ESTADISTICA TECNICA

INFERENCIA EN POBLACIONES NORMALES CON VARIANZA CONOCIDA

BIBLIOGRAFIA BASICA

Inferencia Estadística y Diseño de Experimentos (Ing. García, Eudeba 2004) (Cap.II y Cap.III)

Apuntes de Estadística Técnica (CEI): Ing. Mermoz (Cap11 Y 12)

Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos (Canavos, Mc Graw Hill, Cap 7, 8 y 9)

Probabilidad y Estadística Para Ingenieros (Walpole Myers, Sexta Edición, Cap 8, 9 y 10)

RECURSOS LIMITADOS

DATOS LIMITADOS

ENSAYOS DESTRUCTIVOS

POBLACION

$$f(x/\theta;\omega)$$

(finita o infinita)

MUESTRA

$$\{\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;\tilde{x}_3;\ldots;\tilde{x}_n\}$$

$$n$$

PROCESO INDUCTIVO

ESTIMACION DE PARAMETROS

PUNTUAL $\hat{\theta} \Rightarrow \theta$

POR INTERVALO $\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2$

$$\theta \geq \theta_o$$

PRUEBA DE HIPOTESIS

ESTADISTICOS

$$\phi\left(x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n\right)$$

LA MEDIA MUESTRAL

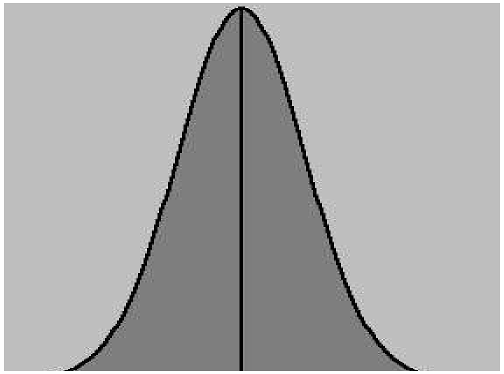
$$X \approx N(\mu ; \sigma)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

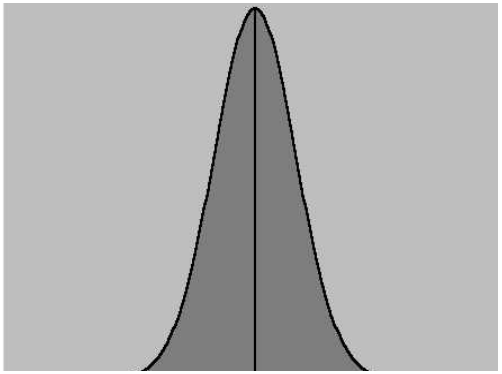
$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$X \approx N(\mu\,;\sigma)$$



$$\bar{X} \approx N\left(\mu\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



EJEMPLO

Una máquina llenadora de latas de café dosifica cantidades variables con distribución Normal de desvío 15 gramos. A intervalos regulares se toman muestras de 10 envases a fin de estimar la dosificación media. Una de las muestras arrojó un promedio de 246 gr.

