ESTADISTICA TECNICA

CURSO LUNES

1er CUATRIMESTRE 2005

Equipo Docente

- **Profesor Titular Consulto:** Ing Mermoz
- **Profesor Asociado :** Ing García
- **Profesores Adjuntos**: Lic. Pano, Ing. Mutz.

Curso Lunes

- Ing Javier Gil
- Ing. Jorge Bursky
- Ing María de los Angeles Sarquis
- Sra María Stewart Harris
- Sr Pablo Centeno Lappas

Tema		
Repaso de Distribuciones	**Módulo I**	
Combinación Lineal, TCL, Mezcla		
Esperanza Parcial y Problemas económicos		
Inferencia sobre la media	**Módulo II**	
Inferencia sobre la varianza		
Regresión lineal simple	**Módulo III**	
Regresión lineal múltiple		Parcial
Inferencia comparación de Poblaciones Normales	**Módulo II**	
Inferencia en Procesos de Poisson		
Inferencia en Procesos de Bernoulli		
Análisis de La Varianza	**Módulo III**	
Ténicas de Muestreo		
Ajuste de Distribuciones		Evaluación Integradora

Bibliografía

Inferencia Estadística y Diseño de Experimentos (Ing. García, Eudeba 2004) (*)

Apuntes Estadística Técnica (Ing. Mermoz)

Probabilidad y Estadística para Ingenieros (Walpole & Myers) Ed. Prentice Hall

Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos (Canavos) Ed. Mc Graw Hill

Trabajos Prácticos de Estadística Técnica (*)

(*) Mínimo Indispensable

Clase Repaso Distribuciones
Bibliografía sugerida

Inferencia Estadística y Diseño de Experimentos (Ing. García, Eudeba 2004) (Cap. I y Cap. XV)

Apuntes de Estadística Técnica: Ing. Mermoz (Cap 1 al 5)

Variables Aleatorias

Sucesos Aleatorios: resultados cualitativos o cuantitativos

Variable Aleatoria: es una función que le asigna a cada suceso aleatorio de un determinado experimento un número real

Variable Aleatoria Discreta: el número de valores que puede tomar es contable (finito o infinito)

Variable Aleatoria Continuas: sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta real

Variables Aleatorias Discretas

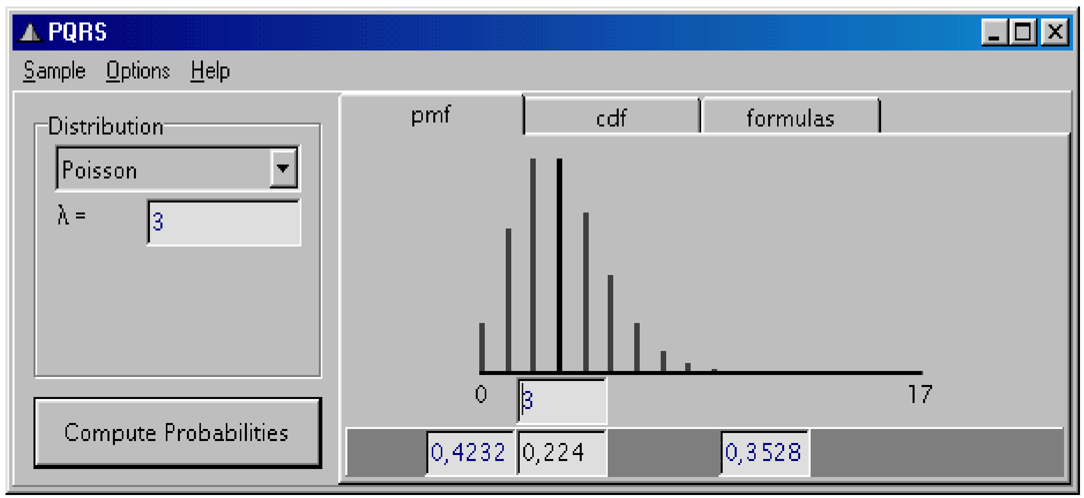
Función de Probabilidad:

Definición: Dada una variable aleatoria ***X***, *p(x)* es una función de probabilidad si cumple:

$$p(x) \geq 0 \quad \forall\, x$$

$$\sum p(x) = 1$$

Notación: p(x) = p(X=x)



Variables Aleatorias Discretas

Función de Distribución o Probabilidad Acumulada.

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x \leq x_i} p(x_i)$$

$$G(x) = p(X \geq x) = \sum_{x \geq x_i} p(x_i)$$

$$F(x) + G(x) = 1 + p(x)$$

$$G(x) = 1 - F(x-1)$$

$$p(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a-1)$$

Variables Aleatorias Continuas

RECORDEMOS ***P (X=x) = 0 , nos interesan entonces las probabilidades de intervalos***

Función de densidad : f(x) es una función de densidad de probabilidad si cumple

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x$$

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = p(a \leq x \leq b)$$

Variables Aleatorias Continuas

Función de Distribución o Probabilidad Acumulada.

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$G(x) = p(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$F(x) + G(x) = 1$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = G(a) - G(b)$$

Variables Aleatorias
Medidas Descriptivas

Momentos

$$E(x) = \mu = \int_{\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E(x^K) = \int_{\infty}^{\infty} x^K\, f(x)\, dx$$

