1) Distribuciones:

♦ Discretas

Distribución Binomial

Función de probalilidad: $f(r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} p^{r} (1-p)^{n-r}$

$\mu = E(\tilde{r}) = np$

$\sigma^2 = D^2(\tilde{r}) = np(1-p)$

Distribución Hipergeométrica:

Función de probabilidad: $f(r) = \dfrac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$

$\mu = E(\tilde{r}) = n\dfrac{R}{N}$

$\sigma^2 = D^2(\tilde{r}) = n\dfrac{R}{N}\left(1-\dfrac{R}{N}\right)$

Relaciones para utilizar en las tablas:

$F_h(r \setminus n; N; R) = F_h(r \setminus R; N; n)$

$F_h(r \setminus n; N; R) = G_h(R-r \setminus N-n; N; R)$

$F_h(r \setminus n; N; R) = G_h(n-r \setminus n; N; N-R)$

$F_h(r \setminus n; N; R) = G_h(N-n-R+r \setminus N-n; N; N-R)$

Se define la variable Pascal Hipergeométrica:
$\tilde{n} = P_h(r; N; R)$
relacionada con la Hipergeométrica por $F_{Ph}(n \setminus r; N; R) = G_h(r \setminus n; N; R)$

Distribución Pascal:

Función de probabilidad: $f(r) = \binom{n-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{n-r}$

$\mu = E(r) = \dfrac{r}{p}$

$\sigma^2 = D^2(r) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Relaciones: $P_{pa}(n \setminus r; p) = \dfrac{r}{n} P_{bi}(r \setminus n, p)$

$F_{pa}(n \setminus r; p) = G_{bi}(r \setminus n, p)$

Distribución Poisson:

Función de probabilidad: $f(r) = \dfrac{e^{-m}.m^{r}}{r!}$

$E(r) = Var(r) = m = \lambda\, t$

Función de distribución: se encuentra tabulada.

♦ Continuas

Distribución Beta:

Función de densidad: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\rho-1}(1-x)^{\nu-\rho-1}}{B(\rho,\nu-\rho)} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \forall \text{ otro } x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \rho &= a = m \\ \nu &= a + b = m + n \end{aligned} \qquad m > 0 \qquad n > 0$$

con $B(\rho,\nu-\rho) = \dfrac{\Gamma(\rho)\Gamma(\nu-\rho)}{\Gamma(\nu)}$ y $\Gamma(r) = (r-1)!$

Función de distribución: $F(x \setminus \rho,\nu-\rho) = \dfrac{1}{B(\rho,\nu-\rho\nu)} \int_0^x y^{\rho-1}(1-y)^{\nu-\rho-1}\,dy$

$$\mu = \frac{\rho}{\nu}$$

$$\sigma^2 = \frac{\mu.(1-\mu)}{\nu+1}$$

La distribución Beta está vinculada con el proceso Bernoulli:

$\tilde{r} = bi(n;p) =$ cantidad de éxitos en n experimentos, con probabilidad de éxito p

$\tilde{n} = Pa(r;p) =$ cantidad de experimentos para obtener r éxitos, con probabilidad de éxito p.

$p = \beta(\nu = n+1; \rho = r)$ = probabilidad de éxito para obtener r éxitos en n experimentos.

Distribución Chi-cuadrado:

Función de densidad: $f(\chi^2) = \dfrac{1}{2\Gamma(\nu/2)}(\chi^2/2)^{\nu/2-1}e^{(-\chi^2/2)}$

$\mu = E(\chi^2) = \nu$ (nº de grados de libertad)

Se encuentran tabulados los fractiles de la variable. El fractil ω es el valor $\chi^2_{\nu,\omega}$ tal que la probabilidad de no superarlo es ω, o sea $P(\chi^2 < \chi^2_{\nu,\omega}) = \omega$

Distribución Exponencial:

Función de distribución: $F(x) = 1 - e^{-\lambda . t}$

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribución de extremos y modelos de Gumbel:

Gumbel del mínimo:

