

Unidad Temática 3

3-3: Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas



¡Atención!

Sólo aquellos ítems que comienzan con un asterisco (), debe responderlos utilizando tablas o una hoja de cálculo. En el resto de los ítems, debe pensar en las propiedades de la distribución para responder.*



En el caso particular de la distribución normal, antes de responder la Autoevaluación debe memorizar las áreas que encierra la curva alrededor de: $\mu \pm \sigma$; $\mu \pm 2\sigma$; $\mu \pm 3\sigma$. Es suficiente recordar hasta el tercer decimal.

Responda verdadero o falso. Coloque una letra V a la izquierda del número del ítem si acepta la afirmación enunciada, o una F si la rechaza.

1. Distribución uniforme continua

- ☐ 1. Si una variable aleatoria continua X está distribuida uniformemente en el intervalo $[A; B]$, la probabilidad de que tome valores en intervalos de igual longitud dentro de su rango, es la misma.
- ☐ 2. Dado que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria uniforme continua X en el intervalo $[A; B]$ es constante, tiene varianza nula.
- ☐ 3. El valor esperado de una variable aleatoria continua, distribuida uniformemente en el intervalo $[-1; 3]$, es igual a 1.
- ☐ 4. La función de densidad de una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo $[A; B]$, es simétrica respecto de un eje vertical que pase por la media.
- ☐ 5. Si X es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente, cuartil inferior y cuartil superior son coincidentes.

2. Distribución normal

- ☐ 6. Los parámetros de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria normal son su media y la desviación estándar (o su varianza).
- ☐ 7. Siempre y sin restricción alguna, la curva de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal, es simétrica respecto de un eje vertical que pasa por la media.
- ☐ 8. Para algunos valores particulares de los parámetros de la distribución normal, la curva de la función de densidad de probabilidad puede presentar más de una moda.

- 9. Si $X \sim N(x; \mu, \sigma)$, media, mediana y moda son coincidentes.
- 10. La curva de la distribución normal tiene sus puntos de inflexión en correspondencia con los valores de la variable ubicados alrededor de la media, a una distancia de $\pm$ una vez la desviación estándar.
- 11. La probabilidad de que cualquier variable aleatoria distribuida normalmente, con media μ y varianza σ^2 , tome valores entre $\mu \pm 3\sigma$, es igual a 0,997.
- 12. La probabilidad de que cualquier variable aleatoria distribuida normalmente, con media μ y varianza σ^2 , tome valores entre $\mu \pm 2\sigma$, es igual a 0,955.
- 13. La probabilidad de que cualquier variable aleatoria distribuida normalmente, con media μ y varianza σ^2 , tome valores entre $\mu \pm 1\sigma$, es igual a 0,683.
- 14. La función de distribución acumulada $F(x)$, de cualquier variable aleatoria X distribuida normalmente, es igual a 0,5 para el valor de x igual a la media.
- 15. Una variable aleatoria X distribuida normalmente está definida sólo para valores positivos de la misma.
- 16. Si graficamos dos curvas normales con la misma desviación estándar y medias diferentes, las curvas tendrán la misma forma, pero estarán centradas en posiciones diferentes a lo largo del eje de la variable.
- 17. La función de densidad de una variable aleatoria normal es más chata y se extiende más sobre el eje de la variable (horizontal), mientras mayor sea su rango.
- 18. La probabilidad de que una variable aleatoria normal tome el particular valor x_1 , se puede leer en el eje de ordenadas, en $f(x_1)$.
- 19. La probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim N(x; \mu, \sigma)$, tome valores entre los particulares valores $x = x_1$ y $x = x_2$, está representada por el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad comprendida entre x_1 y x_2 .
- 20. No cualquier variable aleatoria $X \sim N(x; \mu, \sigma)$ se puede transformar en otra variable aleatoria $Z \sim N(z; 0, 1)$.
- 21. La distribución de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno, se llama distribución normal estándar.
- 22. La probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim N(x; \mu=4, \sigma=2)$ tome valores entre 4,5 y 5,5 es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar tome valores entre 0,25 y 0,75.
- 23. La probabilidad de que una variable aleatoria normal, con media seis y desviación estándar igual a dos, tome valores *menores que seis*, es igual a la probabilidad de que la misma variable tome valores *menores o iguales que seis*.
- 24. La curva de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal, es simétrica respecto de un eje vertical que pasa por el valor de la media.
- 25. La función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal, siempre y sin restricción alguna, toma el valor 0,5 para el valor particular de la variable igual a la media de la distribución.
- 26. * El percentil sesenta y siete de la una variable normal estándar es igual a 0,44.
- 27. El quinto decil de una variable normal estándar es igual a 0,5.