$$E(x-\mu)^K = \int_{\infty}^{\infty} (x-\mu)^k\, f(x)\, dx$$

$$Var(x) = \int_{\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

$$E(x) = \mu = \sum x_i\, p(x_i)$$

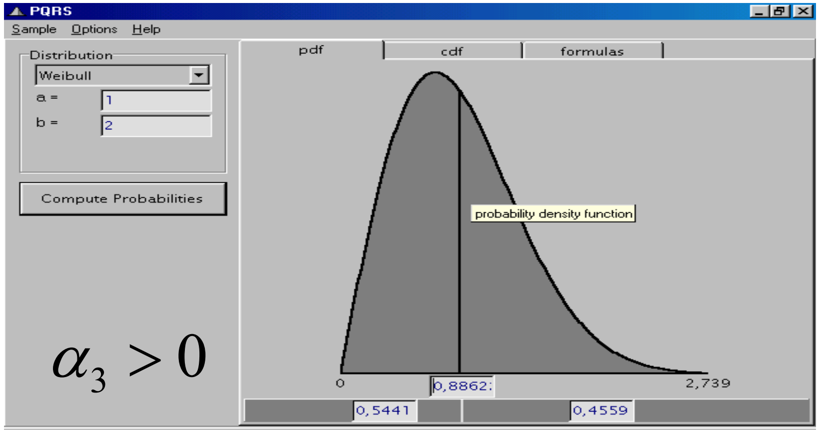
$$E(x^K) = \sum x_i^{\ k}\, p(x_i)$$

$$E(x-\mu)^k = \sum (x-\mu)^k\, p(x)$$

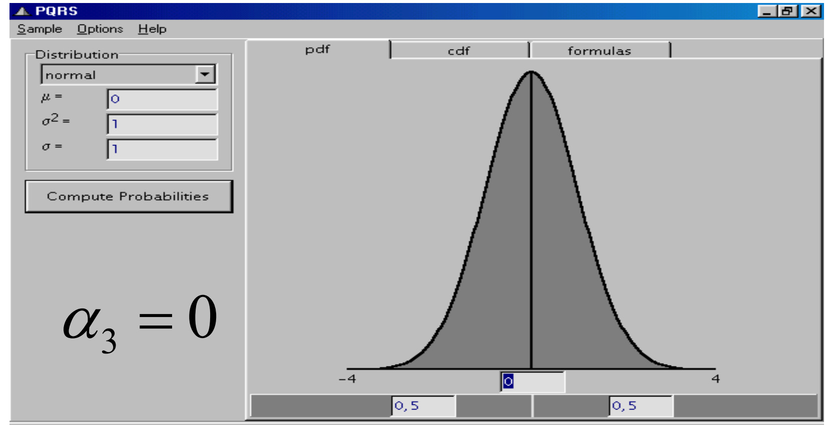
$$Var(x) = \sum (x-\mu)^2\, p(x)$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

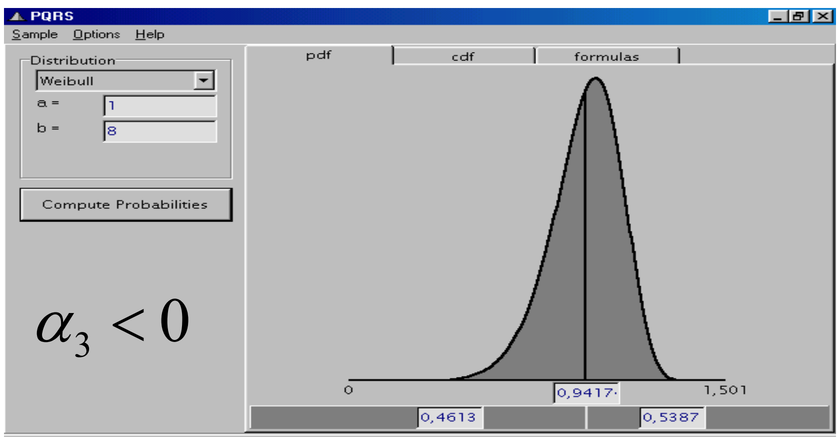
Sesgo



Asimetría positiva



Simétrica



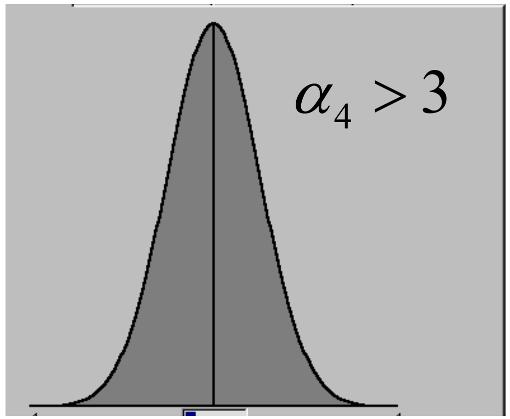
Asimetría negativa

Coeficiente de asimetría

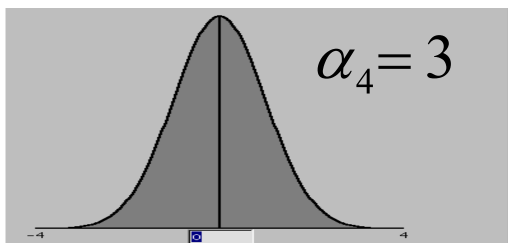
$$\alpha_3 = E(x-\mu)^3 / (Var(x))^{3/2}$$

Curtosis

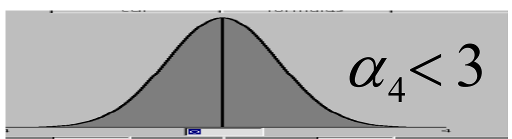
leptocúrtica



mesocúrtica



platicúrtica



Coeficiente de curtosis

$$\alpha_4 = E(x-\mu)^4 / (Var(x))^2$$

Variables Aleatorias

Discretas

- Bernoulli
- Pascal
- Binomial
- Poisson
- Hipergeométrica

Continuas

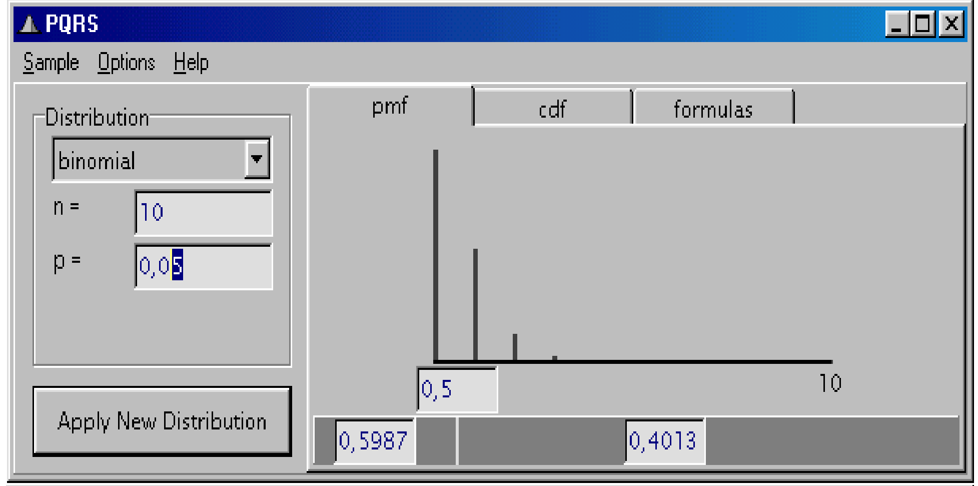
- Uniforme
- Normal
- Lognormal
- Gamma
- Beta
- Weibull
- Pareto
- Gumbel

