Proporções - Introdução

Rogerião e Claudinho passeiam com seus cachorros. Rogerião pesa 120kg, e seu cão, 40kg. Claudinho, por sua vez, pesa 48kg, e seu cão, 16kg.

Observe a razão entre o peso dos dois rapazes:

$$\frac{120kg}{48kg} \underset{:24}{\overset{:24}{=}} \frac{5}{2}$$

Observe, agora, a razão entre o peso dos cachorros:

$$\frac{40kg}{16kg} \underset{:8}{\overset{:8}{=}} \frac{5}{2}$$

Verificamos que as duas razões são iguais. Nesse caso, podemos afirmar que a igualdade $\frac{120}{48} = \frac{40}{16}$ é uma **proporção**. Assim:

> **Proporção** é uma igualdade entre duas razões.

Elementos de uma proporção

Dados quatro números racionais a, b, c, d, não-nulos, nessa ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão do 1º para o 2º for igual à razão do 3º para o 4º. Assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a:b=c:d$$

(lê-se "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*")

Os números *a, b, c* e *d* são os termos da proporção, sendo:

- *b* e *c* os **meios** da proporção.
- *a* e *d* os **extremos** da proporção.

$$a : b = c : d$$

Meios

Extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Meios

Extremos

Exemplo:

Dada a proporção $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$, temos:
Leitura: 3 está para 4 assim como 27 está para 36.
Meios: 4 e 27 *Extremos:* 3 e 36

Propriedade fundamental das proporções

Observe as seguintes proporções:

$\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ Produto dos meios = 4.30 = 120
Produto dos extremos = 3.40 = 120

$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ Produto dos meios = 9.20 = 180
Produto dos extremos = 4.45 = 180

$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$ Produto dos meios = 8.45 = 360
Produto dos extremos = 5.72 = 360

De modo geral, temos que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c}$$

Daí podemos enunciar a propriedade fundamental das proporções:

> Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Aplicações da propriedade fundamental

Determinação do termo desconhecido de uma proporção

Exemplos:

- Determine o valor de x na proporção:

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$$

Solução:

5 . x = 8 . 15 (aplicando a propriedade fundamental)

5 . x = 120

$$x = \frac{120}{5}$$

x = 24

Logo, o valor de *x* é 24.

- Determine o valor de x na proporção:

$$\frac{x-3}{2x+1} = \frac{4}{5}, \text{ sendo } x \neq \frac{-1}{2}.$$

Solução:

5 . (x-3) = 4 . (2x+1) (aplicando a propriedade fundamental)

5x - 15 = 8x + 4

5x - 8x = 4 + 15

-3x = 19

3x = -19

x = $\frac{-19}{3}$

Logo, o valor de *x* é $\frac{-19}{3}$.

- Os números 5, 8, 35 e x formam, nessa ordem, uma proporção. Determine o valor de x.

Solução:

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{x}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

5 . x = 8 . 35

5x = 280

$$x = \frac{280}{5}$$

x = 56

Logo, o valor de *x* é 56.

Resolução de problemas envolvendo proporções

Exemplo:

- Numa salina, de cada metro cúbico (m^3) de água salgada, são retirados 40 dm^3 de sal. Para obtermos 2 m^3 de sal, quantos metros cúbicos de água salgada são necessários?

Solução:

A quantidade de sal retirada é **proporcional** ao volume de água salgada.
Indicamos por x a quantidade de água salgada a ser determinada e armamos a proporção:

$$\frac{1m^3}{40dm^3} = \frac{\text{Quantidade de água salgada}}{\text{Quantidade de sal}}$$

$$\frac{1m^3}{40dm^3} = \frac{x}{2m^3}$$

Lembre-se que $40dm^3 = 0{,}04m^3$.

$$\frac{1m^3}{0{,}04m^3} = \frac{x}{2m^3}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

$1 \cdot 2 = 0{,}04 \cdot x$
$0{,}04x = 2$

$$x = \frac{2}{0{,}04}$$

$x = 50\ m^3$

Logo, são necessários 50 m^3 de água salgada.

Quarta proporcional

Dados três números racionais *a, b* e *c*, não-nulos, denomina-se **quarta proporcional** desses números um número *x* tal que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{x}}$$

Exemplo:

- Determine a quarta proporcional dos números 8, 12 e 6.