- ☐ 28. El percentil treinta y tres de cualquier variable aleatoria normal es igual a $-0,44$.
- ☐ 29. La probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar tome valores mayores que uno, es igual a $0,841$.
- ☐ 30. Cuando se mantiene constante el valor de la media, a medida que la desviación estándar aumenta, la curva de la distribución normal va perdiendo simetría.

3. Aproximación normal a la distribución binomial a la normal

- ☐ 31. Dado que la distribución binomial siempre resulta simétrica, siempre se pueden obtener buenos resultados, calculando probabilidades binomiales utilizando la distribución normal.
- ☐ 32. Algunas veces, cuando la distribución binomial adquiere forma de campana simétrica, la distribución normal es una buena aproximación de la binomial.
- ☐ 33. La distribución binomial se aproxima bien por la normal cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande.
- ☐ 34. La aproximación normal es excelente para evaluar probabilidades binomiales cuando n es suficientemente grande, y muy buena, para valores pequeños de n , si p es razonablemente cercano a $0,5$.
- ☐ 35. En la práctica, si se cumple que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, la aproximación normal para evaluar probabilidades binomiales será aceptable.
- ☐ 36. Si $X \sim \text{binomial}(x; n = 15, p = 0,4)$ y se dan las condiciones para aproximar el cálculo de probabilidades utilizando la distribución normal, entonces se puede verificar que $P(4 \leq X < 8) = P(-1,318 < Z < +0,791)$.
- ☐ 37. Para efectuar la aproximación normal a la binomial, es necesario efectuar la corrección por continuidad de la variable.

4. Distribución gamma y exponencial

- ☐ 38. La media y la varianza de la distribución gamma son $\alpha\beta$ y $\alpha\beta^2$ respectivamente.
- ☐ 39. La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma.
- ☐ 40. La función de densidad de probabilidad, $f(x)$, de una variable aleatoria continua X que tiene una distribución exponencial con parámetro β , es igual a uno para todo $x < 0$.
- ☐ 41. La función de densidad de probabilidad, $f(x)$, de una variable aleatoria continua X que tiene una distribución exponencial, es simétrica respecto de un eje vertical que pasa por la media.
- ☐ 42. La media y la varianza de la distribución exponencial son, respectivamente, β y β^2 .
- ☐ 43. La función de densidad de probabilidad $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ es la función de densidad de probabilidad de la distribución exponencial con $\lambda = 1/\beta$.

- 44. Para $\beta = 1$, a medida que aumenta α , la distribución gamma tiende a cambiar su forma: de sesgada a la derecha tiende a la simetría.
- 45. Para cualquier $\beta = \text{constante}$ y α positivo, la distribución gamma resulta sesgada a la derecha.