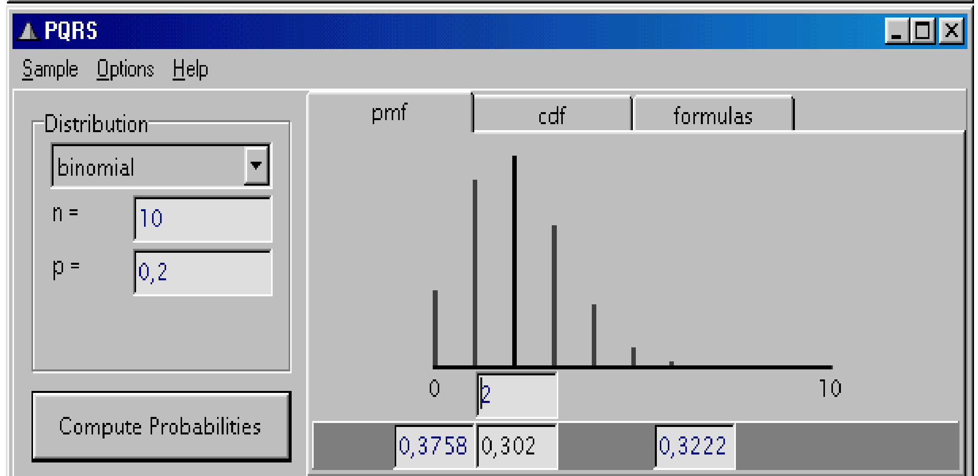
Binomial

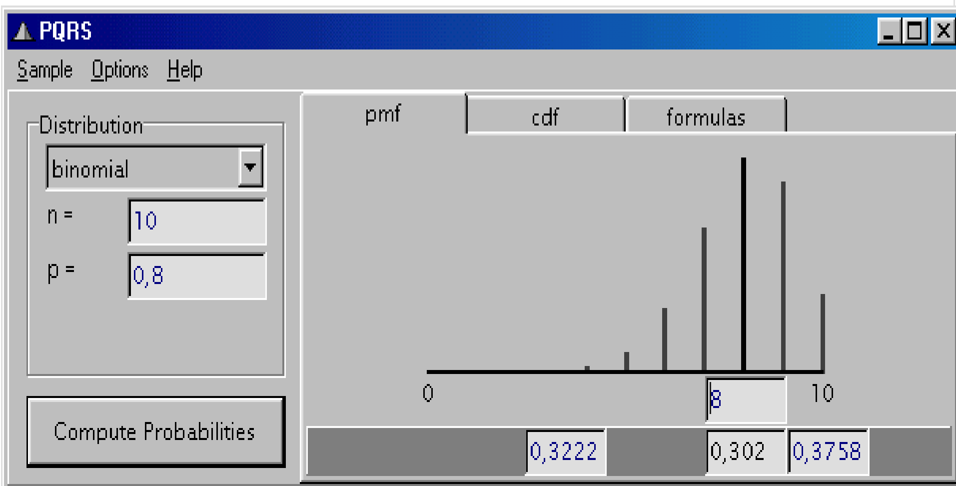
$$P_{bi}(r/n;p)=\left[\frac{n}{r}\right]p^{r}(1-p)^{n-r}$$

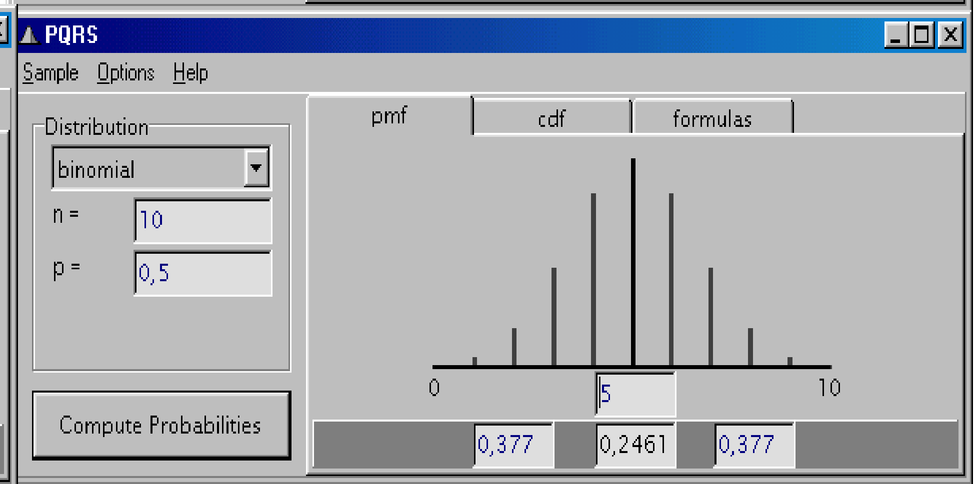
$$E(r)=n.p$$

$$Var(r)=n.p.(1-p)$$









Poisson

• Sucesos puntuales que ocurren en un continuo, de magnitud muy pequeña en relación a éste.

•La probabilidad de ocurrencia de los sucesos en una porción de continuo es independiente de la posición de la porción dentro del mismo

•La probabilidad de ocurrencia de un suceso dentro del continuo es independiente de la ocurrencia de sucesos en otras porciones

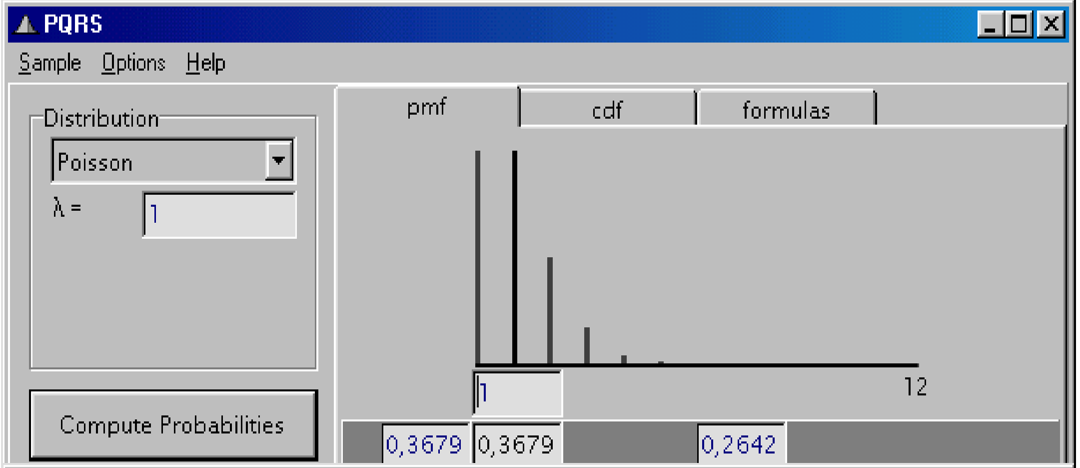
$$P_{Po}\left(r / m = \lambda\, t\right) = \frac{m^{r}\, e^{-m}}{r!}$$

