema em coordenadas físicas, que no exemplo serão de tamanho 22×22 , e possuirão rank deficiente devido ao truncamento nos componentes.

3.4.4 Método de Síntese com Vetores de Ritz Quase Estáticos

O denominado método de síntese dos componentes que utiliza vetores de Ritz quase estáticos (QE) apresentado neste trabalho, também usa de uma metodologia de interface fixa, e simplesmente utiliza os vetores de Ritz quase estáticos [14], item 2.7, em substituição aos modos normais de vibrar com interface fixa. Os vetores de Ritz quase estáticos são obtidos pela aplicação direta das relações de recorrência dadas pelas equações (25) até (27) utilizando-se as matrizes de massa \mathbf{m}_{ii} e rigidez \mathbf{k}_{ii} internas do componente. Conforme já se observou no capítulo 2.7, o uso dos vetores de Ritz quase estáticos por estas equações requer o conhecimento prévio de uma frequência central dentro da faixa de frequências aplicável ao problema, além de um ponto de excitação aplicável.

Neste trabalho, a primeira frequência natural de cada componente será usada como central, excitando-se onde o componente se mostra mais flexível. Logicamente, o conhecimento prévio da primeira frequência natural do componente requer a solução completa do autoproblema correlacionado. No entanto, uma boa aproximação para esta frequência pode ser obtida utilizando-se inicialmente o algoritmo de Lanczos para extração de uma quantidade suficiente de vetores de Ritz para posterior utilização na Eq.(4), que fornecerá as matrizes de massa e rigidez reduzidas do componente. A frequência central aproximada é então obtida pela posterior solução do autoproblema correlacionado às matrizes reduzidas, que em tese são muitas vezes menores que as matrizes do sistema completo, e portanto não acarretarão em uma autosolução dispendiosa que possa comprometer a eficiência do método. A posição de excitação pode ainda ser estimada

estudando-se o conjunto final de vetores de Ritz ortogonalizados, obtidos pela Eq.(7) através dos quais pode-se ter uma idéia dos locais e direções onde o componente se mostra mais flexível.

Obtidos os vetores de Ritz quase estáticos dos componentes, monta-se a matriz de transformação dos componentes e segue-se a mesma seqüência apresentada anteriormente para o método de CB.

Capítulo 4

Teoria da Perturbação por Mínimo Rank

4.1 Introdução

A habilidade de se monitorar uma estrutura complexa e detectar eventuais danos em seu estágio mais inicial possível tem atraído o interesse de muitos pesquisadores das áreas da engenharia civil, mecânica, e aeroespacial. Muitos dos métodos de detecção de falhas atuais são métodos experimentais visuais ou localizados, tais como, métodos de ultrassom, de campo magnético, raios-X, etc. Todos estes métodos requerem que as vizinhanças do dano sejam conhecidas *a priori* e que a porção da estrutura a ser analisada seja facilmente acessível. Sujeitos a estas limitações, estes métodos experimentais podem detectar danos numa região delimitada da estrutura, ou no máximo, próximo a ela. A real necessidade de métodos de detecção de danos globais que possam ser aplicados à estruturas mais complexas tem conduzido ao desenvolvimento de métodos que examinam mudanças nas características dinâmicas da estrutura.

A detecção de danos ou falhas, quando determinadas por mudanças em suas propriedades dinâmicas ou respostas da estrutura, tem recebido considerável atenção na literatura nos últimos anos. A idéia básica nestes métodos é usar do conhecimento de que os parâmetros modais da estrutura (frequências naturais, modos normais de vibrar e amortecimento modal) são função das propriedades físicas (massa, rigidez e amortecimento). Portanto, mudanças nestas propriedades causarão mudanças nas propriedades modais.

Os métodos de detecção de danos podem ser classificados em quatro níveis:

- Nível 1: Determinação de que o dano esta presente na estrutura
- Nível 2: Determinação da localização espacial do dano
- Nível 3: Quantificação da extensão do dano
- Nível 4: Predição do tempo de vida restante da estrutura

Os métodos relacionados mais diretamente à dinâmica estrutural pertencem aos níveis 1, 2 e 3, sendo que o nível 4, de predição, é geralmente categorizado dentro dos campos da fratura e fadiga, e como tal, não se dirige às áreas da dinâmica estrutural ou análise modal. Tais métodos também são classificados de acordo com o enfoque dado na solução do problema. Dentre os principais enfoques estão* :

- Mudanças nas Frequências Naturais: Enquadra-se no nível 1 e foi um dos primeiros enfoques dados para detecção de danos estruturais. Baseia-se na observação de que mudanças nas propriedades físicas da estrutura causam mudanças em suas frequências naturais.
- Mudanças nos Modos de Vibrar: Enquadra-se nos níveis 2 e 3, e pode utilizar-se do MAC , do COMAC e da sensibilidade dos modos analíticos e experimentais para certos tipos de danos.
- Flexibilidade Medida: Outra classe de métodos pertencente aos níveis 2 e 3 que faz a comparação das matrizes de flexibilidade medidas da estrutura sem e com algum eventual dano.
- Ajuste de Matrizes: Esta classe de métodos enquadra-se nos níveis 2 e 3 e baseia-se em modificações nas matrizes do modelo espacial da estrutura (massa, rigidez e amortecimento) para se reproduzir da melhor forma possível as respostas estáticas ou dinâmicas medidas.

Dentre os métodos de ajuste de matrizes podemos encontrar ainda outras subclasses de métodos, tais como: métodos de ajuste ótimo de matrizes, métodos baseados em ajuste de sensibilidade, métodos de designação de autoestruturas e métodos híbridos. A Teoria da Perturbação por Mínimo Rank** , ou MRPT, introduzida por Zimmerman e Kaouk [38] é

* Uma revisão de vários destes métodos pode ser encontrada em [37]

** A tradução literal de "rank" para o português é "posto", no entanto neste trabalho será mantido o termo em inglês por seu freqüente uso pelos pesquisadores da área.

classificada como um método de ajuste ótimo de matrizes. Tais métodos resolvem o problema de ajuste das matrizes através da construção de problemas de otimização sujeitos a determinadas restrições baseadas nas equações dinâmicas do movimento da estrutura analisada, no modelo espacial, e nos dados medidos da estrutura. Comparações das matrizes ajustadas com as matrizes originais de um MEF corrigido da estrutura fornecerão uma indicação do dano e podem ser usadas para quantificar a localização e a extensão do dano.

4.2 Revisão Bibliográfica

Doebling *et al.* [37] apresentaram uma ampla revisão da literatura de vários métodos de detecção de falhas utilizados em dinâmica estrutural, onde agrupam os métodos em diversas classes e subclasses que diferenciam-se de acordo com o enfoque dado na solução do problema de identificação do dano. Zimmerman and Smith [39], Hemez [40] e Kaouk [41] apresentam revisões da literatura referentes aos métodos de ajuste ótimo de matrizes. Baruch e Bar Itzack [42], Kabe [43] e Berman e Nagy [44] tem uma formulação em comum do problema de ajuste ótimo, o qual é essencialmente a minimização da norma de Frobenius da matriz global de perturbação, usando força residual zero e propriedade de simetria das matrizes como restrições.

Ojalvo e Pilon [45] introduzem o critério do erro da força modal, e Chen e Garba [46], apresentaram um método que usa a minimização da norma da matriz de perturbação com força residual zero como restrição. Também forçaram uma restrição de conectividade para impor um conjunto de padrões de carregamento sobre a perturbação permissível. Os ajustes são portanto obtidos no nível do elemento, e não no nível da matriz global. Tal método é demonstrado utilizando-se um MEF de uma treliça espacial. Uma outra solução apresentada por Kammer [47] pode ser formulada como sendo a minimização do erro da força modal com a propriedade de simetria das matrizes como restrição. A restrição da simetria preserva a condição de reciprocidade no modelo estrutural ajustado. Smith e Beattie [48] estendem a formulação proposta por Kabe para incluir uma restrição que preserva a esparsidade das matrizes ajustadas e também formulam o problema com duas minimizações, uma da norma da matriz de perturbação e outra da norma da força residual sujeita às restrições de esparsidade e simetria.

Uma outra solução ao problema de ajuste ótimo de matrizes envolve a minimização do rank da matriz de perturbação, ao invés da norma desta matriz. Esta solução é motivada pela observação de que o dano tenderá a ser concentrado em poucos membros estruturais do que distribuído ao longo de um grande número de membros. Portanto, a matriz de perturbação tenderá a ser de menor rank. Tal solução foi publicada originalmente por Zimmerman e Kaouk [38] e é baseada na teoria da solução de rank mínimo para matrizes de sistemas indeterminados. Zimmerman e Simmermacher [49] calculam a matriz de perturbação de rigidez resultante de múltiplos carregamentos estáticos e testes de vibração. Apresentam neste trabalho o método de seleção subspacial, o qual utiliza da decomposição em valores singulares para separar a informação referente a erros de modelagem e ruídos de medição e aproveitar o máximo de informação contida nos poucos modos provindos de um teste modal.

Dos Santos e Zimmerman [50] apresentam um método híbrido de ajuste ótimo de matrizes, onde examinam o efeito de se reduzir os modelos através do método de síntese modal dos componentes do Craig e Bampton [21] na precisão dos resultados da identificação do dano usando a técnica do MRPT, força residual, vetor de ângulo residual e seleção subspacial. Exemplos numéricos foram conduzidos numa viga bi-engastada, dividida em 5 subestruturas. O dano foi simulado reduzindo-se o momento de inércia do MEF original de um dos elementos dentro de uma das subestruturas. Os resultados indicam que o vetor de força residual não pode localizar a subestrutura danificada. Entretanto, a seleção subspacial utilizando-se os vetores de ângulo residual puderam identificar o dano mesmo usando um forte truncamento dos modos dos componentes e puderam localizar o elemento danificado usando um truncamento mais intenso para os componentes. Zimmerman [12] apresenta um método de extração de vetores de Ritz experimentais chamado RRA "Ritz Realization Algorithm" que utiliza do ERA [13] "Eigensystem Realization Algorithm" para identificar as matrizes de estado do sistema em tempo discreto. O ERA usa as funções de resposta ao impulso ("impulse response functions", IRFs) da estrutura, a qual pode ser obtida pela transformada de Fourier inversa das funções de resposta em Frequência ("frequency response functions", FRFs) experimentais ou através de um teste impulsivo direto da estrutura. As matrizes de estado assim obtidas são posteriormente convertidas para o tempo contínuo e utilizadas no algoritmo para extração dos vetores de Ritz. Modificações na técnica do MRPT são propostas para o uso destes vetores. Alguns exemplos numéricos e experimentais mostram maior sensibilidade dos vetores de Ritz ao dano do que os

correspondentes parâmetros modais. Ferraz e Dos Santos [51] apresentam um método de detecção de danos híbrido similar ao proposto por Dos Santos e Zimmerman [50], no entanto, utilizam o método de síntese dos componentes que usa blocos de Krylov [4] ou blocos de vetores de Ritz no lugar do método de Craig e Bampton, e mostram a viabilidade do uso deste método num exemplo numérico.

4.3 Conceituação Teórica do MRPT

As equações dinâmicas do movimento são a base para a "equação do erro da força modal". Assumindo-se um MEF com n GDL, teremos:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (127)$$

O autop problema associado à Eq.(127) é dado por:

$$\left(\omega_{si}^2 \mathbf{M}_s + \mathbf{K}_s \right) \phi_{si} = 0 \quad (128)$$

Onde, ω_{si} e ϕ_{si} são o i -ésimo autovalor e autovetor da estrutura sem danos. Assume-se que esta equação é satisfeita para todos os modos medidos. Agora considerando os autovalores e autovetores da mesma estrutura, porém agora com danos ω_{di} e ϕ_{di} , teremos:

$$\left(\omega_{di}^2 \mathbf{M}_s + \mathbf{K}_s \right) \phi_{di} = \mathbf{d}_i \quad (129)$$

O lado esquerdo da Eq.(129) associa as informações com dano e sem dano da estrutura, portanto, o lado direito não será mais igual a zero. Temos então o vetor \mathbf{d}_i que é definido como o "erro da força modal", ou "força residual" para o i -ésimo modo da estrutura com danos. Como foi descrito por Ojalvo e Pilon [45], este vetor "representa a força harmônica de excitação que seria aplicada à estrutura sem danos, representada por \mathbf{M}_s , \mathbf{K}_s na frequência ω_{di} que faria com que a estrutura se deformasse através do modo ϕ_{di} ". Vários métodos tem sido usados para se obter as

matrizes de massa, rigidez da estrutura com danos, \mathbf{M}_d \mathbf{K}_d , de forma que se possa balancear a equação do movimento:

$$\left(\omega_{di}^2 \mathbf{M}_d + \mathbf{K}_d\right) \phi_{di} = 0 \quad (130)$$

Onde, as matrizes da estrutura com danos são definidas pelas matrizes da estrutura sem danos menos uma perturbação, ou seja, para a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_s - \Delta \mathbf{K} \quad (131)$$

Substituindo as equações em (131) na Eq.(130), temos:

$$\left(\omega_{di}^2 [\mathbf{M}_s - \Delta \mathbf{M}] + [\mathbf{K}_s - \Delta \mathbf{K}]\right) \phi_{di} = 0 \quad (132)$$

Movendo os termos referentes à perturbação para o lado direito da equação, temos:

$$\left(\omega_{di}^2 \mathbf{M}_s + \mathbf{K}_s\right) \phi_{di} = \left(\omega_{di}^2 \Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{K}\right) \phi_{di} \quad (133)$$

O lado direito desta equação consiste de quantidades conhecidas e foi previamente definida como sendo a força residual, portanto, a equação a ser resolvida para as matrizes de perturbação pode ser escrita como:

$$\left(\omega_{di}^2 \Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{K}\right) \phi_{di} = \mathbf{d}_i \quad (134)$$

A força residual é usada como uma restrição nos vários métodos de ajuste de matrizes. A preservação da propriedade de simetria também é usada como uma restrição, ou seja:

$$\Delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{K}^T \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{M} = \Delta \mathbf{M}^T \quad (135)$$

Uma outra restrição é definida pela preservação das propriedades de esparsidade das matrizes, ou os padrões de zero/não zero da matriz. Tal restrição funciona como uma garantia para se manter os padrões admissíveis de carregamento da estrutura no modelo ajustado, e pode ser definida como:

$$esparsa(\mathbf{K}^u) = esparsa(\mathbf{K}^d) \quad (136)$$

Uma terceira restrição define a preservação da propriedade de ser positiva ou semi positiva definida das matrizes. Esta restrição pode ser escrita como:

$$\{\mathbf{x}\}^T [\Delta \mathbf{K}] \{\mathbf{x}\} \geq 0 \quad (137)$$

De forma análoga para a matriz de massa, onde $\{\mathbf{x}\}$ é um vetor arbitrário.

Assumindo-se inicialmente que um MEF corrigido da estrutura tenha sido desenvolvido antes que o dano tenha ocorrido. Em seguida, assume-se que em alguma data posterior, alguma forma de dano estrutural tenha ocorrido. Se for significativo, tal dano irá resultar em mudanças nos parâmetros modais da estrutura. O MRPT é desenvolvido para resolver o problema da localização do dano baseado nos n GDL da estrutura e nos p modos medidos em teste, sendo $p \ll n$. Tal algoritmo é similar ao critério do erro da força modal proposto por Ojalvo e Pilon [45] em 1988, no entanto, utiliza de uma metodologia diferente a qual permite a redução dos efeitos dos erros de medição para certas classes de estrutura, além de apresentar um algoritmo para se determinar a extensão do dano na matriz global de rigidez do modelo espacial da estrutura.

Considerando-se portanto a Eq.(134), podemos escrever,

$$\left(\omega_{di}^2 (\mathbf{M}_s - \Delta \mathbf{M}) + (\mathbf{K}_s - \Delta \mathbf{K}) \right) \phi_{di} = 0 \quad (138)$$

Embora apenas p autovalores e autovetores sejam assumidos como medidos, a Eq.(138) é válida para qualquer autovalor e autovetor em particular da estrutura com danos, pois as matrizes de perturbação são assumidas como sendo exatas. Portanto, agrupando todas as matrizes de perturbação do lado direito, define-se o vetor de dano \mathbf{d}_i através de:

$$\mathbf{d}_i \equiv \mathbf{Z}_{di} \phi_{di} \quad (139)$$

$$\mathbf{d}_i = \left(\omega_{di}^2 \Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{K} \right) \phi_{di} \quad (140)$$

Sendo,

$$\mathbf{Z}_{di} \equiv \omega_{di}^2 \mathbf{M}_s + \mathbf{K}_s \quad (141)$$

Embora as equações (139) e (140) resultem no mesmo vetor de dano, pode-se notar que \mathbf{Z}_{di} e as três parcelas matriciais somadas que multiplicam ϕ_{di} na Eq.(140) não são iguais. Inspeccionando-se \mathbf{d}_i em termos da Eq.(140) revela que os j -ésimos elementos de \mathbf{d}_i serão iguais a zero quando as j -ésimas colunas das matrizes de perturbação forem zero, ou seja, quando os j -ésimos GDL do MEF não forem diretamente afetados pelo dano. Reciprocamente, um GDL cujo MEF tenha sido afetado pelo dano resultará em um valor diferente de zero em \mathbf{d}_i . Portanto, os GDLs que foram afetados pelo dano podem ser determinados através da inspeção dos elementos de \mathbf{d}_i . Mais importante, o vetor \mathbf{d}_i pode ser determinado a partir do MEF original e dos autovalores e autovetores medidos, ω_{di} e ϕ_{di} , usando a Eq.(139). Ignorando o termo de amortecimento, a Eq.(139) é essencialmente o critério do erro da força modal proposto por Ojalvo e Pilon [45] para uso como uma ferramenta de diagnóstico na localização de erros de modelagem em MEFs. Entretanto, a Eq. (139) fornece uma interpretação mais clara para o vetor de dano \mathbf{d}_i aplicado ao problema de detecção de danos nos quais as matrizes de perturbação são esparsas.

Na prática um padrão perfeito de zeros/não zeros raramente ocorre no vetor \mathbf{d}_i devido a erros presentes nos autovalores e autovetores medidos. Portanto, uma forma alternativa de se investigar o estado do dano pode ser definida como:

$$d_i^j \equiv \mathbf{z}_{di}^j \phi_{di} = \|\mathbf{z}_{di}^j\| \|\phi_{di}\| \cos(\theta_i^j) \quad (142)$$

Onde, d_i^j é o j -ésimo componente (ou o j -ésimo GDL) do i -ésimo vetor de dano, \mathbf{z}_{di}^j é a j -ésima linha da matriz \mathbf{Z}_{di} , e θ_i^j representa o ângulo entre os vetores \mathbf{z}_{di}^j e ϕ_{di} . Supondo medições livres de erros, valores de d_i^j iguais a zero correspondem a um ângulo θ_i^j igual a noventa graus, ao passo que, valores de d_i^j diferentes de zero, correspondem a um ângulo θ_i^j diferente de noventa graus. Pode-se esperar que os valores de \mathbf{d}_i correspondentes aos GDL

danificados seriam substancialmente maiores do que os outros valores, entretanto, ao inspecionar a Eq.(142), um valor alto para algum elemento de \mathbf{d}_i pode ter sido o resultado da norma de uma linha \mathbf{z}_{di}^j substancialmente maior que as outras linhas de \mathbf{Z}_{di} , acoplados a um pequeno desvio do ângulo θ_i^j de noventa graus devido a ruídos de medição. Portanto, uma estimativa melhorada para o dano pode ser obtida através do uso do desvio do ângulo θ_i^j a partir de noventa graus, ou seja:

$$\alpha_i^j = \theta_i^j \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) - 90^\circ \quad (143)$$

Onde θ_i^j é obtido pela Eq.(142) e α_i^j é o j -ésimo componente de $\boldsymbol{\alpha}_i$ e os GDL danificados estão associados com os componentes de $\boldsymbol{\alpha}_i$ que são substancialmente diferentes de zero graus. Portanto, para os modos medidos, um *vetor dinâmico residual* ‘ \mathbf{d} ’ e um *vetor de ângulo residual* ‘ $\boldsymbol{\alpha}$ ’ podem ser definidos através de:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{d}_i}{\|\boldsymbol{\phi}_{di}\|} \quad (144)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p |\boldsymbol{\alpha}_i| \quad (145)$$

Muitas vezes é desejável se estimar a extensão do dano na estrutura, o que pode ser obtido através da determinação das matrizes de perturbação $\Delta \mathbf{M}$, e $\Delta \mathbf{K}$ de forma que a Eq.(138) seja satisfeita.

Assumindo-se que ambos, \mathbf{M}_s e \mathbf{K}_s são simétricos, de tamanho $n \times n$, e assumindo-se também que o efeito do dano nas propriedades de massa da estrutura são desprezíveis ($\Delta \mathbf{M} = 0$), a Eq.(138) pode ser rescrita como:

$$(\omega_{di}^2 \mathbf{M}_s + \mathbf{K}_s) \boldsymbol{\phi}_{di} = \Delta \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_{di} \equiv \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (146)$$

Onde assume-se que p autovalores e autovetores são medidos. A equação (146) pode ainda ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{M}_s \Phi_d \Omega_d + \mathbf{K}_s \Phi_d = \Delta \mathbf{K} \Phi_d \equiv \mathbf{B} \quad (147)$$

Onde

$$\Omega_d = \text{diag}(\omega_{d1}^2, \omega_{d2}^2, \omega_{d3}^2, \dots, \omega_{dp}^2) \quad (148)$$

$$\Phi_d = [\phi_{d1}, \phi_{d2}, \phi_{d3}, \dots, \phi_{dp}] \quad (149)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_p] \quad (150)$$

A matriz \mathbf{B} dada pela Eq.(150) é chamada *matriz dinâmica residual*, e de forma análoga à matriz \mathbf{B} , é possível se montar uma matriz \mathbf{A} chamada *matriz de ângulo residual* contendo os p vetores de ângulo residual obtidos através dos parâmetros modais medidos, ou seja,

$$\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p] \quad (151)$$

e a matriz \mathbf{A} também contém informações sobre a relação entre ambos os estados da estrutura, com e sem danos.

A partir da perspectiva da detecção de danos, deseja-se encontrar um $\Delta \mathbf{K}$ simétrico tal que a Eq.(147) seja satisfeita. O dano estrutural frequentemente ocorre em diferentes localizações. O efeito do dano num MEF fica restrito a apenas alguns elementos no MEF. O rank de cada matriz elementar de rigidez vai depender obviamente do número de GDL definidos para o elemento, das funções de forma utilizadas e também do tipo de elemento usado. Portanto, ao invés de se usar a minimização da norma de Frobenius da matriz de perturbação, uma restrição de rank mínimo da matriz de perturbação é imposta, sendo que a solução do MRPT para a matriz de perturbação de rigidez é dada por:

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \Phi_d)^{-1} \mathbf{B}^T \quad (152)$$

Devido a presença de ruídos de medição, a matriz \mathbf{B} usada na equação (152) será tipicamente de rank pleno, ou seja, de rank igual a p , mesmo que o dano tenha induzido um rank menor que p na matriz de rigidez do MEF.

Existem duas maneiras de se estimar o “verdadeiro” rank da matriz \mathbf{B} . A primeira técnica consiste em calcular a decomposição em valores singulares (SVD) de \mathbf{B} . O método que utiliza desta técnica é o chamado seleção subspacial (SS) e será abordado num capítulo subsequente. Uma segunda técnica, é fazer uso dos resultados da localização do dano obtidos pelo uso do vetor de dano residual ou do ângulo de perturbação definidos pelas equações (144) e (145). Usando da informação da conectividade do MEF original em conjunção com o conhecimento dos GDLs com dano, permite-se determinar quais elementos do MEF foram afetados pelo dano. O “verdadeiro” rank de \mathbf{B} pode ser estimado adicionando-se o rank das matrizes elementares associadas com cada elemento danificado.

Uma vez determinado o verdadeiro rank de \mathbf{B} , colunas em excesso de Φ_d e \mathbf{B} podem ser eliminadas tal que o atual rank de \mathbf{B} possa ser estimado através da indicação dada pelos GDLs danificados. No caso de medições corrompidas com ruído, se faz necessário manter em Φ_d os modos que melhor refletem a condição danificada e as correspondentes colunas de \mathbf{B} . A seleção de tais modos pode ser feita comparando-se o estado de dano fornecido por cada modo em particular com o estado de dano fornecido por todos os modos medidos, obtidos pelos resultados apresentados pelas equações (144) e (145). No entanto, devido à presença de ruídos de medição, o uso desta técnica nem sempre apresenta resultados satisfatórios. Ademais, ao utilizar-se da Eq.(152) para estimar a matriz de perturbação de rigidez, a seleção de alguns modos em particular indicados pelos resultados das equações (144) e (145) nem sempre garante que tais modos (e em consequência, as correspondentes colunas de \mathbf{B}) indicarão com maior precisão a extensão do dano. Muitas vezes uma melhor indicação da extensão do dano pode ser obtida através do uso de **todos** os modos medidos, e pela matriz \mathbf{B} completa, independentemente de seu rank final obtido. Uma técnica mais precisa para se estimar a extensão do dano seria a seleção subspacial, tema do próximo capítulo.

4.4 Seleção do Subespaço

Como já foi dito, a seleção dos vetores dinâmicos residuais e dos vetores de ângulo residual que melhor reflitam a extensão do dano necessita de uma decisão sobre quais e quantos modos devem ser usados, e mesmo selecionando-se alguns modos em particular não se tem a garantia da melhor indicação do dano. A seleção subspacial [49] funciona como um método de seleção automática dos modos, além de proporcionar uma maior redução nos efeitos do ruído extraindo a máxima quantidade de informação referente ao dano dos modos medidos.

Considerando a equação de restrição do MRPT dada por,

$$\Delta \mathbf{K} \Phi_d = \mathbf{B} \quad (153)$$

O algoritmo de seleção do subespaço pode ser definido através da solução para uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times t}$ tal que:

$$\Delta \mathbf{K} \Phi_d \mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X} \quad (154)$$

esteja bem condicionado. Não se conhece t , o rank numérico da matriz \mathbf{B} , nem a matriz \mathbf{X} . Considerando a decomposição em valores singulares de \mathbf{B} , temos:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2]^T \quad (155)$$

Onde, $\Sigma \in \mathbb{R}^{t \times t}$ é a matriz de valores singulares diferentes de zero, ou maiores que alguma tolerância predefinida, \mathbf{U} e \mathbf{V} são as matrizes singulares à esquerda e à direita adequadamente particionadas. Quando o rank da matriz \mathbf{B} é deficiente, tal matriz será formada pelas t colunas de \mathbf{U}_1 , portanto, deseja-se encontrar uma matriz \mathbf{X} , tal que:

$$\mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{U}_1 \quad (156)$$

A matriz \mathbf{X} pode ser aproximada utilizando-se a pseudo-inversa de \mathbf{B} , como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^+ \mathbf{U}_1 \quad (157)$$

Uma estimativa para a pseudo-inversa de \mathbf{B} pode ser obtida utilizando-se a matriz de valores singulares e as matrizes singulares \mathbf{U}_1 e \mathbf{V}_1 . Ou seja, pela Eq.(155), a matriz \mathbf{B} pode ser aproximada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_1 \Sigma \mathbf{V}_1^T \quad (158)$$

Sendo que a pseudo-inversa de \mathbf{B} será dada por:

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{V}_1 \Sigma^+ \mathbf{U}_1^T \quad (159)$$

Substituindo-se a Eq.(159) na Eq.(157), temos que a solução para a matriz \mathbf{X} será dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}_1 \Sigma^+ \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1 \quad (160)$$

Sabendo-se que $\mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1 = \mathbf{I}$, chegamos finalmente na expressão:

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}_1 \Sigma^+ \quad (161)$$

Portanto, substituindo-se \mathbf{B} por $\mathbf{B}\mathbf{X}$ e Φ_d por $\Phi_d \mathbf{X}$ na Eq.(152), a solução para a Eq.(154) será dada por:

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{X} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{B}^T \Phi_d \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T \quad (162)$$

Adicionalmente, as colunas da matriz \mathbf{U}_1 representam os principais componentes da matriz dinâmica residual \mathbf{B} . As colunas de \mathbf{U}_1 representam essencialmente a informação mais consistente contida em todos os vetores dinâmicos residuais. A importância de cada coluna pode ser averiguada inspecionando-se seus correspondentes valores singulares. Colunas associadas

com valores singulares menores não são importantes. Por outro lado, colunas associadas com valores singulares mais expressivos podem representar uma indicação do dano, cuja localização pode ser estimada pelos valores singulares de maior intensidade.

Portanto, as colunas de U_1 são denominadas *componentes principais dos vetores de dano*. Um importante benefício deste algoritmo é a redução dos efeitos do ruído e de erros de modelagem. As informações inconsistentes (p.e. ruído) serão "filtradas" na matriz U_2 . Ademais, a análise de componente principal pode também ser aplicada diretamente sobre a matriz de ângulo residual A , através da decomposição em valores singulares desta matriz.

4.5 Exemplo numérico.

A implementação do MRPT será mostrada neste capítulo para um exemplo simplificado de massa-mola não amortecido, fixo-fixo, com 1 GDL por massa e $n = 8$ GDL no total, como pode ser visto pela Figura 4.5-1.

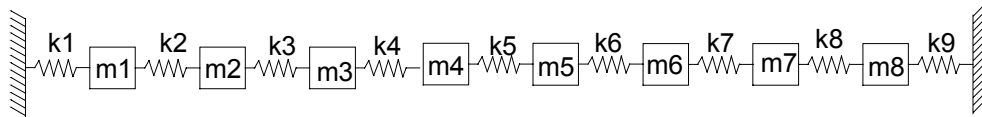


Figura 4.5-1 - Exemplo massa-mola com 8 GDL

Onde o valor dos parâmetros elementares são unitários, ou seja: $m1 = m2 = \dots = m8 = 1$ e $k1 = k2 = \dots = k9 = 1$. Portanto, as matrizes de massa e rigidez sem danos deste sistema são dadas por:

$$M_s = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

O dano foi simulado aplicando-se uma redução de 20% sobre o parâmetro k_4 de rigidez que reduz de 1.0 para 0.8, afetando os GDLs 3 e 4 da matriz global de rigidez. Portanto, a matriz de rigidez com o dano simulado será dada por:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & 1.800 & -0.800 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.800 & 1.800 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

Pela Tabela 4.5.1 podem ser observados as quatro primeiras frequências naturais, em Hz, da estrutura sem dano, ω_s associados às matrizes \mathbf{M}_s e \mathbf{K}_s de massa e rigidez sem dano e (assumindo-se que o efeito do dano nas propriedades de massa da estrutura são desprezíveis) as quatro primeiras frequências naturais com dano ω_d associados às matrizes de massa sem dano \mathbf{M}_s e rigidez com dano \mathbf{K}_d .

<i>Tabela 4.5.1 - Autovalores sem dano e com dano</i>		
ω_s [Hz]	ω_d [Hz]	% de diferença
0.0553	0.0551	0.3218
0.1089	0.1071	1.6289
0.1592	0.1560	1.9674
0.2046	0.2044	0.0849

Pode-se notar pela Tabela 4.5.1 que a diferença entre os autovalores é pequena devido à pequena porcentagem de dano imposta, sendo as maiores diferenças observadas para a 2ª e 3ª frequências. Na prática, para uma estrutura mais complexa com vários GDL, teríamos somente as primeiras frequências naturais e modos normais de vibrar medidos da estrutura com danos, e as frequências e modos obtidos através da solução do autoproblema associado ao MEF corrigido da

estrutura sem danos. Para simular uma condição realista de medições com ruídos, os quatro primeiros autovetores foram corrompidos com um ruído aleatório do tipo [52]:

$$\hat{\phi}_{ij} = \phi_{ij} + \phi_{ij}(\alpha/100)rand[-1,1] + rms(\phi_j)(\beta/100)rand[-1,1] \quad (163)$$

Onde, ϕ_{ij} representa o i -ésimo componente do j -ésimo autovetor com dano, α e β são os fatores de ruído de escala e de bias, respectivamente, $rand[-1,1]$ representa um valor aleatório uniformemente distribuído entre -1 e 1, $\hat{\phi}_{ij}$ é um elemento do autovetor com dano poluído com ruído, e

$$rms(\phi_j) = \frac{\|\phi_j\|}{\sqrt{p}} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (164)$$

A variação de α é de 5 até 20 %, e de β é de 0.1 até 0.5 %. Neste exemplo, um ruído de 5% para α e 0.1% para β foi adicionado nos quatro primeiros autovetores da estrutura com danos, ou seja, $p = 4$.

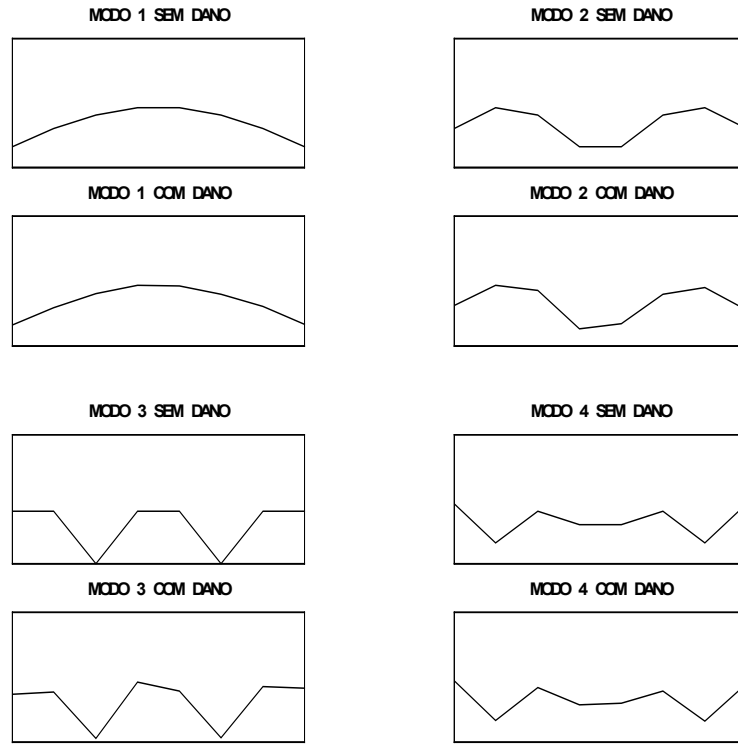


Figura 4.5-2 - Quatro primeiros modos sem e com danos

A Figura 4.5-2 mostra os 4 autovetores do sistema na situação sem dano, nos gráficos superiores, e com dano e ruído simulados, nos gráficos inferiores de cada um dos dois conjuntos de gráficos. Pode-se observar que alguns modos em particular sofrem uma maior influência do dano e ruído, no entanto, fica difícil estimar-se qual deles sofre a maior influência. Para se comparar a correlação entre cada par de autovetores, sem e com danos, usaremos o "modal assurance criteria", ou MAC, que é dado por:

$$MAC_{i,j} = \frac{\left(\hat{\phi}_{di}^T \phi_{sj} \right)^2}{\left(\hat{\phi}_{di}^T \hat{\phi}_{di} \right) \left(\phi_{sj}^T \phi_{sj} \right)} \quad (165)$$

Onde, $\hat{\phi}_{di}$ representa o i -ésimo autovetor com dano e ruído, e ϕ_{sj} representa o j -ésimo autovetor da estrutura sem danos. Valores próximos de 1 representam autovetores com boa correlação, o que neste caso indica os modos que foram menos alterados devido à presença do dano e do ruído. Os valores obtidos para o MAC dos dois conjuntos de autovetores são mostrados na Tabela 4.5.2.

Tabela 4.5.2 - MAC entre autovetores sem e com dano

MAC entre $\hat{\phi}_d$ e ϕ_s			
0.9998	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.9976	0.0021	0.0000
0.0000	0.0015	0.9927	0.0000
0.0001	0.0001	0.0000	0.9993

Observando os valores da diagonal da Tabela 4.5.2 pode-se notar que os autovetores menos correlacionados são o 2º e o 3º, no entanto, devido à pouca dispersão apresentada, (a diferença entre os valores obtidos ocorre somente na terceira casa decimal) tal indicação não se mostra confiável.

Pelas indicações dadas pela Tabela 4.5.1 e pela Tabela 4.5.2, não se pode afirmar ao certo quais seriam os modos que sofreram as maiores influências do dano simulado pois a presença do ruído pode mascarar a real validade desta informação. Para se avaliar a localização do dano, usaremos o vetor dinâmico residual e o vetor de ângulo residual dados pelas equações (144) e (145). As figuras que seguem apresentam os resultados obtidos pela aplicação destas equações

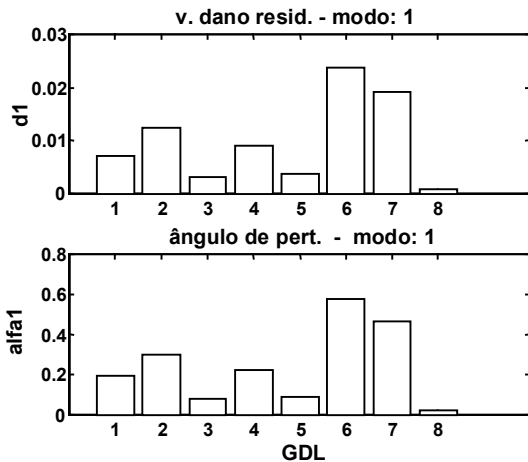


Figura 4.5-3 - vetor dinâmico residual e ângulo de perturbação usando o modo 1

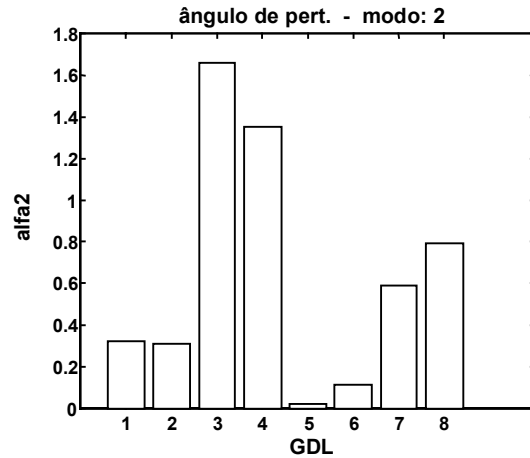


Figura 4.5-4 - ângulo de perturbação usando o modo 2

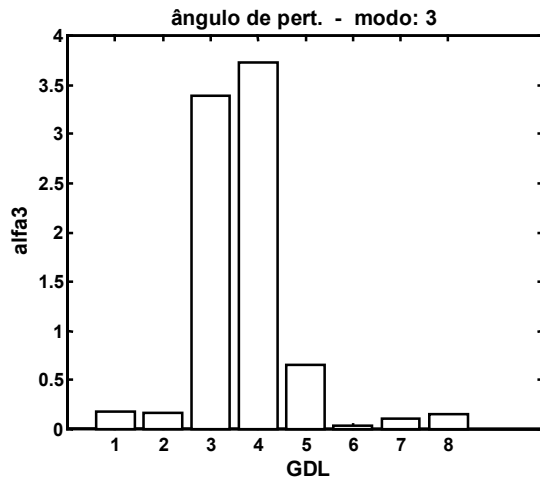


Figura 4.5-5 - ângulo de perturbação usando o modo 3

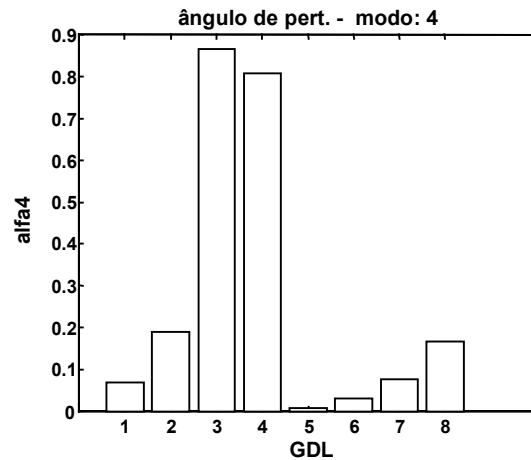


Figura 4.5-6 - ângulo de perturbação usando o modo 4

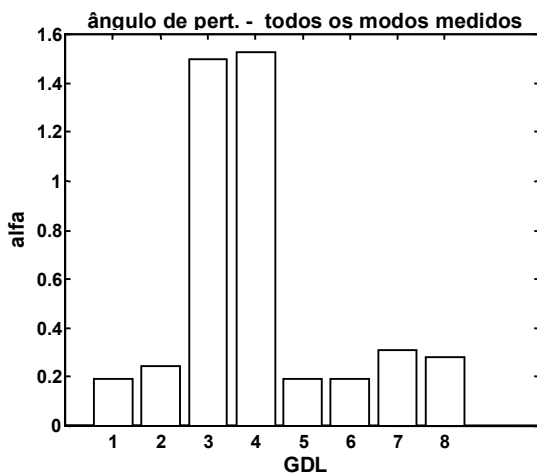


Figura 4.5-7 - ângulo de perturbação para os quatro modos medidos

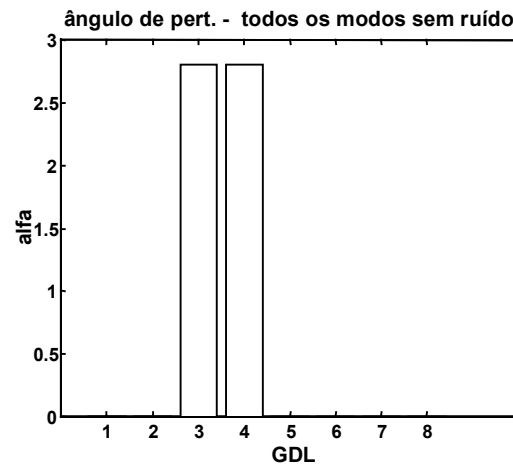


Figura 4.5-8 - ângulo de perturbação usando todos os modos com dano e sem ruído

A Figura 4.5-3 apresenta os resultados obtidos pela utilização do vetor dinâmico residual e do ângulo de perturbação usando-se o primeiro modo medido. Pode-se observar que não foi possível localizar o dano (nos GDL 3 e 4) com este modo. Os resultados apresentados pela Figura 4.5-3 indicam localizações semelhantes, tanto para o vetor dinâmico residual como para o ângulo de perturbação. Nas figuras que sucedem, serão utilizados somente os ângulos de perturbação, os quais são mais adequados para se lidar com dados corrompidos com ruídos (ver item 4.3 - Conceituação Teórica do MRPT).