Función de densidad $f(u) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-e^{-(u-\theta)/\beta v}} \cdot e^{(u-\theta)/\beta}$

Función de distribución $G(u) = e^{-e^{-(u-\theta)/\beta}}$

$$\mu = \theta - C\beta \qquad C = 0.5772157$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} . \beta$$

Gumbel del máximo:

Función de densidad $f(v) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-e^{-(v-\theta)/\beta}} \cdot e^{(v-\theta)/\beta}$

Función de distribución $F(v) = e^{-e^{-(v-\theta)/\beta}}$

$$\mu = \theta + C\beta \qquad C = 0.5772157$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} . \beta$$

Distribución F de Fisher Snedecor:

Función de densidad: $f(F) = \dfrac{(\nu_1 / \nu_2)^{\nu_2 / 2} \Gamma[(\nu_1 + \nu_2)/2]}{\Gamma(\nu_1 / 2)\Gamma(\nu_2 / 2)} . \dfrac{F^{\nu_1 / 2 - 1}}{\left(1 + \dfrac{\nu_1 F}{\nu_2}\right)^{(\nu_1 + \nu_2)/2}}$

con $\Gamma(r) = (r-1)!$

Función de distribución: se encuentran tabulados los fractiles.

$$\mu = \frac{\nu_1}{\nu_2 - 2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2\nu_2^{\,2}(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}$$

Propiedad: $F_{\nu_1,\nu_2,w} = \dfrac{1}{F_{\nu_2,\nu_1,1-w}}$

Distribución Gamma:

Función de densidad: $f(x) = \dfrac{\lambda}{(r-1)!}.(\lambda x)^{r-1}.e^{-\lambda x}$

otra parametrización $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$ $\alpha = r$

$$\mu = \frac{r}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2}$$

Relación de Molina: $F_\gamma(x \setminus r, \lambda) = G_{Po}(r \setminus m = \lambda x)$

Distribución Lognormal:

Función de densidad: $f(x) = \dfrac{1}{xD\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Lnx-m}{D}\right)^2\right]}$

con $\mu^* = \mu_N$ y $\sigma^* = \sigma_N$, media y desvío estándar del logaritmo de la variable

$$m = \mu_N = Ln\left[\frac{\mu}{\sqrt{1+(\sigma/\mu)^2}}\right] \qquad D^2 = \sigma^2{}_N = Ln\left[1+\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]$$

Distribución Normal:

Función de densidad: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$

Función de distribución (utilizando la sustitución de Laplace $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$) la cual se encuentra tabulada en función de z (variable normal estandarizada con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$)

Distribución Normal Bidimensional:

Función de densidad:

$$f(x;y) = \frac{1}{2.\pi.\sigma_x.\sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2.(1-\rho 2)}\cdot\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2.\rho.\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right).\left(\frac{x-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

$$\mu_{y/x} = \mu_y + \rho.\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.(x - \mu_x)$$

$$\sigma^2{}_{y/x} = \sigma^2{}_y.\left(1 - \rho^2\right)$$

Distribución de Pareto:

Función de densidad: $f(x) = \frac{b}{x}\left(\frac{\theta}{x}\right)^b$ para $x \geq \theta$

Función de distribución: $F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^b$ para $x \geq \theta$

$$\mu = \frac{\theta.b}{b-1}$$

Distribución *t* de Student:

Función de densidad: $f(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\nu/2)} \cdot \frac{1}{(1+t^2/2)^{(\nu+1)/2}}$ $-\infty < t < +\infty$, $\nu > 0$

Función de distribución: se encuentra tabulada

Distribución Uniforme:

Función de densidad: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución de Weibull:

Función de densidad: $f(x) = \frac{b}{\omega}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\omega-1} e^{\left[-\left(x/\beta\right)^{\omega}\right]}$

Función de distribución: $F(x) = 1 - e^{\left[-\left(x/\beta\right)^{\omega}\right]}$

$$\mu = \beta.\Gamma\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)$$

$$\sigma^2 = \beta^2.\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\omega}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)\right]$$

Otra parametrización $\omega = b$; $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$