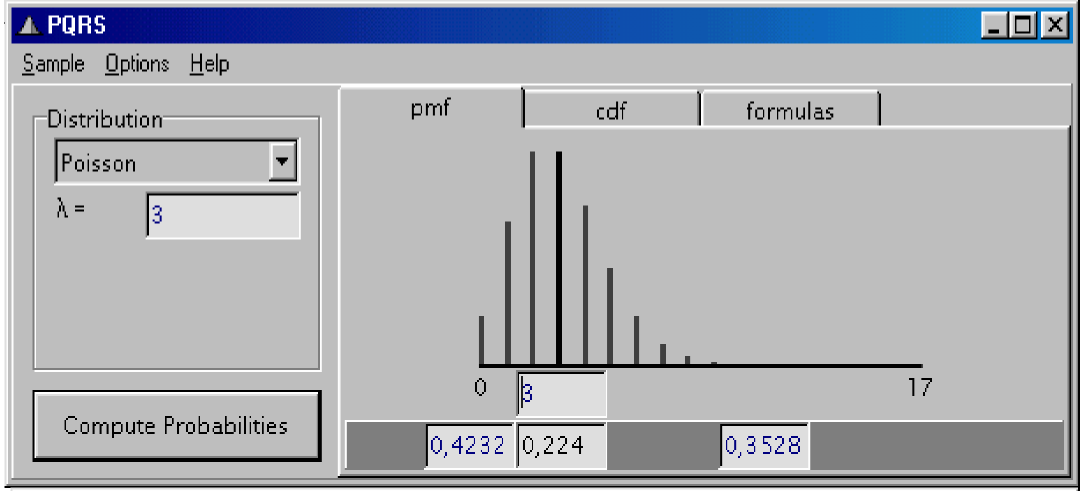
Poisson

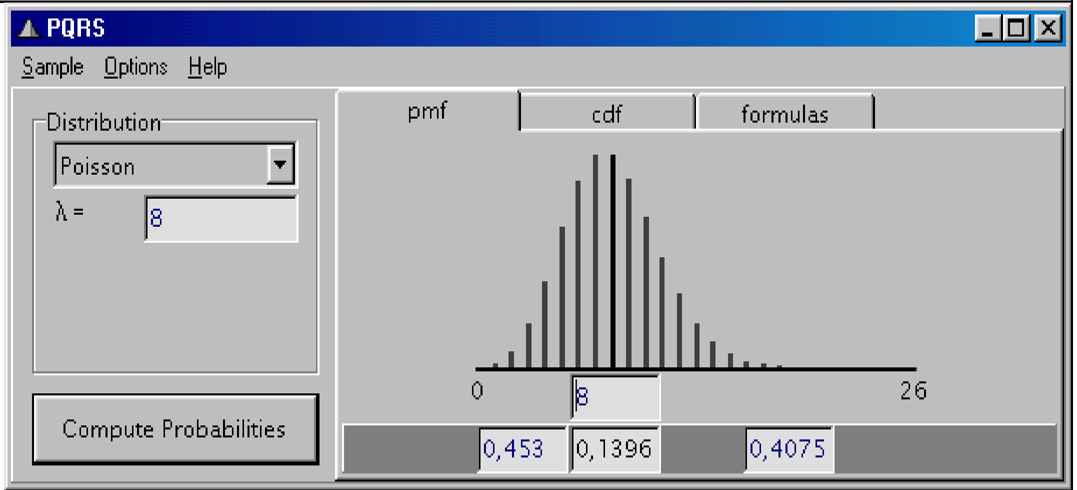
$$E(x) = Var(x) = m$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{m}$$





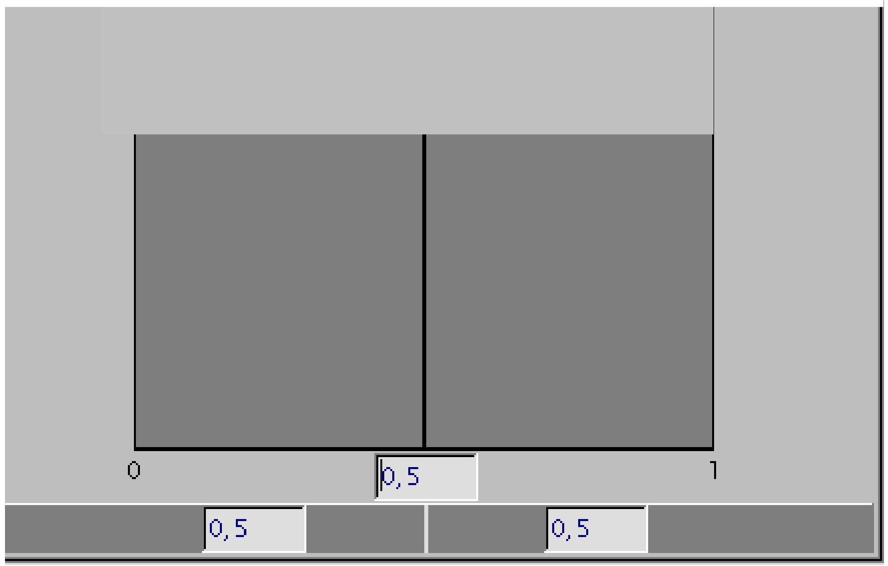


Uniforme

$$f(x) = 1/(b-a) \quad \forall\, a \le x \le b$$

$$E(x) = (a+b)/2$$

$$Var(x) = (b-a)^2/12$$



$$\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = 9/5$$

Función de Densidad: Clasificación de los Parámetros

- Forma: de ellos depende la simetría, curtosis de la curva de la función de densidad
- Posición: desplazan a la función de densidad sin alterar su forma
- Escala: contraen o expanden a la curva de la función de densidad sin alterar su forma. Pueden ser eliminados con un cambio de variable