Pela Figura 4.5-4, onde se utiliza o 2º modo medido, pode-se observar que o ângulo de perturbação indicou a presença do dano nos GDL 3 e 4, no entanto, os picos nos GDL 7 e 8

indicam que este modo sofre uma influência do ruído, o que pode inviabilizar o uso deste modo no algoritmo de determinação da extensão do dano. Na Figura 4.5-5 e na Figura 4.5-6 que utilizam os modos 3 e 4, pode-se observar que o dano foi bem identificado em ambos os casos, sendo que o resultado obtido pelo uso do 3º modo, Figura 4.5-5, foi o que sofreu a menor influência do ruído.

O resultado mostrado pela Figura 4.5-7 utiliza os quatro modos medidos, e o resultado mostrado pela Figura 4.5-8 utiliza todos os oito modos com danos do sistema, sem a presença do ruído. Comparando-se o resultado obtido pelo ângulo de perturbação da Figura 4.5-7 com os resultados das figuras anteriores, temos a indicação de que os modos mais sensíveis ao dano simulado são o 3º e o 4º modos medidos, ou seja, os modos que sofrem a menor influência do ruído simulado imposto. Esta indicação contraria em partes a anterior, 2º e 3º modos, dada pelo resultado da diferença entre as frequências naturais e do MAC dos estados sem e com dano mostrado na Tabela 4.5.1 e na Tabela 4.5.2 respectivamente. Portanto, nas figuras que seguem, usaremos ambas combinações de modos nos algoritmos de determinação da extensão do dano.

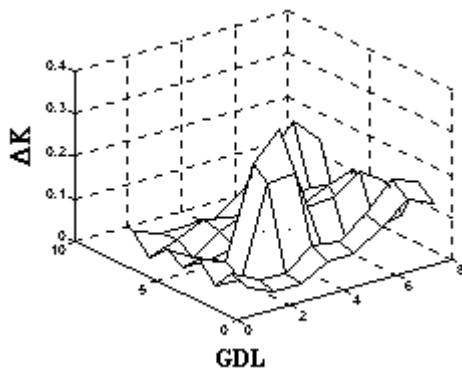


Figura 4.5-9 - extensão do dano usando a Eq.(152) com os quatro modos medidos

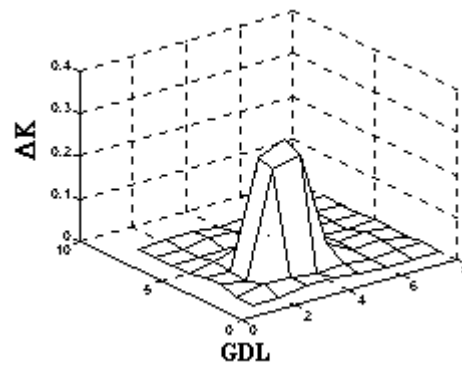


Figura 4.5-10 - extensão do dano usando a Eq.(152) com os modos medidos 3 e 4

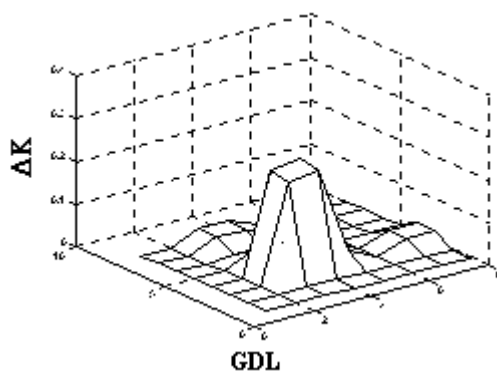


Figura 4.5-11 - extensão do dano usando a seleção subspecial pela Eq.(162) com os quatro modos medidos

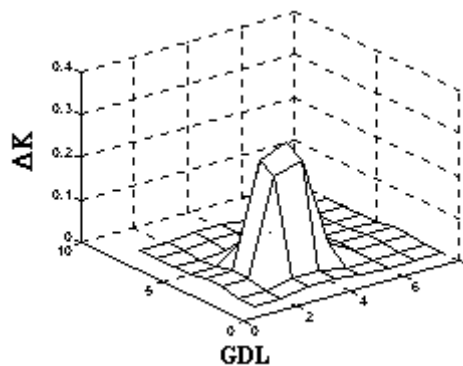


Figura 4.5-12 - extensão do dano usando a seleção subspecial pela Eq.(162) com os modos medidos 3 e 4

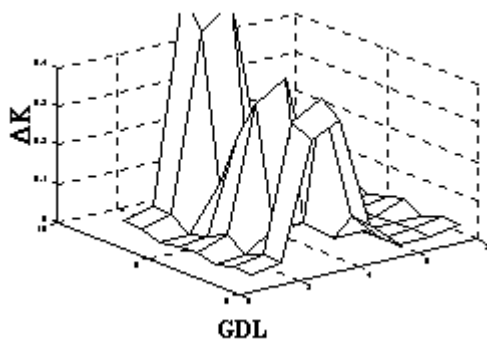


Figura 4.5-13 - extensão do dano usando a Eq.(152) com os modos medidos 2 e 3

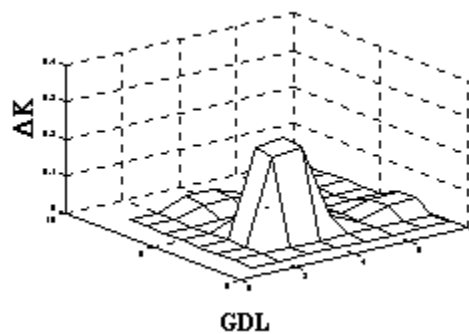


Figura 4.5-14 - extensão do dano usando a seleção subspecial pela Eq.(162) com os modos medidos 2 e 3

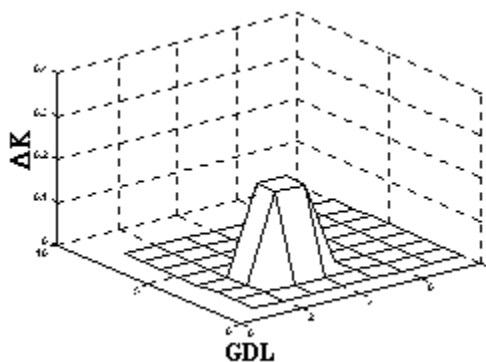


Figura 4.5-15 - extensão do dano obtida subtraindo-se a matriz de rigidez sem danos da matriz de rigidez com o dano imposto, em valores absolutos

O resultado exato da extensão do dano pode ser observado pela Figura 4.5-15. Esta figura mostra a extensão do dano provocada pela perda de rigidez do sistema induzida pelo dano imposto, ou a matriz de perturbação de rigidez exata obtida pela subtração das matrizes de rigidez

sem dano e com dano, ou seja, $\Delta \mathbf{K} = [\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_d]$. Pode-se observar pela Figura 4.5-15 que a extensão máxima do dano é de aproximadamente 0.2 unidade de rigidez.

A Figura 4.5-9 mostra o resultado da estimativa da extensão do dano obtido pelo uso da Eq.(152) utilizando-se todos os modos medidos. Pode-se observar que a presença do ruído impossibilita a localização e indicação precisos do dano. Já pela Figura 4.5-10, onde se utiliza da mesma equação porém somente com os modos 3 e 4, a indicação da extensão do dano é precisa. A Figura 4.5-11 e a Figura 4.5-12 utilizam a técnica da seleção subspacial, com todos os quatro modos e com os modos 3 e 4 respectivamente. Pode-se observar que ambas localizam e estimam a extensão do dano com precisão.

A Figura 4.5-13 mostra o resultado da estimativa da extensão do dano usando a Eq.(152), porém desta vez com o 2º e 3º modos. Pode-se observar que a presença do ruído no 2º modo foi suficiente para desqualificar totalmente esta combinação de modos para uso neste algoritmo. No entanto, utilizando-se os mesmos modos pela técnica da seleção subspacial, Figura 4.5-14, pode-se notar que o dano foi isolado e quantificado com precisão, o que mostra a superioridade desta técnica quando se trata de dados corrompidos com ruídos de medição. Ademais, a seleção de somente alguns modos para utilização nestes algoritmos nem sempre garante os melhores resultados, e a avaliação sempre deve ser feita comparando-se com o resultado obtido através do uso de todos os modos medidos disponíveis.

4.6 Algoritmo de Realização de Vetores de Ritz

Como já se mostrou no Capítulo 2 os vetores de Ritz representam uma ótima alternativa aos modos normais de vibrar como uma base vetorial para um espaço n -dimensional. Em alguns estudos numéricos e experimentais, os vetores de Ritz oferecem uma performance superior na redução de modelos e simulações de resposta no tempo tanto para o exemplo da estrutura plana mostrada no item 2.9 como em outros exemplos e estudos propostos por diversos autores [3, 6, 12, 14, 11, 10]. O Algoritmo de Realização de Vetores de Ritz, ou "Ritz Realization Algorithm" (RRA) foi proposto por Zimmerman [12]. Neste artigo, se desenvolve uma metodologia para

extração de vetores de Ritz a partir de testes dinâmicos de uma única entrada e várias saídas "single input and multiple output" (SIMO) e várias entradas e saídas "multiple input and multiple output" (MIMO), onde sustenta que os vetores de Ritz se mostram mais sensíveis ao dano do que os correspondentes parâmetros modais. Mostra também neste artigo, através de um experimento realizado no estabilizador vertical de um ônibus espacial, que os vetores de Ritz identificados experimentalmente são idênticos aos derivados analiticamente quando a mesma localização e direção das forças de entrada na estrutura de teste são usadas no MEF analítico.

O procedimento proposto pelo RRA envolve o desenvolvimento de um modelo de espaço de estado do sistema, ou as matrizes de estado, usando a resposta medida do sistema no domínio do tempo, através do uso do ERA [13,53]. O ERA é uma extensão da teoria da realização mínima para se lidar com os casos de medições com ruído. Uma aproximação única baseada numa matrix de Henkel generalizada é usada em conjunção com uma decomposição em valores singulares, para se chegar a uma realização de ordem mínima que presenrve as características de entrada e saída. A matriz de Henkel é obtida através da função de resposta ao impulso, ou "impulse response function" (IRF), a qual se obtém através de um teste impulsivo da estrutura. As IRFs também podem ser obtidas aplicando-se a transformada de Fourier inversa (IFFT) das funções de resposta em Frequência, ou "frequency response functions" (FRFs) medidas a partir de um teste modal da estrutura. No apêndice A, pode-se encontrar uma pequena abordagem sobre o algoritmo ERA. Na sequência será introduzida a conceituação teórica do RRA e o uso deste procedimento em conjunto com o MRPT.

4.6.1 Extensão do MRPT para Vetores de Riz Experimentais

Pelo RRA, três tipos de vetores de Ritz experimentais podem ser obtidos, os denominados vetores de Ritz estáticos, dinâmicos e medidos. A geração de tais vetores inicia-se pelo uso das matrizes \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C} em tempo contínuo obtidas pelo ERA. O primeiro vetor de Ritz é obtido pela solução de:

$$\mathbf{A}_c \mathbf{x}_1 = -\mathbf{B}_c \quad (166)$$

A deflexão estática y_1 devido a uma carga estática posicionada na localização da excitação pode ser determinada por:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 \quad (167)$$

Os vetores subsequentes são gerados através da seguinte relação de recorrência:

$$\mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (168)$$

Cada novo vetor gerado é ortogonalizado com todos os precedentes pelo algoritmo de Gram-Schmidt (ou Gram-Schmidt modificado),

$$\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{x}}_i \mathbf{x}_j \quad (169)$$

Os vetores de Ritz, em coordenadas físicas, na localização dos sensores são obtidos por:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i \quad (170)$$

Baseando-se num MEF corrigido da estrutura, o algoritmo de Lanczos [6], é usado para ortogonalizar e normalizar cada novo vetor \mathbf{y}_i gerado, tendo como vetor inicial o primeiro vetor de Ritz gerado. Os ***vetores de Ritz medidos*** podem ser representados como:

$$\mathbf{V}_e = [\mathbf{y}_{e1}, \mathbf{y}_{e2}, \dots, \mathbf{y}_{en}] \quad (171)$$

Como foi dito acima, o primeiro vetor de Ritz gerado representa a deflexão estática da estrutura devido a um carregamento unitário na localização de excitação. Os ***vetores de Ritz estáticos*** podem ser representados como,

$$\mathbf{K}[\mathbf{y}_{s1}, \mathbf{y}_{s2}, \dots, \mathbf{y}_{sr}] - [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_r] = \Delta \mathbf{K} \mathbf{V}_s \equiv \mathbf{B}_s \quad (172)$$

onde, $(\mathbf{y}_{si}, \mathbf{f}_i)$ representam um dos r pares de deflexão estática e carregamento. A matriz \mathbf{B}_s representa a matriz residual estática e,

$$\mathbf{V}_s = [\mathbf{y}_{s1}, \mathbf{y}_{s2}, \dots, \mathbf{y}_{sr}] \quad (173)$$

é a matriz contendo todos os vetores de Ritz estáticos medidos da estrutura. Portanto, caso as matrizes de espaço de estado sejam obtidas a partir de um teste com somente uma entrada, e múltiplas saídas, SIMO, teremos somente um vetor de Ritz estático, ou seja $\mathbf{V}_s = \{\mathbf{y}_{s1}\}$. Em estruturas de larga escala, a utilização de somente um vetor de Ritz estático não é suficiente para se obter uma representação satisfatória da deflexão completa da estrutura. Para estes casos, existem duas alternativas, a primeira seria adotar um teste com múltiplas entradas e múltiplas saídas, MIMO, distribuindo-se a localização das entradas impulsivas nos nós, sentidos e direções de forma que se possa excitar a estrutura em todos os suas partes mais e menos flexíveis, com a subsequente aplicação do ERA/RRA. Uma segunda alternativa seria realizar-se uma seqüência de testes SIMO, variando-se a localização da entrada impulsiva em cada novo teste até que a estrutura seja adequadamente excitada. Neste caso a aplicação do ERA/RRA deve ser efetuada sobre cada IRF obtida num ponto de excitação em particular, para obtenção do vetor de Ritz estático referente àquele ponto.

Portanto, a solução do MRPT para a Eq.(172) é dada por:

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{B}_s \left(\mathbf{B}_s^T \mathbf{V}_s \right)^{-1} \mathbf{B}_s^T \quad (174)$$

Os **vetores de Ritz dinâmicos** são definidos como sendo sucessivos vetores de Ritz com correção inercial, os quais são obtidos utilizando-se um (ou mais) vetor de Ritz estático como inicial e aplicando-se sucessivamente a seguinte equação:

$$\mathbf{y}_{di} = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{M}_s \mathbf{y}_{di-1} \quad (175)$$

onde \mathbf{K}_s e \mathbf{M}_s são as matrizes de massa e rigidez da estrutura sem danos.

Novamente, os procedimentos de ortogonalização e normalização adotados a cada interação são baseados no algoritmo de Lanczos. Caso sejam usados mais de um vetor, pode-se usar o algoritmo de Lanczos modificado para se lidar com blocos de vetores proposto no capítulo 3.4.3 . Os vetores de Ritz dinâmicos são reunidos na seguinte matriz:

$$\mathbf{V}_d = [\mathbf{y}_{d1}, \mathbf{y}_{d2}, \dots, \mathbf{y}_{dr}] \quad (176)$$

Os vetores de Ritz medidos e dinâmicos podem ser usados para se escrever a seguinte equação:

$$\mathbf{M}_s \mathbf{V}_e + \mathbf{K}_s \mathbf{V}_d = \Delta \mathbf{K} \mathbf{V}_d \equiv \mathbf{B}_d \quad (177)$$

onde \mathbf{B}_d representa a matriz residual dinâmica. Portanto, a solução do MRPT é dada por:

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{B}_d \left(\mathbf{B}_d^T \mathbf{V}_d \right)^{-1} \mathbf{B}_d^T \quad (178)$$

Os vetores de Ritz estáticos e dinâmicos gerados podem ser usados em substituição aos modos normais de vibrar na formulação do MRPT, equações (142), (143), (144), (145), (151) na obtenção dos vetores de ângulo residual α que compõe a matriz de ângulo residual \mathbf{A} . Posteriormente aplica-se a seleção do subspaço, Eq.(162). Baseado nesta possibilidade, pode-se comparar ambas soluções, modal e Ritz, avaliando-se os resultados oferecidos por cada uma. Exemplos numéricos simulados de aplicação do MRPT com a extensão do RRA e do ERA serão dados nos próximos capítulos.

Capítulo 5

Aplicação dos Métodos Propostos

5.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados dois exemplos numéricos simulados, os quais serão utilizados para demonstrar a eficiência do método de detecção de falhas proposto e suas variações.

Dos métodos de síntese apresentados no Capítulo 3, dois deles utilizam modos normais de vibrar em sua derivação, (CB e CC) e os outros dois utilizam os vetores de Ritz (BK e QE). Também no caso do MRPT, pode-se utilizar a solução convencional com modos normais de vibrar, bem como a extensão RRA, com os vetores de Ritz medidos. Portanto, nos exemplos mostrados neste capítulo, ambas soluções serão obtidas e os resultados apresentados por cada uma delas serão analisados e comparados.

A Figura 5.1-1 e a Figura 5.1-2 apresentam o fluxograma das duas soluções, modal e de Ritz.

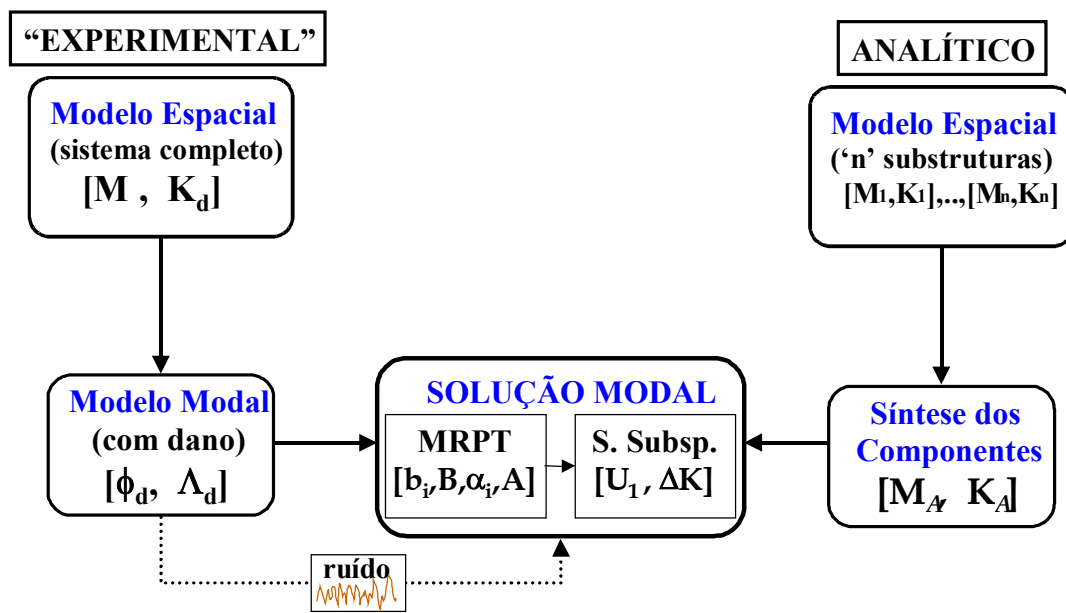


Figura 5.1-1 - Fluxode dados utilizado na solução modal

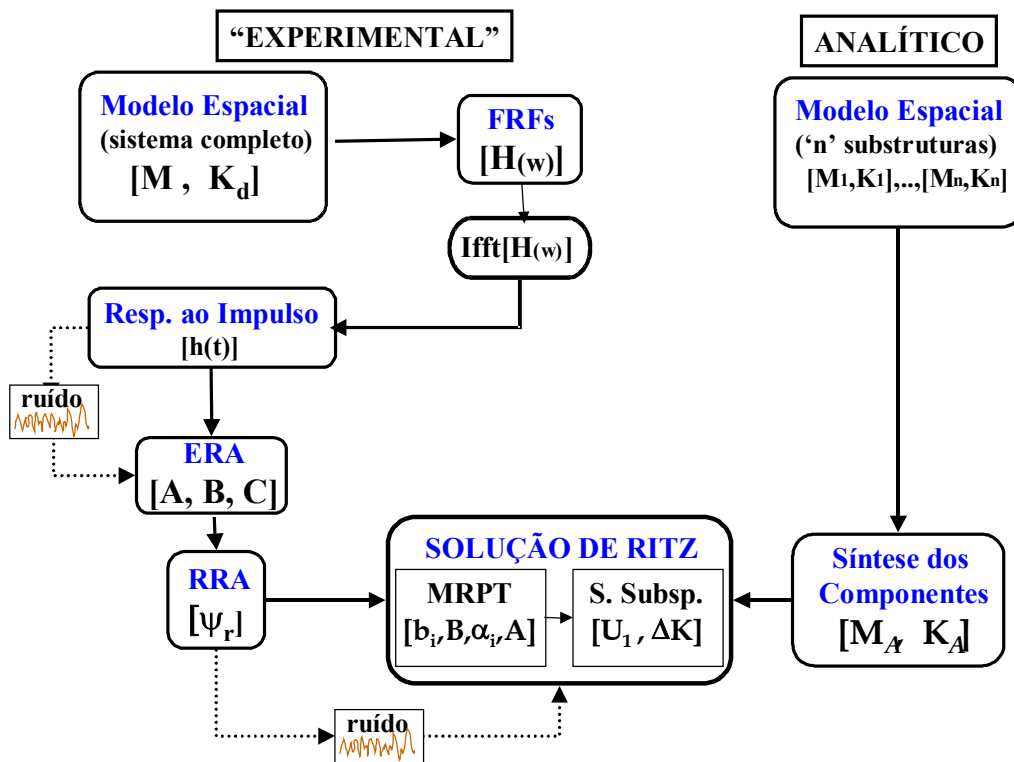


Figura 5.1-2 - Fluxo de dados utilizado na solução de Ritz

Pode-se observar que a obtenção de um modelo analítico da estrutura completa sem danos, em ambas soluções, inicia-se pela divisão da estrutura em componentes, e pela construção de um MEF para cada componente. Em seguida, um dos métodos de síntese é aplicado, para obtenção do modelo sintetizado da estrutura em coordenadas físicas, representado pelas matrizes de massa e rigidez \mathbf{M}_A e \mathbf{K}_A .

Por outro lado, a obtenção dos dados experimentais simulados pode percorrer dois caminhos, dependendo da solução que se vai adotar. Na solução modal, Figura 5.1-1, a simulação dos dados experimentais inicia-se pela construção de um MEF da estrutura completa no qual se aplica um dano em um dos elementos pertencentes a um ou mais componentes da estrutura. Considerando-se que a matriz de massa da estrutura não foi afetada pelo dano, resolve-se na sequência o autop problema associado às matrizes de rigidez com o dano imposto, \mathbf{K}_d e de massa sem danos \mathbf{M}_A . Obtém-se portanto os autovalores e autovetores da estrutura danificada, Φ_d e Λ_d . Para simular o caso real de medições com ruído, os autovetores podem ser corrompidos com um ruído do mesmo tipo mostrado na Eq. (163). Finalmente, utilizando as matrizes sintetizadas, sem danos \mathbf{M}_A e \mathbf{K}_A , e os autovalores e autovetores com danos Φ_d e Λ_d pode-se aplicar o MRPT e a seleção do subspaço para obtenção da solução modal final.

A obtenção dos dados experimentais simulados para a solução de Ritz também inicia-se pela construção do MEF da estrutura completa com um dano simulado dado pela matriz de rigidez com o dano imposto \mathbf{K}_d e de massa sem danos \mathbf{M}_A . Em seguida, através de superposição modal, são construídas as FRFs associadas a estas matrizes. As IRFs são obtidas através da aplicação da transformada de Fourier inversa das FRFs obtidas. O mesmo tipo de ruído imposto sobre os autovetores na solução modal podem ser aplicados diretamente sobre as FRFs, ou sobre as IRFs que são utilizadas como dados de entrada no algoritmo ERA. Do ERA são obtidas as matrizes de estado em tempo discreto, que são convertidas para tempo contínuo (equações (230) e (231) do Apêndice A). De posse das matrizes de estado, aplica-se o RRA para se obter os vetores de Ritz estáticos, dinâmicos e medidos. Caso o ruído não tenha sido incluído diretamente sobre as IRFs, pode-se incluir um ruído diretamente sobre os vetores de Ritz obtidos. Finalmente, através das matrizes de massa e rigidez sintetizadas, \mathbf{M}_A e \mathbf{K}_A , e usando os vetores de Ritz obtidos em substituição aos modos normais de vibrar, pode-se entrar na solução do MRPT e da seleção do subspaço para obtenção da solução de Ritz final.

Dependendo do tipo de dano aplicado, pode-se afetar alguns ou todos os GDL do elemento danificado. Neste trabalho, os danos simulados utilizados caracterizam-se basicamente pela redução do momento de inércia em um dos elementos de um ou mais componentes do MEF original da estrutura sem danos. Este tipo de dano não afeta os GDL na direção axial do elemento, e se assemelharia a uma região da estrutura avariada que não compromettesse significativamente a rigidez da estrutura nesta direção. Outro tipo de dano impõe uma redução sobre o módulo de elasticidade de um elemento em um ou mais componentes da estrutura. Este tipo de dano afeta todos os GDL do elemento avariado, ou seja, a rigidez é comprometida em todas as direções.

Como se disse no capítulo 4.1 , Métodos de detecção de falhas baseados em modelo, como o MRPT, enquadram-se nos níveis 2 e 3, de localização e extensão do dano, e, principalmente quando aplicados a estruturas complexas, de grande porte, são indicados para danos mais severos que afetem substancialmente alguma região da estrutura, onde acréscimos a este dano possa resultar em uma falha catastrófica, como por exemplo uma solda de ligação se rompendo numa estrutura metálica, um pino ou parafuso importantes danificados, ou até mesmo uma trinca mais extensa que possa afetar a flexibilidade numa direção. Portanto, neste trabalho, assume-se que o dano afeta a capacidade da estrutura suportar cargas, ou basicamente a rigidez da mesma, sem dar ênfase aos mecanismos pelos quais tal dano tenha ocorrido.

5.2 Exemplo da Viga Biengastada.

Neste exemplo, será utilizado o mesmo exemplo de estrutura usada por Dos Santos e Zimmerman [50]. Trata-se de uma viga bidimensional bi-engastada, com 18 nós, 3 GDL por nó, que foi artificialmente dividida em 5 subestruturas, como mostra a Figura 5.2-1.

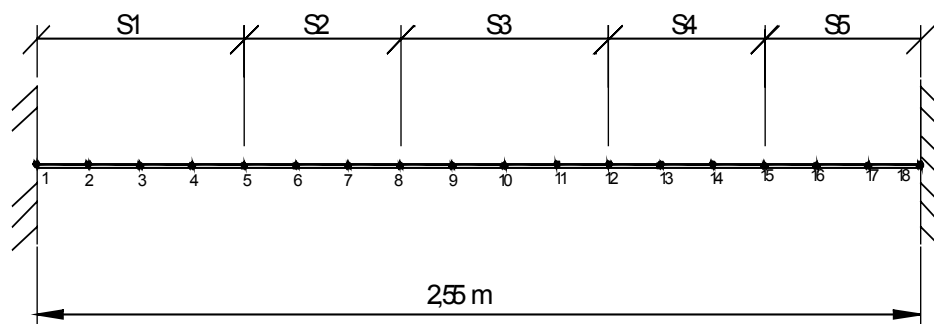


Figura 5.2-1 – Viga biengastada

O comprimento total da viga é de 2,55 m, o comprimento de cada elemento é de 0,15 m, e os comprimentos das subestruturas 1 até 5 são os seguintes: $L1 = L3 = 0,6$ m, $L2 = L4 = L5 = 0,45$ m. A seção transversal da viga possui 15 mm de base por 10 mm de altura, resultando numa área $A = 1,5e-4$ m² e um momento de inércia $I = 1,25e-9$ m⁴. O módulo de elasticidade do material $E = 2,07e11$ N/m² e a densidade $\rho = 7830$ kg/m³.

Antes de apresentar os primeiros resultados obtidos para este exemplo, será mostrado uma seqüência de resultados obtidos na identificação do modelo de estado da estrutura usando o método ERA. Os dados experimentais simulados de todos os estados com dano utilizados neste exemplo foram obtidos seguindo-se a mesma seqüência. Como demonstração, as FRFs foram obtidas através de superposição modal utilizando-se as matrizes de massa e rigidez da estrutura completa sem danos. Não foi considerado amortecimento, e para simular dados medidos, aplicou-se diretamente sobre as FRFs obtidas um ruído do tipo apresentado pela Eq. (163), utilizando-se 5% para o fator de escala α e 0.1% para o fator de "bias" β . As FRFs foram geradas excitando-se no GDL 23, e medindo-se em todos os 48 GDLs, num período de 0 a 5 segundos, discretizados com 8192 pontos, e numa faixa de Frequência de 0 até 1000 Hz. As 15 primeiras frequências naturais desta estrutura são mostradas na Tabela 5.2.1.

Tabela 5.2.1 - primeiras freqüências da estrutura sem danos

k	$\omega_s(k)$
1	8.1436
2	22.4489
3	44.0127
4	72.7702
5	108.7491
6	151.9911
7	202.5661
8	260.5801
9	326.1833
10	399.5751
11	481.0019
12	570.7371
13	669.0062
14	775.7160
15	889.2197

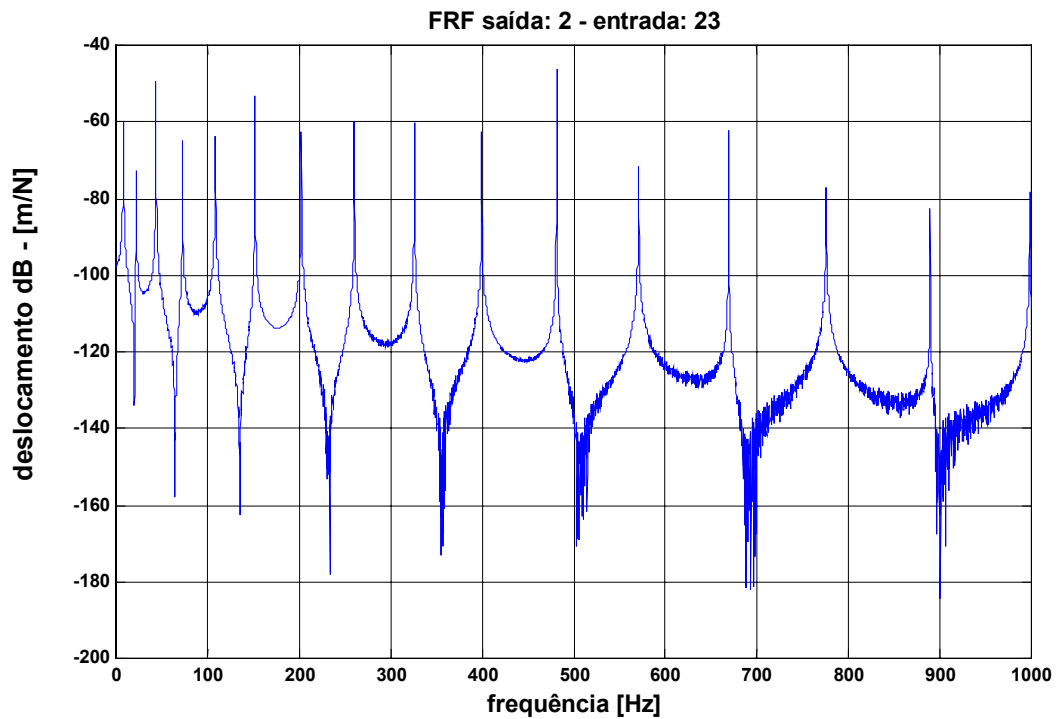


Figura 5.2-2 - FRF "medida" da estrutura

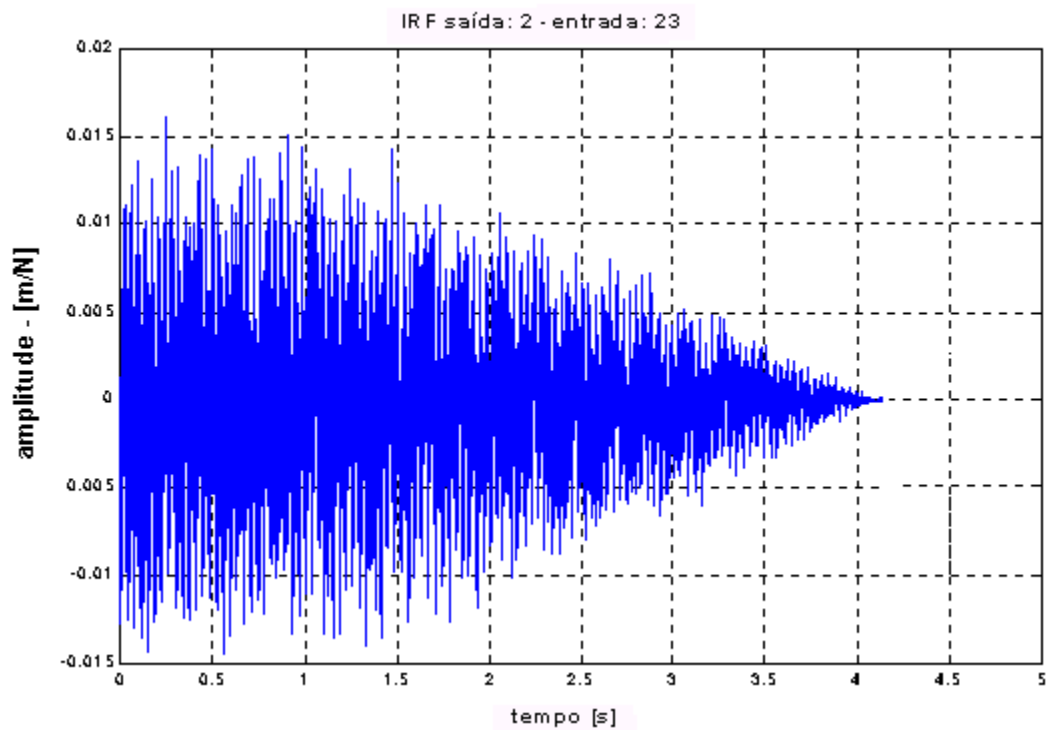


Figura 5.2-3 - IRF "medida" da estrutura

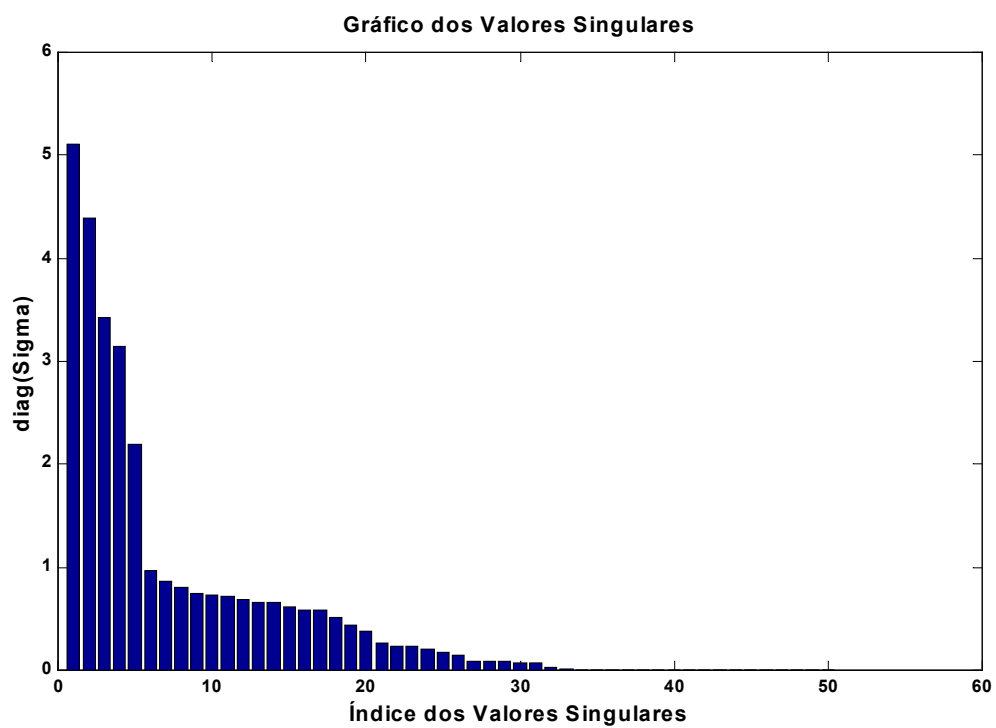


Figura 5.2-4 - Diagonal da matriz de valores singulares - Viga biengastada

A Figura 5.2-2 mostra uma das 48 FRFs "medidas" da estrutura, e a Figura 5.2-3 mostra a respectiva IRF obtida pela aplicação da transformada de Fourier inversa da FRF. A Figura 5.2-4 mostra os valores da diagonal da matriz de valores singulares Σ obtida pela decomposição em valores singulares da matriz de Hankel $\mathbf{H}(0)$, Eq. (213) do Apêndice A. Por esta figura pode-se observar que os valores singulares mais significativos vão até aproximadamente o índice 32, o que nos fornece uma primeira estimativa da ordem mínima para o sistema a ser identificado.