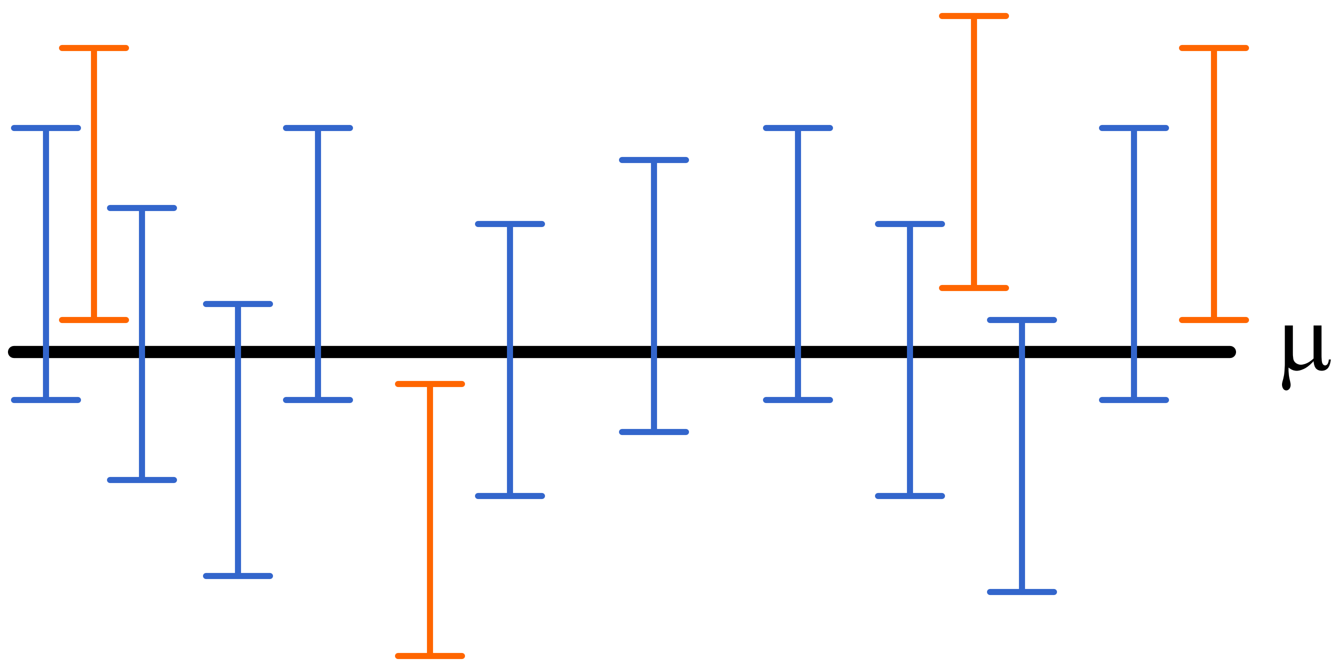
1) Calcular a un 10% los límites de confianza para la dosificación media.

2) ¿Cuántos envases más se tendrían que pesar para que el intervalo tenga un error de 5 gr. ?

INTERVALO DE CONFIANZA

$$\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2$$

$$P\left(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\right) = 1 - \alpha = NC$$



INTERVALO DE CONFIANZA

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha = NC$$

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha = NC$$

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} \leq - \mu \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(- Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \overline{X} \geq \mu \geq - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \overline{X} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \overline{X} \geq \mu \geq - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \overline{X} \right) = 1 - \alpha$$

INTERVALO DE CONFIANZA

$$P\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \overline{X} \geq \mu \geq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \overline{X} \right) = 1 - \alpha$$

$$LI = \overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LS = \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

INTERVALO DE CONFIANZA

Tamaño de muestra para una amplitud dada

AMPLITUD = LS - LI = D

$$LS - LI = \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$D = 2\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{D}{2} = Error$$

$$n = \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, \sigma}{\frac{D}{2}} \right)^2$$

EJEMPLO

En una carpintería se consideran aceptables las partidas de cedro recibidas si la longitud media de las tablas es mayor que 4 m. Por experiencia la longitud de las tablas se considera distribuida normalmente con un desvío de 0.15 m.

Se recibió una partida procedente de Salta, cuya muestra arrojó los siguientes valores:

3.8 - 3.74 - 3.98- 4.1 - 3.9

a) Aceptaría la partida si se establece en un 5% la probabilidad de rechazarla indebidamente. Calcular también el nivel de significación a posteriori.

b) ¿Cuál sería la probabilidad de aceptar una partida cuya longitud media fuese de 3.8 m?

c) ¿Cuántas tablas más se tendrían que medir si se desea disminuir la probabilidad anterior a 0.1?

d) Dibujar la curva de potencia y la característica operativa

PRUEBA DE HIPOTESIS

Se plantea una hipótesis sobre el valor que puede tomar el parámetro

$$\theta \geq \theta_o$$

(hipótesis nula ***Ho***)