Normal

$$f(x/\mu;\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\quad e^{-1/2(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

$$E(x)=\mu$$

$$Var(x)=\sigma^2$$

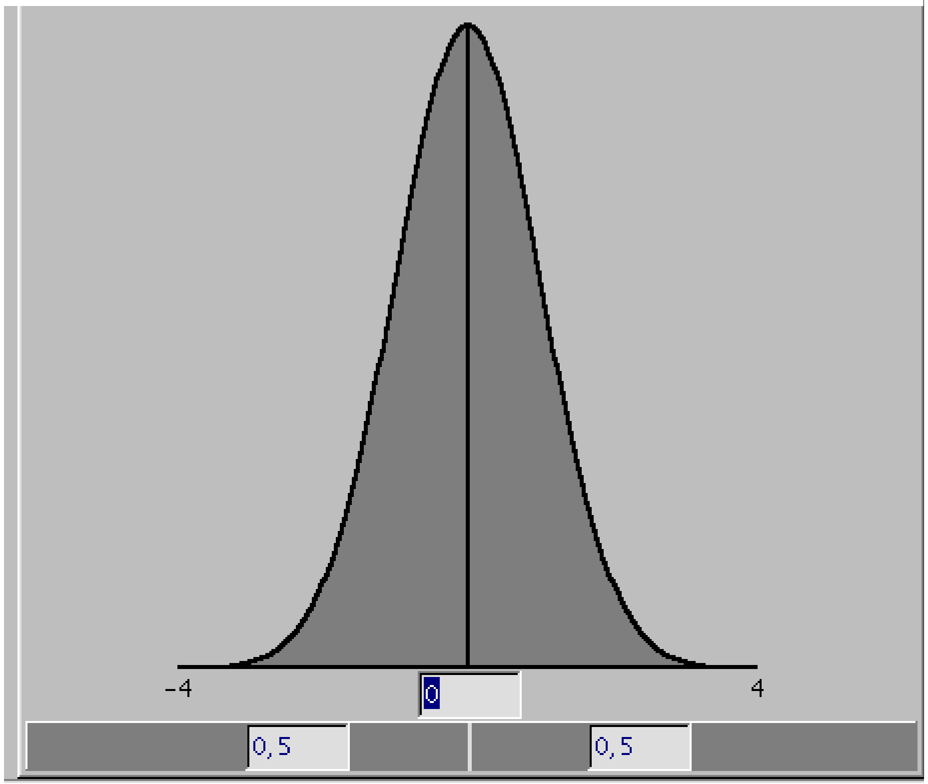
$$\alpha_3=0$$

$$\alpha_4=3$$

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$E(z)=0$$

$$Var(z)=1$$



Normal

Ejercicio Propuesto

Una PYME autopartista produce ejes en un torno. El diámetro de los ejes producidos por el torno es aleatorio de media   y varianza

Calcular el porcentaje de defectuosos para las siguientes especificaciones del diámetro

a) $\mu \pm \sigma$

b) $\mu \pm 2\sigma$

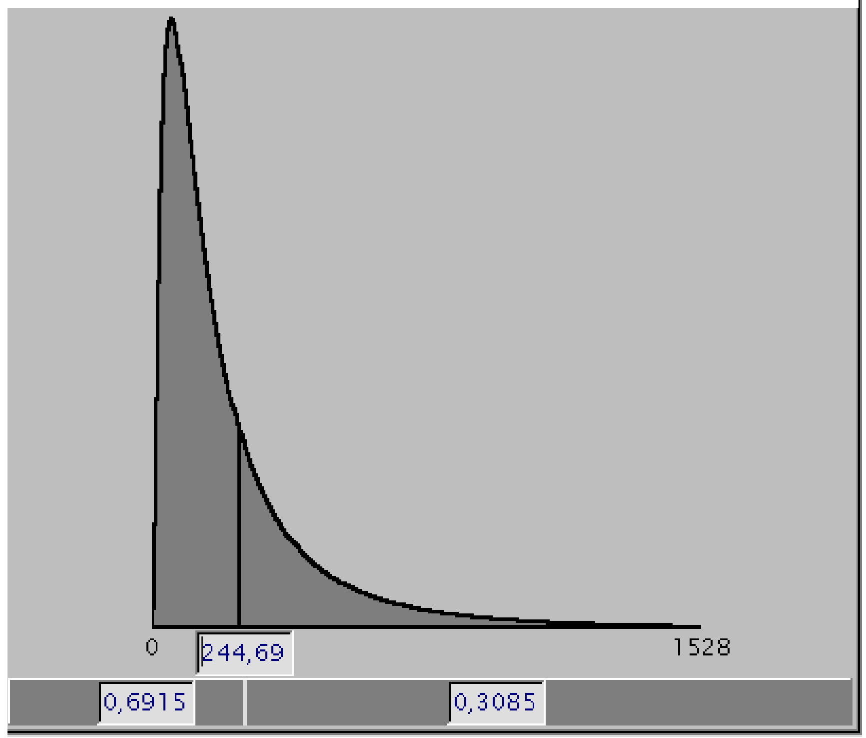
c) $\mu \pm 3\sigma$

Lognormal

$$x = e^{y} \quad \therefore \quad \ln x = y$$

$$con\ y \approx N(\mu^*, \sigma^*)$$

$$f(x/\mu^*;\sigma^*) = \frac{1}{\sigma^* x\sqrt{2\pi}} \quad e^{-1/2\left(\frac{\ln x - \mu^*}{\sigma^*}\right)^2}$$



$$E(x) = \mu = e^{\left(\mu^* + \frac{\sigma^{*2}}{2}\right)}$$

$$Var(x) = \sigma^2 = e^{(2\mu^* + \sigma^{*2})}.(e^{\sigma^{*2}} - 1)$$

$$\mu^* = \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\mu})^2}}\right) \qquad \sigma^{*2} = \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]$$