Outra forma de se estimar a ordem mínima do sistema estudado pode ser dada pelo critério **IAE**, "Integral of Absolute Error" [55], dado por:

$$\mathbf{IAE} = \sum_{o=o_{\min}}^{o_{\max}} \max |\mathbf{IRF} - \mathbf{IRF}_e| \quad (179)$$

Através da primeira estimativa para a ordem mínima dada pela Figura 5.2-4, pode-se definir uma faixa de possíveis ordens para o sistema estudado. Iniciando-se com o menor valor da faixa definida o_{\min} até o maior valor definido, o_{\max} , os parâmetros de Markov ou funções de resposta ao impulso estimados, \mathbf{IRF}_e , são obtidos para cada ordem compreendida nesta faixa através da Eq.(199) do Apêndice A. Por fim, o erro absoluto pode ser calculado pela Eq. (179), dado pelo máximo da diferença entre cada \mathbf{IRF}_e estimada e a correspondente \mathbf{IRF} experimental.

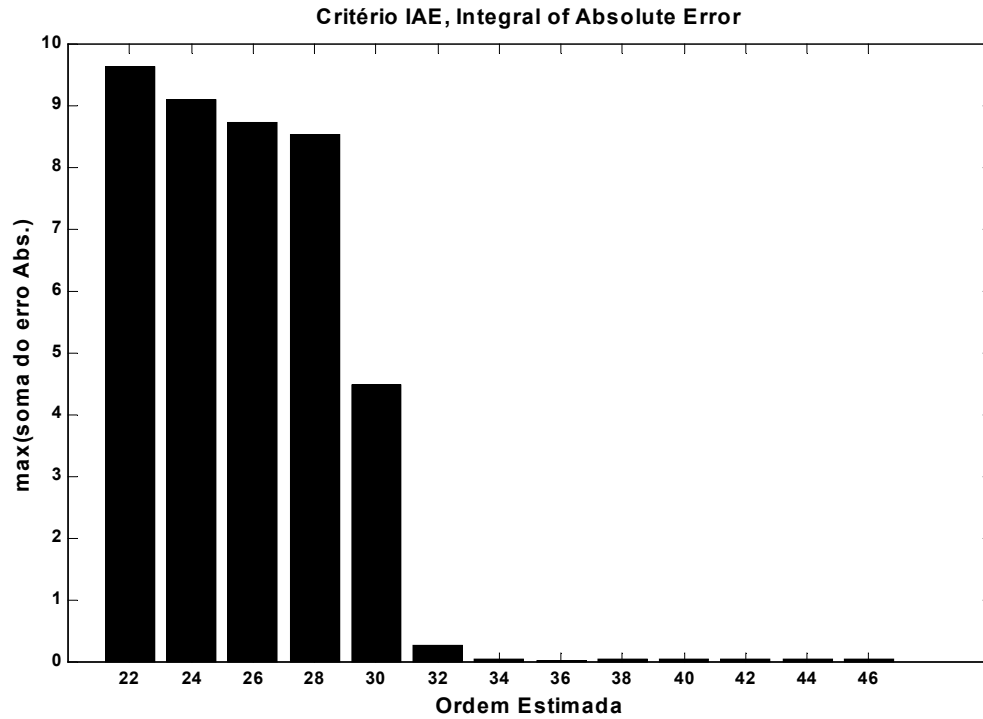


Figura 5.2-5 - Critério IAE -Integral of Absolute Error - Viga biengastada

Para o exemplo estudado, através da Figura 5.2-4, foi definida uma faixa que vai de $o_{min} = 22$ até $o_{max} = 46$. Os valores obtidos para o critério **IAE** na faixa definida podem ser observados pela Figura 5.2-5. Nota-se por esta figura que a partir da ordem 34 o erro se torna desprezível, portanto, define-se 34 como sendo o valor da ordem mínima para o sistema estudado.

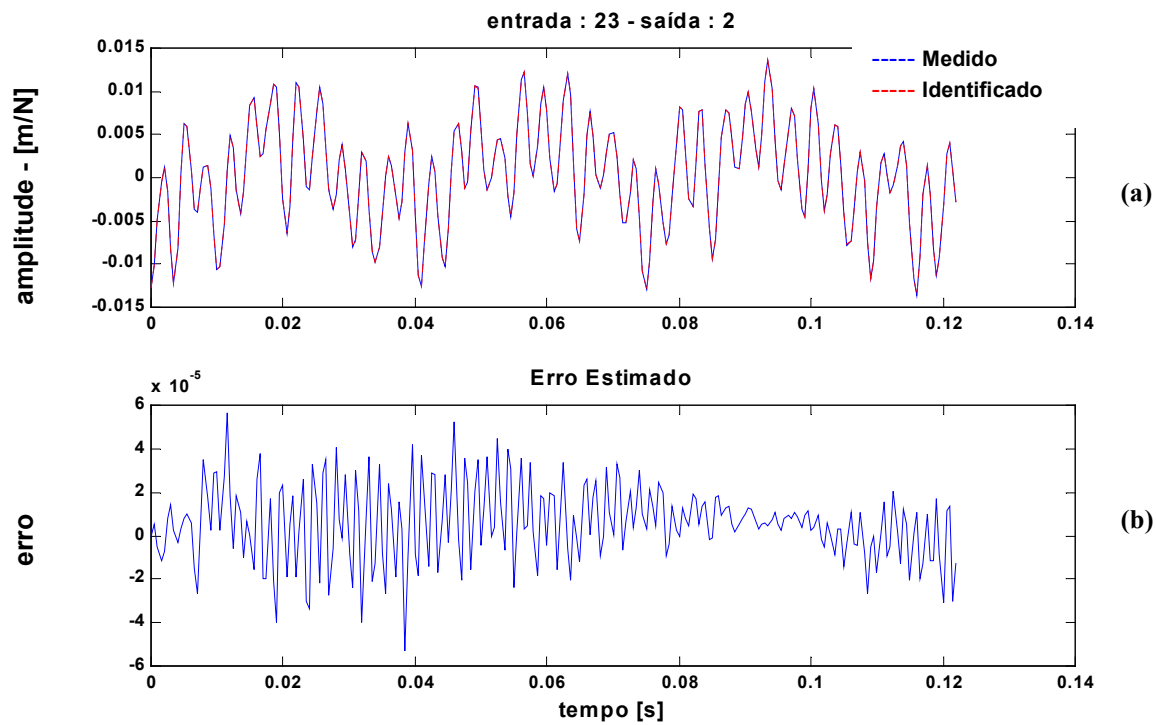


Figura 5.2-6 - IRF "medida" e identificada (a), erro estimado (b)

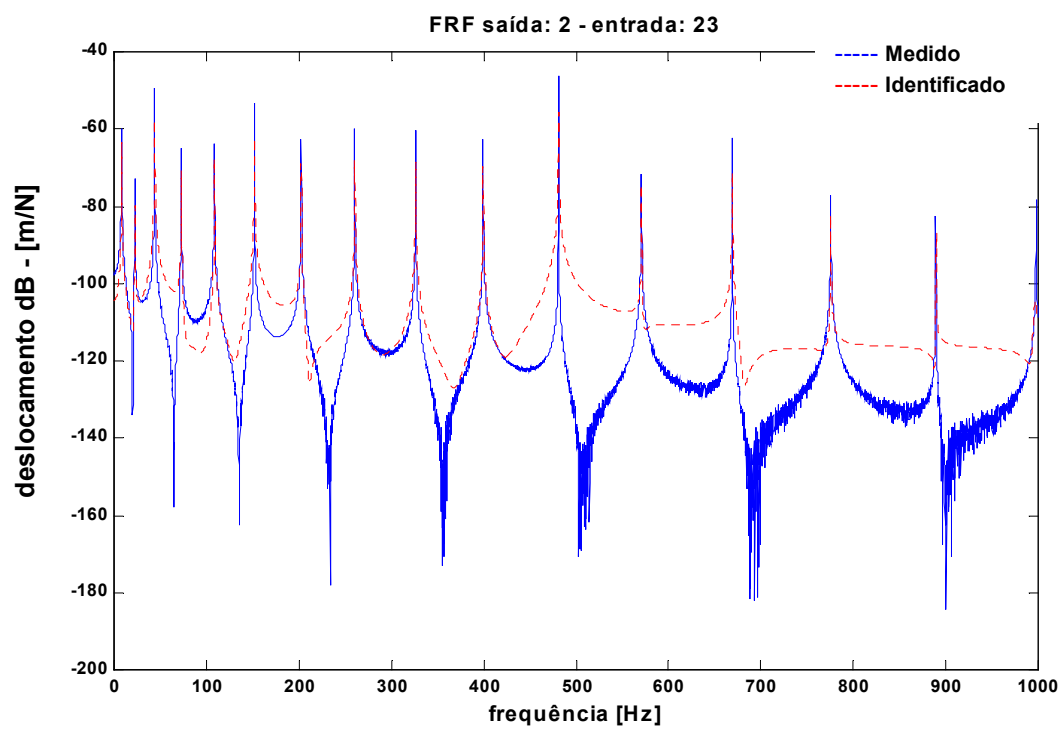


Figura 5.2-7 - FRF "medida" e identificada - Viga biengastada

Obtida a ordem mínima do sistema estudado, as funções de resposta ao impulso e funções de resposta em Frequência experimentais e identificadas podem ser traçadas. A Figura 5.2-6-**a** mostra uma das funções de resposta ao impulso experimental e a correspondente identificada, de 0 até 0.12 segundo. Pela Figura 5.2-6-**b** pode ser observado o erro absoluto obtido pela diferença entre experimental e identificada para cada ponto. As funções de resposta em Frequência identificadas, \mathbf{FRF}_e , são obtidas pela transformada de Fourier das \mathbf{IRF}_e . Na Figura 5.2-7 pode-se observar uma das \mathbf{FRF} e a correspondente \mathbf{FRF}_e .

5.2.1 Localização e Extensão do dano em uma Subestrutura

Os primeiros resultados mostrados para este exemplo na detecção de falhas, Figura 5.2-1 até a Figura 5.2-8, apresentam o vetor de ângulo residual modal (VARM), utilizando-se 6 grupos diferentes de truncamento nos modos dos componentes, dados pela Tabela 5.2.1.1. A intenção é mostrar os efeitos do truncamento na aplicação dos métodos de síntese. Assume-se que os cinco primeiros modos naturais de vibrar foram medidos, usando-se somente a solução modal, na localização do dano no primeiro elemento, GDL 1-6, subestrutura S1. O dano é caracterizado pela redução no momento de inércia original em 75%, considerando-se que a matriz de massa não sofre a influência do dano imposto, ou seja, o dano afeta somente a matriz de rigidez da estrutura. Portanto, os modos e frequências "medidos" são obtidos pela solução do autoproblema correlacionado às matrizes de massa original da estrutura sem danos, \mathbf{M}_A e de rigidez influenciada pelo dano, \mathbf{K}_d , e posterior aplicação de um ruído artificial diretamente sobre os autovetores obtidos. Na parte superior de cada gráfico de barras está indicado um dos GDLs pertencente às interfaces entre os componentes (+) e os GDLs pertencentes às subestruturas S1 até S5.

Os quatro métodos de síntese estudados no Capítulo 3 foram utilizados, sendo que duas figuras foram geradas para cada método, uma mostrando os resultados sem ruídos de medição, e na outra, os autovalores com dano foram corrompidos com um ruído de 5% para o fator de escala α e 0.1% para o fator de bias β .

Tabela 5.2.1.1 - Conjuntos de Truncamentos modais nos componentes - viga biengastada

Conjunto	Substruturas				
	S1	S2	S3	S4	S5
I	2	2	2	2	2
II	4	3	4	3	4
III	5	4	5	4	5
IV	6	4	6	4	4
V	7	4	7	5	4
VI	9	6	9	6	6

Deve-se observar que o conjunto VI da Tabela 5.2.1.1 não utiliza truncamento dos modos dos componentes, ou seja, este conjunto representa a base completa de modos ou vetores de Ritz que fornecerá as matrizes sintetizadas de massa e rigidez de rank pleno.

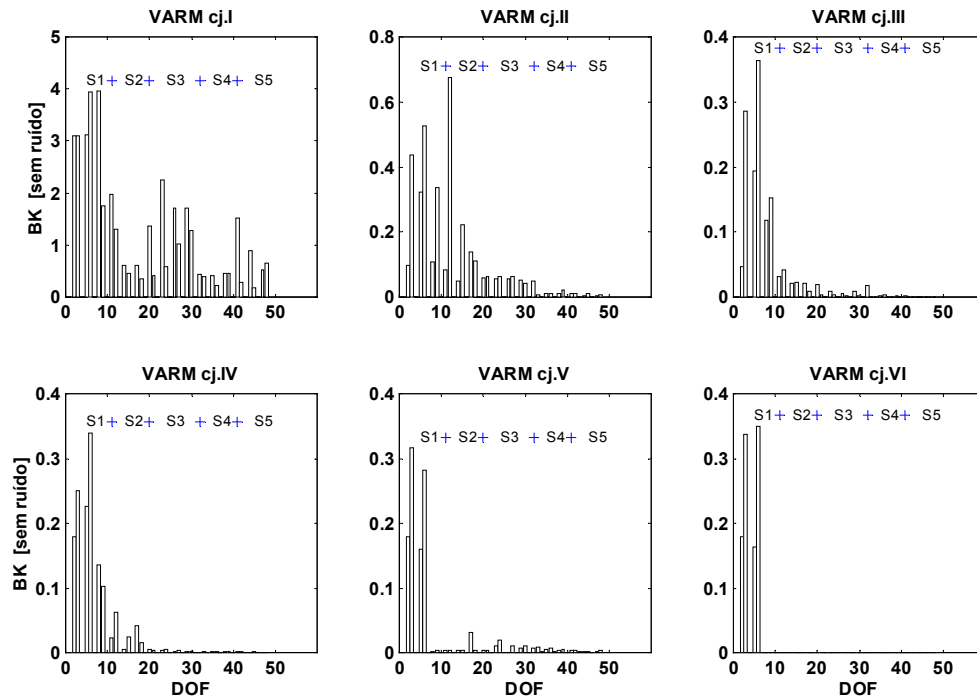


Figura 5.2-1 – VARM sem ruído, usando método de BK - Viga bi-engastada

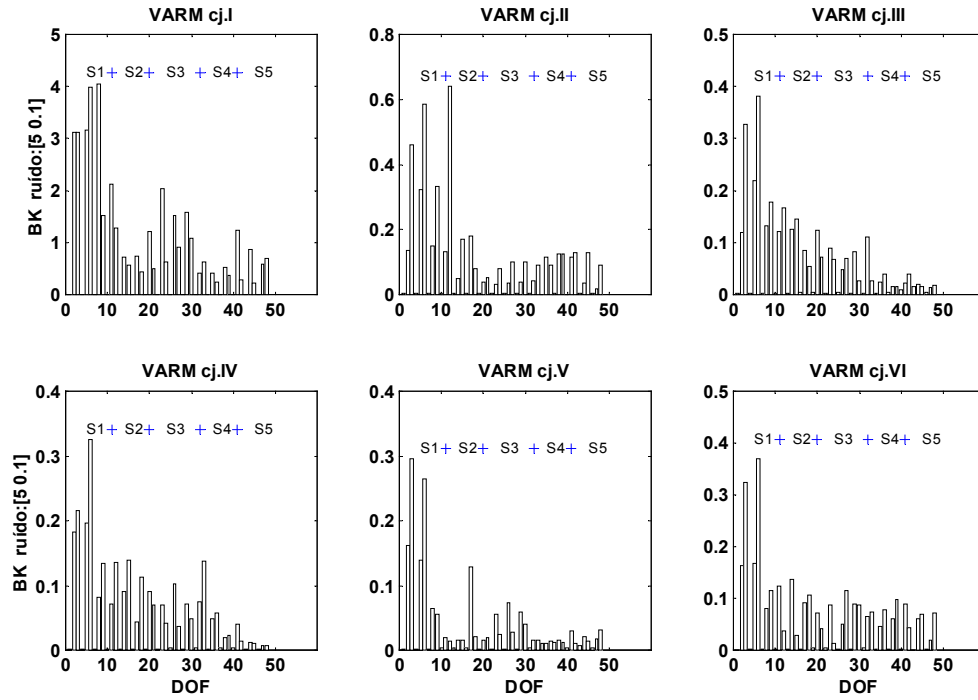


Figura 5.2-2 – VARM com ruído, usando método de BK - Viga bi-engastada

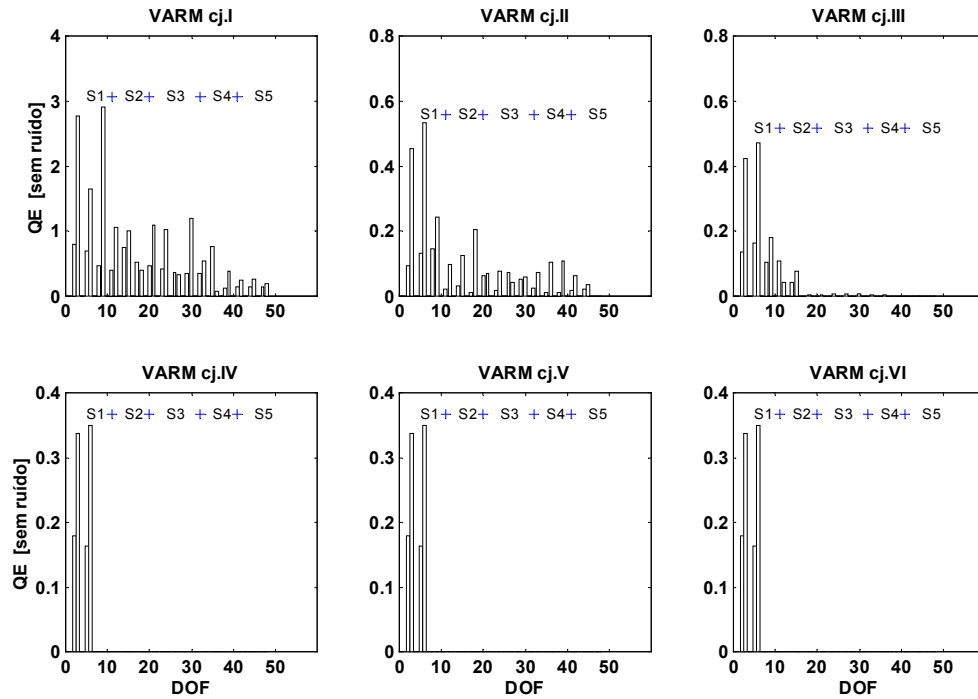


Figura 5.2-3 – VARM sem ruído, usando método de QE - Viga bi-engastada

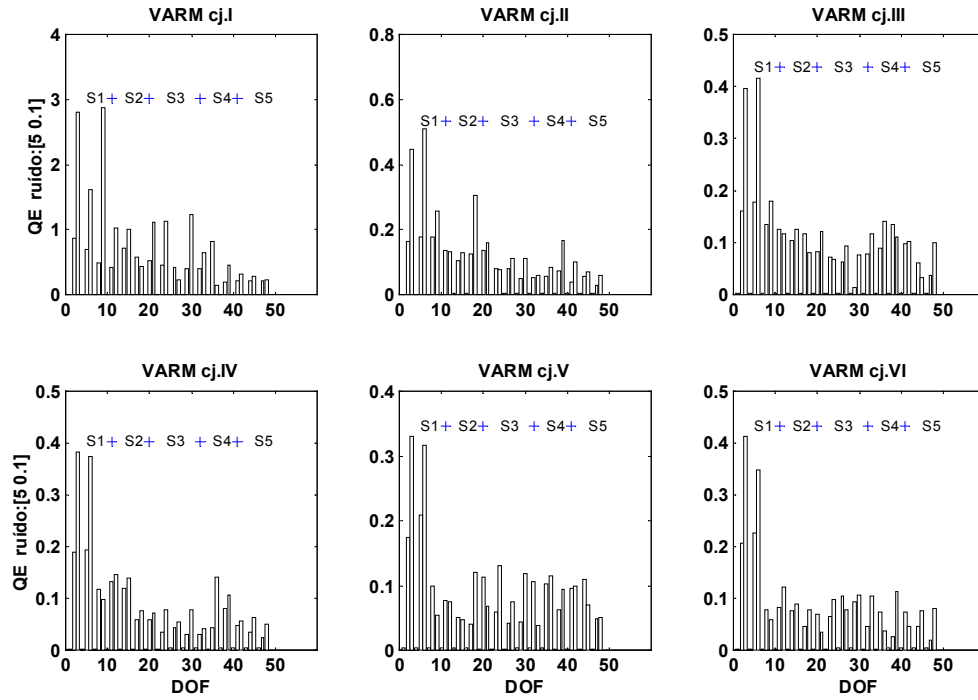


Figura 5.2-4 – VARM com ruído, usando método de QE - Viga bi-engastada

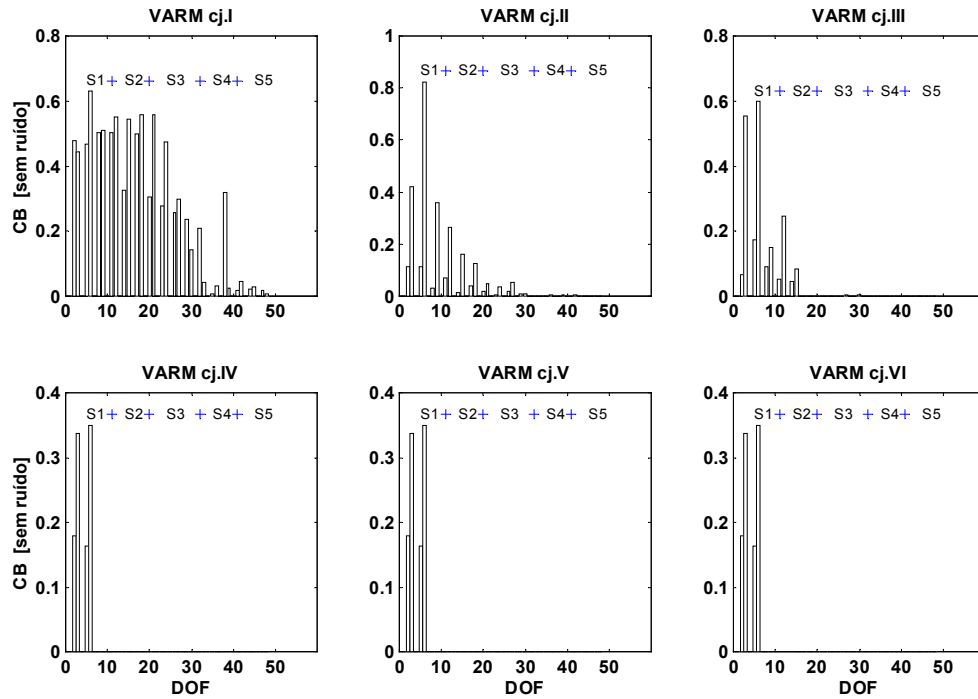


Figura 5.2-5 – VARM sem ruído, usando método de CB - Viga bi-engastada

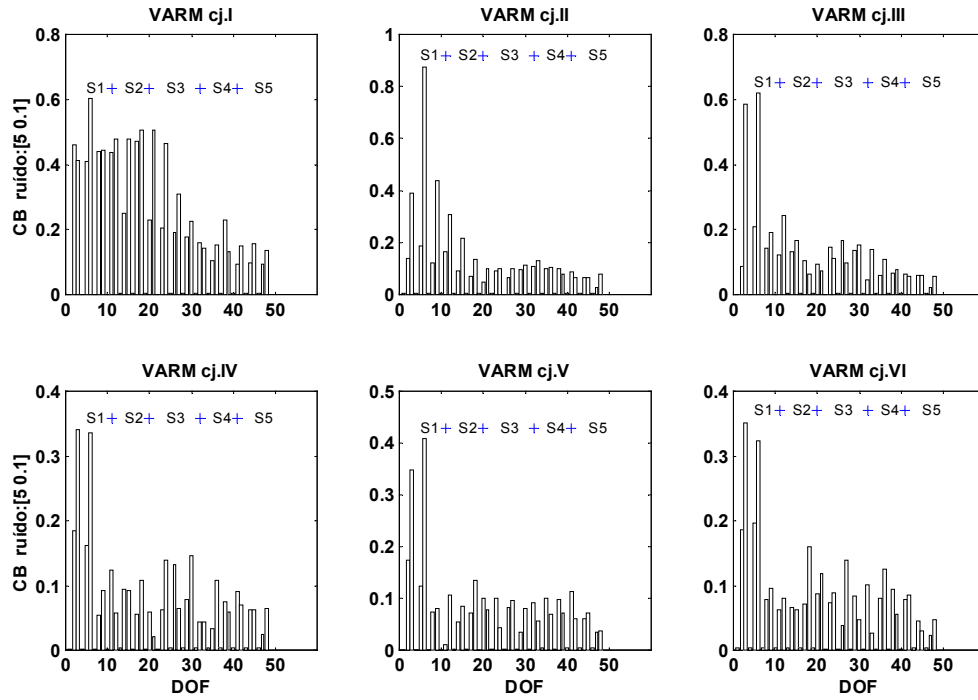


Figura 5.2-6 – VARM com ruído, usando método de CB - Viga bi-engastada

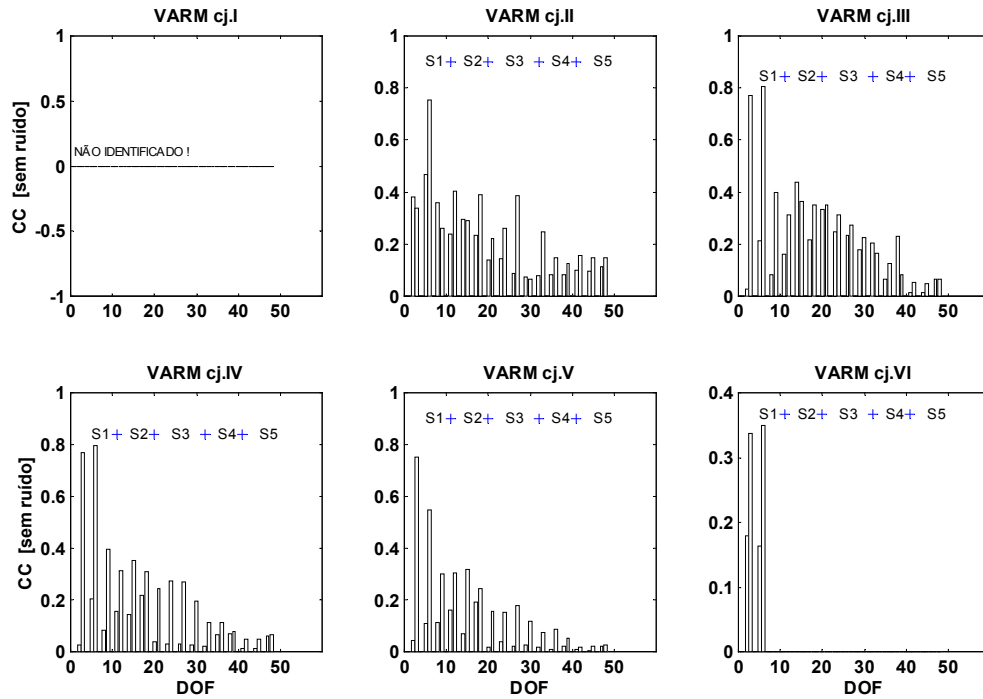


Figura 5.2-7 – VARM sem ruído, usando método de CC - Viga bi-engastada

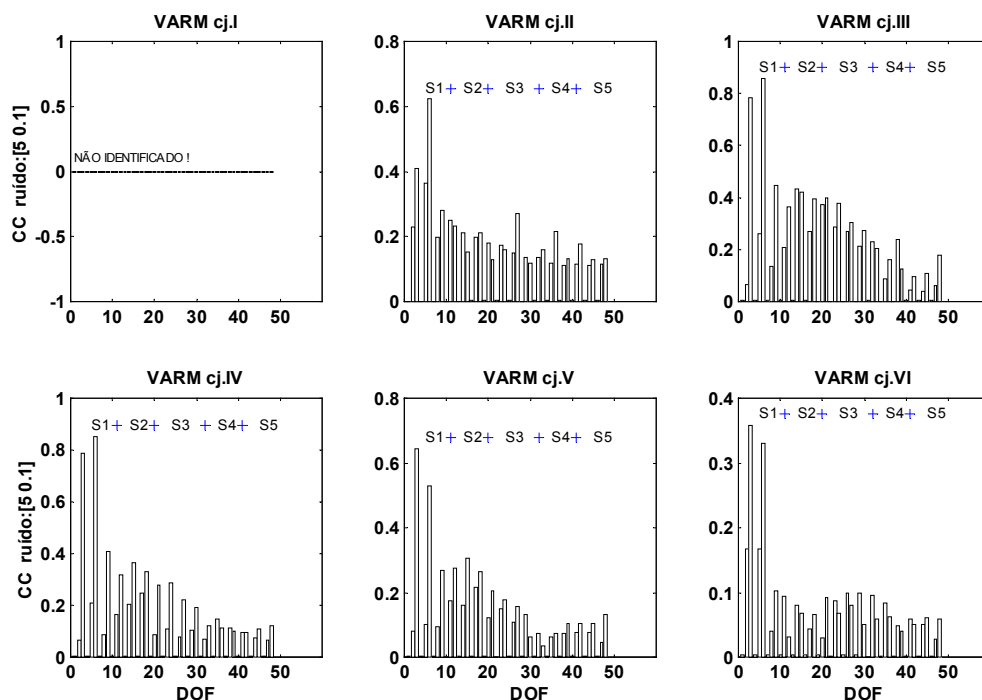


Figura 5.2-8 – VARM com ruído, usando método de CC - Viga bi-engastada

Comparando-se os resultados dos quatro métodos de síntese, sem a presença de ruídos de medição, pode-se observar que no geral, o método de CC apresenta os piores resultados. Ao se utilizar um truncamento mais fraco para os modos dos componentes, conjuntos IV, V e VI, os métodos de CB e QE apresentam resultados satisfatórios, sendo que a solução apresentada pelo uso destes conjuntos no método de BK apresenta uma pequena imprecisão, no entanto, não compromete a precisão dos resultados na indicação da localização do dano, como se observa pela Figura 5.2-1. Observando-se ainda estas figuras, para o caso de truncamentos mais fortes, conjuntos I, II e III, nota-se que todos os métodos falham na localização do dano, mas quase todos apresentam uma boa indicação para a subestrutura que contém o elemento danificado, à exceção do conjunto I no método de CB, onde os resultados apresentados não puderam indicar a localização nem da subestrutura danificada. Da Figura 5.2-7, pode-se notar que, devido ao truncamento utilizado, não foi possível se obter a solução para o método de CC., pois as matrizes sintetizadas tornaram-se mal condicionadas o que impossibilitou a posterior solução do autoproblema correlacionado à estas matrizes.

Adicionando-se o ruído, pode-se notar que, com exceção do método de CC, os resultados dos outros métodos identificam bem os GDL com dano usando os conjuntos IV, V, e VI de truncamento modal, sendo que os métodos de QE e CC sofrem uma maior influência do ruído imposto. Usando os conjuntos I, II e III, os resultados do método de BK identificam a subestrutura danificada em todos os casos, já pelo método de QE, notam-se alguns picos que podem confundir a localização correta do dano, porém, os resultados também fornecem uma forte indicação para a subestrutura danificada. Os resultados obtidos pelo uso do método de CB, usando ainda os conjuntos I, II e III, também indicam a subestrutura danificada, exceto pelo uso do conjunto I, onde vários picos espalhados pelos GDL das subestruturas S1 e S2 impedem a identificação. Já o método de CC, que não pode obter as matrizes sintetizadas para o conjunto I, também fornece uma indicação da subestrutura com dano pelo uso dos conjuntos II e III.

Para se quantificar tais indicações, usamos do fator de pico de componente, **CPF** [50], dado por:

$$\mathbf{CPF} = \frac{1}{n_i} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{U}_1(i,j) \right) \quad (180)$$

Onde $\mathbf{U}_1(i,j)$ é obtido através do j -ésimo ($j = 1, 2, \dots, k$) vetor singular à esquerda em relação ao i -ésimo ($i = 1, 2, \dots, n_i$) GDL das subestruturas. E, \mathbf{U}_1 é obtido através da aplicação da decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{A} , Eq.(151), que contém os cinco VARM utilizados. Valores altos para o **CPF** indicam a subestrutura que pode conter o dano.

Os resultados obtidos para o **CPF** em cada conjunto de truncamento nos casos onde se aplicou o ruído podem ser vistos pela Tabela 5.2.1.2 até a Tabela 5.2.1.5.

<i>Tabela 5.2.1.2 - CPF método de BK, Figura 5.2-2 - Viga bi-engastada</i>					
Conj.	S1	S2	S3	S4	S5
I	0.52441	0.12349	0.15282	0.04800	0.02318
II	0.32376	0.19816	0.15827	0.02805	0.01377
III	0.24773	0.15834	0.17561	0.05290	0.00621
IV	0.20140	0.16954	0.16363	0.02762	0.00596
V	0.32729	0.07022	0.18972	0.17219	0.12976
VI	0.43630	0.04692	0.07134	0.01183	0.01044

Tabela 5.2.1.3 - CPF método de QE, Figura 5.2-4 - Viga bi-engastada

Conj.	S1	S2	S3	S4	S5
I	0.43964	0.23449	0.14232	0.11780	0.05816
II	0.34548	0.11950	0.11660	0.11662	0.06365
III	0.47577	0.16241	0.10474	0.05786	0.04397
IV	0.41916	0.12825	0.05538	0.02165	0.02300
V	0.42508	0.13640	0.10271	0.02927	0.00580
VI	0.42508	0.13640	0.10271	0.02927	0.00580

Tabela 5.2.1.4 - CPF método de CB, Figura 5.2-6 - Viga bi-engastada

Conj.	S1	S2	S3	S4	S5
I	0.41673	0.20887	0.13228	0.10136	0.08263
II	0.37109	0.14682	0.12226	0.09659	0.02902
III	0.39699	0.14988	0.15636	0.05525	0.00669
IV	0.28700	0.08996	0.06257	0.04475	0.04733
V	0.38302	0.12972	0.09559	0.03001	0.01385
VI	0.43630	0.04692	0.07134	0.01183	0.01044

Tabela 5.2.1.5 - CPF método de CC, Figura 5.2-8 - Viga bi-engastada

Conj.	S1	S2	S3	S4	S5
I	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
II	0.39050	0.30272	0.26938	0.23118	0.19536
III	0.31331	0.28348	0.29572	0.27289	0.24271
IV	0.31765	0.29583	0.24630	0.16606	0.24799
V	0.38040	0.20544	0.24416	0.16516	0.11428
VI	0.43630	0.04692	0.07134	0.01183	0.01044

Pode-se observar que todas as tabelas indicam a subestrutura S1 como a danificada, como era de se esperar. No entanto, os valores do **CPF** obtidos pela combinação CC e MRPT, apesar de indicarem a subestrutura S1, situam-se próximos dos valores obtidos para a subestrutura S2, principalmente nos conjuntos II, III e IV de truncamento.

Através destes primeiros resultados apresentados, concluímos o uso do método de CC apresentou maiores imprecisões ao se identificar o dano simulado, enquanto os métodos de BK, QE e CB apresentam resultados mais precisos, e entre esses, não se verificam diferenças significativas. Portanto, optou-se por investigar apenas o método de BK, que utiliza vetores de Ritz em sua formulação. Assim, nas próximas simulações, tal método será utilizado na combinação com o MRPT, na seleção do subespaço bem como no RRA.

Para os métodos de síntese abordados em combinação com o MRPT e com a posterior utilização dos vetores de Ritz dinâmicos obtidos pelo RRA se faz necessário que as matrizes sintetizadas de massa e rigidez possuam rank pleno. Isto se dá devido à relação de recorrência utilizada na extração dos vetores de Ritz dinâmicos, Eq.(175), onde tais matrizes são usadas. Observando-se esta equação, pode-se notar que, caso as matrizes de massa e rigidez sintetizadas não sejam bem condicionadas, os vetores obtidos rapidamente perderão a ortogonalidade. Ademais, muitas vezes, devido ao tamanho da estrutura analisada se faz necessário utilizar mais de um vetor inicial na Eq.(175) conduzindo ao uso de algoritmos de ortogonalização em blocos, que pode aumentar ainda mais a imprecisão. Este problema não ocorre caso se utilize diretamente os vetores de Ritz estáticos na formulação do MRPT, pois, como se pode observar pela Eq.(167), estes vetores são obtidos das matrizes de estado identificadas pelo ERA, os quais não passam por processos de recorrência e ortogonalização. A Figura 5.2-9 e a Figura 5.2-10 mostram o que foi exposto neste parágrafo.