Se toma una muestra aleatoria y a partir de ella se calcula un estadístico apropiado

$$\hat{\theta}_{prueba}$$

Se evalúa si el valor del estadístico es coherente con la hipótesis planteada. Para ello se define un un valor crítico del estadístico, contra el cual se efectuará la comparación

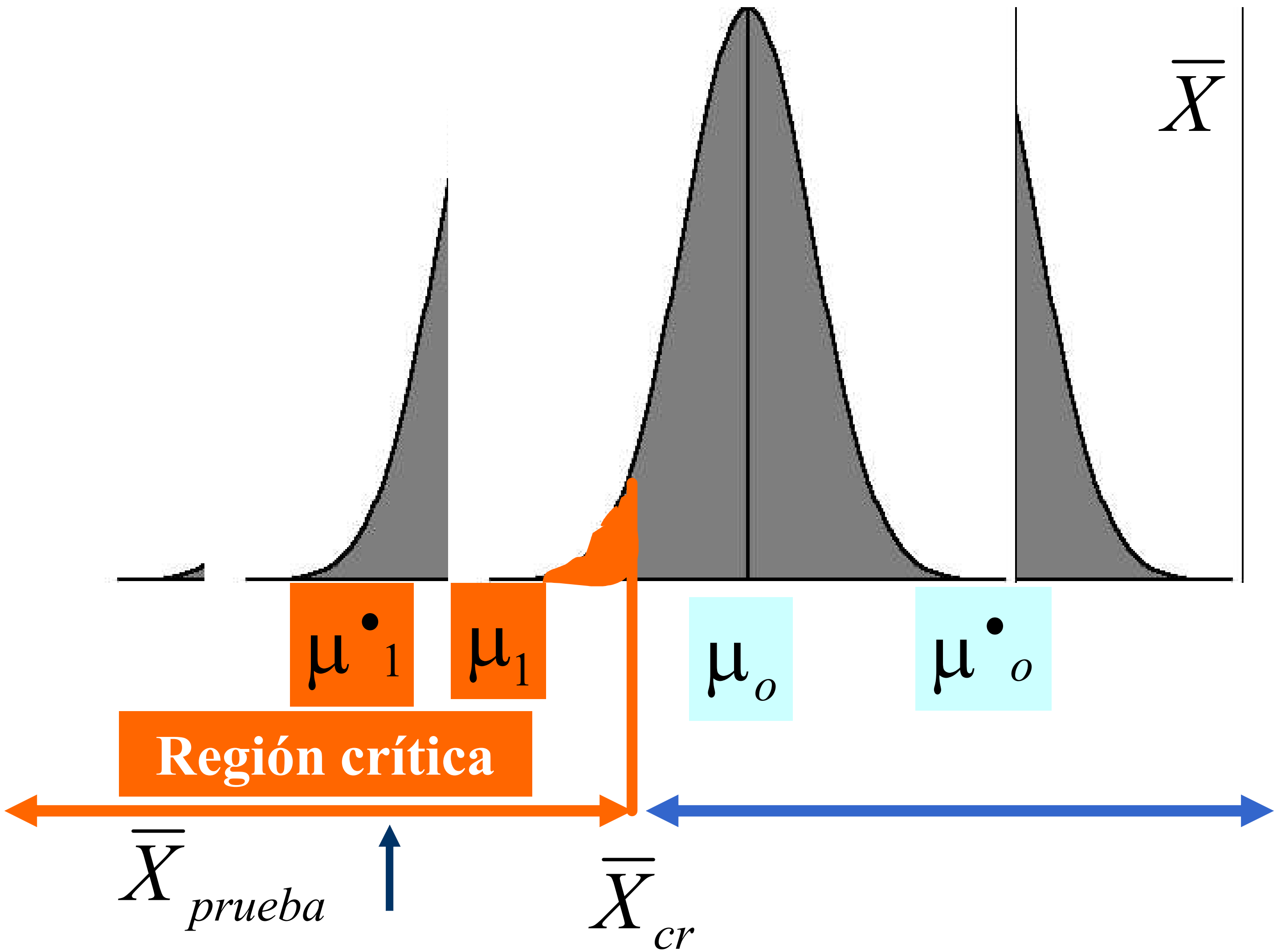
$$\hat{\theta}_{critico}$$

Si el valor del estadístico no es coherente con la hipótesis planteada se concluye con una determinada probabilidad de error que la hipótesis es falsa