$\delta = \dfrac{\sigma}{\mu}$ (para ingresar en tablas)

- **Funciones de probabilidad acumulada**

Para distribuciones discretas:

Función de distribución izquierda: $F(r) = P(\mathrm{r} \le r) = \sum_{i=0}^{r} P_i$

Función de distribución derecha: $G(r) = P(\mathrm{r} \ge r) = \sum_{i=r}^{n} P_i$

Para distribuciones continuas:

Función de distribución izquierda: $F(x) = P(\mathrm{x} \le x)$

Función de distribución derecha: $G(x) = P(\mathrm{x} \ge x)$

1.1) Relaciones y aproximaciones:

Binomial: (aproximación)

Criterio de Mermoz: $n_o = \dfrac{0{,}23.(1-\theta)^2}{\theta^3}$ donde $\theta = min[p, 1-p]$

Si $n \ge n_0$ $\Rightarrow$ utilizar la aproximación Normal

Si $n \le n_0$ $\Rightarrow$ utilizar la aproximación por Poisson

- por Normal: $F_b(r \setminus n, p) \cong \Phi\left[\dfrac{r - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$

- por Poisson: $F_{bi}(r \setminus n; p) = F_{Po}(r \setminus m = n.p)$ si $p \le 0{,}1$

$F_{bi}(r \setminus n; p) = G_{bi}(n - r \setminus n; 1-p) \cong G_{Po}[n - r \setminus m = n.(1-p)]$

si $p \ge 0{,}9$

Beta (relación)

- por binomial: $F_\beta(x \setminus m, n) = G_{bi}(m \setminus m = n-1; x)$ para m y n no enteros hay que interpolar

- por normal: $F_{\beta}(x \backslash m, n) = G_N(\mu \backslash 0;1)$ con:

$$\mu = \frac{A.M - N}{\sqrt{\frac{A^2}{m} + \frac{1}{n}}} \qquad A = \sqrt[3]{\frac{m}{n}.\left(\frac{1}{x} - 1\right)} \qquad M = 3 - \frac{1}{3m} \qquad N = 3 - \frac{1}{3n}$$

Chi- Cuadrado:

- (relación) $F_{\chi^2}(x \backslash \nu) = F_{\gamma}(x / \alpha = \nu/2 ; \beta = 2)$

Gamma: (aproximación)

- por normal: $F\gamma(x \backslash \alpha, \beta) \cong F_N(z \backslash 0,1)$
  - si $\alpha \geq 25$ $\qquad z = \dfrac{x - \alpha.\beta}{\sqrt{\alpha}.\beta}$.
  - si $\alpha \geq 0,5$ $\qquad z = 3.\sqrt{\alpha}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{\alpha.\beta}} + \dfrac{1}{9.\alpha} - 1\right)$

Hipergeométrica:

- por binomial: $F_h(r \backslash n, N, R) \cong F_{bi}\left(r \backslash n, \dfrac{R}{N}\right)$

si: $\begin{cases} r << R \\ n << N - R \end{cases}$ o $\begin{cases} n << R \\ n - r << N - R \end{cases}$

Poisson: (aproximación)

- por Normal: $F_{Po}(r \backslash m) \cong \Phi\left(\dfrac{r - m + 0,5}{\sqrt{m}}\right)$

$$G_{Po}(r \backslash m) \cong 1 - \Phi\left(\frac{r - m - 0,5}{\sqrt{m}}\right)$$

Teorema Central del Límite: (aproximación a Normal)

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

1.2) Combinación de variables aleatorias:

1.2.1) Combinación lineal

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . \tilde{x}$$

donde λ_i son números reales

$$E\,\tilde{y} = \sum \lambda_i . E\,\tilde{x}_i$$

$$V\tilde{y} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i . \lambda_j . V(\tilde{x}_i ; \tilde{x}_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\,2} . \sigma_i^{\,2} + 2. \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i . \lambda_j . \rho_{ij} . \sigma_i . \sigma_j$$

donde $\sigma_i^{\,2} = V\,\tilde{x}_i$

ρ_{ij} coeficiente de correlación entre $\tilde{x}_i$ y $\tilde{x}_j$

es decir $Cov(\tilde{x}_i ; \tilde{x}_j) = \rho_{ij} . \sigma_i . \sigma_j$

Hay algunos casos en los que se puede conocer la distribución, con $\tilde{x}_i$ independientes:

$$\tilde{x}_i : \; bi(n_i ; p) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \sum \tilde{x}_i : \; bi(\Sigma n_i ; p)$$

$$\tilde{x}_i : \; Pa(r_i ; p) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \sum \tilde{x}_i : \; Pa(\Sigma r_i ; p)$$

$$\tilde{x}_i : \; Po(m_i) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \sum \tilde{x}_i : \; Po(\Sigma m_i)$$

$$\tilde{x}_i : \; N(\mu_i ; \sigma_i^{\,2}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \sum \lambda_i . \tilde{x}_i : \; N(\Sigma \lambda_i . \mu_i ; \Sigma \lambda_i^{\,2} . \sigma_i^{\,2})$$

$$\tilde{x}_i : \; \gamma(\alpha ; \beta) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \sum \tilde{x}_i : \gamma(\Sigma \alpha ; \beta)$$

Notar que los parámetros p y β deben ser iguales para todos los sumandos, para que se cumpla la propiedad reproductiva.

1.2.2) Mezcla de Poblaciones

Sean: $\tilde{x}$ variable aleatoria continua
$\tilde{y}$ variable aleatoria discreta

Se suponen conocidas las distribuciones condicionales continuas $F(x \backslash r)$ para cada valor de r.

$$F(x) = E_r F(x \backslash r) = \sum_r F(x \backslash r) . P(r)$$

$$E(\tilde{x}) = E_r E(\tilde{x} \backslash r) = \sum_r E_x(\tilde{x} \backslash r) . P(r)$$

Otra nomenclatura $\mu_m = \sum_r \mu_i . p_i$

$$V(\tilde{x}) = E_r V_x(\tilde{x} \backslash r) + V_r E_x(\tilde{x} \backslash r) = \sum V_x(\tilde{x} \backslash r) P(r) + \sum [E_x(\tilde{x} \backslash r) - E(\tilde{x})]^2 . P(r)$$

Otra nomenclatura $\sigma_m^{\,2} = \sum_r \sigma_i^{\,2} . p_i + \sum_r (\mu_i - \mu_m)^2 . p_i$

1.2.3) Procesos Condicionalmente Estables

θ : parámetro de un proceso condicionalmente estable que varía de lote a lote.
Si θ es continuo por naturaleza $\Rightarrow$ g(θ) : densidad de probabilidad

$$P(r) = E_{\theta} .p(r/\tilde{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r/\tilde{\theta}).g(\tilde{\theta}).d\tilde{\theta}$$

$$\mu = E_{\theta} .E(x/\theta)$$

$$\sigma^2 = E_{\theta} .D^2(x/\theta) + D^2_{\theta} .E(x/\theta)$$

1.2.4) Media y Varianza de un Producto

Sea $z = x.y$

Media: $E(z) = E(x.y)$

pero $C(x,y) = E(x.y) - E(x).E(y) \Rightarrow E(x.y) = C(x,y) + E(x).E(y)$

o sea $\mu_z = \sigma_{xy} + \mu_x .\mu_y$

Varianza: $D^2(z) = E(z^2) - [E(z)]^2$

con $E(z^2) = E(x^2.y^2) = \iint x^2.y^2 f(x,y).dx.dy = c$

resulta $D^2(z) = \mu'_{zz} - (\sigma_{xy} + \mu_x.\mu_y)^2$

si x e y son independientes $f(x,y) = f(x).f(y)$

luego:

$$E(z^2) = E(x^2.y^2) = E(x^2).E(y^2) = (\sigma^2{}_x + \mu^2{}_x).(\sigma^2{}_y + \mu^2{}_y)$$

$$D^2(z) = (\sigma^2{}_x + \mu^2{}_x).(\sigma^2{}_y + \mu^2{}_y) - \mu^2{}_x.\mu^2{}_y = \sigma^2{}_x.\sigma^2{}_y + \mu^2{}_x.\sigma^2{}_y + \mu^2{}_y.\sigma^2{}_x$$