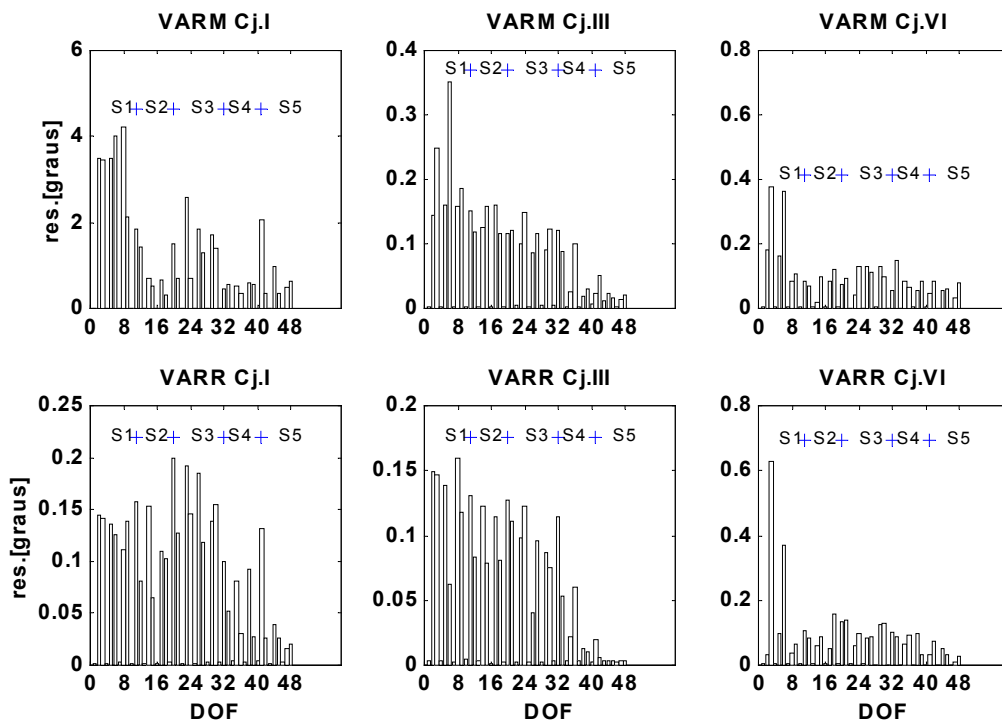


Figura 5.2-9 - VARM e VARR usando 5 modos normais e 5 vetores de Ritz dinâmicos - Viga bi-engastada

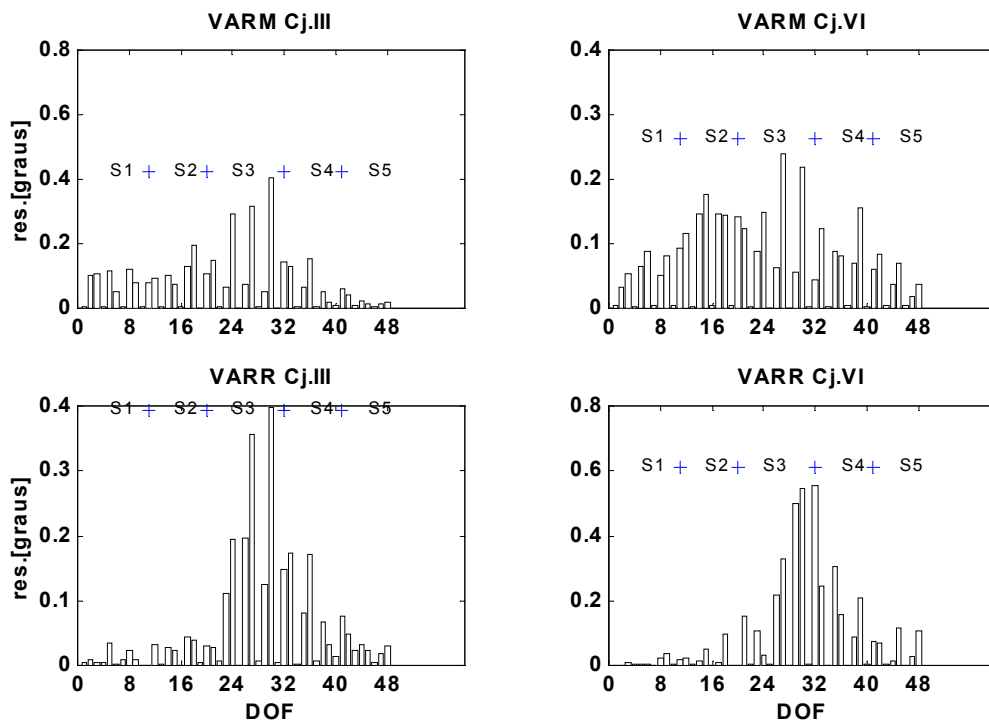


Figura 5.2-10 - VARM e VARR usando 3 modos normais e 1 vetore de Ritz estático - Viga bi-engastada

Pela Figura 5.2-9 podemos observar os VARM, obtidos pelo uso de 5 modos normais de vibrar, e os VARR obtidos pelo uso de 5 vetores de Ritz dinâmicos, ambos na localização do dano no primeiro elemento, GDL 1:6, subestrutura S1. Os mesmos tipos de dano e ruído usados anteriormente foram usados na obtenção destes resultados. Observa-se que devido ao truncamento dos modos dos componentes, conjuntos I e III, os VARR não foram capazes de identificar a subestrutura danificada, enquanto que os VARM identificam a subestrutura S1, como esperado. Usando o conjunto VI, o qual contém a base completa dos modos dos componentes, ambas as soluções, VARM e VARR identificam os GDL com dano. No entanto, o VARR parece ter sofrido menor influência dos ruídos de medição impostos.

Nos gráficos mostrados na Figura 5.2-10 o dano esta localizado no elemento 10, GDL 25:30, subestrutura S3, e é caracterizado por 75% de redução no momento de inércia, e aplicando-se o mesmo ruído usado anteriormente. Dois conjuntos de truncamento são usados, o conjunto III e VI. Para obtenção dos VARM foram usados 3 modos normais de vibrar, e para obtenção dos VARR somente um vetor de Ritz estático foi usado. Pode-se observar que o resultado obtido pelo uso do VARM no conjunto III dá somente uma pequena indicação de que o dano pode estar

localizado no componente S3, sendo que o uso do conjunto VI apresenta vários picos distribuídos por vários GDL, o que impossibilita uma identificação mais precisa. No entanto, o uso dos VARR identifica o componente S3 em ambos os casos.

Na sequência, será conduzida uma análise comparativa entre os resultados obtidos pela solução modal através dos modos normais de vibrar e pela solução de Ritz através do uso dos vetores de Ritz dinâmicos. Não será feito truncamento nos vetores dos componentes, ou seja, em todas as análises será utilizado somente a base completa de vetores dada pelo conjunto F. Cinco modos normais e cinco vetores de Ritz dinâmicos foram assumidos como medidos na obtenção dos vetores de ângulo residual modal e de Ritz. A seleção do subspaço foi aplicada sobre ambas matrizes **A** obtidas, e os dois primeiros componentes principais dos vetores de dano, modal e de Ritz, VDPM e VDPR, foram obtidos através das duas primeiras colunas de U_1 para cada caso em ambas análises.

Diversos cenários foram simulados, compostos pela combinação de um dos vários estados de dano com um dos diferentes níveis de ruído de medição impostos, com o objetivo de comparar a sensibilidade de cada solução obtida na variação destes cenários dano/ruído. Em todas as análises o dano está localizado no elemento 1, GDL 1:6, subestrutura S1, sendo a diferença em cada estado de dano dada por diferentes porcentagens de redução no momento de inércia do FEM original da estrutura. Para obtenção de cada resultado foram obtidos 100 resultados através do algoritmo de seleção do subspaço, sendo que a única diferença entre cada resultado foi o ruído aleatório imposto diretamente sobre os modos normais de vibrar ou sobre os vetores de Ritz. O ruído aleatório foi produzido utilizando-se a função *rand* do MATLAB® [57] que produz números aleatórios uniformemente distribuídos. Portanto, para obtenção de cada novo resultado um ruído diferente é aplicado. Para cada figura, os vetores de dano principais obtidos pela média dos 100 resultados serão mostrados (barras vermelhas: médias para o 1º vetor principal de dano, barras azuis: médias para o 2º vetor principal de dano) junto do desvio padrão máximo e mínimo de todos os resultados em relação às médias (linhas pretas no centro das barras).

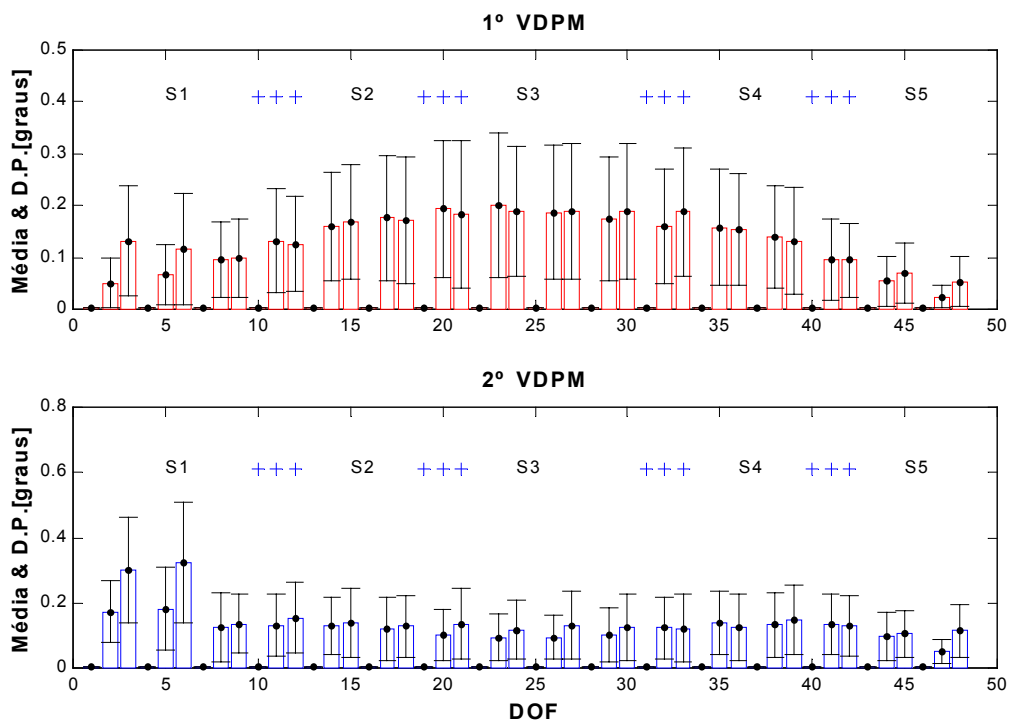


Figura 5.2-11 - 1º e 2º VDPM, ruído: [15 0.2], dano: 75% de redução no mom. de Inércia - Viga bi-engastada

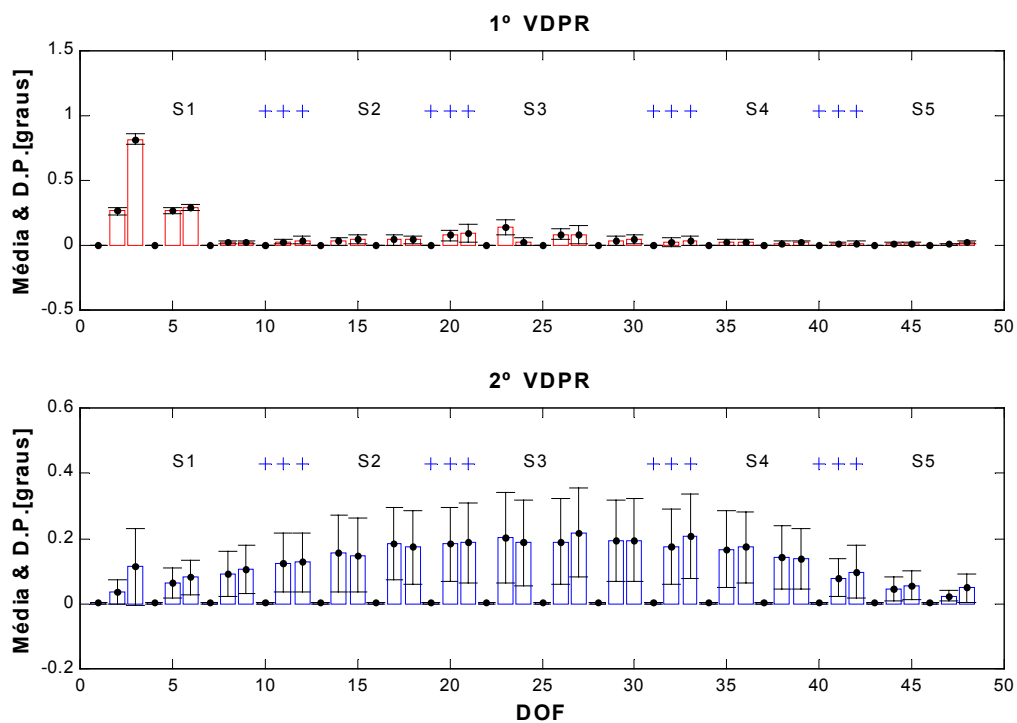


Figura 5.2-12 - 1º e 2º VDPR, ruído: [15 0.2], dano: 75% de redução no mom. de Inércia - Viga bi-engastada

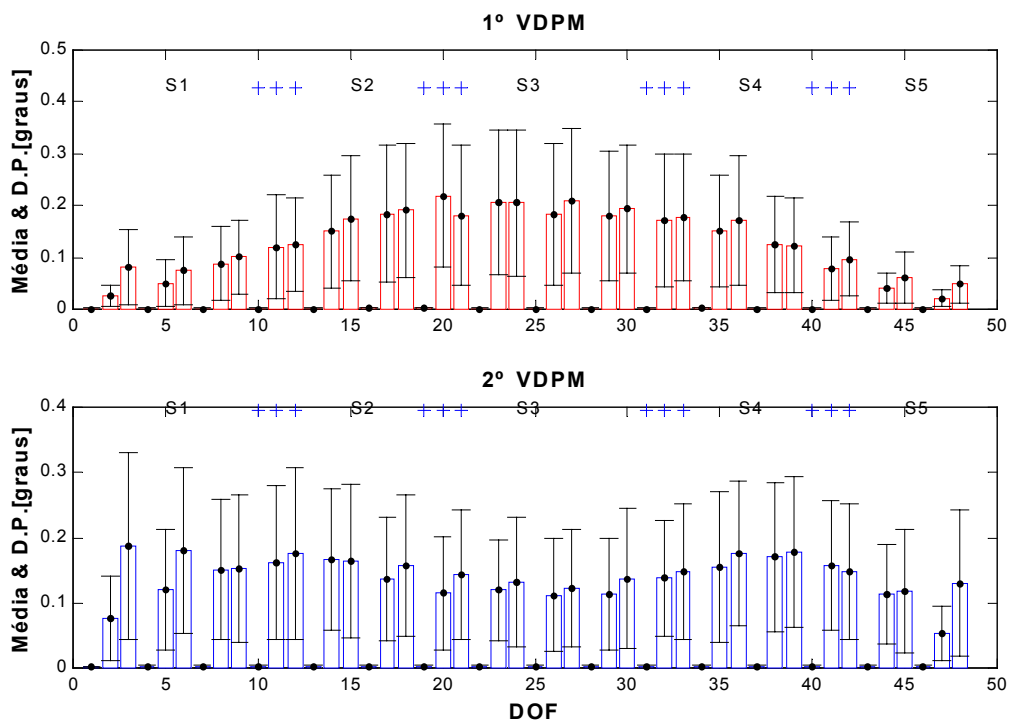


Figura 5.2-13 - 1º e 2º VDPM, ruído: [10 0.1], dano: 50% de redução no mom. de Inércia - Viga bi-engastada

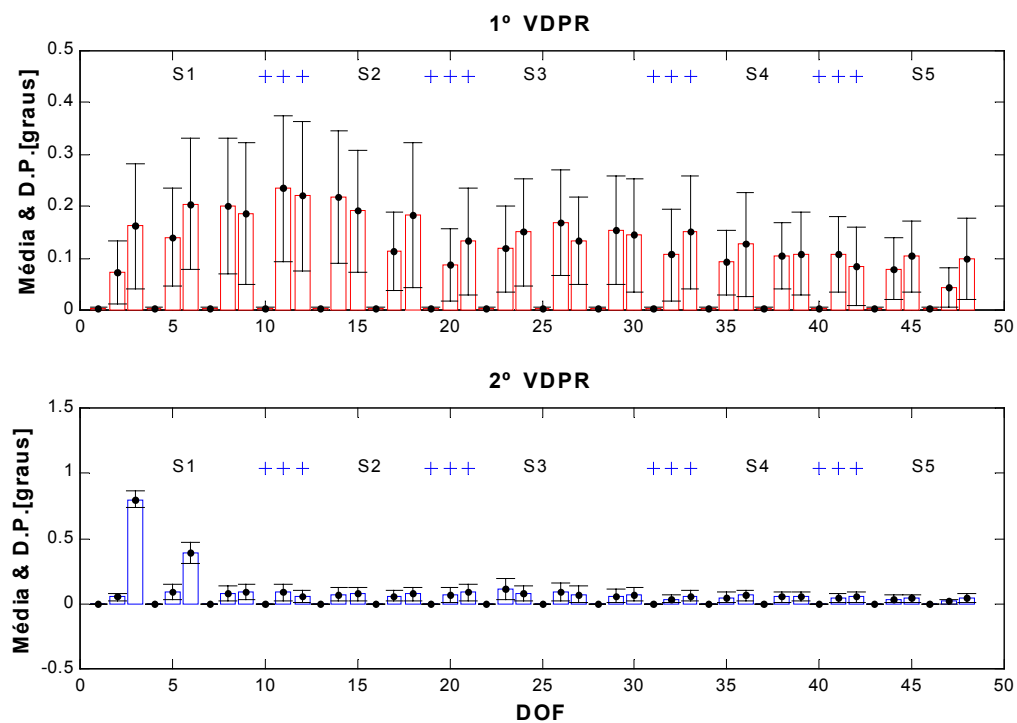


Figura 5.2-14 - 1º e 2º VDPR, ruído: [10 0.1], dano: 50% de redução no mom. de Inércia - Viga bi-engastada

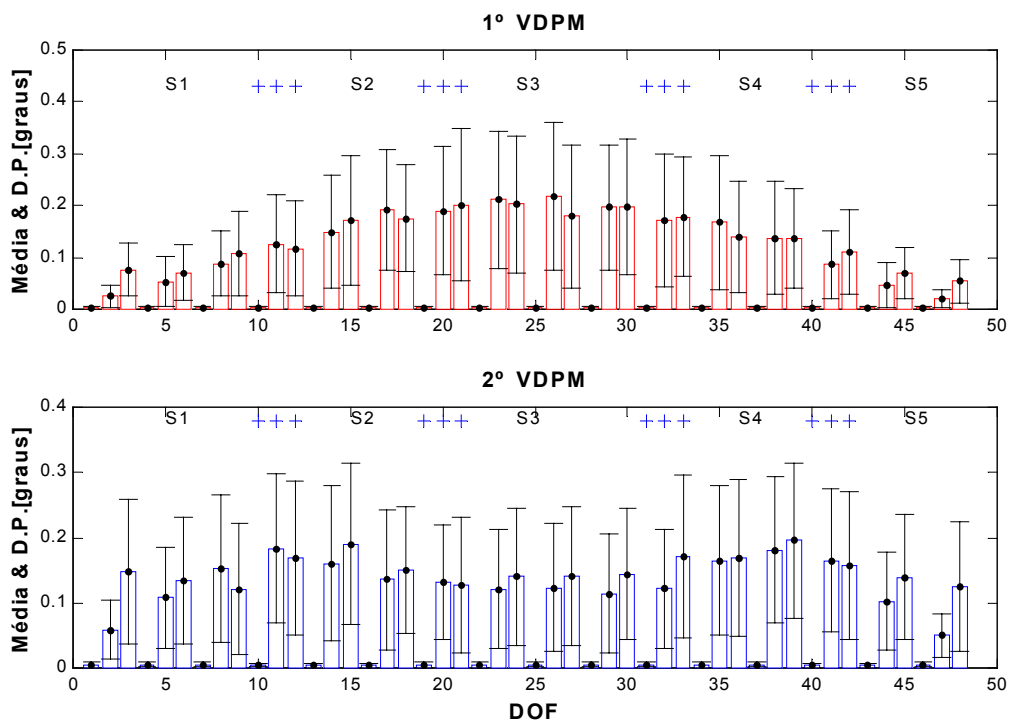


Figura 5.2-15 - 1º e 2º VDPM, ruído: [5 0.1], dano: 25% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada

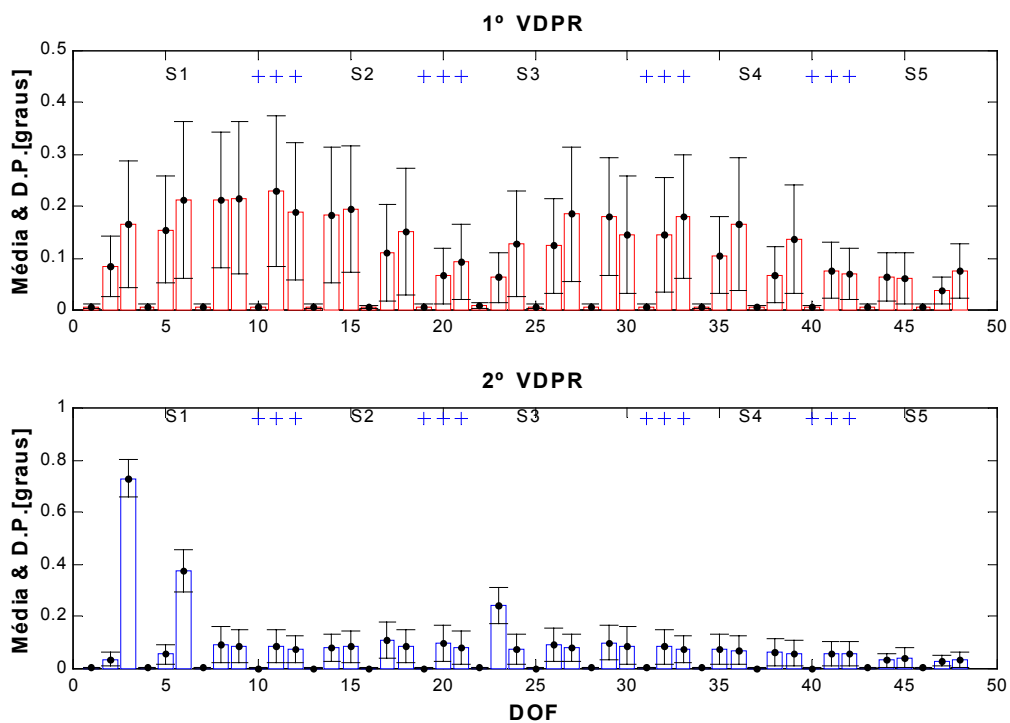


Figura 5.2-16 - 1º e 2º VDPR, ruído: [5 0.1], dano: 25% de redução no mom. de Inérica - Viga bi-engastada

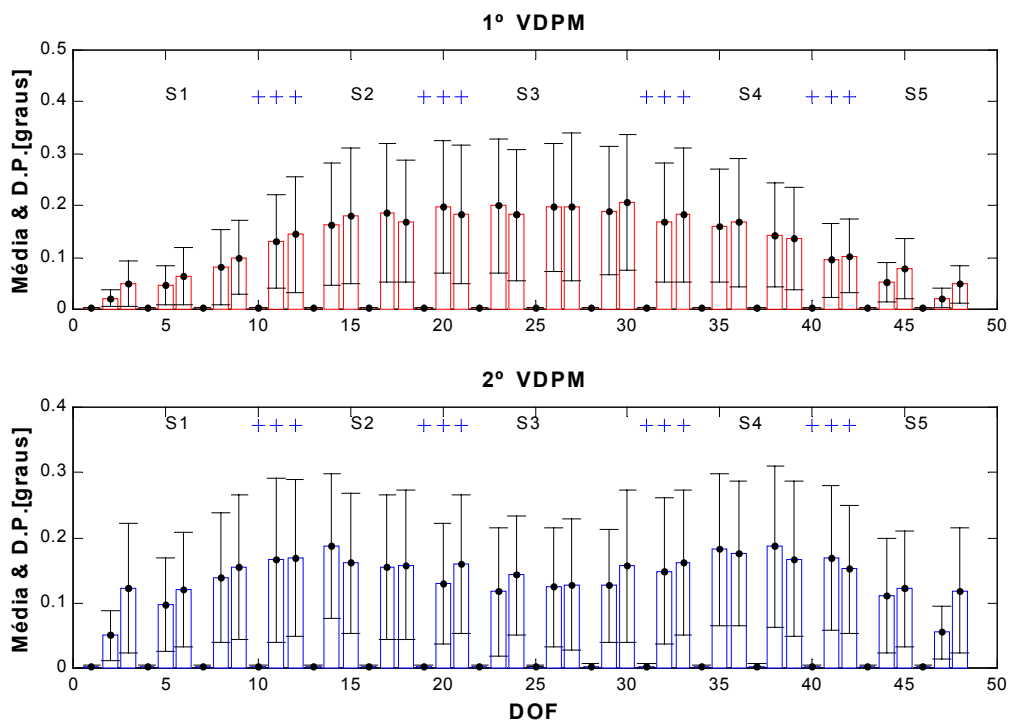


Figura 5.2-17 - 1º e 2º VDPM, ruído: [15 0.2], dano: 25% de redução no mom. de Inércia - Viga bi-engastada

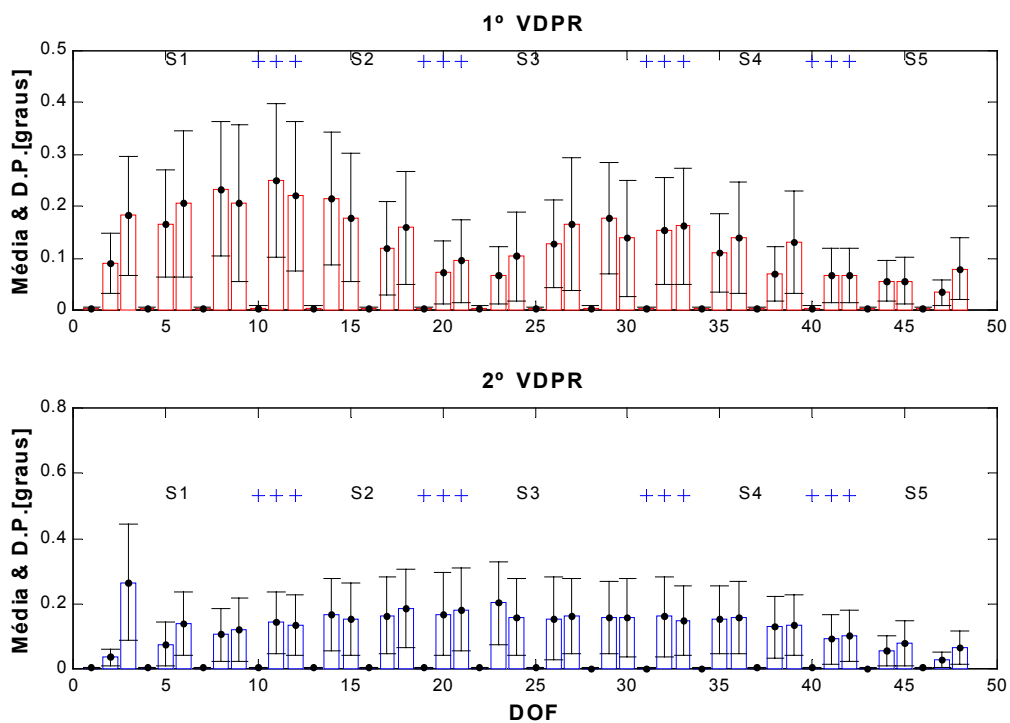


Figura 5.2-18 - 1º e 2º VDPR, ruído: [15 0.2], dano: 25% de redução no mom. de Inércia - Viga bi-engastada

Pode-se observar que com exceção da Figura 5.2-18, os VDPR puderam localizar o dano, mesmo com altos níveis de ruído e fracos estados de dano. Neste caso, Figura 5.2-18, com os mais fortes fatores de ruído (15% para α e 0.2% para β), e o estado de dano mais fraco (25% de redução no momento de inércia), os VDPR não foram capazes de localizar o dano imposto. No entanto, os VDPM foram capazes de localizar o dano somente na Figura 5.2-11, que apesar de ter recebido um forte ruído, é o estado de dano mais forte (75% de redução no momento de inércia). Em todas as outras figuras os VDPM não foram capazes de localizar o dano.

Um interessante efeito, observado por Dos Santos e Zimmerman [50] e confirmado neste trabalho é que a medida que os níveis de ruído aumentam (e os danos impostos são mais fracos), o grau de significância do segundo vetor principal de dano se torna mais importante. Portanto, a magnitude, e consequentemente, a importância do ruído em cada GDL se amplia. Isto ocorre pois a perturbação nos vetores devido ao ruído se aproxima das mudanças ocorridas nos vetores devido ao dano. Isto faz com que o primeiro vetor principal de dano absorva parte do ruído, e em contrapartida, o segundo vetor principal de dano se torna menos influenciado pelo ruído e mais apto para localizar de forma mais clara dano. Portanto, o algoritmo de seleção do subspaço acaba funcionando como um filtro para isolar a informação mais importante referente ao dano.

Outro efeito interessante que pode ser observado é a baixa dispersão sofrida pelos resultados obtidos através do uso dos vetores de Ritz em relação às 100 amostras geradas em comparação com a grande dispersão observada para os modos normais de vibrar. Esta afirmação pode ser confirmado observando-se as indicações dadas para o desvio padrão máximo e mínimo em relação às médias obtidas (Figura 5.2-12, Figura 5.2-14 e Figura 5.2-16).

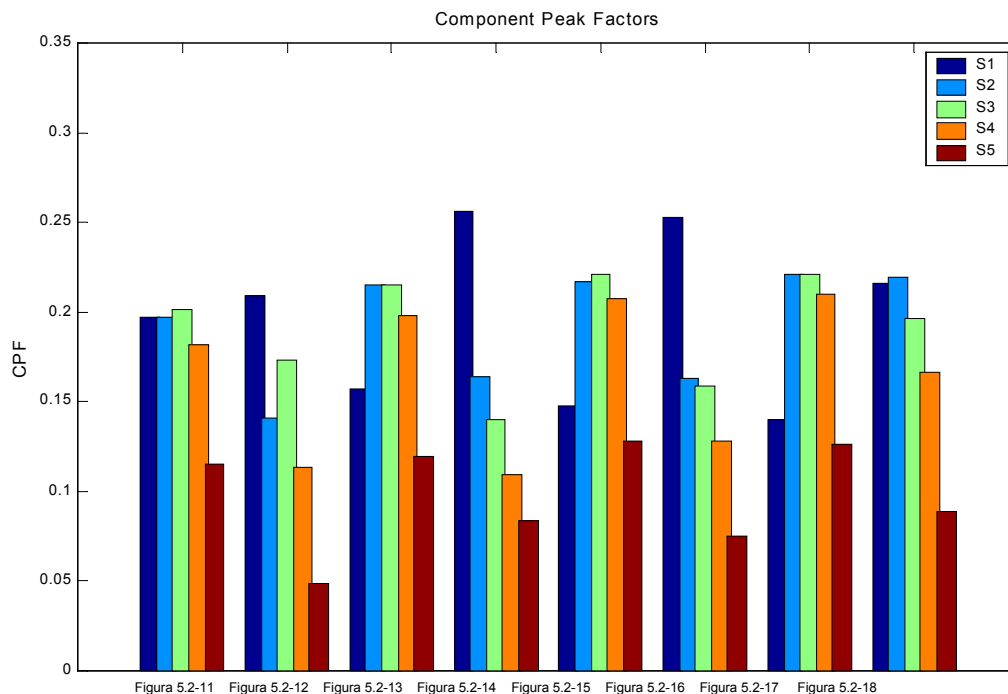


Figura 5.2-19 - CPF referente à Figura 5.2-11 até a Figura 5.2-18 - Viga bi-engastada

Pela Figura 5.2-19 pode-se observar os valores do CPF para os cenários de dano e ruído mostrados anteriormente. Cada grupo de barras representa uma das figuras geradas, e cada uma das barras representa o valor CPF para uma das cinco subestruturas. Pode-se observar que em nenhuma figura onde se utilizam os VDPM (Figura 5.2-11, Figura 5.2-13, Figura 5.2-15 e Figura 5.2-17), o CPF pode localizar a subestrutura danificada, enquanto que nas figuras onde se utilizam os VDPR (Figura 5.2-12, Figura 5.2-14 e Figura 5.2-16), todas as figuras indicam a subestrutura danificada, exceto a última, Figura 5.2-18, com o maior nível de ruído e menor intensidade de dano.

Nas próximas figuras serão mostrados os resultados da determinação da extensão do dano, caracterizado pela redução no momento de inércia da estrutura em 50%, imposto sobre o elemento 7, GDL 16-21, subestrutura S2, através do uso da indicação dada pelos vetores de ângulo residual na seleção dos modos ou vetores de Ritz mais sensíveis ao dano. Assume-se cinco modos e cinco vetores de Ritz dinâmicos como medidos. Um ruído de 5% para α e 0.1% para β foi aplicado diretamente sobre os modos normais e também sobre as FRFs usadas para obtenção dos vetores de Ritz. Através dos modos e vetores de Ritz selecionados, o algoritmo de seleção do

subespaço é utilizado, pela Eq.(162), na indicação da extensão do dano diretamente pela perturbação na matriz de rigidez.

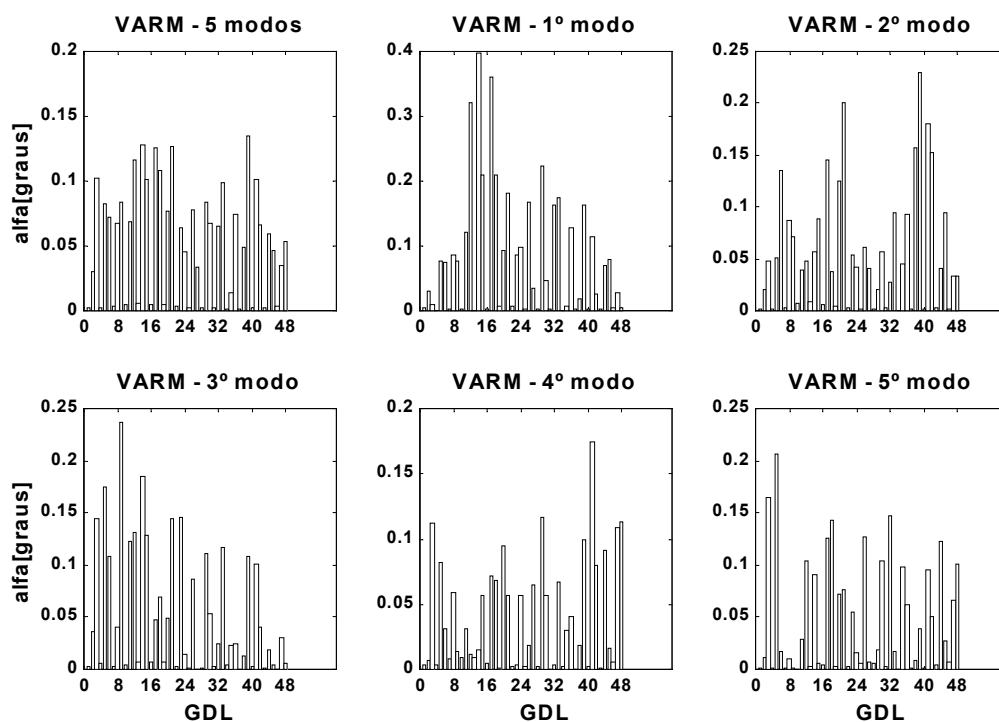


Figura 5.2-20 - VARM - para os 5 modos e para os modos 1 até 5 - Viga bi-engastada

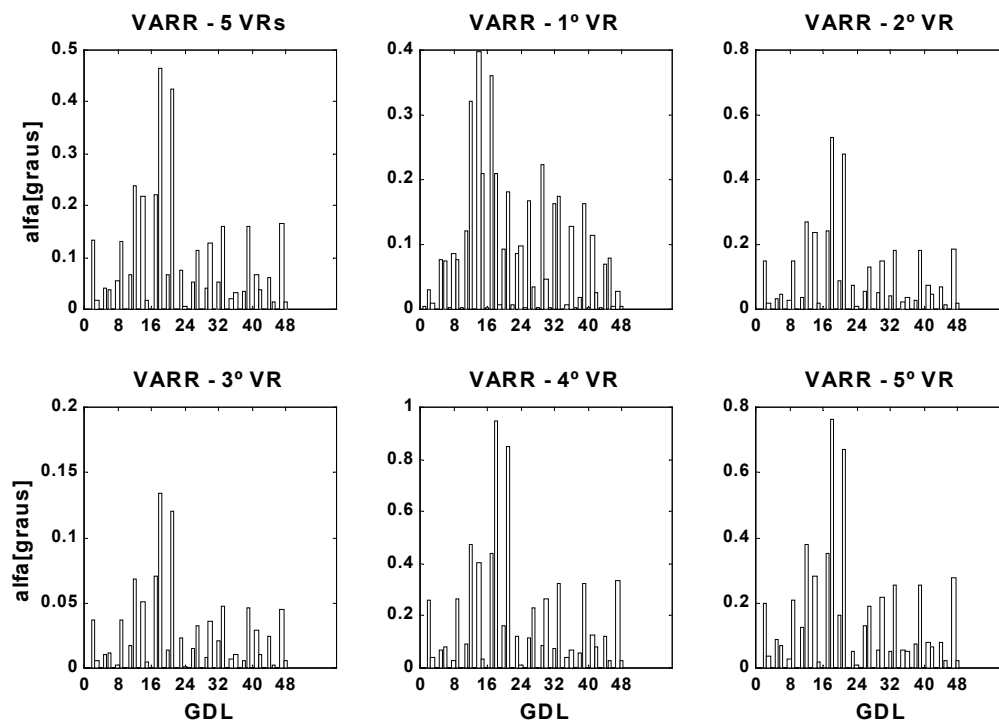


Figura 5.2-21 - VARR - para os 5 VRs e para os VRs 1 até 5 - Viga bi-engastada

Pela Figura 5.2-20 observa-se o resultado obtido pelo uso de todos os cinco modos medidos (VARR - 5 modos), e os resultados obtidos pelo uso de cada um dos modos em particular (VARR 1º ao 5º modo). Somente onde se utiliza o 1º modo se tem uma indicação da localização dos GDL danificados. Através da Figura 5.2-21 no entanto, nota-se que todos os gráficos de barras obtidos pelo uso dos VARR apresentam indicações da localização do dano nos GDL 16-21.