$$\hat{\theta}_{pru} \leq \hat{\theta}_{crit}$$

$H_o : \mu \geq \mu_o$

$H_1 : \mu \leq \mu_o$



ENSAYO DE HIPOTESIS

	Verdadera	Falsa
Rechazar Ho	α^* **Error tipo I**	π **Potencia**
No Rechazar Ho		β **Error tipo II**

$$\pi = 1 - \beta$$

$$\alpha = max\left(\alpha^*\right) = nivel\ \ de\ significación$$

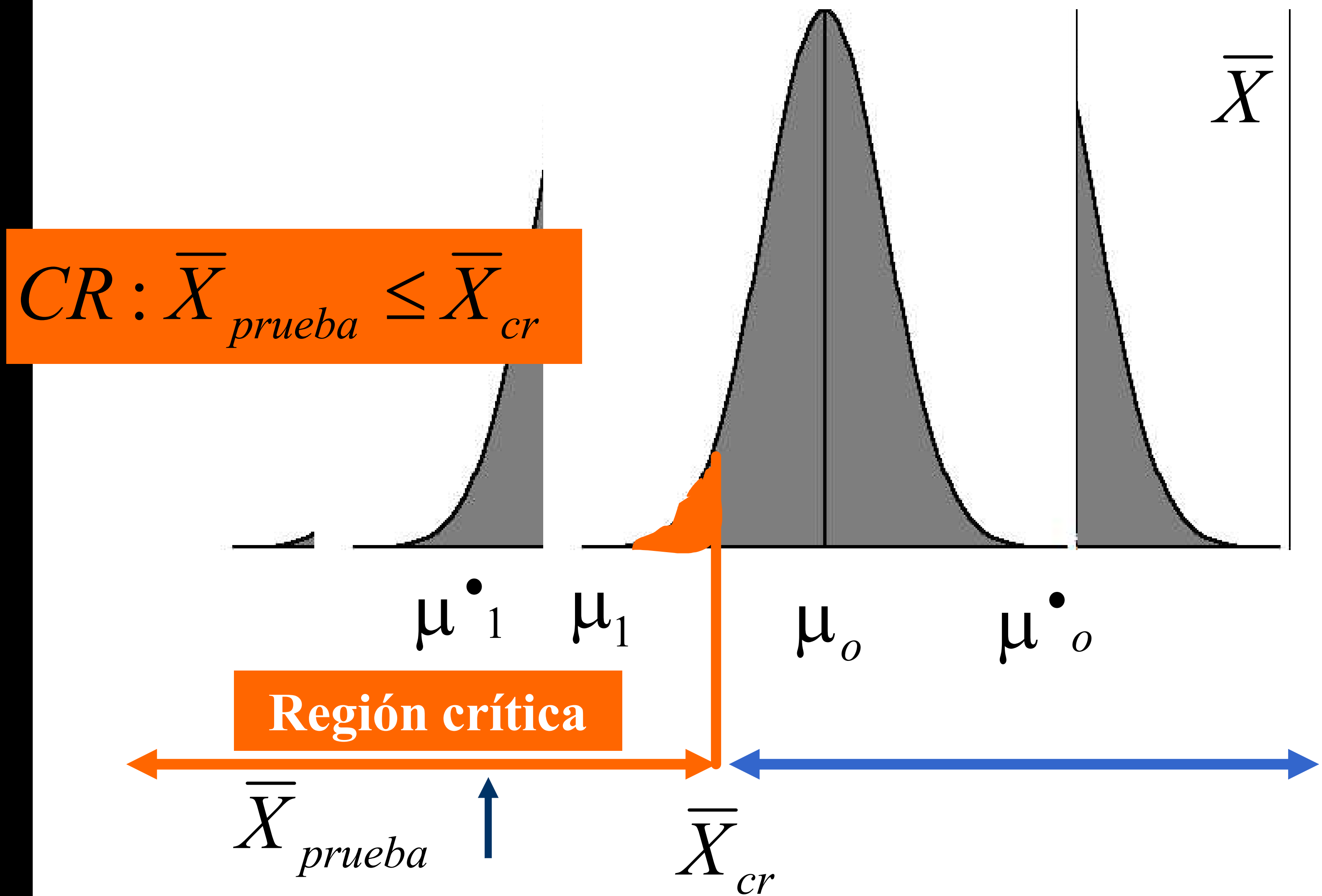
El ensayo se plantea de manera tal que cometer un error de tipo I sea más grave que el error de tipo II. Ello es así porque el error de tipo I está acotado por el nivel de significación.