Solução: Indicamos por x a quarta proporcional e armamos a proporção:

$$\frac{8}{12}=\frac{6}{x}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

8 . x = 12 . 6
8 . x = 72

$$x=\frac{72}{8}$$

x = 9

Logo, a quarta proporcional é 9.

Proporção contínua

Considere a seguinte proporção: $\frac{9}{12}=\frac{12}{16}$

Observe que os seus meios são iguais, sendo, por isso, denominada **proporção contínua**. Assim:

Proporção contínua é toda a proporção que apresenta os meios iguais.

De um modo geral, uma proporção contínua pode ser representada por:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}}$$

Terceira proporcional

Dados dois números naturais *a* e *b*, não-nulos, denomina-se **terceira proporcional** desses números o número *x* tal que:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{x}}$$

Exemplo:

Determine a terceira proporcional dos números 20 e 10.
Solução

Indicamos por *x* a terceira proporcional e armamos a proporção:

$$\frac{20}{10} = \frac{10}{x}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

20 . x = 10 . 10
20x = 100

$$x = \frac{100}{20}$$

x = 5

Logo, a terceira proporcional é 5.

Média geométrica ou média proporcional

Dada uma proporção contínua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número *b* é denominado **média geométrica** ou **média proporcional** entre *a* e *c*. Exemplo:

- Determine a média geométrica positiva entre 5 e 20.
  Solução:

$$\frac{5}{b} = \frac{b}{20}$$

5 . 20 = b . b
$100 = b^2$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
b = 10

Logo, a média geométrica positiva é 10.

Propriedades das proporções

1ª propriedade:

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

Demonstração
Considere as proporções:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad\qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

Adicionando 1 a cada membro obtemos:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \qquad\qquad \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \qquad\qquad \frac{b}{a}+\frac{a}{a}=\frac{d}{c}+\frac{c}{c}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}} \qquad\qquad \boxed{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}}$$

Exemplo:

- Determine x e y na proporção $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, sabendo que x+y=84.
  Solução:

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{3+4}{4}$$

Assim:

$$\frac{84}{y}=\frac{7}{4} \Rightarrow y=\frac{84.4}{7}=48$$

x+y = 84 => x = 84-y => x = 84-48 => x=36.

Logo, *x=36* e *y=48*.

2ª propriedade:

Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo,
assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

Demonstração
Considere as proporções:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad\qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

Subtraindo 1 a cada membro obtemos:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d}$$

$$\boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$$

$$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$$

$$\frac{b}{a}-\frac{a}{a}=\frac{d}{c}-\frac{c}{c}$$

$$\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$ (Mult. os 2 membros por -1)

$$\boxed{\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}}$$

Exemplo:

- Sabendo-se que *x-y=18*, determine *x* e *y* na proporção $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$.
  Solução:

  Pela 2ª propriedade temos que:

  $$\frac{x}{y}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x-y}{y}=\frac{5-2}{2} \Rightarrow \frac{18}{y}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{18.2}{3}=12$$

  x-y = 18   =>   x=18+y   =>   x = 18+12   =>   x=30.
  Logo, x=30 e y=12.

3ª propriedade:

Numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Aplicando a 1ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

4ª propriedade:

Numa proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes,
assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a 2ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\boxed{\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

Exemplo:

- Sabendo que *a-b = -24*, determine *a* e *b* na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7}$.
  Solução:

  Pela 4ª propriedade, temos que:

  $$\frac{a-b}{5-7} = \frac{a}{5} = \frac{b}{7}$$

$$\frac{-24}{-2} = \frac{a}{5} \Rightarrow a = \frac{5.(-24)}{-2} \Rightarrow a = 60$$
$$\frac{-24}{-2} = \frac{b}{7} \Rightarrow b = \frac{7.(-24)}{-2} \Rightarrow b = 84$$

5ª propriedade:

Numa proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu consequente.

Demonstração
Considere a proporção:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando os dois membros por $\frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{a}{b}.\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{a.c}{b.d}$$

Assim:

$$\frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Observação: a 5ª propriedade pode ser estendida para qualquer número de razões. Exemplo:
$$\frac{a.c.e}{b.d.f} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{e^3}{f^3}$$

Proporção múltipla

Denominamos **proporção múltipla** uma série de razões iguais. Assim:

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15}$ é uma **proporção múltipla**.

Dada a série de razões iguais $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, de acordo com a 3ª e 4ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\frac{a+c-e}{b+d-f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\frac{a-c+e}{b-d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\frac{a-c-e}{b-d-f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$