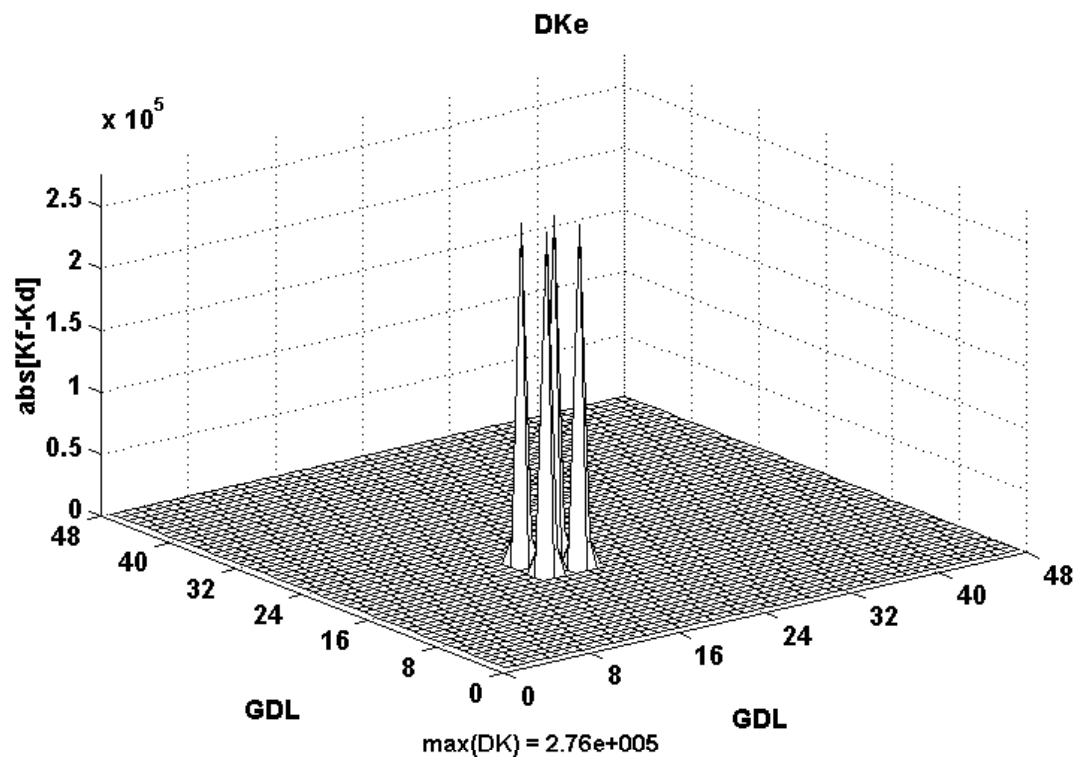


Figura 5.2-22 - Matriz de perturbação de rigidez do MEF - Viga bi-engastada

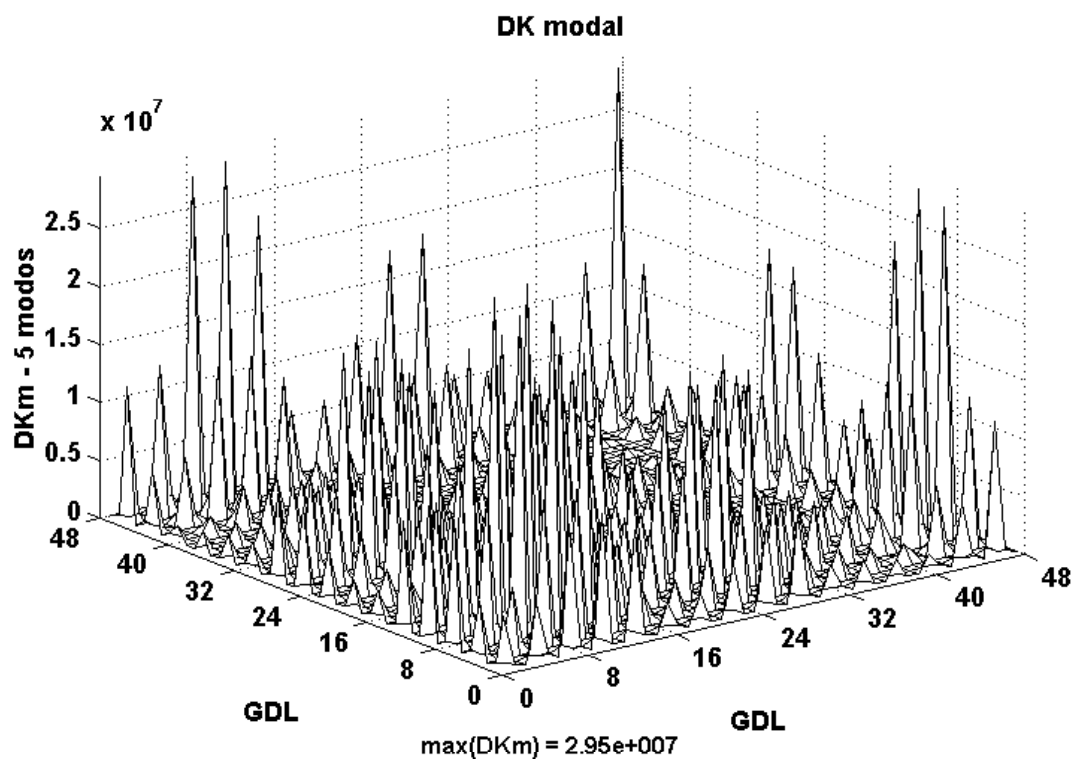


Figura 5.2-23 - Matriz de perturbação de rigidez usando os 5 modos - Viga bi-engastada

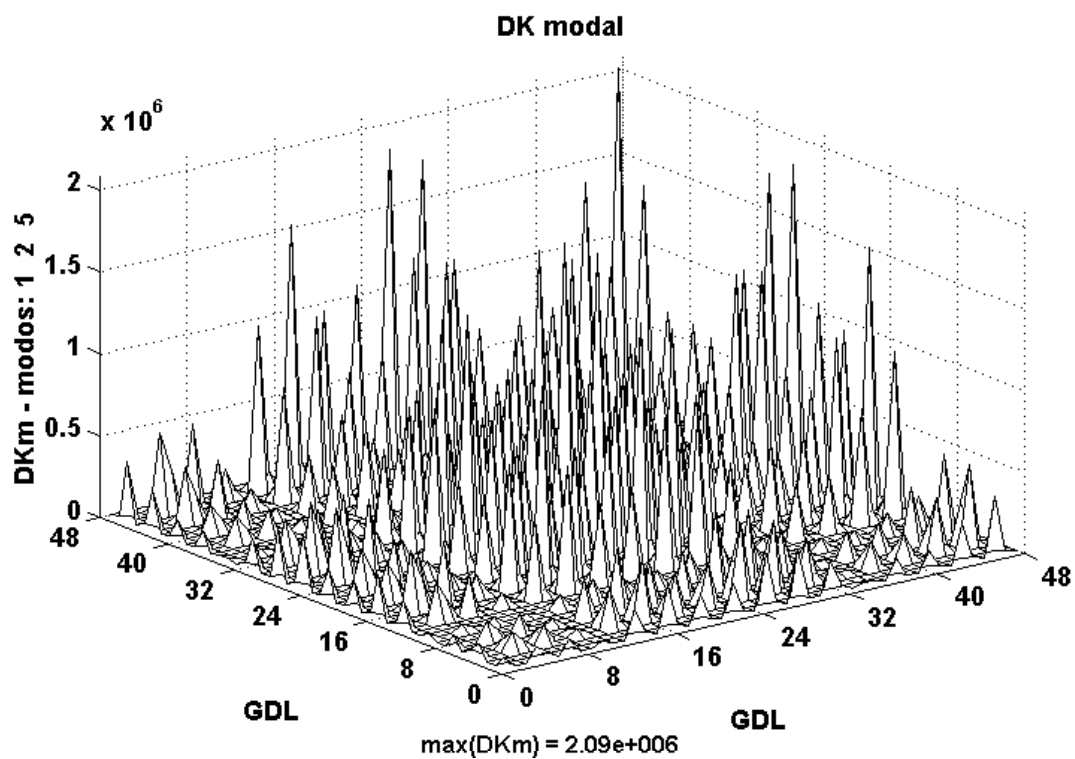


Figura 5.2-24 - Matriz de perturbação de rigidez usando os modos selecionados - Viga bi-engastada

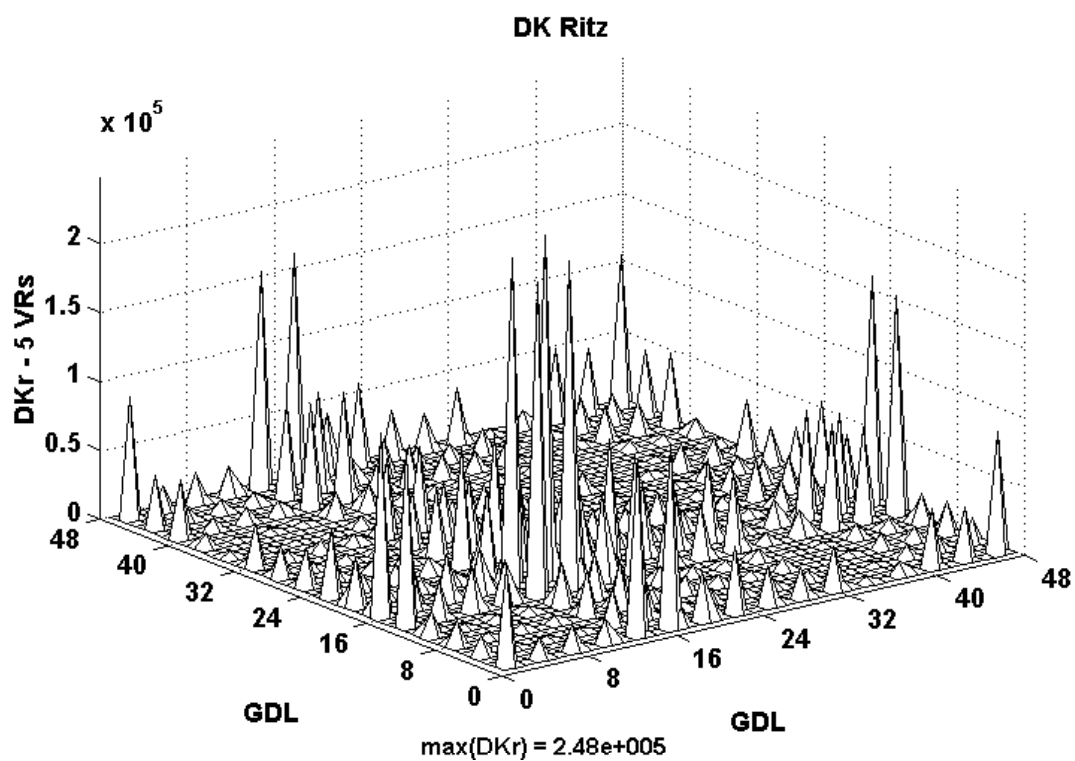


Figura 5.2-25 - Matriz de perturbação de rigidez usando os 5 VRs - Viga bi-engastada

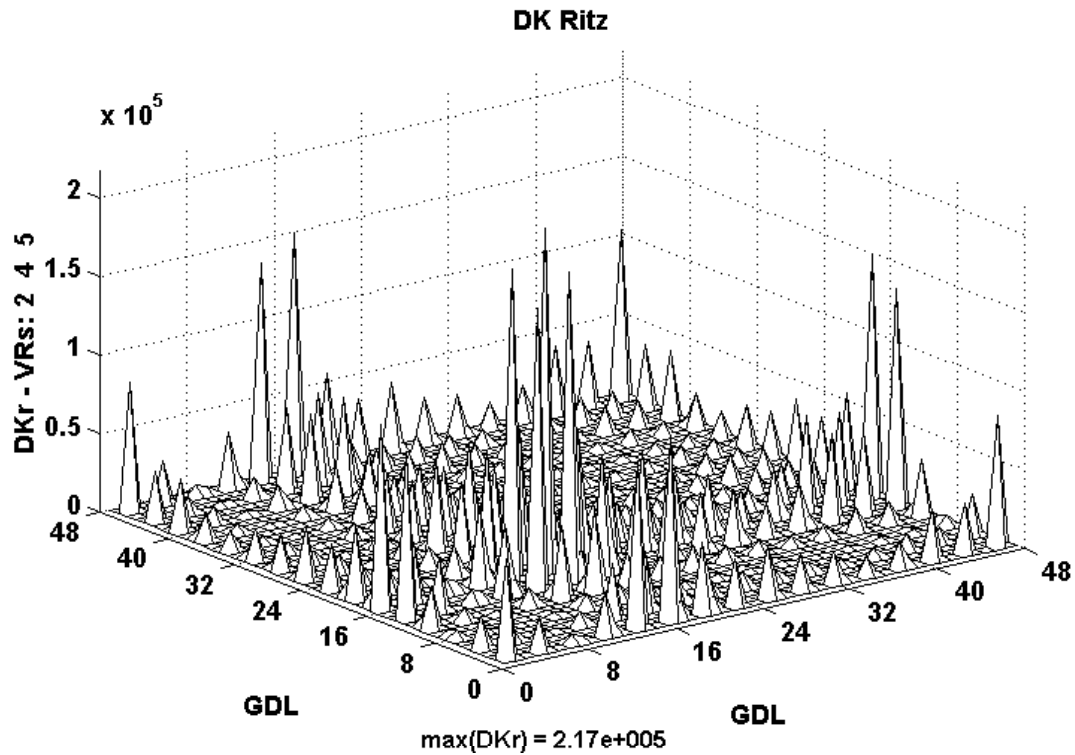


Figura 5.2-26 - Matriz de perturbação de rigidez usando os VRs selecionados - Viga bi-engastada

A Figura 5.2-22 mostra a matriz de perturbação obtida pela subtração da matriz de rigidez do modelo sem danos da matriz de rigidez do modelo com o dano imposto. Nota-se que a extensão máxima do dano indicado pela matriz de perturbação é em torno de $2.76e+005$.

A Figura 5.2-23 mostra o gráfico da matriz de perturbação obtido pelo uso da Eq.(162) utilizando-se todos os cinco modos medidos. A Figura 5.2-24 mostra a matriz de perturbação obtida pelo uso dos modos 1, 2 e 5. Pode-se notar que ambas soluções não foram aptas para quantificar a extensão nem para indicar a localização do dano.

A Figura 5.2-25 mostra a matriz de perturbação obtida pelo uso dos VARR com cinco vetores de Ritz dinâmicos medidos, e a Figura 5.2-26 mostra a matriz de perturbação obtida pelo uso dos vetores 2, 4 e 5. Nota-se que em ambos resultados, Figura 5.2-25 e Figura 5.2-26, apesar do ruído ter induzido a formação de vários picos espalhados pelo gráfico, fica evidente a presença dos picos centrais indicando a presença do dano nos GDL 16:21.

Tabela 5.2.1.6- Valores da extensão do dano e % de erro - Viga bi-engastada

Figura	Solução	Extensão do dano	% de erro
Figura 5.2-23	Modal - 5 modos	2.95e+007	10588.40
Figura 5.2-24	Modal - modos 1,2 e 5	2.09e+006	657.25
Figura 5.2-25	V. Ritz - 5 vetores	2.48e+005	10.14
Figura 5.2-26	V. Ritz - vetores 2,4 e 5	2.17e+005	21.37

A Tabela 5.2.1.6 mostra os valores obtidos para a extensão máxima do dano em cada solução, e na última coluna o erro em porcentagem relativo à diferença entre a extensão máxima obtida em cada solução com a obtida pela solução mostrada na Figura 5.2-22. Pode-se notar que ambas soluções modais não tiveram êxito na quantificação da extensão do dano, enquanto que as soluções que usaram os vetores de Ritz apresentam resultados aceitáveis em termos de engenharia, sendo o menor erro dado pelo uso dos 5 vetores de Ritz dinâmicos medidos.

5.2.2 Localização e Extensão do dano em Várias Substruturas

Na sequência serão apresentados resultados obtidos pelo uso dos vetores de dano principal na detecção de danos localizados em mais de uma substrutura. Dois danos foram simulados, simultaneamente em duas substruturas diferentes. Ambos os danos caracterizam-se pela redução do módulo de elasticidade da estrutura em 50%. O primeiro dano está localizado na substrutura S2, elemento 9, GDL 25-30, e o segundo está localizado na substrutura S5, elemento 16, GDL 43-48.

O procedimento para obtenção das figuras é o mesmo que foi aplicado na seção anterior, ou seja, média e desvio padrão dos 100 vetores de dano principais obtidos pelas soluções modal e de Ritz, variando-se somente o ruído aleatório imposto na obtenção de cada resultado. Diferentes formas de ruído foram impostas, como mostram as figuras a seguir.

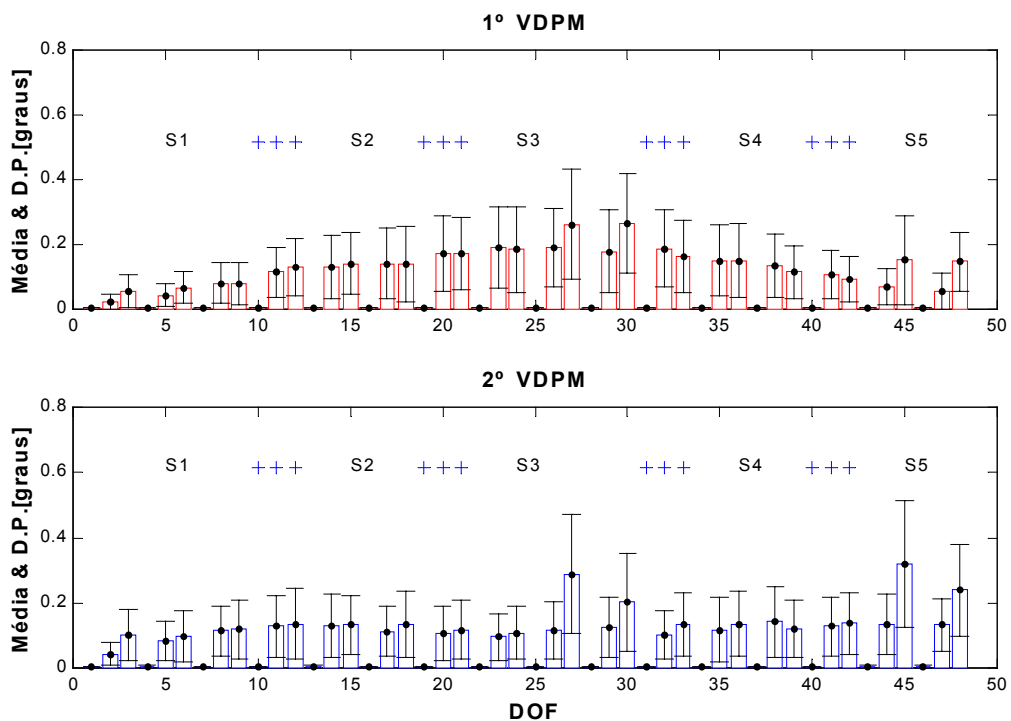


Figura 5.2-1 - 1º e 2º VDPM, ruído: [5 0.1] - Viga bi-engastada

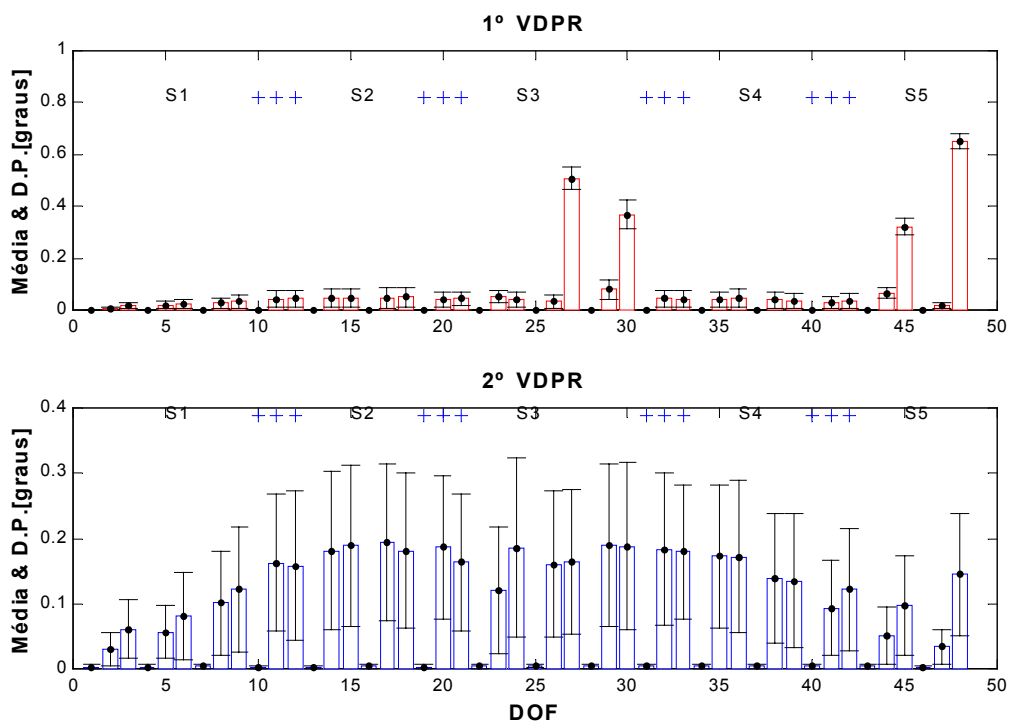


Figura 5.2-2 - 1º e 2º VDPR, ruído: [5 0.1] - Viga bi-engastada

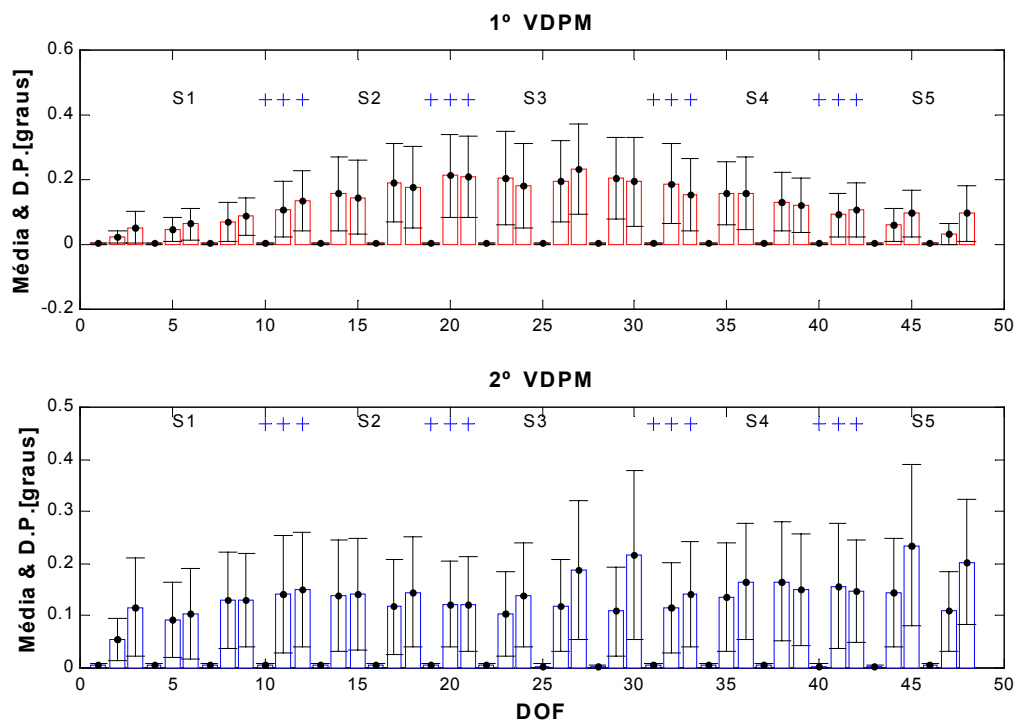


Figura 5.2-3 - 1º e 2º VDPM, ruído: [7 0.15] - Viga bi-engastada

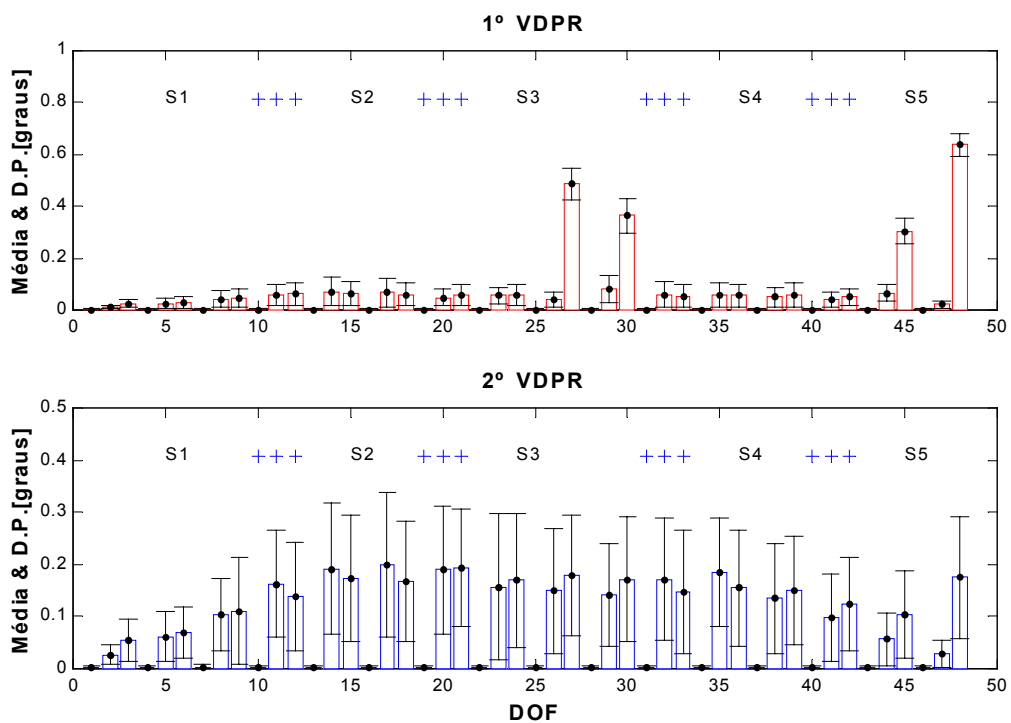


Figura 5.2-4 - 1º e 2º VDPR, ruído: [7 0.15] - Viga bi-engastada

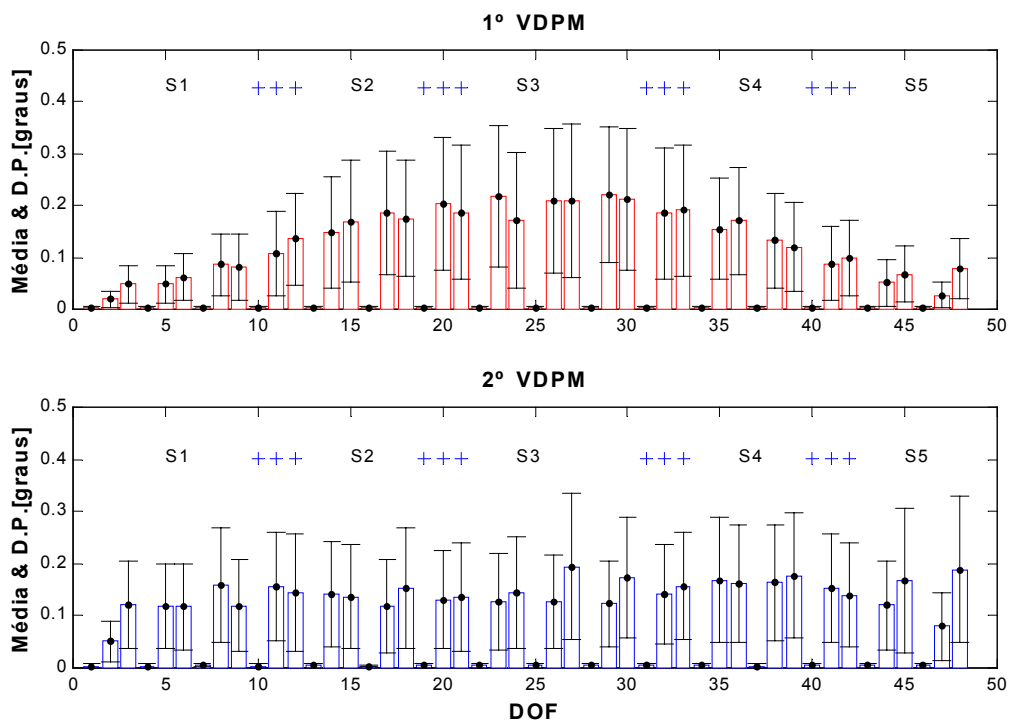


Figura 5.2-5 - 1° e 2° VDPM, ruído: [10 0.2].

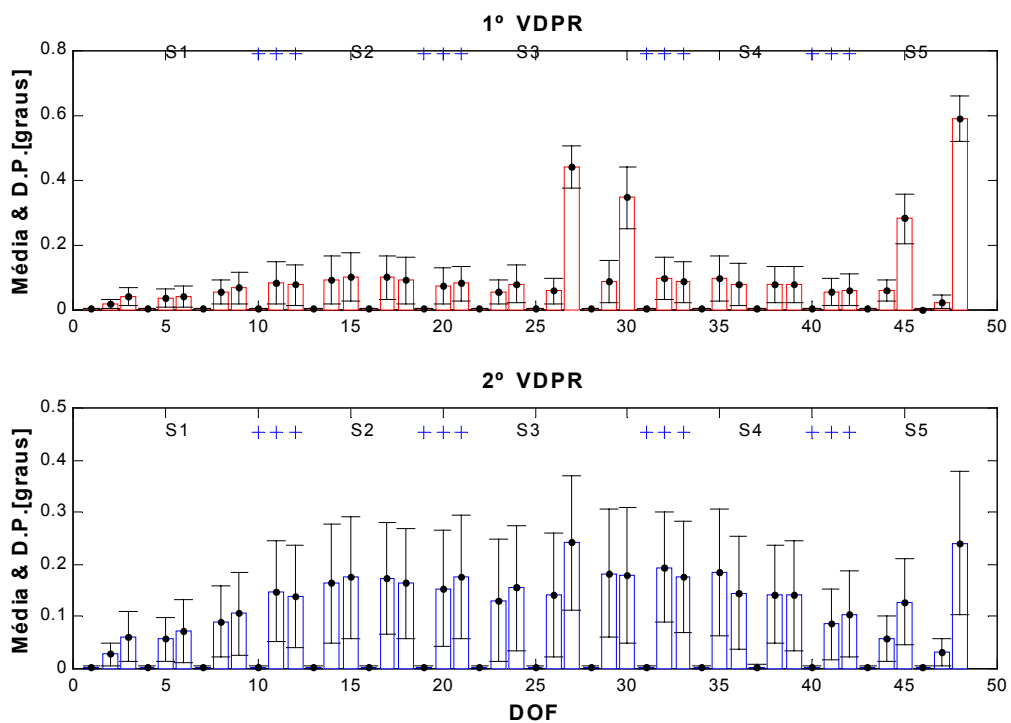


Figura 5.2-6 - 1° e 2° VDPR, ruído: [10 0.2].

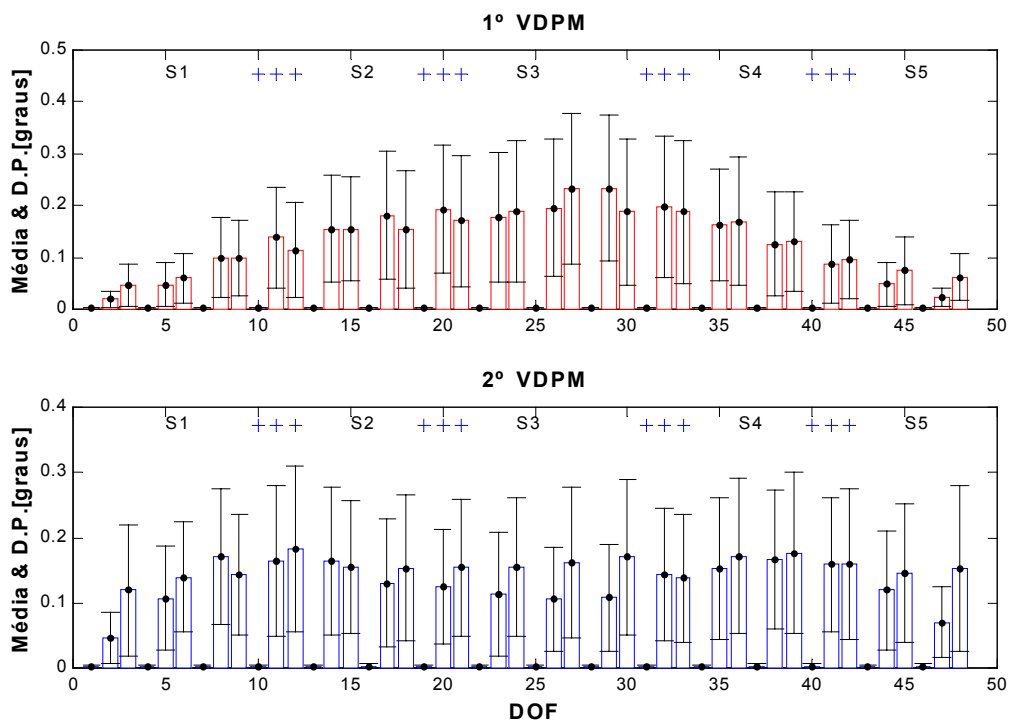


Figura 5.2-7 - 1° e 2° VDPM, ruído: [15 0.2].

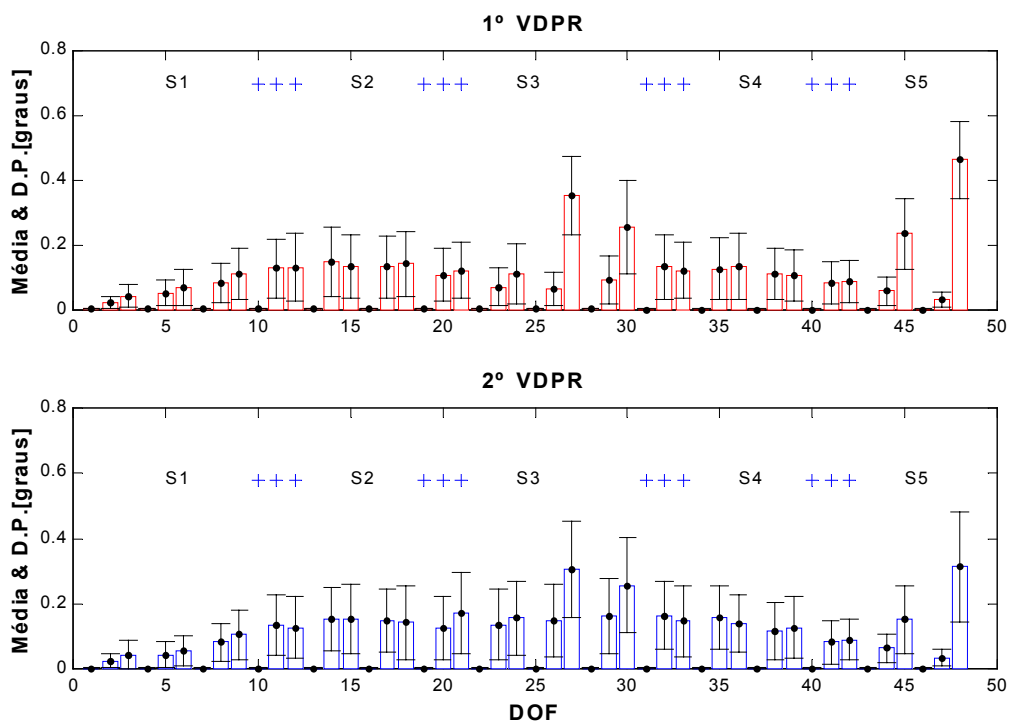


Figura 5.2-8 - 1° e 2° VDPR, ruído: [15 0.2] - Viga bi-engastada

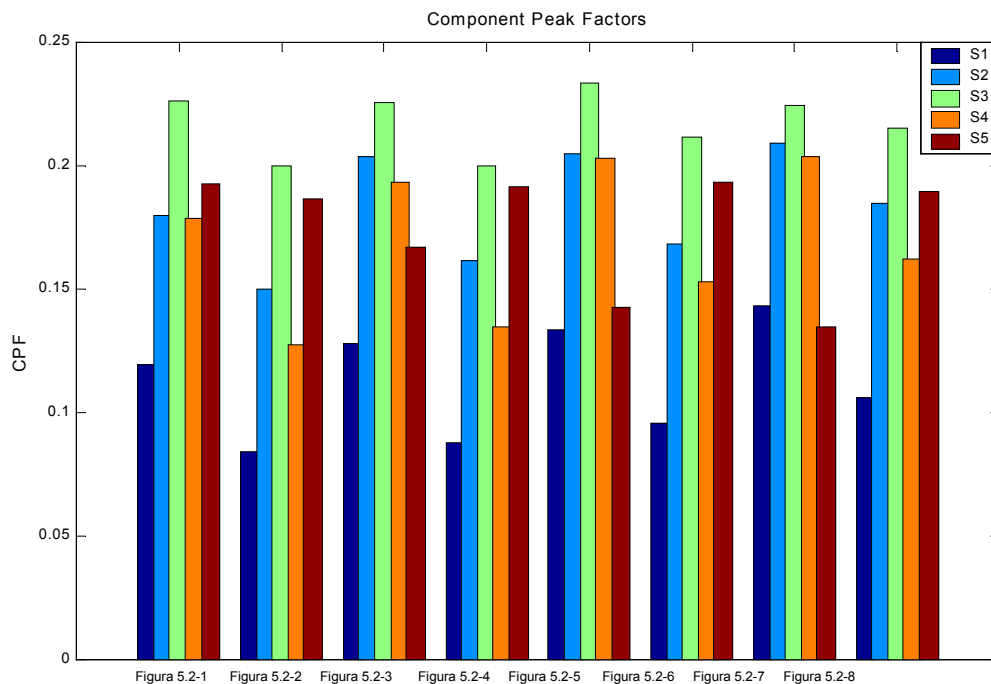


Figura 5.2-9-CPF para Figura 5.2-1 até a Figura 5.2-8 - Viga bi-engastada

Pode-se observar que os VDPR fornecem uma boa indicação para a localização dos danos em ambas subestruturas em todos os casos de ruído, porém os resultados obtidos apresentam uma dispersão um pouco maior do que o caso da localização em somente uma subestrutura. Novamente os VDPM foram capazes de localizar o dano somente no primeiro caso, onde o nível de ruído era mais fraco, (Figura 5.2-1), no segundo vetor de dano principal. Em todas as outras figuras os VDPM não foram capazes de localizar o dano. A Figura 5.2-9 mostra os resultados para o CPF para estas figuras. Pode-se observar que nos casos onde utilizam-se os VDPR as subestruturas S3 e S5 são indicadas pelo CPF, enquanto que nos casos onde se utiliza os VDPM somente no primeiro caso temos a indicação do CPF de ambas subestruturas.

5.3 Exemplo da Estação Espacial Internacional

Neste exemplo, o método proposto será aplicado a uma estrutura similar à utilizada por McGowan e Edighoffer [56]. Trata-se de um modelo composto de elementos de vigas que modelam sete componentes da estação espacial internacional (EEI). A Figura 5.3-1 mostra em vermelho a localização dos componentes que compõe o modelo.