ENSAYO DE HIPOTESIS

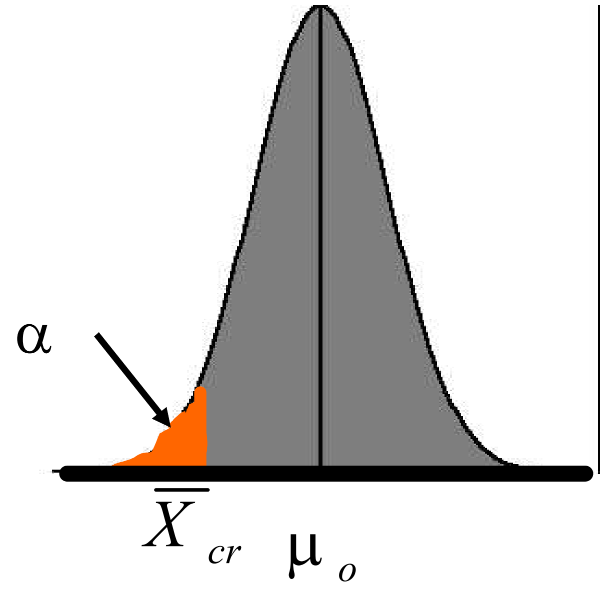
- Planteo de la hipótesis nula
- Calculo de la región crítica (condición de rechazo)
- Toma de la muestra y decisión sobre Ho
- Trazado de las curvas del ensayo

$$H_o : \mu \geq \mu_o$$

$$H_1 : \mu \leq \mu_o$$



$$H_o : \mu \geq \mu_o$$



$$CR : \overline{X}_{prueba} \leq \overline{X}_{cr}$$

$$P\left(\overline{X}_{prueba} \leq \overline{X}_{cr} / H_o\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{\overline{X}_{prueba} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X}_{cr} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\overline{X}_{cr} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_\alpha \qquad \overline{X}_{cr} = \mu_o + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