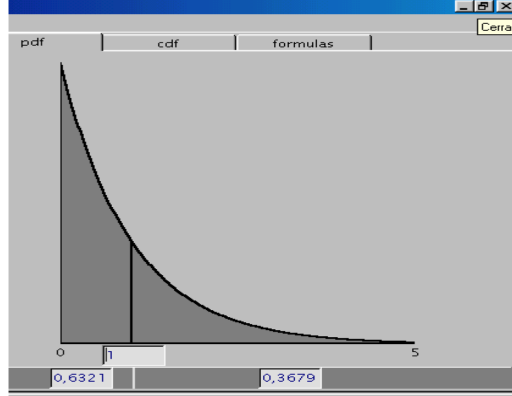
Lognormal

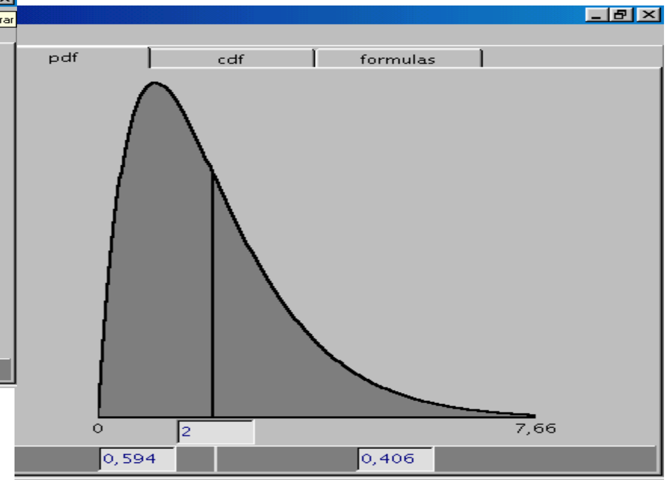
Ejercicio Propuesto

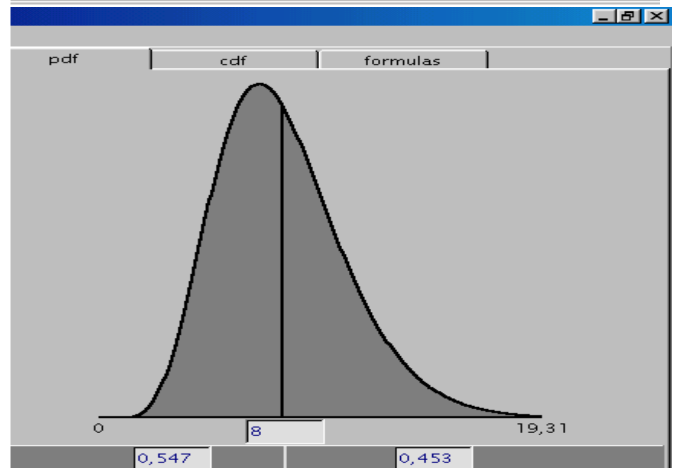
Nro 14

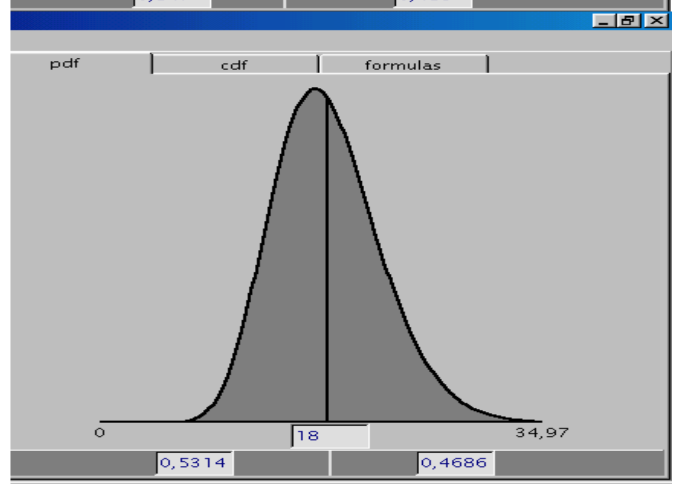
Los montos pagados en concepto de siniestros por una aseguradora en el último trimestre, pueden ser considerados distribuidos por una lognormal con valor medio$12000 y desvio $10000. Para establecer el nuevo valor para las primas a cobrar, calcular el monto que es superado por el 80% de los siniestros y el valor que solamente supera el 20% de los siniestros.

Gamma









$$f(x/\alpha;\beta)=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}e^{\frac{-x}{\beta}}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}$$

$$x\geq 0 \quad \alpha\geq 0 \quad \beta>0$$

$$E(x)=\alpha\,\beta$$

$$Var(x)=\alpha\,\beta^2$$

$$\alpha_3=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\alpha_4=3\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)$$

Forma estandarizada

$$z=\frac{x}{\beta}$$

Re*lación de MOLINA*

$$F_\gamma\left(t/\alpha=r;\beta=\frac{1}{\lambda}\right)=G_{Po}(r/m=\lambda t)$$

Gamma

Aproximación de Wilson Hilferty

$$F_{\gamma}(x/\alpha,\beta) \cong F_{N*}\left[3\sqrt{\alpha}\left[\sqrt{\frac{x}{\alpha\beta}}+\frac{1}{9\alpha}-1\right]\right]$$

Aprox.Normal $Si\ \alpha \geq 25$

$$F_{N*}\left[\frac{x-\alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2}}\right]$$

Cálculo exacto con Excel

DISTR.GAMMA(x;alfa;beta;acum)

acum=1 función de probabilidad acumulada.

Gamma

Ejercicio Propuesto

Nro 18

Las ventas mensuales de un artículo tienen distribución Gamma de media 20000 unidades y desvio 4000 unidades.

a) Calcular la venta mensual que es superada con 70% de probabilidad.

b) Calcular la probabilidad de que en un año determinado las ventas mensuales superen las 16000 unidades en más de 8 meses.

Gamma

Segundo Ejercicio Propuesto

El control de recepción de una tela consiste en revisar 5 rollos por lote. En caso de encontrar algún rollo de longitud inferior a 50 m el lote es rechazado.

La longitud de los rollos queda determinada por la aparición de la segunda falla. Se sabe que estas fallas se producen en promedio 1 cada 160 m de tela.

A) Calcular el porcentaje de lotes rechazados.

B) La longitud que puede garantizarse en un rollo cualquiera con 90% de probabilidad.