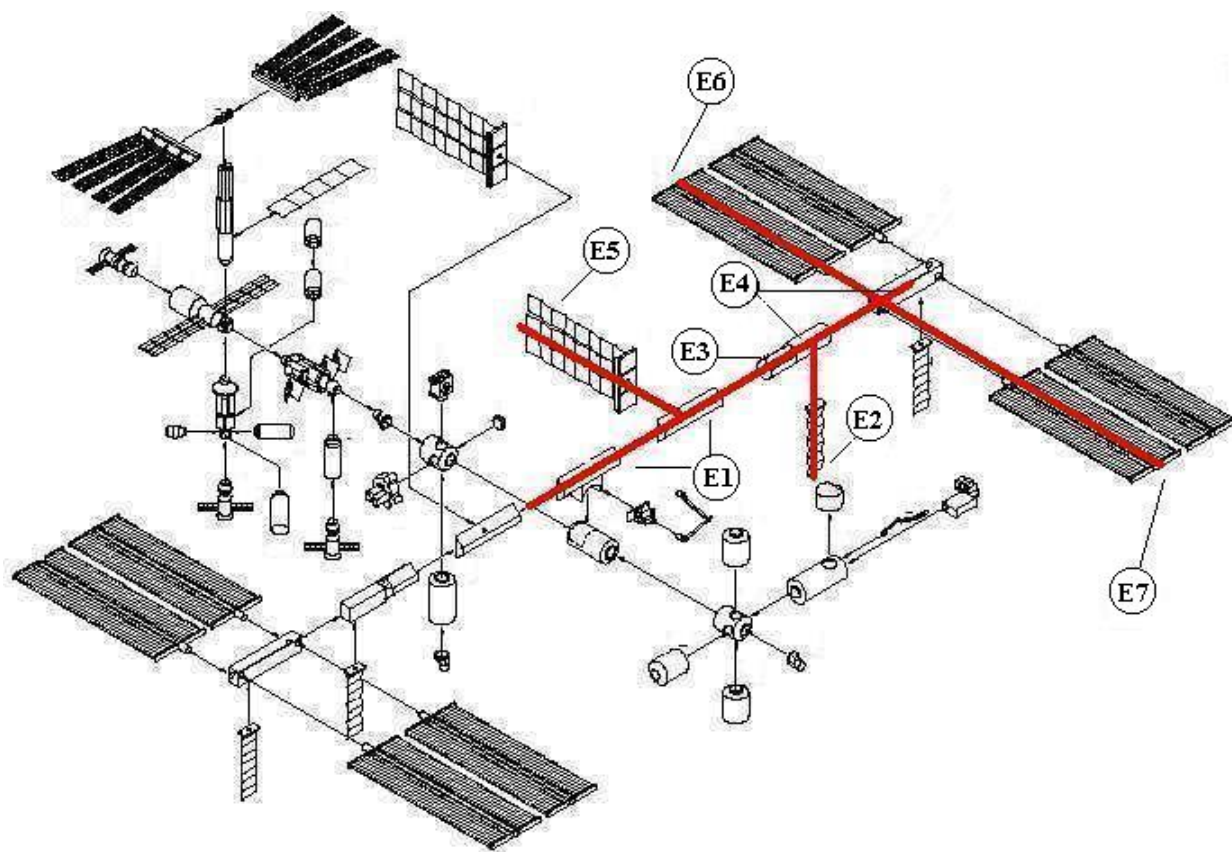


Figura 5.3-1 - Localização dos componentes da Estação Espacial Internacional

Para diferenciar das denominações dadas no exemplo da viga biengastada da seção anterior, os componentes serão denominados por E1 até E7. Para se permitir uma análise bidimensional, o componente E2 foi considerado no mesmo plano dos demais componentes. Portanto, foram utilizados elementos de viga bidimensional, e conforme se pode observar pela Figura 5.3-2, o modelo é composto por 41 nós, possuindo 3 GDL por nó, totalizando-se em 123 GDL. Em função da necessidade de se utilizar dados estáticos nos métodos propostos, assume-se

que o teste é executado fixando-se o primeiro nó da estrutura, resultando numa ordem de 120 para o modelo. Neste trabalho, a estrutura bidimensional indicada pela Figura 5.3-2 será denominada de EEI-7S.

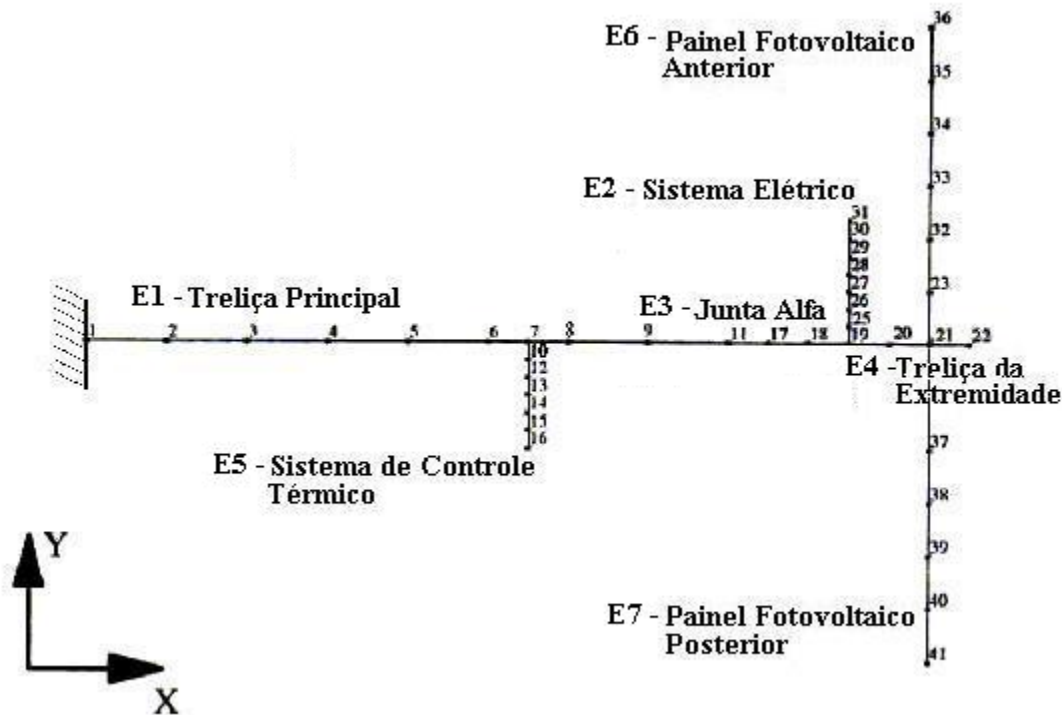


Figura 5.3-2 - Modelo da EEI-7S

Assumiu-se áreas e momentos de inércia unitários para todos os elementos. As dimensões utilizadas foram obtidas guardando as proporções reais dos componentes da EEI, porém em escala reduzida, ou seja, os comprimentos principais dos componentes estão na mesma proporção das dimensões reais da EEI original. Em vista da dificuldade para obter dados mais precisos referentes aos materiais, às dimensões e outros parâmetros da EEI, os módulos de elasticidade e as densidades dos elementos pertencentes aos componentes foram assumidos considerando o fato de que alguns componentes são mais flexíveis (Painéis Fotovoltaicos, por exemplo) do que outros em função de sua forma construtiva e materiais constitutivos.

Deve-se salientar que os valores obtidos nestas considerações são meramente ilustrativos. A intenção aqui não é exatamente buscar com fidelidade as características dinâmicas destes componentes da estação espacial internacional propriamente, mas antes, simular o

comportamento de uma estrutura mais complexa subdividida em componentes de características adversas que juntos compõem um sistema estrutural complexo e de difícil acesso tanto no que tange a construção de um modelo em elementos finitos que reproduza adequadamente as características deste sistema, bem como na detecção de danos localizados nos diferentes componentes desta estrutura. A Tabela 5.3.1 reúne as principais informações pertinentes ao modelo. Este mesmo modelo foi utilizado por Zimmerman e Simmermacher [49].

Tabela 5.3.1 - Dados referentes ao modelo subestruturado.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
Componente	Treliça Principal	Sistema de Controle Térmico	Junta Alfa	Treliça da Extremidade	Sistema Elétrico	Painel Fotovoltaico Anterior	Painel Fotovoltaico Posterior
Largura do componente (cm)	160	30	20	40	35	90	90
Largura dos elementos (cm)	20	5	10	10	5	15	15
Nós / GDL internos	1-9 / 1-24	12-16 / 31-45	17 / 46-48	19-22 / 52-63	26-31 / 73-90	32-36 / 91-105	37-41/106-120
Nós / GDL interfaces	10-11 / 25-30	10 / 25-27	11 e 18 / 28-30 e 49-51	18 e 23-25 / 49-51 e 64-72	25 / 70-72	23 / 64-66	24 / 67-69
Módulo de Elasticidade (kgf/cm²)	11,20E+07	1,00E+05	20,00E+07	15,50E+08	2,60E+05	2,50E+06	2,50E+06
Densidade (kg/m³)	50,00E-03	13,00E-06	9,00E-01	5,00E-03	13,00E-06	13,00E-06	13,00E-06

Para manter a proporção na distância entre as subestruturas, os elementos formados pelos nós 6-7 e 7-8, pertencentes à subestrutura E1 possuem a largura de 10 unidades, conforme pode-se observar pela Figura 5.3-2, sendo que os demais elementos desta subestrutura possuem 20 unidades como indica a Tabela 5.3.1.

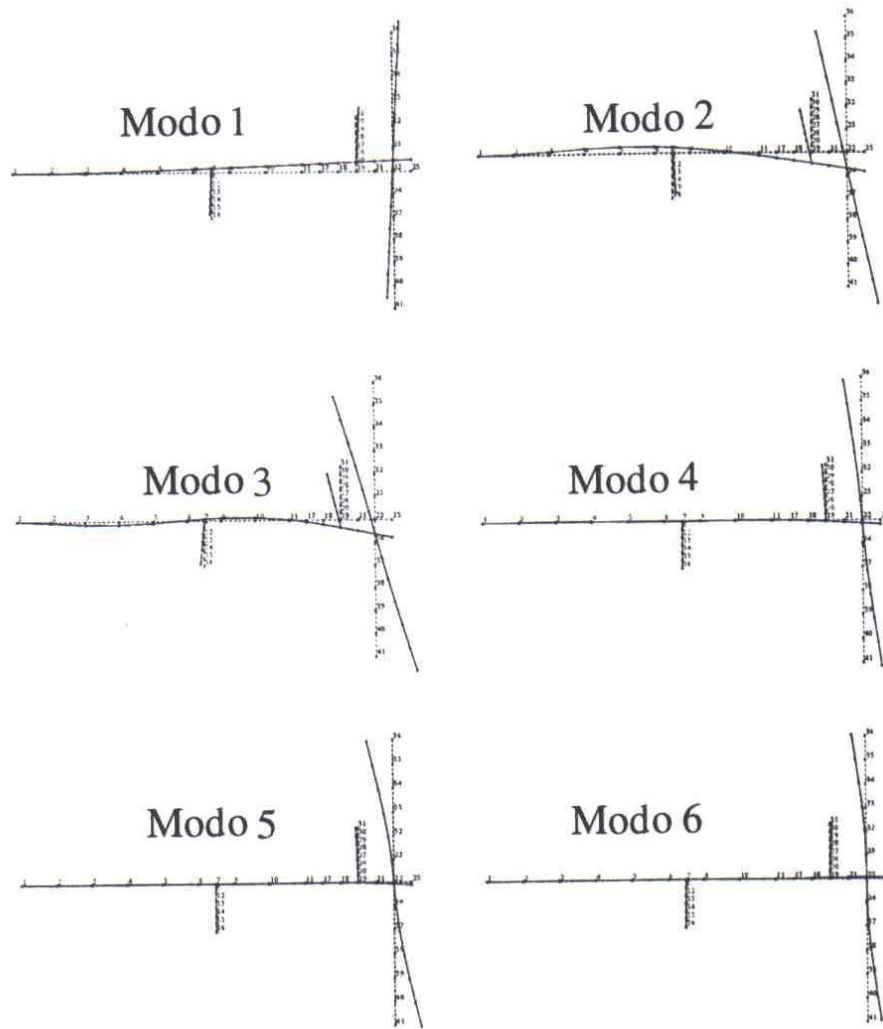


Figura 5.3-3 - Seis primeiros Modos da EEI-7S

Os seis primeiros modos normais de vibrar da EEI-7S podem ser observados na Figura 5.3-3 [49], onde, pode-se notar modos de comportamento global e local.

Inicialmente, será mostrado uma sequência de resultados obtidos na identificação do modelo de estado da estrutura estudada pelo método ERA. Novamente para este exemplo, os dados medidos simulados de todos os estados com dano utilizados foram obtidos seguindo-se o mesmo procedimento descrito na seção anterior. As FRFs foram obtidas utilizando-se as matrizes de massa e rigidez da estrutura completa sem danos. Para simular dados medidos, aplicou-se diretamente sobre as FRFs obtidas um ruído de 5% para o fator de escala α e 0.1% para o fator de bias β . As FRFs foram geradas excitando-se o GDL 19, e medindo-se em todos os 120 GDLs,

discretizados em 2000 pontos, e numa faixa de Frequência de 0 até 25 Hz, o que nos proporciona uma discretização em Frequência de $\Delta f = 0.025$ rad/seg (0.157 Hz). As 10 primeiras frequências naturais desta estrutura são mostradas na Tabela 5.3.2.

Tabela 5.3.2 - primeiras frequências da EEI-7S sem danos

k	$\omega(k)$
1	0.249
2	1.240
3	3.263
4	3.495
5	8.720
6	14.029
7	16.445
8	19.845
9	20.185
10	24.690

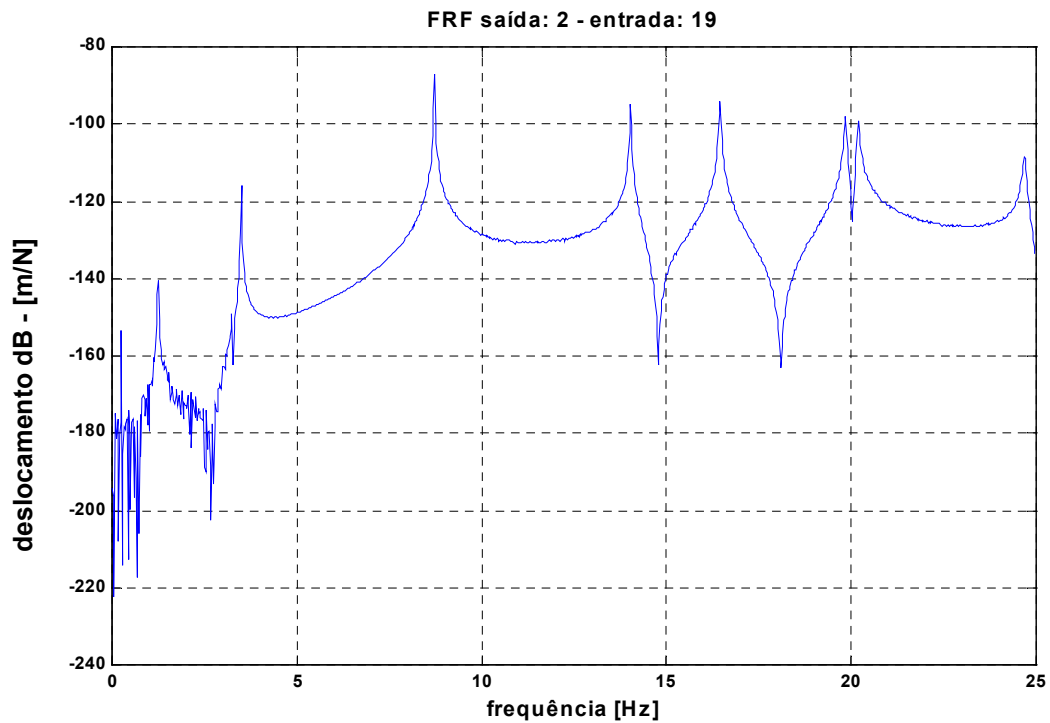


Figura 5.3-4 - FRF "medida" da EEI-7S

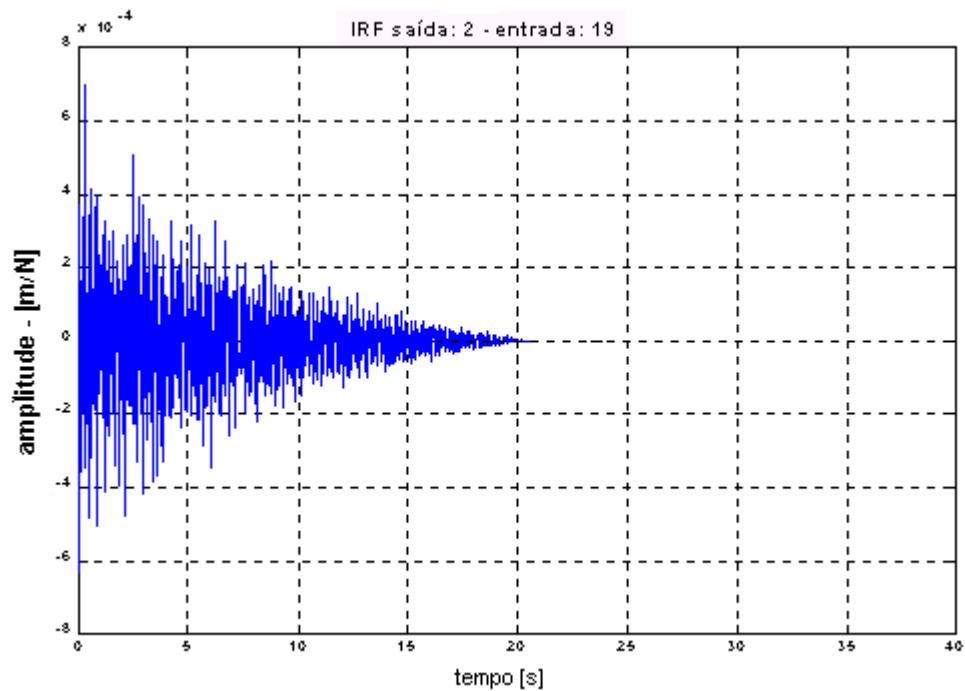


Figura 5.3-5 - IRF "medida" da EEI-7S

A Figura 5.3-4 mostra uma das 120 FRFs "medidas" da estrutura, e a Figura 5.3-5 mostra a respectiva IRF obtida pela aplicação da transformada de Fourier inversa da FRF.

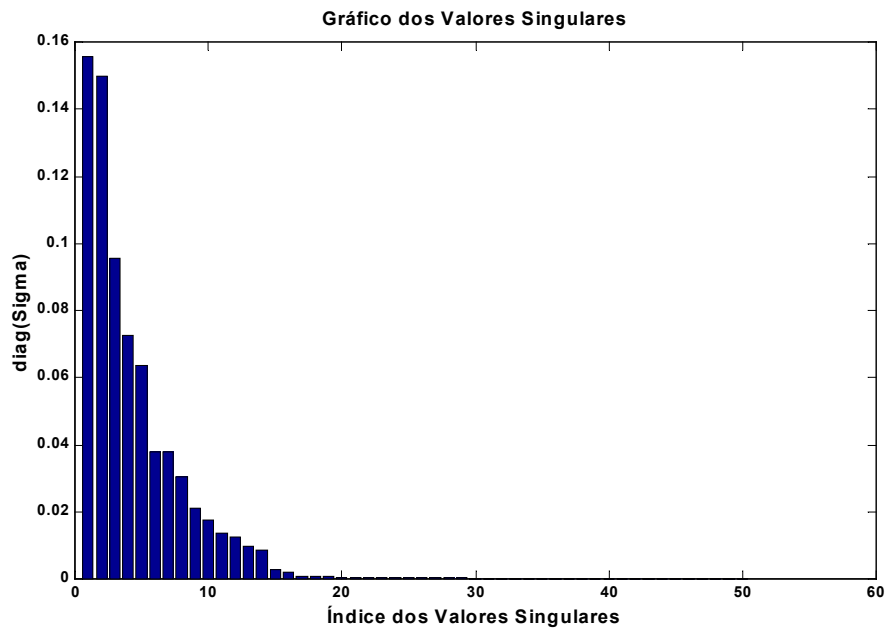


Figura 5.3-6 - Diagonal da matriz de valores singulares - EEI-7S

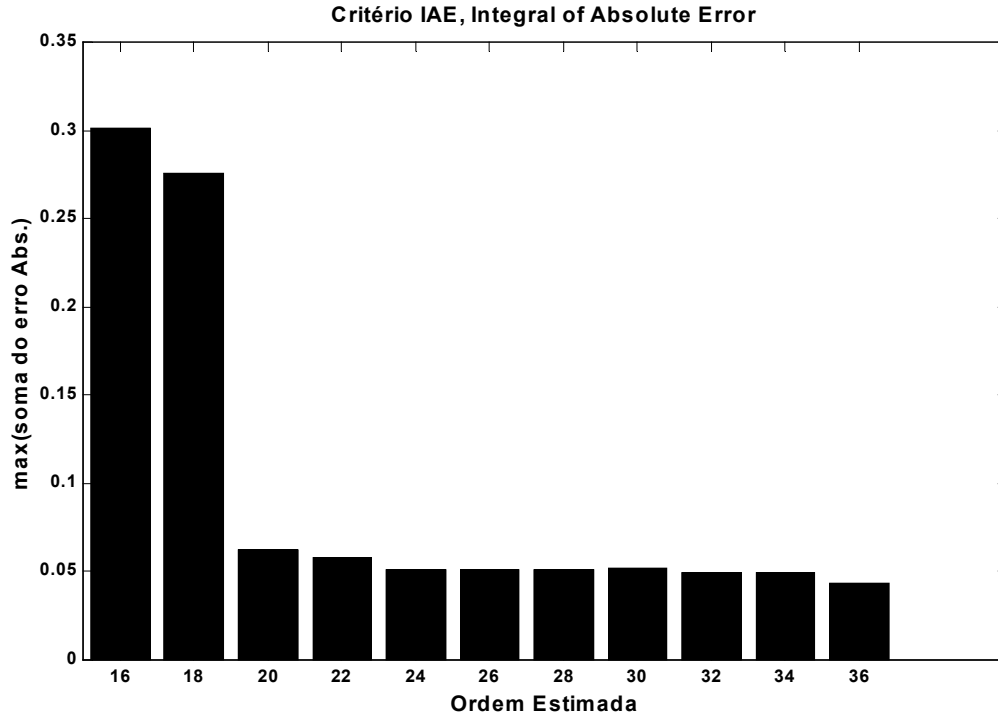


Figura 5.3-7 - Critério IAE -Integral of Absolute Error - EEI-7S

A Figura 5.3-6 mostra os valores da diagonal da matriz de valores singulares Σ obtida pela decomposição em valores singulares da matriz de Hankel $\mathbf{H}(0)$, o que nos fornece uma primeira estimativa da ordem mínima do sistema de aproximadamente 20.

A Figura 5.3-7 mostra os valores obtidos pela aplicação do critério IAE, iniciando-se com uma ordem, $o_{min} = 16$, até o maior valor definido, $o_{max} = 36$. Nota-se por esta figura que a partir da ordem de 20, a diferença entre os valores obtidos torna-se praticamente desprezível, portanto, define-se 20 como sendo o valor da ordem mínima para o sistema estudado.

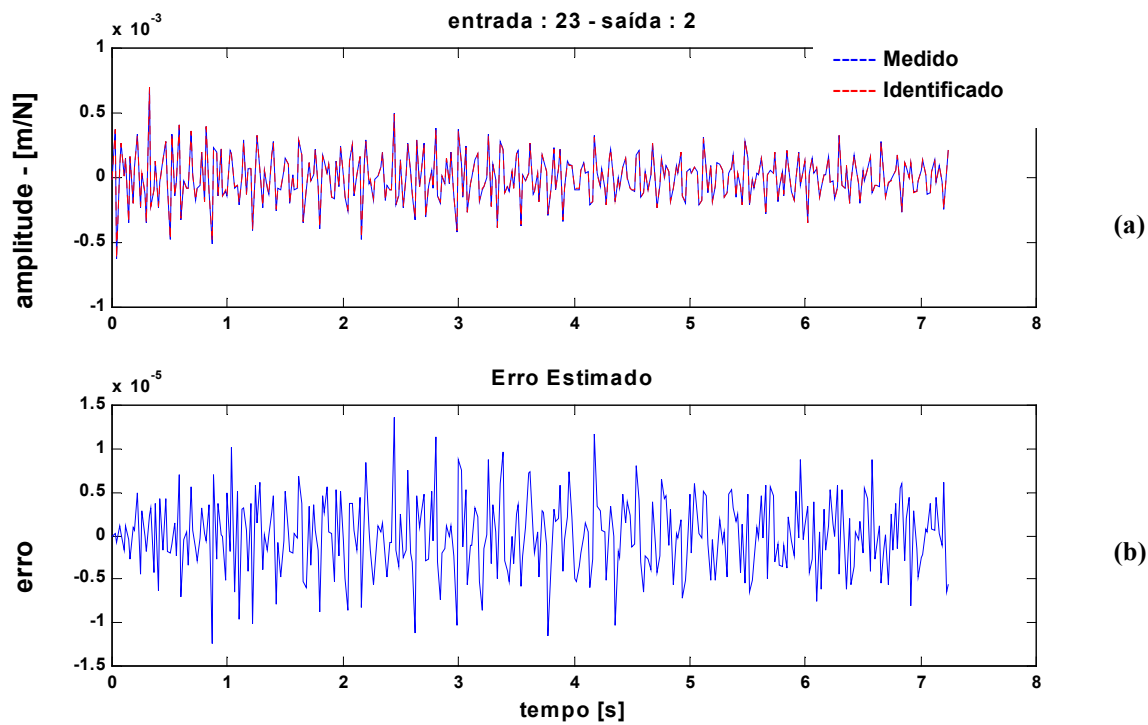


Figura 5.3-8 - Função de resposta ao impulso "medida" e identificada (a), erro estimado (b) - EEI-7S

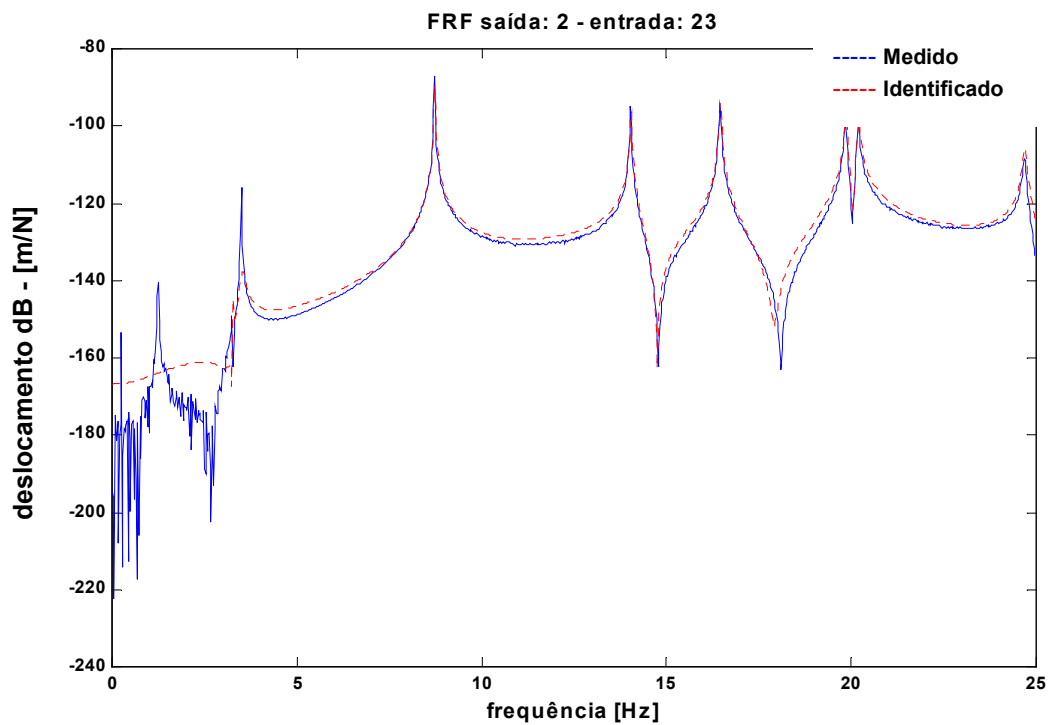


Figura 5.3-9 - Função de resposta em Frequência medida e identificada - EEI-7S

A Figura 5.3-8 mostra uma das funções de resposta ao impulso medidas e a correspondente identificada, de 0 até 7 segundos. Pelo gráfico inferior desta figura pode ser observado o erro absoluto obtido pela diferença entre "medida" e identificada para cada ponto. Pela Figura 5.3-9 pode-se observar uma das **FRF** medida e a correspondente **FRF_e** identificada.

5.3.1 Localização e Extensão do dano em uma Subestrutura

Também neste exemplo, a aplicação dos métodos de detecção de falhas se inicia mostrando-se os efeitos do truncamento nos modos ou vetores de Ritz dos componentes. Para se mostrar tais efeitos, 6 grupos de truncamento foram definidos, mostrados na Tabela 5.3.1.1. A Figura 5.3-1e a Figura 5.3-2 mostram respectivamente os resultados obtidos pela aplicação dos conjuntos de truncamento utilizando-se os métodos de Craig e Bampton e de Blocos de Krylov.

Tabela 5.3.1.1 - Conjuntos de Truncamentos nos modos e vetores de Ritz dos componentes - EEI-7S

Conjunto	Subestruturas						
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
I	3	3	3	3	3	3	3
II	8	4	3	4	6	5	6
III	12	6	3	6	9	7	4
IV	16	9	3	8	12	8	9
V	20	12	3	10	15	11	10
VI	24	15	3	12	18	15	15

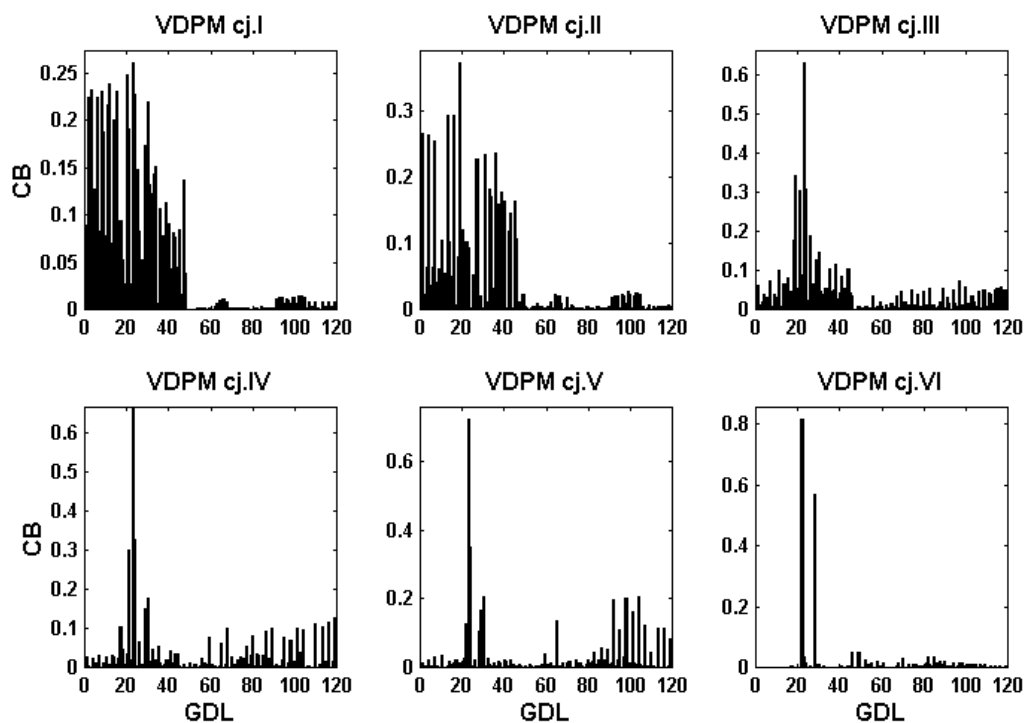


Figura 5.3-1 – 1ª VPDM usando método de CB - EEI-7S

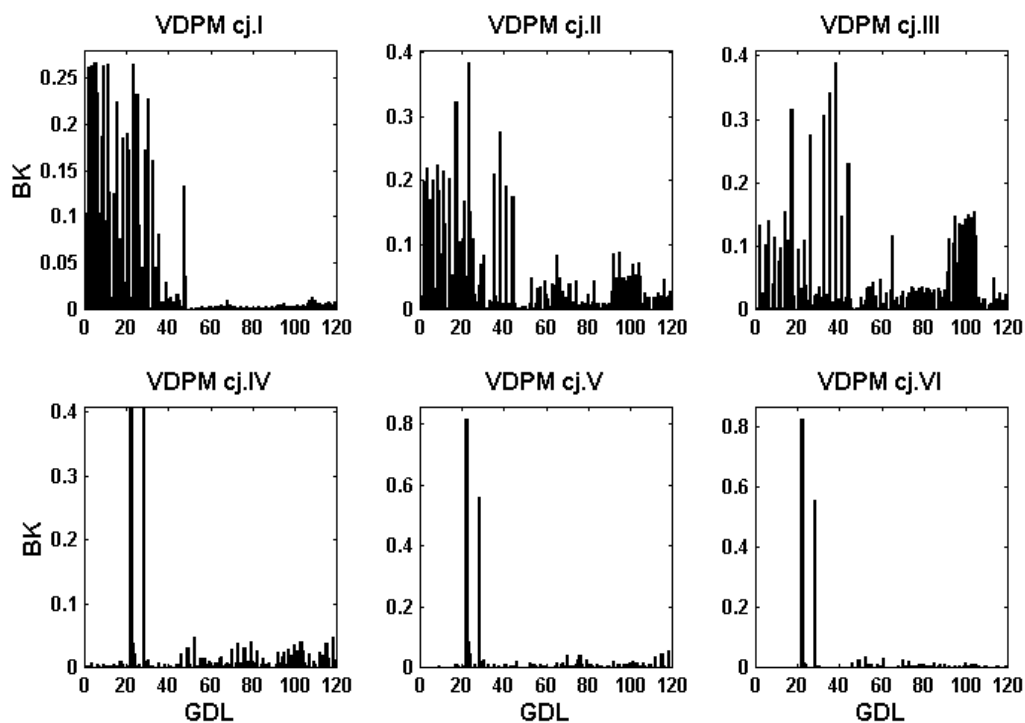


Figura 5.3-2 – 1ª VPDM usando método de BK - EEI-7S

Assume-se que os seis primeiros modos naturais de vibrar foram medidos, usando portanto somente a solução modal, na identificação do dano localizado na subestrutura E1, GDL 22-24 e 28-30, sendo que os GDL 28-30 fazem fronteira com a subestrutura E2. O dano é caracterizado pela redução no módulo de elasticidade original da estrutura de 11,20E+07 para 11,20E+04, o que representa uma redução de aproximadamente 50% na rigidez global da estrutura nesta região, sendo que na fronteira entre as subestruturas a redução é de aproximadamente 20%. Os autovalores com dano foram corrompidos com um ruído de 5% para o fator de escala α e 0.1% para o fator de bias β .

Pode-se observar na Figura 5.3-1 e na Figura 5.3-2 que os resultados obtidos utilizando-se os dois primeiros conjuntos são semelhantes para ambos os métodos, de CB e de BK. Já o uso do conjunto III no método de CB sofre uma influência um pouco menor do ruído imposto, no entanto, o uso dos demais conjuntos, IV, V e VI, pelo método de BK apresenta resultados ligeiramente melhores, apesar de ambos os métodos terem identificado o dano com boa precisão.

Na sequência, serão apresentados os resultados obtidos na detecção de danos localizados em diferentes componentes, todos caracterizados por reduções nos módulos de elasticidade originais dos componentes, utilizando-se ambas as soluções, modal e de Ritz. Ao todo cinco tipos de dano foram simulados. Utilizou-se em todos os casos o conjunto de truncamento VI, contendo a base completa de modos ou vetores de Ritz dos componentes. A Tabela 5.3.1.2 resume as informações pertinentes aos danos simulados nos componentes.

Tabela 5.3.1.2 - Localização e característica dos danos simulados - EEI-7S

Componente	E1	E2	E6	E2/E6
Grau de Liberdade	22-24 e 28-30	37-42	100-105	37-42 e 100-105
E_s [módulo de elasticidade sem dano - kgf/cm ²]	11,20E+07	1,00E+05	2,50E+06	1,00E+05/ 2,50E+06
E_d [módulo de elasticidade com dano - kgf/cm ²]	11,20E+04	1,00E+04	2,50E+04	1,00E+03/ 2,50E+04

A obtenção dos vetores de Ritz "experimentais" através do RRA, em todos os estados de dano foi feita considerando-se quatro posições de excitação, ou seja, excitando-se nos graus de liberdade 19, 44, 88 e 103, sempre na direção positiva, conforme pode-se observar pela Figura 5.3.3.

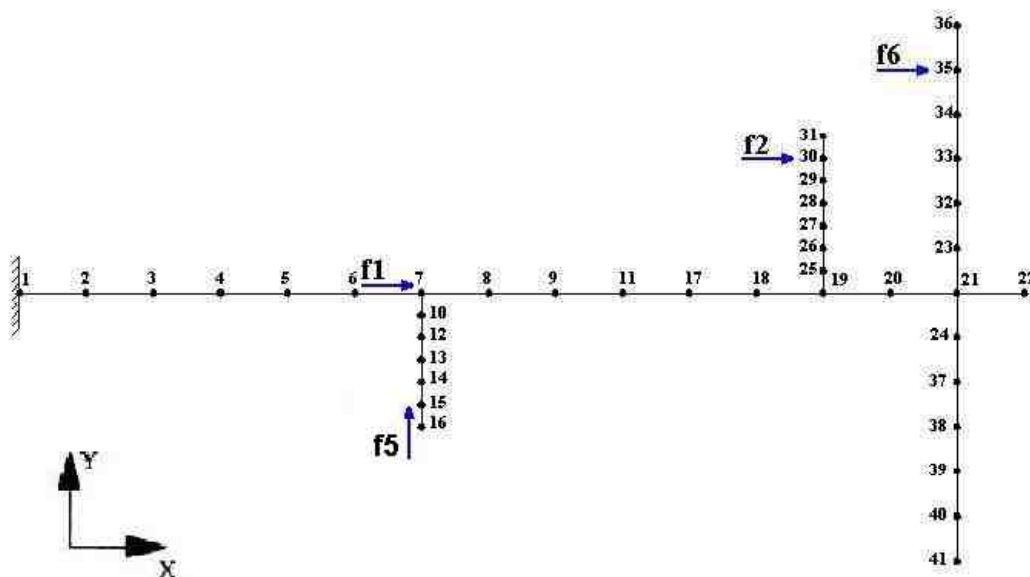


Figura 5.3.3 - Posições de excitação utilizadas na obtenção dos vetores de Ritz "experimentais".

Obteve-se dessa forma quatro vetores de Ritz estáticos, usados na detecção dos danos simulados. Cada um desses vetores contém informações da estrutura completa, no entanto, de acordo com a posição de excitação, podem ser mais ou menos representativos na detecção do dano numa determinada subestrutura.

Logicamente, a subestrutura que contém o dano não é conhecida antes que se tenha uma indicação do estado de dano da estrutura. Portanto, a metodologia aplicada consiste em, primeiramente observar os resultados obtidos utilizando simultaneamente os quatro vetores de Ritz estáticos. Através dos quatro vetores de Ritz estáticos, seis vetores de Ritz dinâmicos são obtidos pelo uso do algoritmo de Lanczos por blocos (ver item 3.4.3).

Em posse dos vetores de Ritz estáticos e dinâmicos, os vetores de ângulo residual de Ritz são obtidos e comparados com a solução modal obtida através dos vetores de ângulo residual modal. Através desta primeira indicação, os vetores de Ritz estáticos menos representativos quanto à localização do dano podem ser eliminados e o algoritmo é novamente rodado utilizando-se somente o vetor que melhor represente o estado de dano, ou seja, aquele cuja excitação para obtenção tenha sido aplicada mais próximo, ou diretamente sobre a subestrutura indicada. Utilizando-se este vetor selecionado, seis vetores de Ritz dinâmicos são obtidos através do algoritmo de Lanczos convencional. Em todos os estados de dano, um ruído de 5% para o fator

de escala α e 0,1% para o fator de bias β foram aplicados diretamente sobre as FRFs e também sobre os modos normais de vibrar "medidos".