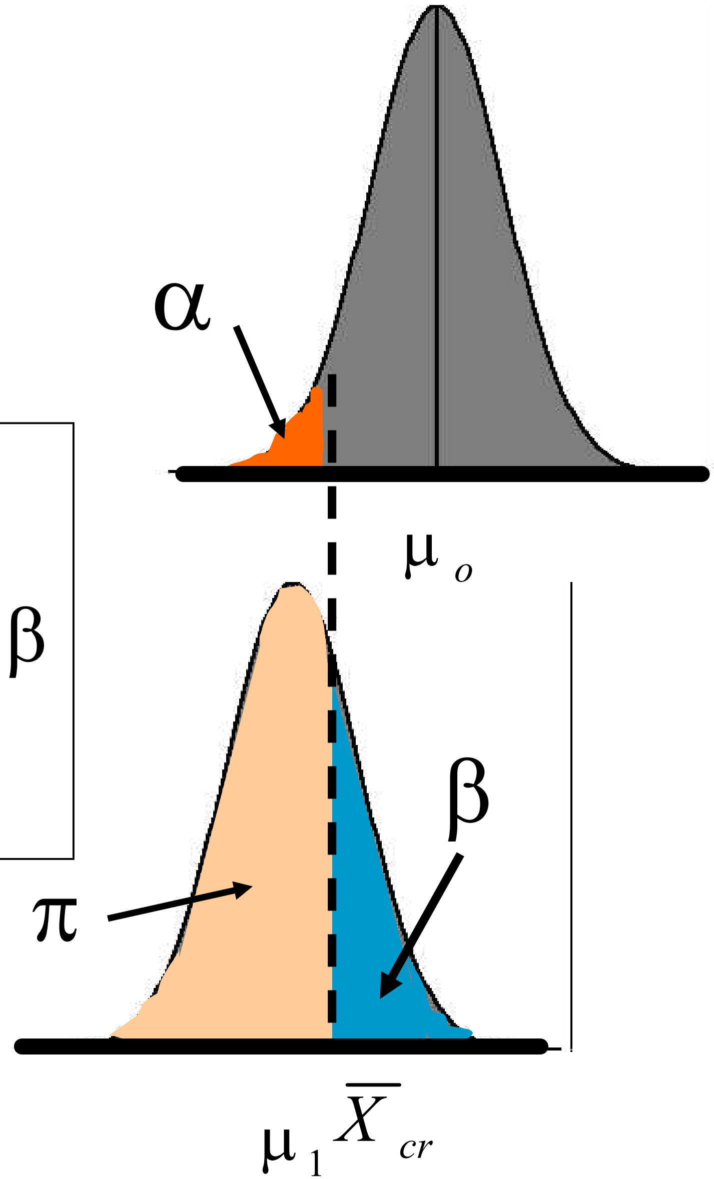
$$\boxed{\overline{X}_{cr} = \mu_o - Z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$H_o : \mu \geq \mu_o$$

$$P\left(\overline{X}_{prueba} \geq \overline{X}_{cr} / H_1\right) = \beta$$

$$\boxed{P\left(\frac{\overline{X}_{prueba} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\overline{X}_{cr} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \beta}$$

$$\boxed{\pi = 1 - \beta}$$



$$H_o : \mu \geq \mu_o$$

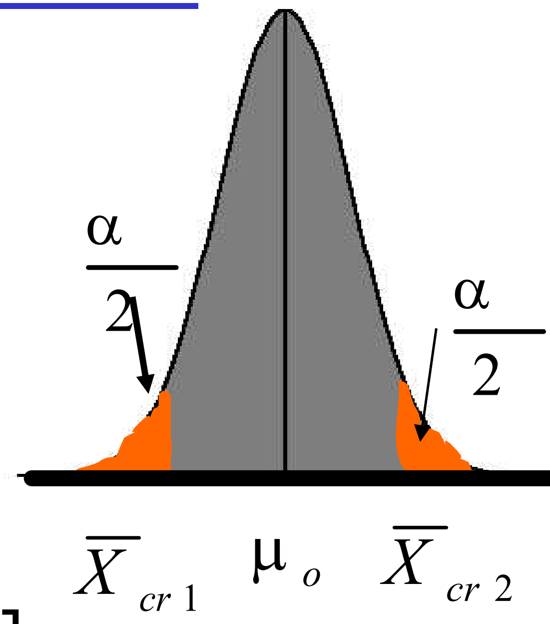
$$P\left(\frac{\overline{X}_{prueba} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\overline{X}_{cr} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) = \beta \qquad P\left(\frac{\overline{X}_{prueba} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X}_{cr} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) = \alpha$$

$$\frac{\overline{X}_{cr} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_{1-\beta} \qquad \frac{\overline{X}_{cr} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -Z_{1-\alpha}$$

$$\frac{\overline{X}_{cr} - \mu_1 - \overline{X}_{cr} + \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha}$$

$$\boxed{n = \left(\frac{\left(Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha}\right)\sigma}{\mu_o - \mu_1} \right)^2}$$