5. Distribución Ji Cuadrada

- 46. La distribución ji-cuadrada se genera sumando variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente.
- 47. La distribución ji-cuadrada es un caso particular de la distribución gamma.
- 48. La media y la desviación estándar de la distribución ji-cuadrada son v y $2v$, respectivamente, siendo v el número de g.d.l..
- 49. Si graficamos dos funciones de densidad de probabilidad de variables aleatorias con distribución ji-cuadrada, donde la *media* de la primera es *menor* que la *media* de la segunda, la curva de la segunda será más baja y se extenderá más lejos.
- 50. La distribución ji-cuadrada tiene un papel importante en la metodología y en la teoría de la inferencia estadística.
- 51. Los parámetros de la distribución ji-cuadrada son dos: el tamaño de la muestra, n , y el número de g.d.l., v .
- 52. La distribución ji-cuadrada está definida, con valores distintos de cero, para valores de la variable aleatoria comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$.
- 53. La probabilidad de que una variable aleatoria con distribución ji cuadrada, de parámetro igual a 30, tome valores menores que $(-13,787)$, es igual a 0,995.
- 54. La probabilidad de que una variable aleatoria con distribución ji cuadrada, de parámetro igual a 25, tome valores mayores que (-2) , es igual a uno.
- 55. La probabilidad de que una variable aleatoria con distribución ji cuadrada, de parámetro igual a 10, tome valores menores o iguales que la media, es igual a 0,5.
- 56. La suma de n variables aleatorias independientes distribuidas normalmente, genera una variable aleatoria con distribución ji cuadrada de parámetro igual a n .

6. Distribución logarítmica normal

- 57. La distribución logarítmica normal se aplica en casos donde una transformación de logaritmo natural tiene como resultado una distribución normal.
- 58. La variable aleatoria continua X tiene una distribución logarítmica normal si la variable $Y = \ln(X)$ tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ .

7. Distribución de Weibull

- 59. Los parámetros de la distribución de Weibull son su media y su varianza.
- 60. La *confiabilidad* de un componente o producto, se define como la probabilidad de que funcione apropiadamente por lo menos un tiempo específico, bajo condiciones experimentales específicas.
- 61. Una de las distribuciones de aplicación en problemas de confiabilidad de componentes que forman los sistemas, es la distribución de Weibull.
- 62. La función de densidad de una variable aleatoria con distribución de Weibull, es siempre simétrica respecto de un eje vertical que pasa por la media.

8. Distribución t

Abrev. **g.d.l.**: grados de libertad

- 63. Sea Z una variable aleatoria normal estándar y sea V una variable aleatoria que sigue una distribución ji cuadrada con v g.d.l. Si Z y V son independientes, entonces la distribución de la variable aleatoria T se conoce como la distribución t , con v g.d.l., donde
$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{v}}}$$
.
- 64. Una variable aleatoria con distribución t se define como el cociente entre una variable aleatoria normal estándar y la raíz cuadrada del cociente entre una variable aleatoria con distribución ji cuadrada y su número de g.d.l., siendo las variables independientes.
- 65. La distribución de una variable aleatoria T , con distribución t , difiere de la distribución de una variable normal estándar Z , en que la varianza de T depende del tamaño de la muestra n y siempre es mayor que uno. Sólo cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito ($n \rightarrow \infty$) las dos distribuciones coincidirán.
- 66. Si bien la distribución de T y la distribución de Z tiene forma de campana, la distribución de t es más variable que la de Z , debido al hecho de que los valores de T dependen de las fluctuaciones de dos cantidades, $\bar{X}$ y S^2 , mientras que los valores de Z dependen sólo de los cambios de $\bar{X}$ de una muestra a otra.
- 67. Si graficamos dos variables aleatorias con distribución t , donde v_1 es el número de g.d.l. de la primera y v_2 el de la segunda, y $v_1 < v_2$, entonces la primera se extenderá más sobre el eje horizontal.
- 68. * El valor de t con $v = 10$ g.d.l. que deja a su izquierda y debajo de la curva un área igual a 0,975 y a su derecha un área igual a 0,025 es igual a 2,228.
- 69. Cuando $n \rightarrow \infty$, las distribución t y la distribución normal estándar coincidirán.
- 70. El uso de la distribución t de Student NO tiene restricciones respecto de la distribución de la población muestreada.