Beta

$$f\left(x / \nu \ \rho\right) = \frac{1}{\beta(\rho;\nu-\rho)} x^{\rho-1}\left(1-x\right)^{\nu-\rho-1}$$

$$0 \le x \le 1 \quad \nu > 0 \ \rho > 0$$

$$E(x) = \frac{\rho}{\nu}$$

$$Var(x) = \frac{\frac{\rho}{\nu}\left(1-\frac{\rho}{\nu}\right)}{\nu+1}$$

Otra parametrización

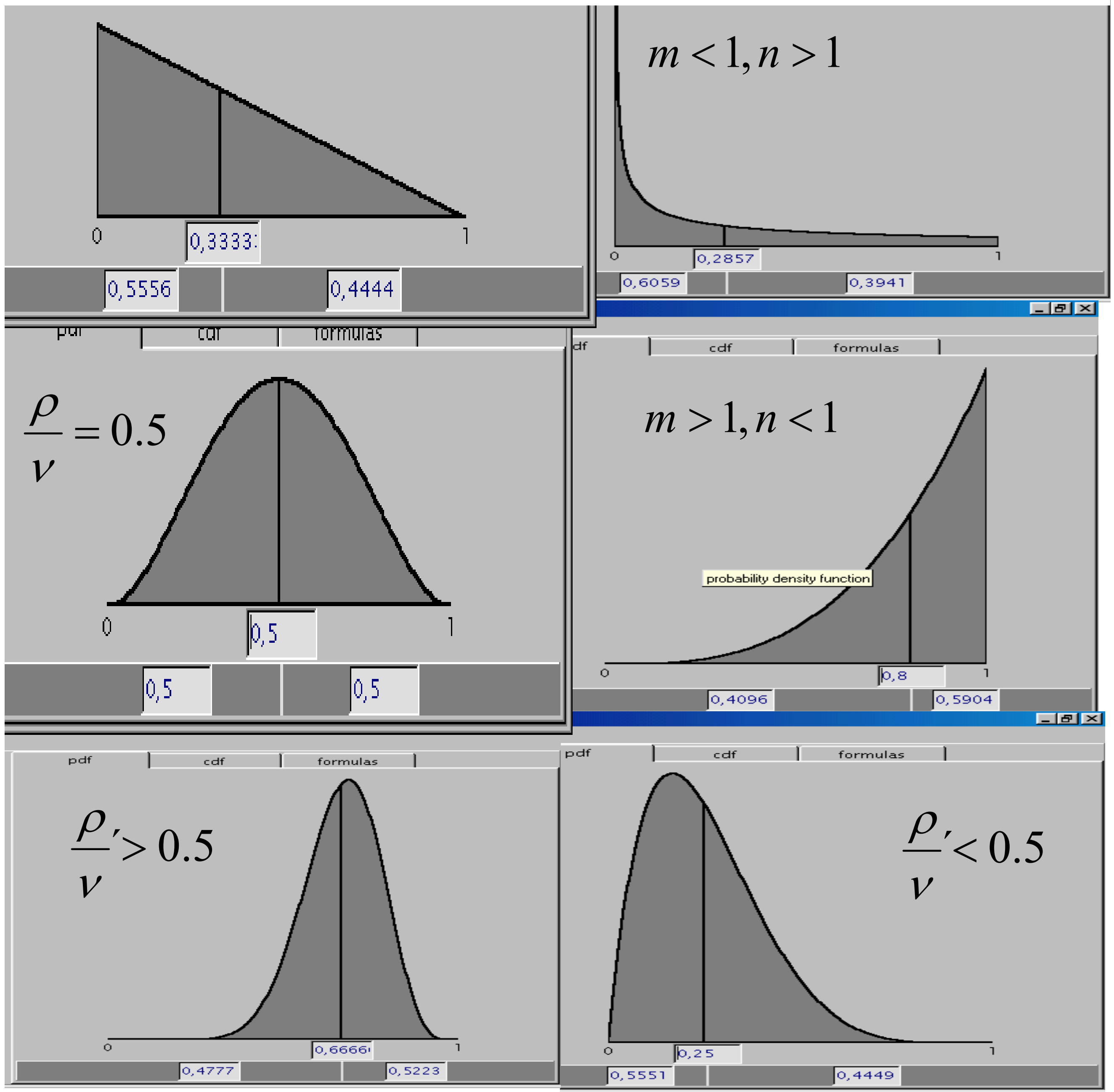
$$\rho = m$$

$$\nu = m + n$$

Re*lación con la binomial*

$$F_{\beta}\left(x / \nu , \rho\right) = G_{bi}\left(\rho / n = \nu - 1 \, ; \, p = x\right)$$

Beta



0
0,3333:
1
0,5556
0,4444
$m < 1, n > 1$
0
0,2857
1
0,6059
0,3941
pdf
cdf
formulas
$\frac{\rho}{\nu} = 0.5$
0
0,5
1
0,5
0,5
df
cdf
formulas
$m > 1, n < 1$
probability density function
0
0,8
1
0,4096
0,5904
pdf
cdf
formulas
$\frac{\rho'}{\nu} > 0.5$
0
0,6666
1
0,4777
0,5223
pdf
cdf
formulas
$\frac{\rho'}{\nu} < 0.5$
0
0,25
1
0,5551
0,4449

Beta

Aproximación de Paulson

$$F_\beta(x/m,n) \cong G_{N^*}\left[\frac{AM-N}{\sqrt{\frac{A^2}{m}+\frac{1}{n}}}\right]$$

$$A=\sqrt[3]{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$

$$M=3-\frac{1}{3m}$$

$$N=3-\frac{1}{3n}$$

Cálculo exacto con Excel

DISTR.BETA(x,m,n,0,1)

DISTR.BETA.INV(probabilidad;alfa;beta;0;1)

Beta

Ejercicio Propuesto

Nro 19

El rendimiento de un proceso de fabricación sigue una distribución Beta cuya media es de 57% y el desvio estándar de 17%.

A) Calcular la probabilidad de que durante tres días el rendimiento sea inferior al 50%

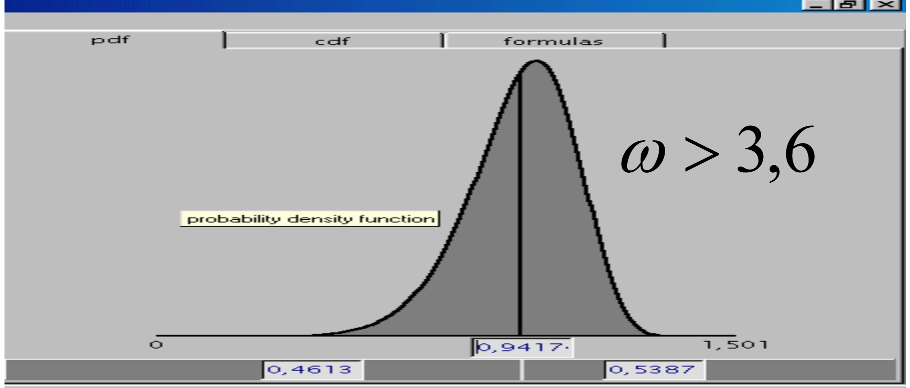
B) Calcular el valor del rendimiento que solo es superado el 5% de los casos