Inicialmente serão mostrados os resultados obtidos pela aplicação do dano localizado na subestrutura E1. Trata-se do mesmo dano imposto anteriormente ao se mostrar os efeitos do truncamento dos modos e vetores de Ritz dos componentes. A subestrutura E1 relaciona-se com as treliças espaciais centrais da EEI, e conforme pode-se observar pela Figura 5.3-3, trata-se de uma estrutura rígida excitada principalmente pelos três primeiros modos naturais de vibrar, ou seja, de comportamento mais global.

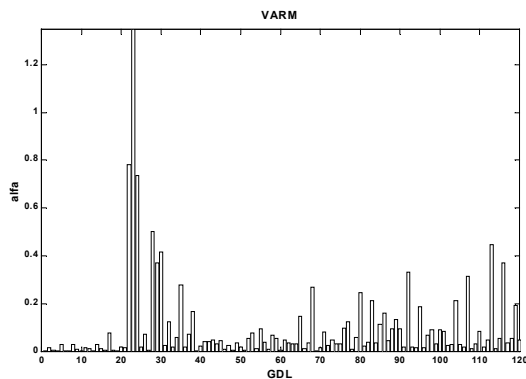


Figura 5.3-4 - VARM - seis modos - dano E1 - EEI-7S

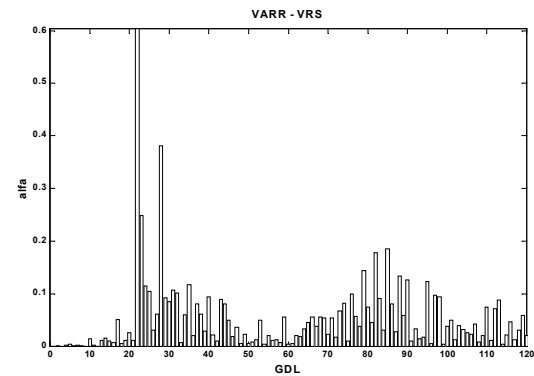


Figura 5.3-5 - VARR - quatro VRS - dano E1 - EEI-7S

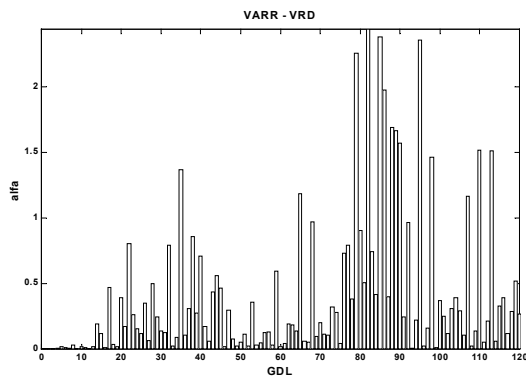


Figura 5.3-6 - VARR - seis VRD - dano E1 - EEI-7S

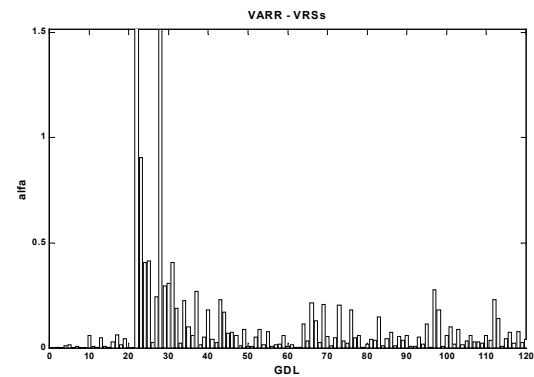


Figura 5.3-7 - VARR - VRS selecionado - dano E1 - EEI-7S

A Figura 5.3-4 mostra o VARM obtido através do uso de seis modos normais de vibrar. Pode-se observar que o dano foi bem identificado nos GDL 22-24, e apresenta uma boa indicação aos GDL 28-30. A Figura 5.3-5 mostra o VARR obtido através do uso dos quatro vetores de Ritz estáticos medidos. Pode-se observar que tal resultado fornece uma forte indicação nos GDL 22,23 e 28. Já pela Figura 5.3-6, onde se utilizam os seis vetores de Ritz dinâmicos, não foi possível se localizar o dano.

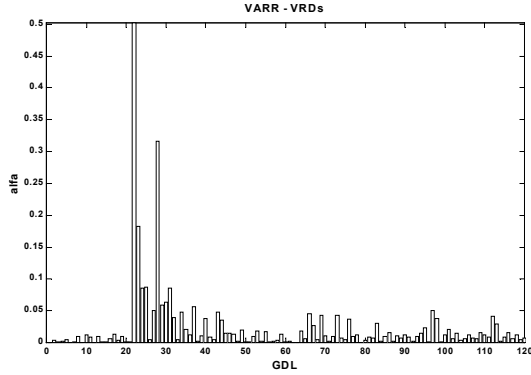


Figura 5.3-8 - VARR - VRD selecionado - dano E1 - EEI-7S

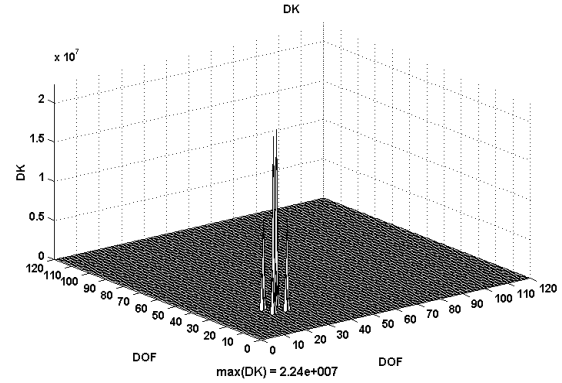


Figura 5.3-9 - $\Delta K_d = \text{abs}[K_f - K_d]$ - dano E1 - EEI-7S

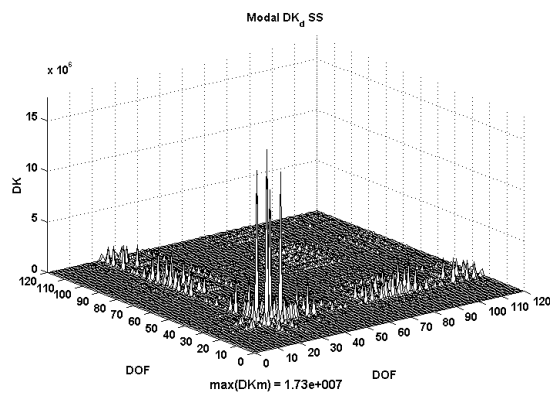


Figura 5.3-10 - ΔK_d - seis modos - dano E1 - EEI-7S

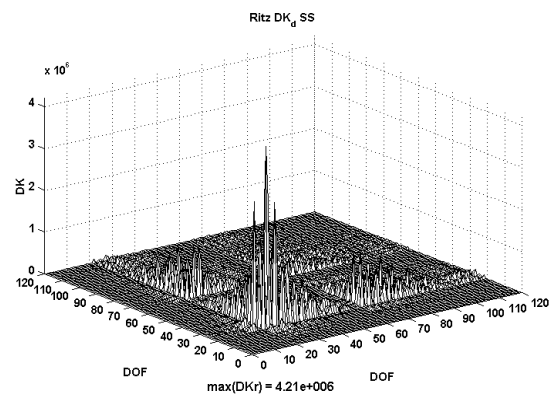


Figura 5.3-11 - ΔK_d - VRS selecionado - dano E1 - EEI-7S

Através destes primeiros resultados mostrados pela Figura 5.3-4 até a Figura 5.3-6, tem-se uma forte indicação de que o dano se localiza na subestrutura E1. Portanto, os próximos resultados foram obtidos utilizando somente o vetor de Ritz estático cuja excitação para obtenção se deu no GDL 19, pertencente à esta subestrutura. A Figura 5.3-7 e a Figura 5.3-8 mostram os VARR estático e dinâmico, obtidos pelo uso do vetor de Ritz estático excitado pelo GDL 19. Pode-se observar que em ambos os casos, o dano foi identificado com boa precisão nos GDL 22-24 e 28-30.

A Figura 5.3-9 mostra o resultado obtido pela subtração das matrizes de rigidez da estrutura sem danos e com o dano simulado. Utilizando ainda do vetor de Ritz estático selecionado e dos seis modos medidos, a seleção do subespaço foi aplicada para a obtenção das matrizes de perturbação de rigidez da estrutura. A

Figura 5.3-10 mostra a matriz de perturbação obtida pelo uso dos seis modos medidos. Pela

Figura 5.3-11 observar-se que a matriz de perturbação obtida utilizando o vetor de Ritz estático selecionado. Ambos os resultados apresentam uma boa indicação quanto à localização do dano, sendo que o resultado apresentado pela solução modal parece sofrer uma menor influência do ruído imposto. Na parte inferior da Figura 5.3-9 até a

Figura 5.3-11 esta indicada a extensão máxima do dano apresentado pelas matrizes de perturbação obtidas. As matrizes de perturbação obtidas pelas soluções modal e de Ritz não foram capazes de indicar a extensão do dano, cujo valor máximo é de $2.24E+07$, conforme se nota pela Figura 5.3-9.

Estes primeiros resultados mostram que ambas soluções, modal e de Ritz apresentam boas indicações quanto à detecção de danos localizados em regiões menos flexíveis da EEI-7S. Na seqüência, serão mostrados os resultados obtidos pela aplicação do dano localizado na subestrutura E2. O dano imposto caracteriza-se pela redução do módulo de elasticidade do elemento de $1E+05$ para $1E+04$. Tal dano representa uma redução de aproximadamente 45% na rigidez global da estrutura nesta região.

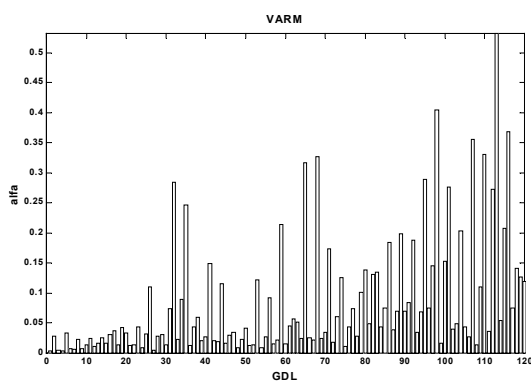


Figura 5.3-12 - VARM - seis modos - dano E2 - EEI-7S

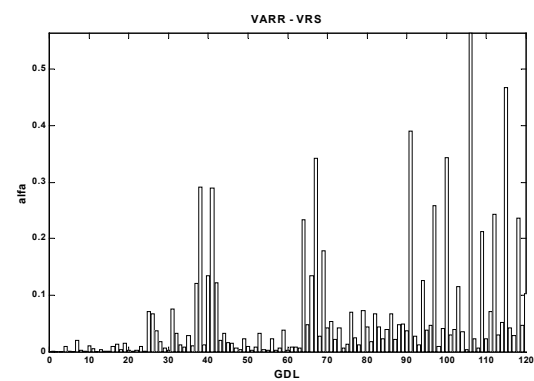


Figura 5.3-13 - VARR - quatro VRS - dano E2 - EEI-7S

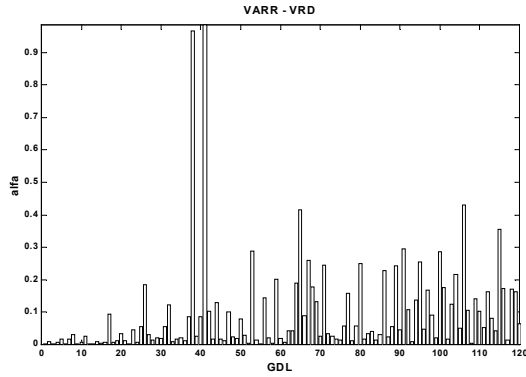


Figura 5.3-14 - VARR - seis VRD - dano E2 - EEI-7S

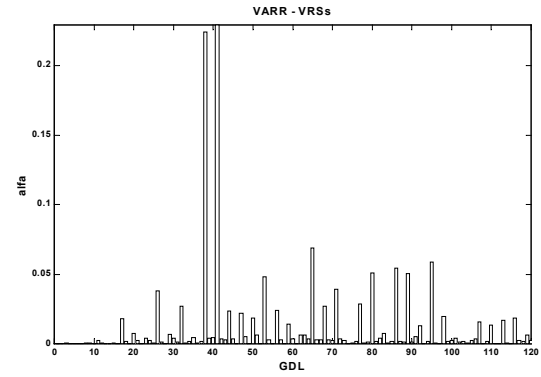


Figura 5.3-15 - VARR - VRSs - dano E2 - EEI-7S

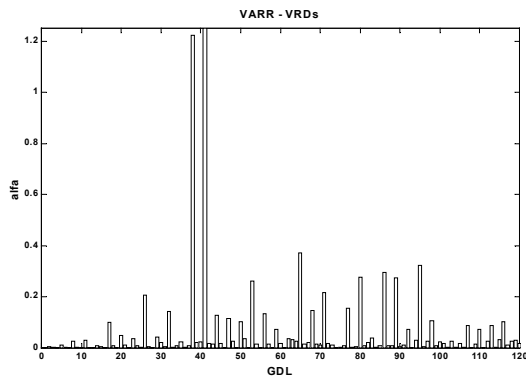


Figura 5.3-16 - VARR - VRD selec. - dano E2 - EEI-7S

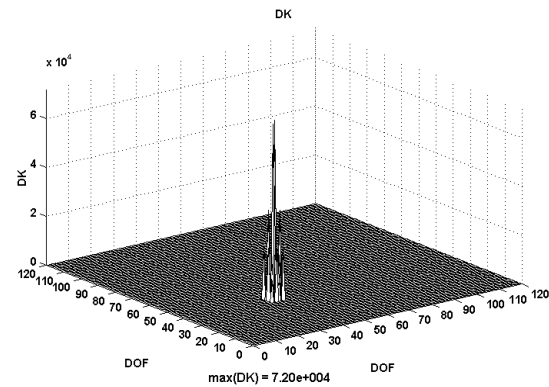


Figura 5.3-17 - $\Delta Kd = \text{abs}[Kf - Kd]$ - dano E2 - EEI-7S

Observa-se pela Figura 5.3-12 e pela Figura 5.3-13 que os resultados apresentados pelo VARM e pelo VARR-VRS não identificaram o dano imposto. Já pela Figura 5.3-14, o dano foi identificado com boa precisão nos GDL 38 e 41. Portanto, para se avaliar a possibilidade do dano estar localizado na subestrutura E2, na Figura 5.3-15 e na Figura 5.3-16 foram utilizados os VARR estático e dinâmico gerados utilizando-se somente um vetor de Ritz estático selecionado, obtido excitando-se no GDL 44, pertencente à subestrutura E2. Ao selecionar tal vetor, o dano foi novamente identificado dentre os GDL 38 e 41, na subestrutura E2, confirmando a indicação fornecida pelos vetores de Ritz dinâmicos.

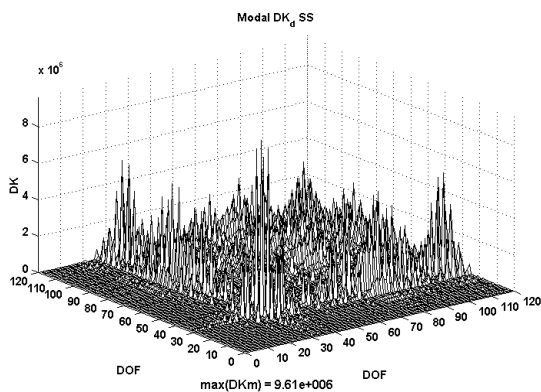


Figura 5.3-18 - ΔK_d - seis modos - dano E2 - EEI-7S

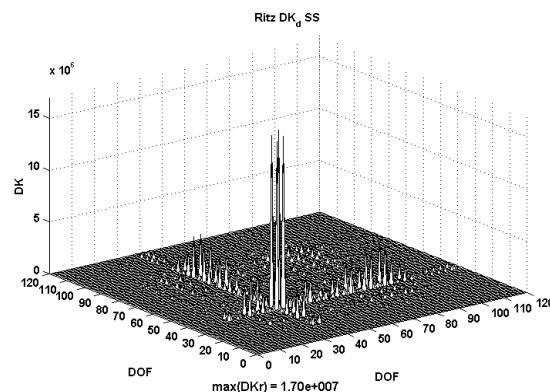


Figura 5.3-19 - ΔK_d - VRS selec. - dano E2 - EEI-7S

Pela Figura 5.3-18 nota-se que apesar dos maiores picos estarem localizados próximo do GDL 40, muitos picos espalhados em várias regiões inviabilizam a localização precisa do dano pela matriz de perturbação ao se utilizar dos modos normais de vibrar. Já pela Figura 5.3-17, o uso dos vetores de Ritz estáticos localiza o dano com boa precisão, no entanto, a identificação da extensão do dano pelas matrizes de perturbação também não foi possível neste caso, em nenhum dos resultados.

As subestrutura E6 e E7 relacionam-se à placas fotovoltaicas para geração de energia elétrica através da radiação solar. Na EEI original, tais placas são de grandes dimensões e estão constantemente sujeitas a avarias provocadas por pequenos meteoritos e outros fragmentos que eventualmente possam se chocar em sua superfície. Tais placas são altamente flexíveis quando comparadas aos demais componentes da EEI. A flexibilidade dos componentes relacionados à estas placas no modelo estudado pode ser averiguada observando-se uma vez mais a Figura 5.3-3. Todos os seis primeiros modos naturais de vibrar excitam estes componentes de alguma forma, sendo que os modos 5 e 6 são localizados e relacionados diretamente à tais componentes. Nos resultados que seguem, o dano se localiza na subestrutura E6 (ver Tabela 5.3.1.2 - Localização e característica dos danos simulados - EEI-7S). Neste caso, o dano se localiza no último elemento do componente. A inclusão deste dano afeta os GDL 100-105, nós 35 e 36, sendo que os GDL 103-105 localizam-se no último nó, 36, na extremidade do componente. Portanto, a rigidez global da estrutura nos GDL 103-105 reduz quase 100%, enquanto que nos GDL 100-102, nó 35, a redução é de aproximadamente 50%, visto que estes GDL também pertencem ao elemento anterior, sem danos, formado pelos nós 34 e 35. Fazendo uma analogia com uma situação real,

pode-se especular que tal dano seria identificado por exemplo com um buraco na extremidade da placa fotovoltaica causado por um forte choque com algum objeto na órbita da terra.

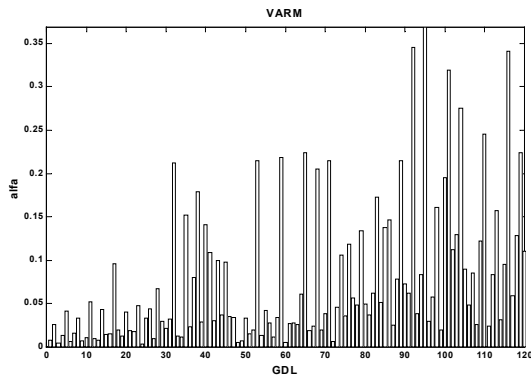


Figura 5.3-20 - VARM - seis modos - dano E6 - EEI-7S

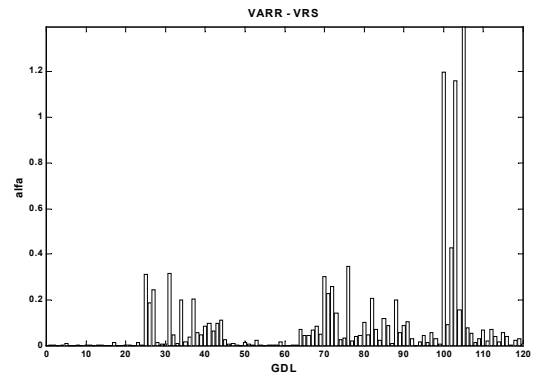


Figura 5.3-21 - VARR - quatro VRS - dano E6 - EEI-7S

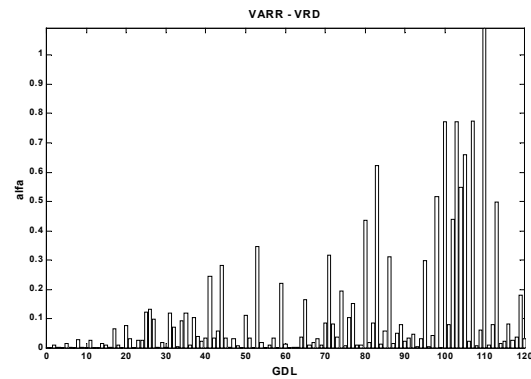


Figura 5.3-22 - VARR - seis VRD - dano E6 - EEI-7S

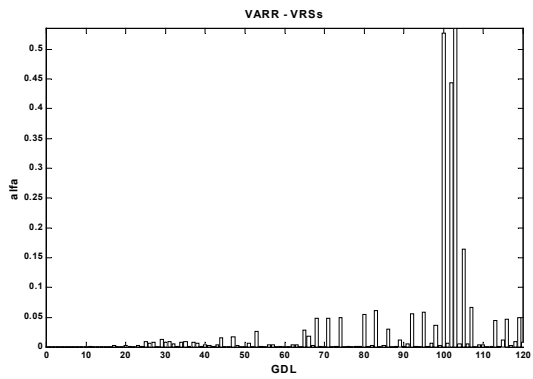


Figura 5.3-23 - VARR - VRS selecionado - dano E6 - EEI-7S

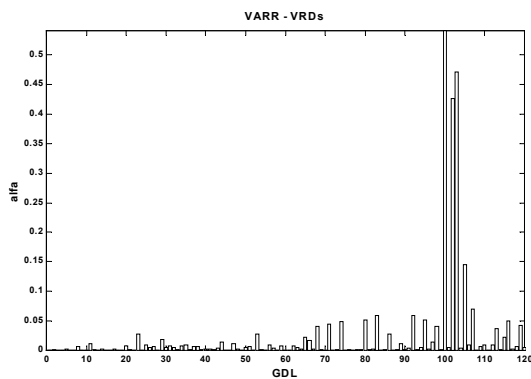


Figura 5.3-24 - VARR - VRD selecionado - dano E6 - EEI-7S

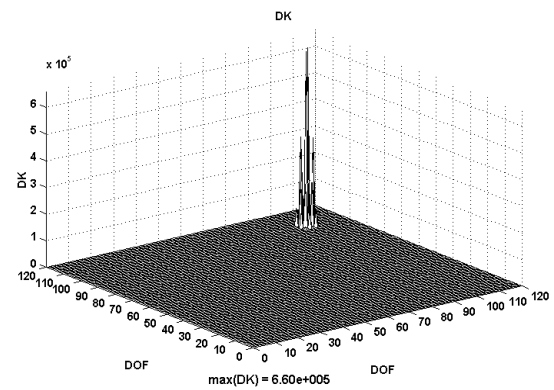


Figura 5.3-25 - $\Delta Kd = \text{abs}[Kf - Kd]$ - dano E6 - EEI-7S

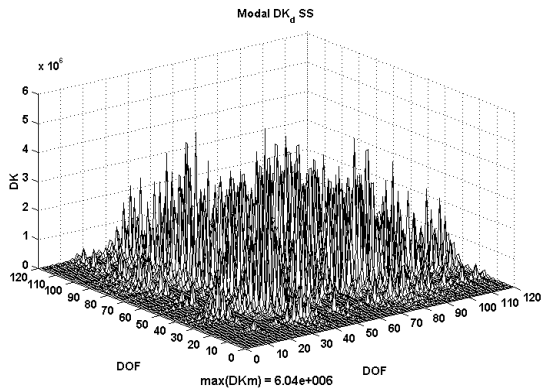


Figura 5.3-26 - ΔK_d - seis modos - dano E6 - EEI-7S

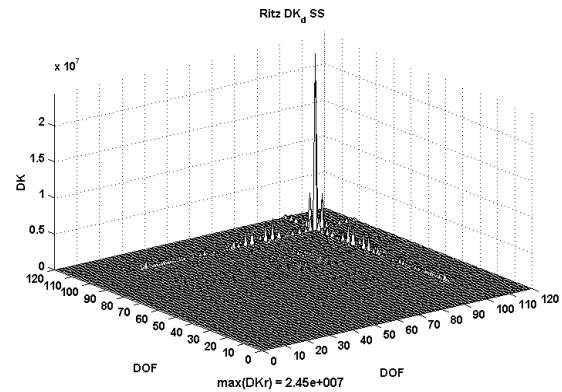


Figura 5.3-27 - ΔK_d - VRS selecionado - dano E6 - EEI-7S

Pela Figura 5.3-20 observa-se que o VARM obtido pelo uso dos modos normais de vibrar não foi capaz de identificar o dano simulado, no entanto, como se observa pela Figura 5.3-21 o VARR-VRS identifica o dano com boa precisão nos GDL 100-105, sendo que o VARR-VSD (Figura 5.3-22) fornece uma boa indicação da subestrutura que contém o dano. Portanto, utilizando-se somente o vetor de Ritz estático selecionado (obtido pela excitação no GDL 103), pode-se observar pela Figura 5.3-23 e pela Figura 5.3-24 que ambos os VARR identificam o dano com precisão, sofrendo pouca influência do ruído.

Os resultados mostrados pela Figura 5.3-26 até a Figura 5.3-25 confirmam esta tendência, ou seja, o ruído imposto mascarou totalmente a indicação do dano utilizando-se os modos normais de vibrar, sendo que, o vetor de Ritz estático selecionado identifica o dano com boa precisão, porém não foi capaz de quantificar a extensão do dano.

Através destes primeiros resultados pode-se observar que tanto os modos normais de vibrar, quanto os vetores de Ritz se mostraram aptos na detecção do dano localizado na subestrutura E1, que é um componente mais rígido e central da estrutura completa, posicionado de forma preferencial à deflexão dos primeiros modos normais de vibrar, conforme se observa pela Figura 5.3-3. No entanto, os vetores de Ritz se mostraram mais sensíveis na identificação de danos em componentes mais flexíveis, de comportamento localizado, aparentemente de difícil acesso para os modos normais de vibrar (dano localizado nas subestruturas E2 e E6). Ademais, não foi possível obter uma boa quantificação da extensão do dano em nenhum dos casos apresentados.

5.3.2 Localização e Extensão do dano em Várias Subestruturas

Na sequência, serão mostrados os resultados obtidos pela aplicação de dois danos simultâneos, nas subestruturas E2 e E6 (ver Tabela 5.3.1.2 - Localização e característica dos danos simulados - EEI-7S). Neste caso o mesmo dano aplicado somente na subestrutura E6 foi aplicado aqui. No entanto, na subestrutura E2, aplicou-se um dano um pouco mais severo, reduzindo-se o módulo de elasticidade de $1,00\text{E}+05$ para $1,00\text{E}+03$, o que reflete na redução da rigidez global da estrutura nesta região em aproximadamente 50%. O procedimento para obtenção das figuras é o mesmo que foi aplicado nos últimos resultados apresentados para o exemplo anterior, ou seja, média e desvio padrão dos 100 vetores de dano principais obtidos, variando-se somente o ruído aleatório imposto na obtenção de cada resultado. Para cada caso, quatro gráficos foram gerados, contendo o primeiro, segundo, terceiro vetores de dano principal, e a média dos três no último gráfico de cada caso. Diferentes formas de ruído foram impostas, como mostram as figuras a seguir.