9. Distribución F

Abrev. **g.d.l.**: grados de libertad

- 71. La estadística F se define como el cociente entre dos variables aleatorias ji cuadradas independientes, divididas, cada una, por su número de g.d.l..
- 72. Si U y V son variables aleatorias normalmente distribuidas, con v_1 y v_2 g.d.l., respectivamente, entonces la estadística $F = [(U/v_1) / (V/v_2)]$ tiene una distribución F , con v_1 g.d.l. en el numerador y v_2 g.d.l. en el denominador.
- 73. Para graficar la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria F se necesita conocer el número de g.d.l. del numerador, v_1 , y el número de g.d.l. del denominador, v_2 .
- 74. * Utilizando la notación $(f \alpha; v_1; v_2)$, donde f es un valor particular de una variable aleatoria que sigue una distribución F , con v_1 g.d.l. en el numerador y v_2 g.d.l. en el denominador, que deja a su derecha un área bajo la curva igual a α , se puede verificar que $f_{0,05; 15; 10} = 2,85$.
- 75. * Utilizando la notación $(f \alpha; v_1; v_2)$, donde f es un valor particular de una variable aleatoria que sigue una distribución F , con v_1 g.d.l. en el numerador y v_2 g.d.l. en el denominador, que deja a su derecha un área bajo la curva igual a α , se puede verificar que $f_{0,95; 19; 20} = 0,463$.
- 76. * Utilizando la notación $(f \alpha; v_1; v_2)$, donde f es un valor particular de una variable aleatoria que sigue una distribución F , con v_1 g.d.l. en el numerador y v_2 g.d.l. en el denominador, que deja a su derecha un área bajo la curva igual a α , se puede verificar que $f_{0,01; 24; 12} = 3,03$.
- 77. Algunas aplicaciones de la distribución F tienen que ver con la comparación de varianzas muestrales y con la inferencia acerca de las varianzas poblacionales.
- 78. La estadística F se define como la suma del cuadrado de variables normales estándar independientes.
- 79. La probabilidad de que una variable aleatoria con distribución F que tiene 5 g.d.l. en el numerador y siete en el denominador, tome valores menores que -3 , es igual a uno.
- 80. * La probabilidad de que una variable aleatoria con distribución F con $v_1 = 10$ y $v_2 = 8$ tome exactamente el valor 3,35 es igual a 0,05.

10. Combinaciones lineales de variables aleatorias

Abrev. **g.d.l.**: grados de libertad

- 81. La distribución normal posee la propiedad reproductiva, esto es, la suma de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente, es una variable aleatoria normal.
- 82. Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n$, son variables aleatorias independientes que tienen, respectivamente, distribuciones ji cuadrada con $v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_n$, g.d.l., entonces la variable aleatoria que resulta de la suma de las variables independientes: $W = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_i + \dots + X_n$, tiene una distribución normal con media igual a la suma de las medias de las variables y varianza igual a la suma de las varianzas de las variables X_i .
- 83. La suma del cuadrado de variables aleatorias normales estándar independientes, tiene una distribución ji cuadrada, con parámetro igual al número de variables normales estándar cuyos cuadrados se suman.
- 84. Dada la variable aleatoria X distribuida normalmente con media igual a 50 y desviación estándar igual a 2, y la variable aleatoria Y distribuida normalmente con media igual a 20 y desviación estándar igual a 4, siendo X e Y variables aleatorias independientes, entonces la variable $W = X - Y$ tendrá una distribución normal con media igual a 30 y desviación estándar igual a 6.
- 85. Dada la variable aleatoria X que tiene una distribución ji cuadrada con 3 g.d.l. y la variable aleatoria Y que tiene una distribución ji cuadrada con 5 g.d.l., siendo X e Y variables aleatorias independientes, entonces la variable $W = X + Y$ tendrá una distribución ji cuadrada con media igual a 8 y varianza igual a 16.