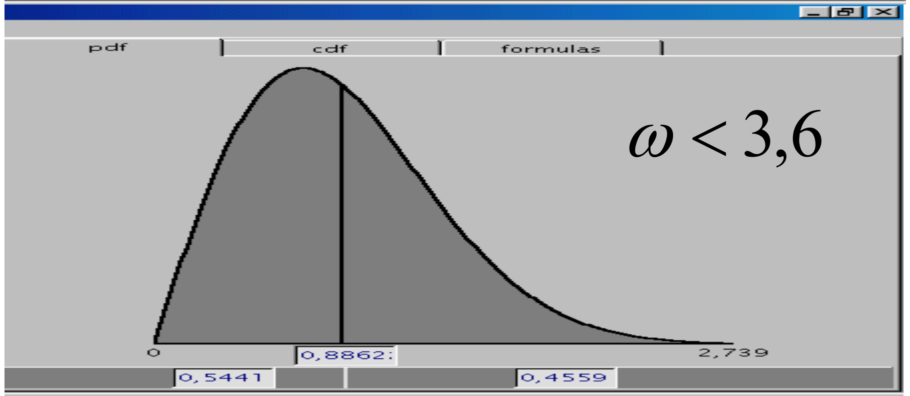
Weibull

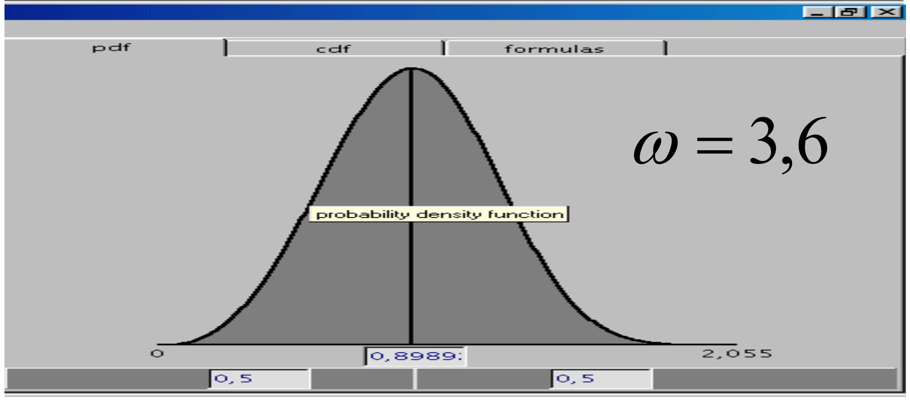
$$G_W\left(x/\omega\,;\beta\right)=e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\omega}}$$

$$E(x)=\beta\;\Gamma\left(1+\frac{1}{\omega}\right)$$

$$Var(x)=\beta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\omega}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\right]$$







Weibull

Ejercicio Propuesto

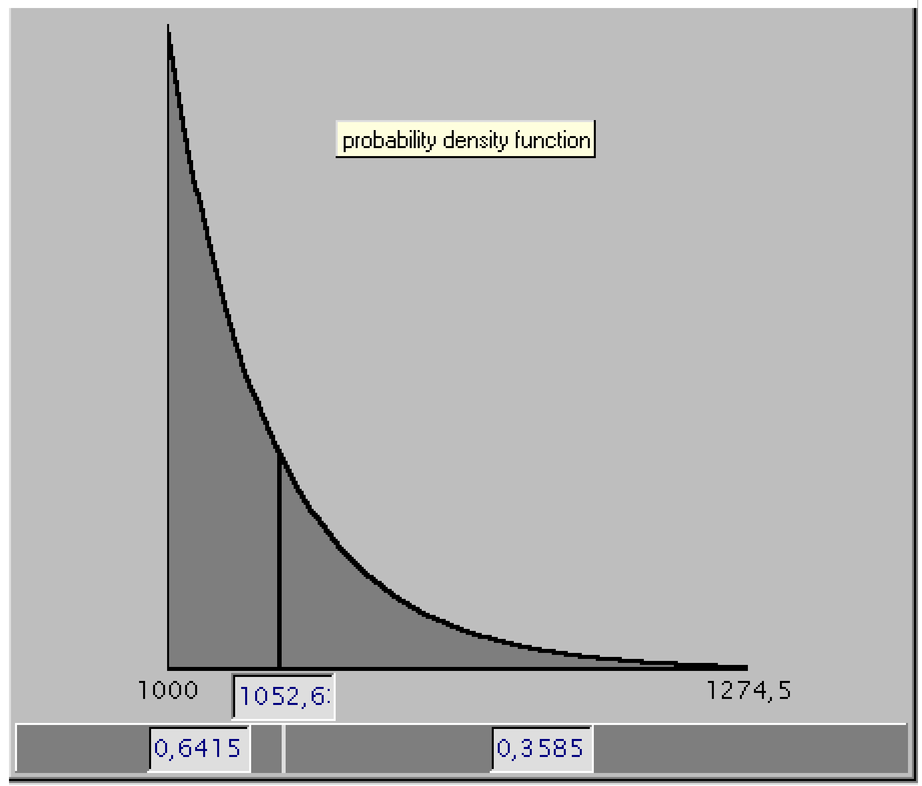
Nro 22

La resistencia a la fatiga de una pieza del motor de un avión tiene distribución Weibull. Se ha determinado que la resistencia media es de 20000 k ciclos y el desvio es de 5600 k ciclos. Se desea que la probabilidad de que la pieza falle por fatiga sea del 1%. Establecer el máximo periodo de recambio (en ciclos) para lograr la confiabilidad deseada

Pareto

$$F_P(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^b \qquad x \geq \theta$$

$$E(x) = \frac{\theta\ b}{b-1}$$



Aproximación de la Binomial

Si n>20............aproximaciones

CRITERIO CLASICO

$Si \quad n\,p > 10 \quad \wedge \quad n\,(1-p) > 10$

es valida la aproximación Normal

CRITERIO DE MERMOZ

$$0{,}23\,\frac{(1-p)^2}{p^3} = n_o$$

$\leq n \quad aproximación \quad Normal$

$$F_{bi}(r/n;p) = F_{N*}\left(\frac{r+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$> n \quad aproximación \quad Poisson$

$$F_{bi}(r/n;p) = F_{Po}(r/m = np)$$