ENSAYOS BILATERAL



$H_o : \mu = \mu_o \qquad H_1 : \mu \neq \mu_o$

$$CR : \left(\overline{X}_{prueba} \leq \overline{X}_{cr1}\right) \cup \left(\overline{X}_{prueba} \geq \overline{X}_{cr2}\right)$$

$$P\left[\left(\overline{X}_{prueba} \leq \overline{X}_{cr1}\right) \cup \left(\overline{X}_{prueba} \geq \overline{X}_{cr2}\right) / \mu_o\right] = \alpha$$

$$P\left[\left(\overline{X}_{prueba} \leq \overline{X}_{cr1}\right) / \mu_o\right] = \frac{\alpha}{2}$$

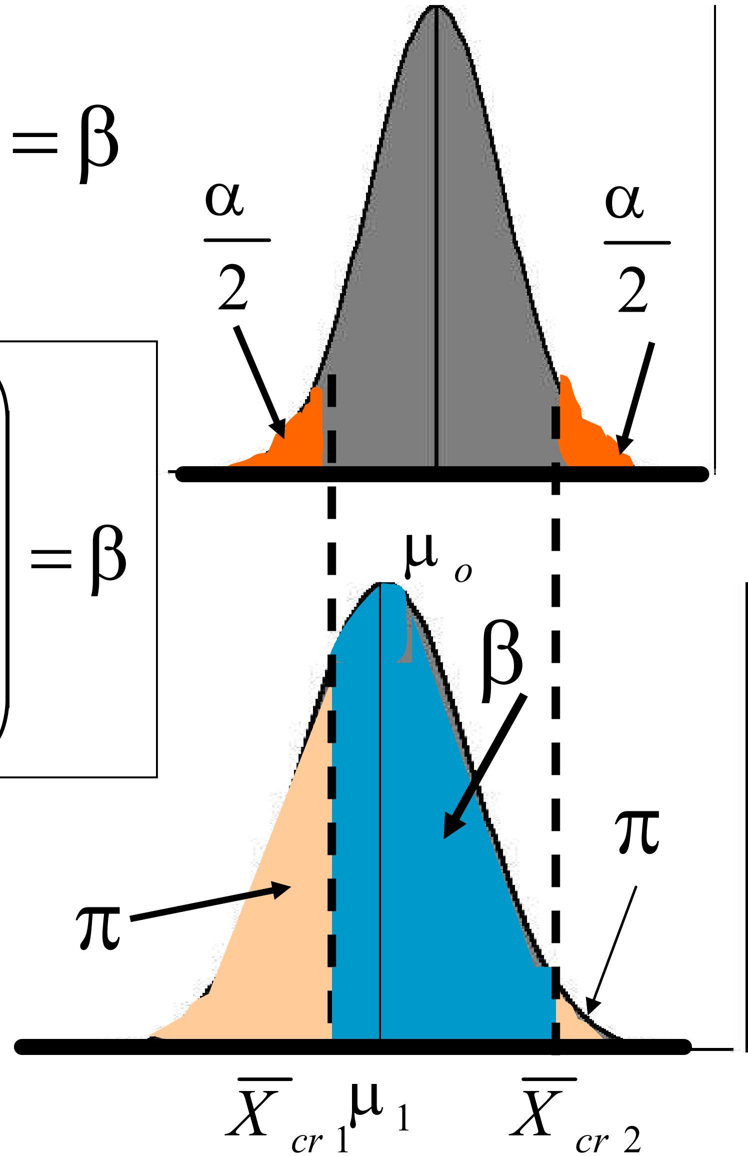
$$\boxed{\overline{X}_{cr1} = \mu_o - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$P\left[\left(\overline{X}_{prueba} \geq \overline{X}_{cr2}\right) / \mu_o\right] = \frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\overline{X}_{cr2} = \mu_o + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$P\left(\bar{X}_{cr1} \le \bar{X}_{prueba} \le \bar{X}_{cr2} / \mu_1\right) = \beta$$

$$\boxed{F\left(\frac{\bar{X}_{cr2} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - F\left(\frac{\bar{X}_{cr1} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \beta}$$



$$\boxed{\pi = 1 - \beta}$$

$$\boxed{n = \left(\frac{\left(Z_{1-\beta} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\sigma}{\mu_o - \mu_1}\right)^2}$$