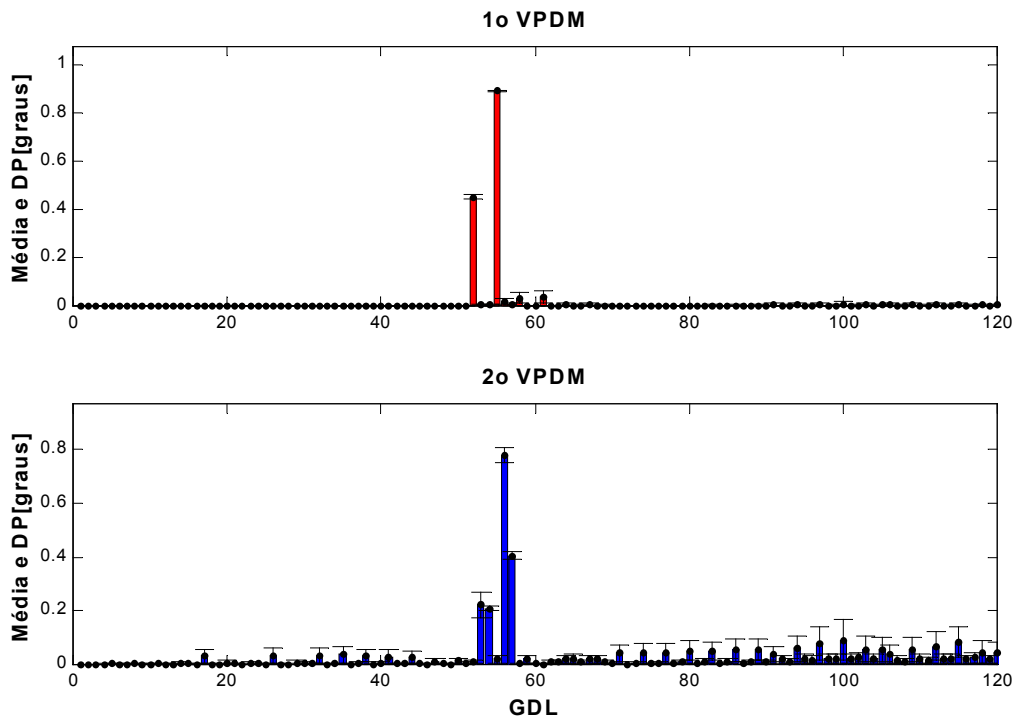


Figura 5.3-1 - 1^o e 2^o VPDM - ruído: [5 0.1] - EEI-7S

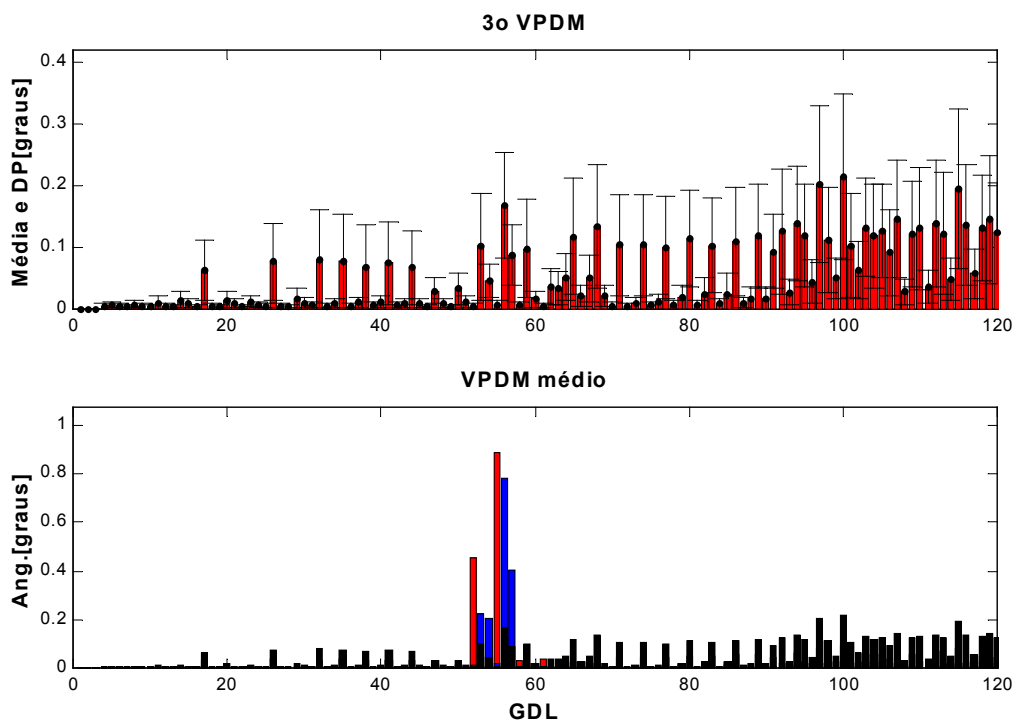


Figura 5.3-2 - 3^o VPDM e VPDM médio - ruído: [5 0.1] - EEI-7S

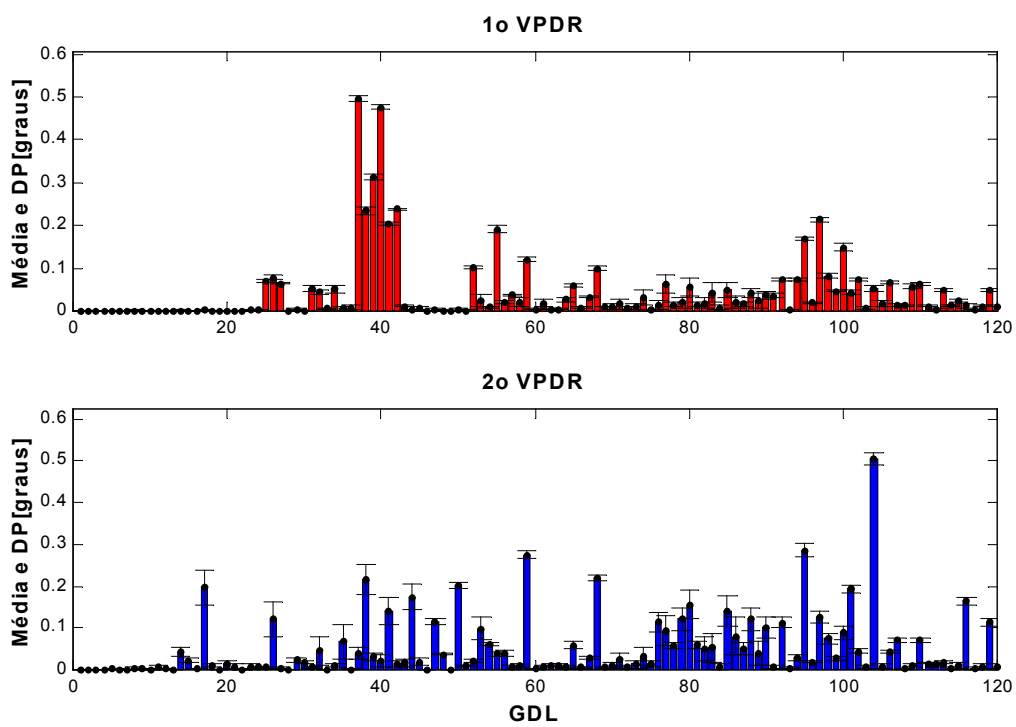


Figura 5.3-3 - 1^o e 2^o VPDR - ruído: [5 0.1] - EEI-7S

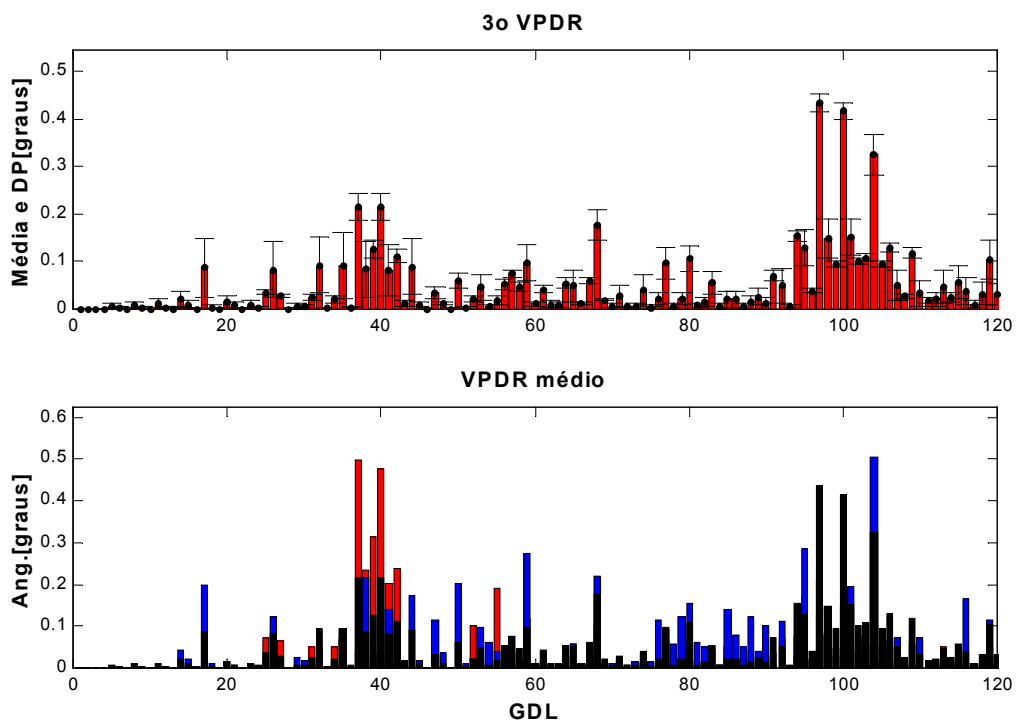


Figura 5.3-4 - 3^o VPDM e VPDR médio - ruído: [5 0.1] - EEI-7S

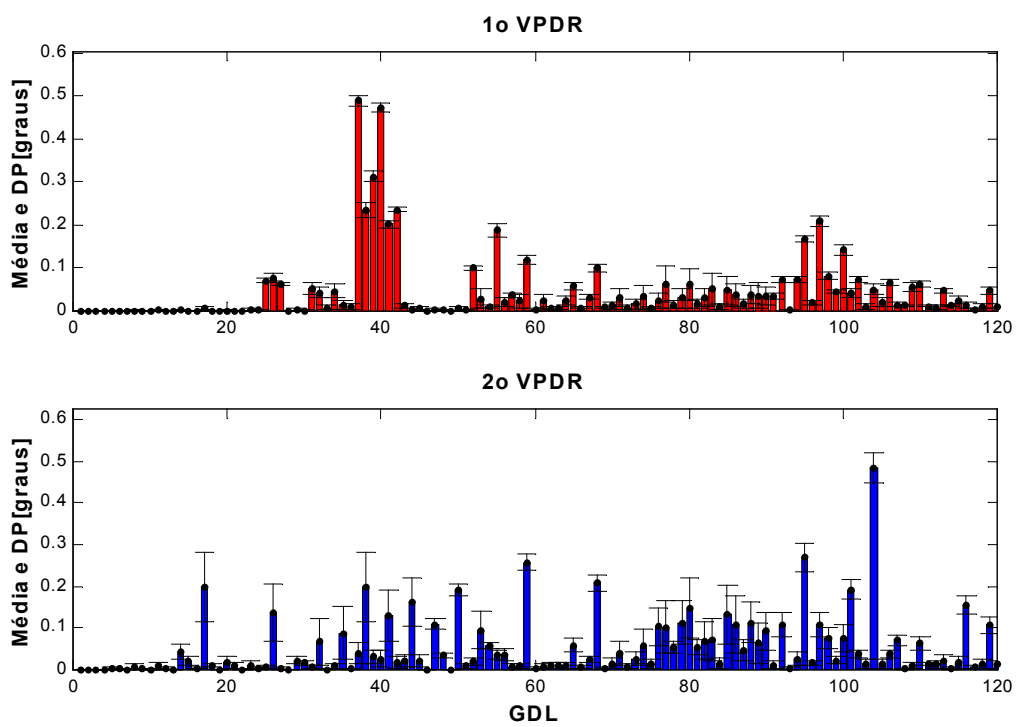


Figura 5.3-5 - 1^o e 2^o VPDR - ruído: [10 0.2] - EEI-7S

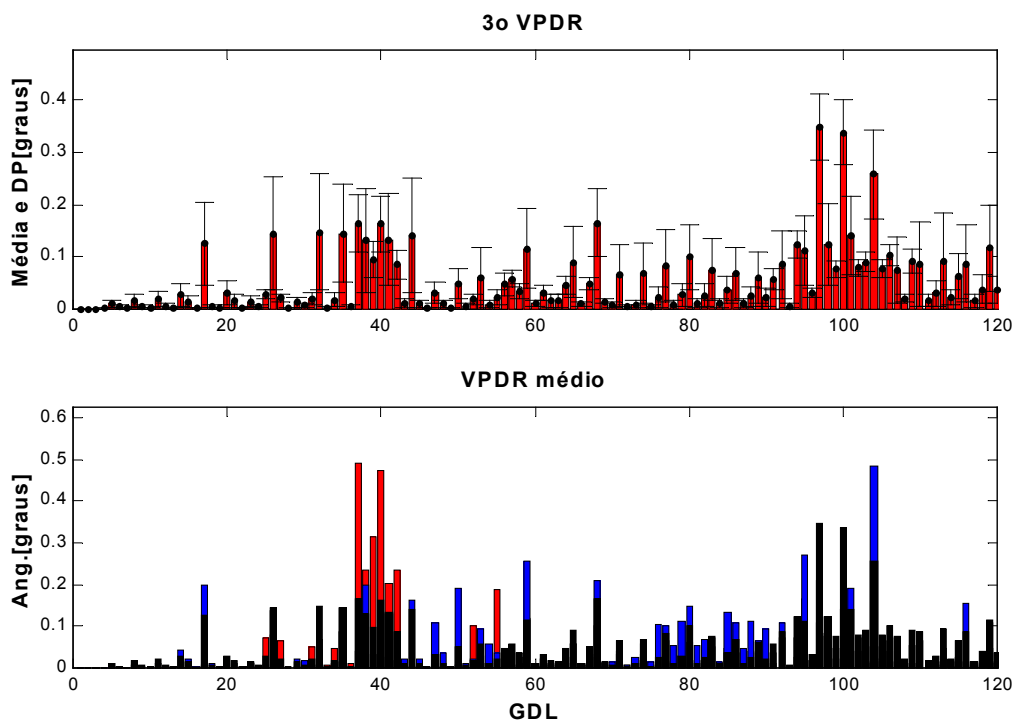


Figura 5.3-6 - 3^o VPDM e VDPR médio - ruído: [10 0.2] - EEI-7S

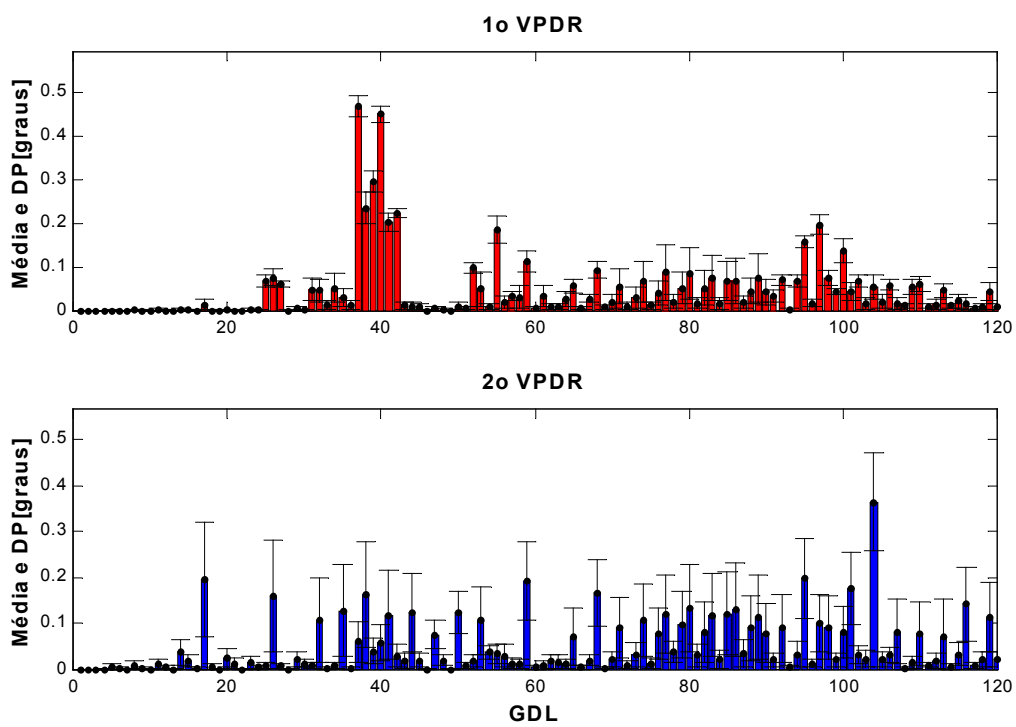


Figura 5.3-7 - 1^o e 2^o VPDR - ruído: [20 0.3] - EEI-7S

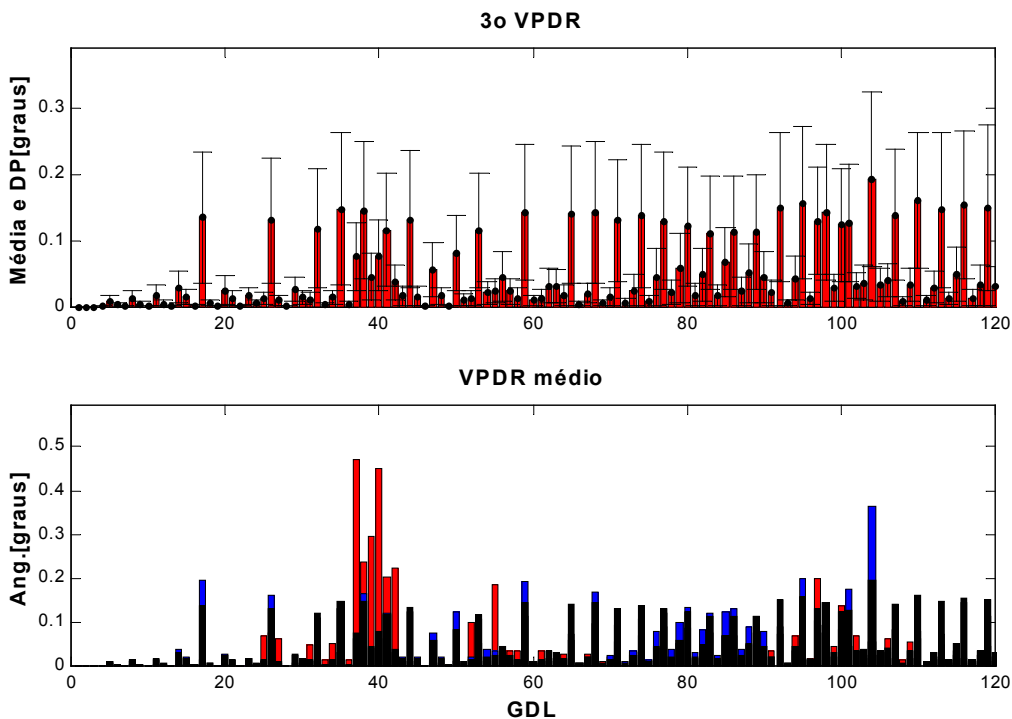


Figura 5.3-8 - 3^o VPDM e VDPR médio - ruído: [20 0.3] - EEI-7S

Pode-se observar pela Figura 5.3-1 e pela Figura 5.3-2 que, mesmo com os menores níveis de ruído, os resultados obtidos pelo uso dos modos normais de vibrar apresentam uma indicação totalmente errônea quanto à localização do dano nas subestruturas E2 e E6. De acordo com estas figuras, o dano estaria localizado entre os GDL 52 até 57, pertencentes à subestrutura E4, no entanto, a localização correta se dá dentre os GDL 37-42 e 100-105. Portanto, nas figuras seguintes, somente os vetores de dano principal obtidos pelo uso de seis vetores Ritz dinâmicos serão usados. Os vetores de Ritz dinâmicos foram gerados utilizando-se os quatro vetores de Ritz estáticos disponíveis, através do algoritmo de Lanczos por blocos.

Nota-se pela Figura 5.3-4 até a Figura 5.3-6 que os vetores de Ritz foram capazes de apresentar ótimas indicações quanto as subestruturas que contém o dano, principalmente através da média dos três VDPR. No entanto, pela Figura 5.3-8, com os níveis mais fortes de ruído, nota-se que a média dos VDPR indicam somente a subestrutura E2, sendo que vários picos espalhados dificultam a indicação dada para a subestrutura E6.

Tabela 5.3.2.1 – CPF - Figura 5.3-1 até Figura 5.3-8 – EEI-7S

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
Modal [5 0.1]	0,0469	0,0697	0,1294	0,5989	0,0583	0,3599	0,1081
Ritz [5 0.1]	0,0853	1,0000	0,2276	0,3201	0,0569	0,3357	0,1991
Ritz [10 0.2]	0,0868	0,9104	0,2646	0,3243	0,0683	0,2646	0,1892
Ritz [20 0.3]	0,1792	0,7440	0,1878	0,3983	0,2432	0,3158	0,1522

A Tabela 5.3.2.1 apresenta os valores do CPF obtidos para os resultados mostrados pela Figura 5.3-1 até a Figura 5.3-8, normalizados de forma que o maior valor obtido é igual a 1, e os demais são proporcionalmente menores. Nota-se que o maior valor obtido pelo uso dos modos normais indica erroneamente a subestrutura E4. Já pelo uso dos vetores de Ritz, pode-se observar que todos os casos indicam a subestrutura E2 no maior valor. Observa-se também que o segundo maior valor obtido pelo uso dos vetores de Ritz no caso de menor ruído fornece uma indicação para a outra subestrutura danificada, E6.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi apresentada uma ferramenta para detecção de falhas em estruturas complexas substruturadas onde um novo ponto de vista na solução do problema é utilizado, baseado no uso dos vetores de Ritz em substituição à metodologia tradicional baseada nos modos normais de vibrar.

Três algoritmos para extração de vetores de Ritz analíticos foram utilizados, [3, 6, 14]. Um exemplo numérico de uma estrutura plana (item 2.9 , pg.23) foi implementado e os resultados obtidos pela aplicação da superposição modal utilizando-se os vetores de Ritz analíticos e os modos normais de vibrar foram comparados através das IRFs obtidas e dos erros de participação. Observou-se neste exemplo que, no caso onde se excitou a estrutura com uma carga concentrada, numa única frequência de excitação e direção desfavorável aos primeiros modos normais de vibrar, em todas as simulações feitas a solução obtida pelo uso dos vetores de Ritz se mostrou mais precisa do que a correspondente solução obtida pelo uso dos modos normais de vibrar. Ainda neste exemplo, ao utilizar um impulso unitário (excitando todas as frequências na faixa de frequência analisada) numa direção favorável aos primeiros modos, ambas soluções apresentam resultados semelhantes, conforme se observou pela tendência das curvas de erro (Figura 2.9-13 até a Figura 2.9-16) a medida que o número de modos ou vetores de Ritz usados aumenta.

A implementação e verificação do método proposto na composição dos métodos de síntese modal dos componentes com o MRPT/RRA foram efetuadas através de dois exemplos simulados. O primeiro (item 5.2) trata-se de uma Viga bi-engastada dividida em 5 substruturas. O efeito do truncamento dos modos ou vetores de Ritz dos componentes foi mostrado através do uso dos quatro métodos de síntese com diferentes níveis de truncamento. Os vetores de ângulo

residual foram utilizados assumindo-se 5 modos como medidos. Para simular o caso real de ruídos de medição, os modos foram corrompidos com um ruído aleatório imposto. Algumas conclusões podem ser tiradas através dos resultados obtidos na detecção de falhas para este primeiro exemplo: Dos quatro métodos de síntese estudados, pôde-se notar que os métodos de CB, BK e QE apresentaram resultados mais satisfatórios do que o método de CC, conduzindo à escolha do método de BK que usa vetores de Ritz em sua formulação. No caso de haver truncamento nos modos ou vetores de Ritz dos componentes, independentemente do método de síntese utilizado, os vetores de Ritz dinâmicos não fornecem resultados satisfatórios devido às relações de recorrência usadas para extração destes vetores. Já os vetores de Ritz estáticos não apresentam tais problemas pois sua obtenção não utiliza relações de recorrência. No entanto, dependendo da complexidade e do tamanho da estrutura, pode-se necessitar de muitos vetores de Ritz estáticos para se obter resultados aceitáveis. A quantidade de vetores de Ritz estáticos disponíveis vai depender de quantos pontos de excitação (entradas) foram utilizados na estrutura, bem como na identificação das matrizes de estado pelo ERA.

No geral, os vetores de Ritz são mais sensíveis ao dano do que os modos normais de vibrar, sendo capazes de identificar com boa precisão a localização do dano, mesmo sob fortes níveis de ruído, incluindo o caso de dois danos simultâneos em localizações diferentes, e em alguns casos, fornecem uma boa estimativa para a extensão do dano.

O segundo exemplo numérico simulado (item 5.3) trata-se de uma estrutura plana baseada em sete componentes da estação espacial internacional. Através de variações nos módulos de elasticidade e densidades dos materiais de cada um dos sete componentes, buscou-se simular uma estrutura mais complexa, de comportamento local e global, formada por componentes de diferentes características dinâmicas, uns mais flexíveis, outros menos.

As principais conclusões tiradas pelos resultados apresentados para este exemplo são as seguintes: Tanto os modos normais de vibrar como os vetores de Ritz estáticos e dinâmicos foram aptos para detecção de danos localizados na subestrutura E1, que é um componente rígido e central na estrutura, cuja localização é preferencial aos primeiros modos normais de vibrar. Os vetores de Ritz estáticos se mostraram mais eficazes na localização de danos nos componentes E2 e E6, mais flexíveis, de comportamento localizado, bem como na localização de danos simultâneos nestes componentes. Contudo, em geral, os vetores de Ritz dinâmicos estão mais

sujeitos a influência dos ruídos de medição e em alguns casos podem não localizar exatamente o dano. Os modos normais de vibrar apresentam uma indicação da localização do dano através das matrizes de perturbação somente no caso de dano localizado na subestrutura E1. Nos demais casos, os vetores de Ritz estáticos apresentam com boa precisão a localização do dano. No entanto, em nenhuma das soluções foi possível se estimar a extensão do dano pelas matrizes de perturbação. Através deste exemplo pôde-se verificar a viabilidade de se utilizar os vetores de Ritz experimentais na detecção de danos em estruturas de maior nível de complexidade.

Como se mostrou, a metodologia utilizada consiste em, através da observação dos primeiros modos normais de vibrar, dividir a estrutura em componentes, procurando manter em cada um partes e regiões da estrutura que apresentem características dinâmicas semelhantes entre si, porém adversas quando comparadas com os demais componentes. Os primeiros modos da estrutura podem ser obtidos diretamente através de uma análise modal da estrutura completa ou até mesmo pela construção de um MEF que serviria para esta primeira análise. Tal metodologia possibilita identificar na estrutura regiões com modos locais e globais, e distribuir pontos de excitação em componentes cujo comportamento se mostra desfavorável aos primeiros modos normais de vibrar, porém favoráveis aos vetores de Ritz experimentais.

Como decorrência destas conclusões, apresentam-se algumas perspectivas para trabalhos futuros bem como sugestões para outros estudos que podem ser conduzidos:

- Condução de testes experimentais em estruturas montadas em laboratório para aplicação dos métodos utilizando-se de dados experimentais reais.
- Utilização de outros métodos de detecção de danos e de síntese modal em conjunto com vetores de Ritz experimentais;
- Aplicação deste e de outros métodos em estruturas mais complexas, como por exemplo estruturas cíclicas, estruturas de grandes dimensões, microcomponentes, etc;
- Investigação do método proposto quando aplicado em estruturas livre-livre;
- Estudo e aplicação de métodos de monitoramento remoto de danos em estruturas complexas através do MRPT/RRR;
- Utilização do método proposto em ajuste de modelos;

- Maiores estudos referentes ao comportamento dinâmico das interfaces de ligação entre os componentes;
- Estudo de outras formas de simulação de ruídos de medição, bem como aplicação de perturbações que atuem diretamente sobre as matrizes de parâmetros físicos da estrutura para posterior uso de tais matrizes na simulação de dados medidos;
- Implementação dos métodos propostos em linguagem orientada a objetos;
- Otimização dos algoritmos utilizados na obtenção dos vetores de Ritz incluindo novas rotinas para se evitar a perda de ortogonalidade;
- Novas metodologias para extração de vetores de Ritz podem ser investigadas, como por exemplo uma fusão dos métodos de vetores de Ritz quase estáticos, que foram pouco investigados neste trabalho, com métodos de extração de vetores de Ritz experimentais através de realização de sistemas.

Apêndice

Apêndice A - ERA

Resumidamente, o ERA é um algoritmo de realização para identificação de parâmetros modais e redução de modelos, ou seja, através da resposta impulsiva do sistema no domínio do tempo, obtém-se as matrizes de estado em tempo discreto, através das quais se constrói um modelo em tempo discreto de ordem mínima, e pode-se obter também um modelo modal da estrutura, ou seja, as frequências naturais e modos normais de vibrar do sistema^{*}. As equações que representam as características de um sistema dinâmico, linear, no domínio contínuo e invariante no tempo são dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (181)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (182)$$

amostrando num intervalo de tempo Δt ,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (183)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (184)$$

Onde \mathbf{A}_c e \mathbf{A} representam as matrizes de estado em tempo contínuo e discreto, respectivamente, de dimensões $2n \times 2n$, sendo n a ordem do sistema a ser identificado, \mathbf{B} e \mathbf{B}_c são as matrizes de influência de entrada em tempo contínuo e discreto de dimensão $2n \times r$, \mathbf{C} é a matriz de influência de saída de dimensão $m \times 2n$, \mathbf{D} é a matriz de transmissão direta de tamanho $m \times r$, sendo r e m o número de entradas ("references") e saídas ("measured") respectivamente. As matrizes \mathbf{C} e \mathbf{D} são iguais em tempo contínuo e discreto. O vetor $\mathbf{x}(k)$ representa o vetor de estado em tempo discreto de dimensão $2n \times r$, e k a discretização, $\mathbf{y}(k)$ representa o vetor de saída em

^{*} Maiores detalhes sobre a implementação e a conceituação teórica do ERA podem ser obtidos em [53]

tempo discreto de dimensão $m \times r$, e finalmente $\mathbf{u}(k)$ representa o vetor de forças de entrada de dimensão $r \times m$.

Para uma resposta impulsiva, sabe-se que,

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \quad (185)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_c \quad (186)$$

Fazendo com que $\mathbf{u}_i(0) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$) e $\mathbf{u}_i(k) = 1$ ($k = 1, 2, \dots, l-1$) sejam substituídos nas equações (183) e (184), onde l representa o comprimento total da seqüência de dados amostrados, os resultados podem ser reunidos numa matriz de resposta ao pulso \mathbf{Y} , para cada elemento de entrada através da seguinte seqüência de equações:

$$\mathbf{x}(0) = 0 \quad (187)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{D}\mathbf{u}(0) \quad (188)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \quad (189)$$

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(1) \quad (190)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \quad (191)$$

$$\mathbf{y}(2) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(2) \quad (192)$$

.

.

.

$$\mathbf{x}(l-1) = \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(l-1-i) \quad (193)$$

$$\mathbf{y}(l-1) = \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(l-1-i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(l-1) \quad (194)$$

Esta seqüência pode ser expressa como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \quad (195)$$

onde

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)] \quad (196)$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{D} \ \mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \dots \ \mathbf{CA}^{l-2}\mathbf{B}] \quad (197)$$

ou,

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_k] \quad (198)$$

sendo,

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}, \ \mathbf{Y}_1 = \mathbf{CB}, \ \mathbf{Y}_2 = \mathbf{CAB}, \ \dots, \ \mathbf{Y}_k = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} \quad (199)$$

e por fim,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(l-2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \quad (200)$$

A Eq.(195) é a representação matricial da relação entre a história no tempo da entrada e da saída. A matriz \mathbf{y} de dimensão $m \times l$ representa os dados de saída, a matriz \mathbf{Y} de dimensão $m \times rl$ é a matriz que contém os chamados parâmetros de Markov e a matriz de entrada \mathbf{U} , é uma matriz triangular superior de dimensão $rl \times l$, que será quadrada caso seja um sistema com uma única entrada (SIMO), do contrário conterá mais linhas que colunas.

Da Eq.(195) são conhecidos os parâmetros de entrada e saída representados por \mathbf{U} e \mathbf{y} respectivamente. Portanto, o objetivo é, através da Eq.(195), obter os parâmetros de Markov em \mathbf{Y} representados pela Eq.(197). Como a dimensão de \mathbf{Y} é $m \times rl$, teremos exatamente esta quantidade de incógnitas, no entanto, temos somente $m \times l$ equações (dimensão de \mathbf{y}). Quando $r > 1$, a solução de \mathbf{Y} não é única. Ademais, se o sinal de entrada não é rico o bastante para se atingir determinada faixa de Frequência, ou se l é muito grande, a matriz \mathbf{U} será mal condicionada e sua

inversa não poderá ser obtida para a solução de $\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{U}^{-1}$. Para se resolver este problema, considere o caso onde \mathbf{A} é uma matriz assintoticamente estável tal que para um p suficientemente grande, $\mathbf{A}^k \approx 0$ para todo intervalo de tempo $k \geq p$. Portanto, a Eq.(195) pode ser aproximada por:

$$\mathbf{y} \approx \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{U}} \quad (201)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)] \quad (202)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \ \mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \dots \ \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}] \quad (203)$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(p-1) & \dots & \mathbf{u}(l-2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(p-2) & \dots & \mathbf{u}(l-3) \\ & & & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(l-p-1) \end{bmatrix} \quad (204)$$

Note que a matriz $\hat{\mathbf{U}}$ de tamanho $(r(p+1) \times l)$ e a matriz $\hat{\mathbf{Y}}$ de tamanho $(m \times r(p+1))$ são as versões truncadas de \mathbf{U} e \mathbf{Y} das equações (200) e (197) respectivamente. Sendo l suficientemente grande, ou seja, maior que $r(p+1)$, lembrando que r é o número de entradas e p um número inteiro que satisfaz $\mathbf{CA}^k\mathbf{B} \approx 0$ para $k \geq p$, então a Eq.(201) indica que teremos mais equações $(m \times l)$ do que incógnitas $(m \times r(p+1))$, pois $l \geq r(p+1)$. Conclui-se portanto que os p primeiros parâmetros de Markov satisfazem aproximadamente $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{y}\hat{\mathbf{U}}^+$, onde $\hat{\mathbf{U}}^+$ é a pseudo-inversa da matriz \mathbf{U} , e o erro de aproximação diminui a medida que p aumenta.

Como *realização*, entende-se a obtenção das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} a partir dos parâmetros de Markov, dados pela Eq.(203) de forma que o modelo em tempo discreto dado pelas equações (183) e (184) seja satisfeito. Todo sistema possui um número infinito de realizações as quais possuirão as mesmas respostas para qualquer entrada em particular. Uma realização mínima significa um modelo com a menor dimensão de estado de espaço em relação a todos os sistemas realizáveis que possuam as mesmas relações de entrada e saída. Toda realização mínima possui o mesmo conjunto de autovalores (associados a solução do autoproblema referente à matriz \mathbf{A}), os quais são os parâmetros modais do sistema.

A realização de sistemas inicia-se pela construção da matriz generalizada de Hankel [54] de tamanho $\alpha n \times \beta n$ composta dos parâmetros de Markov. Para a montagem da matriz de Hankel, os parâmetros de Markov representados pela Eq.(203) são extraídos diretamente das IRFs da estrutura, a qual, como já foi dito anteriormente, pode ser obtida através da transformada de Fourier inversa das FRFs medidas da estrutura, portanto temos:

$$\mathbf{H}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (205)$$

Para $k = 1$,

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (206)$$

Note que \mathbf{Y}_0 não é incluído em $\mathbf{H}(0)$. Se $\alpha \geq n$, e $\beta \geq n$ (a ordem do sistema), a matriz $\mathbf{H}(k-1)$ será de rank n . Para se confirmar este ponto, substituindo-se os parâmetros de Markov, a partir da Eq.(203), na Eq.(205), e decompondo $\mathbf{H}(k-1)$ em três matrizes, temos,

$$\mathbf{H}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (207)$$

Ou de forma reduzida,

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \quad (208)$$

Onde,

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (209)$$

representa a matriz de observabilidade, e,

$$\mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}] \quad (210)$$

representa a matriz de cotrolabilidade. Se a ordem do modelo de estado de espaço é n , então, a dimensão mínima das matrizes de estado será $n \times n$. Se o sistema é controlável e observável, as matrizes \mathbf{P}_α e \mathbf{Q}_β serão de rank n . E consequentemente, a matriz de Hankel será de rank n . Portanto, baseado nas propriedades da matriz de Hankel composta pelos parâmetros de Markov (IRFs amostradas), o algoritmo de realização de autosistemas, ou “Eigensystem Realization Algorithm”, ERA é introduzido na seqüência.

Supondo que exista uma matriz \mathbf{H}^+ que satisfaça a relação:

$$\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^+ \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{I}_n \quad (211)$$

Onde \mathbf{I}_n é uma matriz identidade de ordem n . Observa-se que,

$$\mathbf{H}(0)\mathbf{H}^+\mathbf{H}(0) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^+ \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{I}_n \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{H}(0) \quad (212)$$

Portanto, num sentido genérico, a matriz \mathbf{H}^+ é a pseudo-inversa da matriz $\mathbf{H}(0)$. O procedimento do ERA se inicia a partir da fatorização da matriz de bloco de dados (IRFs), Eq.(205), para $k = 1$, usando a decomposição em valores singulares, ou seja,

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (213)$$

Onde, as matrizes \mathbf{R} e \mathbf{S} são as matrizes singulares à esquerda e à direita respectivamente, e $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de valores singulares dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (214)$$

Sendo,

$$\Sigma_n = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n] \quad (215)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (216)$$

Sejam \mathbf{R}_n e \mathbf{S}_n matrizes formadas pelas primeiras n colunas de \mathbf{R} e \mathbf{S} respectivamente. Então, a matriz $\mathbf{H}(0)$ e sua pseudo-inversa se tornam:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}_n \Sigma_n \mathbf{S}_n^T \quad (217)$$

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1} \mathbf{R}_n^T \quad (218)$$

Sendo,

$$\mathbf{S}_n \mathbf{S}_n^T = \mathbf{I}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{R}_n^T \quad (219)$$

Comparando-se as equações (218) e (219) com a Eq.(208), com $k = 1$, sugere que \mathbf{P}_α está relacionado com \mathbf{R}_n e \mathbf{Q}_β está relacionado com \mathbf{S}_n^T , portanto, temos:

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_\beta = \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (220)$$

A partir da Eq.(208), pode-se notar que as primeiras r colunas de \mathbf{Q}_β formam a matriz de influência de entrada \mathbf{B} , enquanto as primeiras m linhas de \mathbf{P}_α formam a matriz de influência de saída \mathbf{C} . Para $k = 2$ na Eq.(208), obtemos:

$$\mathbf{H}(1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A} \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \mathbf{A} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (221)$$

Portanto, uma solução óbvia para a matriz de estado \mathbf{A} seria:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \quad (222)$$

Uma prova matemática mais rigorosa da Eq.(222) pode ser conduzida através de:

Defina-se \mathbf{O}_r , \mathbf{O}_m , \mathbf{I}_r e \mathbf{I}_m como sendo duas matrizes nulas e duas matrizes identidade de ordens r e m , $\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{O}_m \quad \cdots \quad \mathbf{O}_m]$, onde m representa o número de saídas, e $\mathbf{E}_r^T = [\mathbf{I}_r \quad \mathbf{O}_r \quad \cdots \quad \mathbf{O}_r]$, onde r representa o número de entradas. Usando as equações (199), (205), (208), (211), (217), (218) e (219), uma realização de ordem mínima pode ser obtida como segue:

A partir das equações (199) e (205),

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(k-1) \mathbf{E}_r \quad (223)$$

A partir das equações (205) e (208),

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_r \quad (224)$$

Usando a equação (211),

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{P}_\alpha [\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^+ \mathbf{P}_\alpha] \mathbf{A}^{k-1} [\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^+ \mathbf{P}_\alpha] \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_r \quad (225)$$

Pelas equações (208) e (218),

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(0) [\mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{R}_n^T] \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta [\mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{R}_n^T] \mathbf{H}(0) \mathbf{E}_r \quad (226)$$

A partir das equações (218) e (219),

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(0) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} [\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}]^{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(0) \mathbf{E}_r \quad (227)$$

E por fim,

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} [\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}]^{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \quad (228)$$

Esta é a formulação básica de realização do ERA. As matrizes,

$$\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \quad (229)$$

representam uma realização mínima. As matrizes $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ representam quantidades estimadas para \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} . A matriz $\hat{\mathbf{D}}$ pode ser obtida diretamente a partir dos parâmetros de Markov, no instante de tempo $k = 0$, ou seja, $\mathbf{Y}_0 = \hat{\mathbf{D}}$.

O sistema realizado pode ainda ser transformado para tempo contínuo. Lembrando que as matrizes \mathbf{C} e \mathbf{D} são as mesmas para tempo discreto e contínuo, temos que $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}}$ e $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}$. Ainda, pela consideração de tempo inicial zero, e a partir das equações (185) e (186), temos,

$$\mathbf{A}_c = \frac{1}{\Delta t} \ln(\hat{\mathbf{A}}) \quad (230)$$

$$\mathbf{B}_c = \hat{\mathbf{B}} \quad (231)$$

Bibliografia

- [1] Hurty, W. C., Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. AIAA Journal, v. 3, n. 4, April 1965.
- [2] Guyan, R. J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices. AIAA Journal, v. 2, n. 3, p. 380, 1965.
- [3] Wilson, E.L., Yuan, M.W., Dickens, J.M., Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 10 pp. 813-821, 1982.
- [4] Craig, R. R. and Hale, A. L., Block-Krylov Component Synthesis Method for Structural Model Reduction, J. Guidance, Control, and Dynamics, vol. 11, N. 6, pp. 562-570, 1987.
- [5] Parlett, B. N., The Symmetric Eigenvalue Problem, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [6] Nour-Omid, B. and Clough, R. W., Dynamic Analyses of Structures Using Lanczos Coordinates, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 12, pp. 565-577, 1984.
- [7] Fleming, E. R., The Use of Component Mode Synthesis in the Dynamic Analysis of Aerospace Systems, Joint ASCE/ASME Applied Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, pp.155-165, June 24-26, 1985.
- [8] Lanczos, C., An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators, J. Res. Natl. Bur. Std. 45, 225-282, 1950.
- [9] Ojavo, I. U. and Newman, M., Vibration Modes of Large Structures by an Automatic Matrix-Reduction Method, AIAA Journal, v. 8, n. 7, pp. 1234-1239, July 1970.
- [10] Leger, P., Wilson, E. L., and Clough, R. W., The Use of Load Dependent Vectors for Dynamic and Earthquake Analyses, Earthquake Engineering Research Center Report, University of California, Berkeley, UCB/EERC-86/04, 1986 v. 12, pp. 565-577, 1986.
- [11] Nour-Omid, B. and Clough, R. W., Block Lanczos Method for Dynamic Analysis of Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 13, pp. 271-275, 1985.

- [12] Zimmerman, D. C., Looking into the Crystal Ball: The Continued Need for Multiple Viewpoints in Damage Detection, Key Engineering Materials, v. 167-168, pp. 76-90, 1999.
- [13] Juang, J. N., and Pappa, R. S., An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Modal Reduction, J. Guidance and Control Dynamics, v. 8, pp. 620-627.
- [14] Jianmin Gu, Zheng-Dong Ma and Hulbert, G. M., A New Load-dependent Ritz Vector Method for Structural Dynamics Analyses: Quasi-static Ritz Vectors, Finite Element in Analysis and Design, 36 pp. 261-278, 2000.
- [15] Ewins, D.J., Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press, 1984.
- [16] Araújo, Cleudmar Amaral de., Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes. Campinas: Departamento de Projetos Mecânicos, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1998. [17] Duarte, Marcus Antônio Viana., Ajuste de Modelos Dinâmicos de Estruturas com Não Linearidades Concentradas. Campinas: Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1994. 190 p.
- [18] Meirovitch, L., Computational Methods in Structural Dynamics. Alphen Aan Den Rijn, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [19] Argyris, J. H. and Kelsey, S., Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworths Scientific Publications, Ltd., London, 1960.
- [20] Turner, M. J. et al., Further Development and Applications of the Stiffness Method. Matrix Methods of Structural Analysis, Edited by F. de Veubeke, Pergamon Press, London, 1964. Bibliografia Hurty.
- [21] Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., Coupling of Structures for Dynamic Analyses, AIAA Journal, v. 6, n. 7, pp. 1313-1319, Jul. 1968.
- [22] Bamford, R. M., A modal Combination Program for Dynamic Analysis of Structures, Tech. Memo. 33-290, Jet propulsion Laboratory, Passadema, CA, July 1967.
- [23] Goldman, R. L., Vibration Analysis by Dynamic Partitioning. AIAA Journal, v. 7, pp. 1152-1154, Jun. 1969.

- [24] Roden, W. P., A Method for Deriving Structural Influence Coefficients from Ground Vibration Tests, AIAA Journal, v. 5, n. 5, pp. 911-1000, May 1967.
- [25] Benfield, W. A. et al. Modal Synthesis Methods, Symposium on Substructure Testing and Synthesis, NASA, Aug. 1972.
- [26] Macneal, R. H., A Hybrid Method of Component Mode Synthesis. Computers & Structures, v. 1, p. 581-601, Dec. 1971. [27] Rubin, S., Improved Component mode Representation for Structural Dynamic Analysis. AIAA Journal, v. 13, n. 8, pp. 995-1006, Aug. 1975.
- [28] Hintz, R. M., Analytical Methods in Component Modal Synthesis. AIAA Journal, v. 13, n. 8, pp. 1007-1016, 1975.
- [29] Craig, R. R. Jr. and Chang, C-J., A Review of Substructure Coupling Methods for Dynamic analysis, NASA CP-2001, National Aeronautics and Space Admin., Washington DC, v. 3, pp. 393-408, 1976.
- [30] Craig, R. R. Jr. and Chang, C-J., On the Use of Attachment modes in Substructure Coupling for Dynamic analysis, Paper 77-405, AIAA/ASME 18th Struct., Struct. Dynamics, and Material Conf., San Diego, CA, 1977.
- [31] Curnier, A., On Three Modal Synthesis Variants. Journal Sound Vibration, v. 90, n. 4, pp. 527-540, 1983.
- [32] Craig, R. R. Jr., Structural Dynamics, an Introduction to Computer Methods. New York, John Wiley & Sons Inc., 1981.
- [33] Craig Jr., R. R., A Review of Time-Domain and Frequency Domain Component mode Synthesis Methods, Joint ASCE/ASME Applied Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, pp.1-29, June 24-26, 1985.
- [34] Klahs, J. W., W., Townley, G. E., Determining Component Loads and Stress With Improved System Modeling Techniques. Proc. 3rd IMAC, Union College, Schenectady, NY, p. 941-948, 1985.

- [35] Martinez, D. R., Miller, A. K. and T. G. Carne, Combined Experimental / Analytical Modeling of Shell / Payload Structures., Joint ASCE/ASME Applied Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, pp.167-194, June 24-26, 1985.
- [36]. Martinez, D. R., Gregory, D. L., A Comparison of Free Component Mode Synthesis Techniques Using MSC/Nastran. Rep. SAND 83-0025, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, June, 1984.
- [37] Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B., Shevitz, D.W., Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review. Los Alamos National Laboratory, New Mexico, May, 1996. (Home Page: http://ext.lanl.gov/projects/damage_id/)
- [38] Zimmerman, D.C. and Kaouk, Structural Damage Detection Using a Minimum Rank Update Theory, Journal of Vibration and Acoustic, v.116 pp. 222-230, April, 1994.
- [39] Zimmerman, D.C and Smith, Model Refinement and Damage Location for Intelligent Structures, Intelligent Structural Systems, H.S. Tzou and G.L. Anderson, Eds., Kluwer Academic Publishers, pp.403-452, 1992.
- [40] Hemez, F.M., Theoretical and Experimental Correlation Between Finite Element Models and Modal Tests in the Context of Large Flexible Space Structures, Ph.D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, CO., 1993.
- [41] Kaouk, M., Finite Element Model Adjustment and Damage Detection Using Measured Test Data, Ph.D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Mechanics and Engineering Sciences, Univ. of Florida, Gainesville, FL., 1993.
- [42] Baruch, M. and Bar Itzack, I.Y., Optimum Weighted Orthogonalization of Measured Modes, AIAA Journal, v.16(4), pp. 346-351, 1978.
- [43] Kabe, A.M., Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data, AIAA Journal, 23(9), pp. 1437-1436, 1985.

- [44] Berman, A. and Nagy, E.J., Improvement of Large Analytical Model Using Test Data, AIAA Journal, v.21(8), pp. 1168-1173, 1983.
- [45] Ojalvo, I.U. and Pilon, D., Diagnostics for Geometrically Locating Structural Math Model Errors from Modal Test Data, Proceedings of 29th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ACS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp. 1174-1186, 1988.
- [46] Chen, J.C. and Garba, J.A., On Orbit Damage Assessment for Large Space Structures, AIAA Journal, 26(9), pp. 1119-1126.
- [47] Kammer, D.C., Optimal Approximation for Residual Stiffness in Linear System Identification, AIAA Journal, 26(1), pp. 104-112
- [48] Smith, S.W., and Beattie, C.A., Model Correlation and Damage Location for Large Space Truss Structures: Secant Method Development and Evaluation, NASA-CR-188102, 1991.
- [49] Zimmerman, D.C. and Simmermacher, T., Model Refinement and System Health Monitoring Using Data From Multiple Static Loads and Vibration Tests, Proceedings of 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 325-335, AIAA-94-1714-CP
- [50] Dos Santos, J.M.C. and Zimmerman, D.C., "Damage Detection in Complex Structures Using Component Mode Synthesis and Residual Modal Force Vector," Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 1299–1305, 1996.
- [51] Ferraz, F.G. and Dos Santos, J.M.C., "Block-Krylov Component Synthesis and Minimum Rank Perturbation Theory for Damage Detection in Complex Structures," Proceedings of the IX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, pp. 329-334, 2001
- [52] Kim, H.M and Bartkowicz, T., Damage Detection and Health Monitoring of Large Space Structures, Proceedings of the 34th SDM Conference, LaJolla, CA, 1983.
- [53] Juang, J. N., Applied System Identification, NASA Langley Research Center, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.

[54] Chen, C.T., Introduction to Linear System Theory, Holt, Rienharts and Winston, Inc., New York, N.Y., 1984.

[55] Moreira, F. J. O., Um Controlador H-Infinity de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibração Estrutural, Dissertação de Doutorado, Orientado pelo Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1998.

[56] McGowan, P.E., Edighoffer, H.E. and Wallace, J.W., Development of an Experimental Space Station Model for Structural Dynamics Research, NASA TM-102601, NASA Langley Research Center, 1990.

[57] MATLAB[®] User's Guide, The MathWorks, Inc., 2000