2) Problemas económicos

- Sea $\tilde{x}$ una V.A continua y $f(x)$ su función de densidad

Se define la esperanza parcial en [a, b] como: $\overset{b}{\underset{a}{E}}(\tilde{x}) = \int_a^b x.f(x).dx$

las esperanzas parciales a izquierda y a derecha:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} x.f(x).dx \qquad J(t) = \int_{t}^{+\infty} x.f(x).dx$$

Así la esperanza parcial puede calcularse como : $\overset{b}{\underset{a}{E}}(\tilde{x}) = H(b) - H(a) = J(a) - J(b)$

Los momentos parciales de segundo orden a izquierda y derecha:

$$H_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2 . f(x).dx \qquad\qquad J_2(t) = \int_{t}^{+\infty} x^2 . f(x).dx$$

- Sea $\tilde{r}$ una V.A discreta que toma valores en el conjunto E, finito o infinito numerable y $P(r)$ su función de probabilidad

La esperanza parcial en [a, b] con a, b $\in$ E , se define como: $\underset{a}{\overset{b}{E}}(\tilde{r}) = \sum_{a}^{b} r.P(r)$

las esperanzas parciales a izquierda y a derecha:

$$H(t) = \sum_{r \le t} r.P(r) \qquad\qquad J(t) = \sum_{r \ge t} r.P(r) \qquad \text{con} \quad r \in E$$

Así la esperanza parcial puede calcularse como :

$$\underset{a}{\overset{b}{E}}(\tilde{x}) = H(b) - H(a) + a.P(a) = J(a) - J(b) + b.P(b)$$

Los momentos parciales de primero y segundo orden pueden calcularse a partir de las funciones de probabilidad acumuladas, mediante las siguientes expresiones:

Distribución	$H(x)$	$H_2(x)$
Normal	$\mu.F_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \setminus 0;1\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$(\mu^2+\sigma^2)F_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \setminus 0;1\right) - (x+\mu).\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
Gamma	$\alpha\beta.F_\gamma(x \setminus \alpha+1;\beta)$	$\alpha(\alpha+1)\beta^2.F_\gamma(x \setminus \alpha+2;\beta)$
Beta	$\frac{m}{m+n}.F_\beta(x \setminus m+1;n)$	$\frac{m.(m+1)}{(m+n).(m+n+1)}.F_\beta(x \setminus m+2;n)$
Lognormal [1]	$\mu.F_N\left(\frac{\ln x-\mu_n}{\sigma_n} - \sigma_n \setminus 0;1\right)$	$(\mu^2+\sigma^2).F_N\left(\frac{\ln x-\mu_n}{\sigma_n} - 2.\sigma_n \setminus 0;1\right)$
Weibull [2]	$\mu.F_\gamma\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^\omega \setminus 1+\frac{1}{\omega};1\right)$	$(\mu^2+\sigma^2).F_\gamma\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^\omega \setminus 1+\frac{2}{\omega};1\right)$
Binomial	$np.F_{bi}(r-1 \setminus n-1;p)$	
Pascal	$\frac{r}{p}.F_{Pa}(n+1 \setminus r+1;p)$	
Hipergeométrica	$\mu.F_H(r-1 \setminus n-1;N-1.;R-1)$	
Poisson	$m.F_{Po}(r-1 \setminus m)$	

[1]Obsérvese que μ es la media de la distribución lognormal, pero μ_n y σ_n son los parámetros de la normal asociada.

[2]Obsérvese que para calcular los momentos parciales de la distribución de Weibull se usa la distribución acumulada Gamma

Para obtener la $J(x)$ se reemplaza la F por la G. En el caso de la Normal, el segundo término aparece con el signo contrario

Propiedades:

$$H(t) + J(t) = \mu + t.p(t)$$

$$H_2(t) + J_2(t) = \mu^2 + \sigma^2$$