CALCUL DE PRIMITIVES

1. Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $u'f'(u)$.

$a)\ \dfrac{1}{x^2+16}$ $b)\ \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ $c)\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

$d)\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $e)\ \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $f)\ \dfrac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}$

$g)\ \dfrac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$ $h)\ \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$ $i)\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. Calculer une primitive des fonctions suivantes en utilisant éventuellement une intégration par partie.

$a)\ x^2e^{-x}$ $b)\ e^{3x}\cos 2x$ $c)\ \arctan x$ $d)\ \arcsin x$

$e)\ \sin x \ln\cos x$ $f)\ x^3e^{-x^2}$ $g)\ x^3\,\mathrm{sh}\,x$ $h)\ x^3\cos(x^2)$

3. Calculer une primitive des fonctions suivantes

$a)\ \dfrac{1}{49-4x^2}$ $b)\ \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$ $c)\ \dfrac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ $d)\ \dfrac{6x-11}{(x-1)^2}$

$e)\ \dfrac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)}$ $f)\ \dfrac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)}$ $g)\ \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ $h)\ \dfrac{x+5}{9x^2+6x+17}$

$i)\ \dfrac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3}$ $j)\ \dfrac{x^3+x-1}{(x+1)^5}$ $k)\ \dfrac{1}{(x^2+4x+5)^2}$ $l)\ \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

4. Calculer une primitive des fonctions suivantes

$a)\ \dfrac{1}{x\sqrt{9-x^4}}$ $b)\ \dfrac{1}{\sqrt{5-e^{2x}}}$ $c)\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $d)\ \dfrac{x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

5. Calculer une primitive des fonctions suivantes

$a)\ \sin^4 x$ $b)\ \tan^3 x + 2\tan^2 x$ $c)\ \dfrac{\sin x}{\cos x(\cos x-1)}$ $d)\ \dfrac{1}{2+\cos x}$

$e)\ \dfrac{1}{4\sin x-3\cos x}$ $f)\ \dfrac{1}{\cos^4 x}$ $g)\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}$ $h)\ \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}}$

Corrigé

Remarque : Dans les calculs et les résultats les constantes seront omises.

1. a) On écrit
$$\frac{1}{x^2+16} = \frac{1}{16}\,\frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\ .$$
Si l'on pose, pour $x \in \mathbf{R}$, $u(x) = x/4$, on a $u'(x) = 1/4$, et donc
$$\frac{1}{x^2+16} = \frac{1}{4}\,\frac{u'(x)}{u(x)^2+1}\ ,$$
on a donc
$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{4}\arctan u(x) = \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4}\ .$$

b) Si l'on pose, pour $x \in \mathbf{R}$, $u(x) = e^x$, on a $u'(x) = e^x$, donc
$$\frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{u'(x)}{u(x)^2+1}\ ,$$
et l'on obtient
$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan u(x) = \arctan e^x\ .$$

c) Si l'on pose, pour $x \in \,]-1,1\,[$, $u(x) = x^2$, on a $u'(x) = 2x$, donc
$$\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\ ,$$
et l'on obtient
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin u(x) = \frac{1}{2}\arcsin x^2\ .$$

d) Si l'on pose, pour $x > 1$, $u(x) = x-1$, on a $u'(x) = 1$, donc
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\ ,$$
et l'on obtient
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x-1}\ .$$

e) Si l'on pose, pour $x > 1$, $u(x) = \sqrt{x}$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc
$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\frac{u'(x)}{u(x)^2+1}\ ,$$

et l'on obtient

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\arctan u(x) = 2\arctan\sqrt{x}\ .$$

f) On écrit

$$\frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} = \frac{1}{4}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{4}\right)^2}}\ .$$

Si l'on pose, pour $x < \ln 4$, $u(x) = e^x/4$, on a $u'(x) = e^x/4$, donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\ ,$$

et l'on obtient

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}\,dx = \arcsin u(x) = \arcsin\frac{e^x}{4}\ .$$

g) Si l'on pose, pour $x \in \mathbf{R}$, $u(x) = \dfrac{\sin x}{3}$, on a $u'(x) = \dfrac{\cos x}{3}$, donc

$$\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\ ,$$

et l'on obtient

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}\,dx = \arcsin u(x) = \arcsin\frac{\sin x}{3}\ .$$

h) Si l'on pose, pour $x < \ln 4$, $u(x) = 4 - e^x$, on a $u'(x) = -e^x$, donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}} = -\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\ ,$$

et l'on obtient

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}\,dx = -2\sqrt{u(x)} = -2\sqrt{4-e^x}\ .$$

i) On écrit

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\ .$$

Si l'on pose, pour $x > 1$ ou $x < -1$, $u(x) = \sqrt{x^2-1}$, on a $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, et $x^2 = u^2(x) + 1$, d'où

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\ ,$$

alors

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \arctan u(x) = \arctan\sqrt{x^2-1}\ .$$

2. On utilise la formule d'intégration par partie

$$\int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx \ .$$

a) En prenant $v(x) = x^2$ et $u'(x) = e^{-x}$, on a $v'(x) = 2x$ et $u(x) = -e^{-x}$, d'où

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\, dx \ .$$

Puis on recommence en prenant $v(x) = x$ et $u'(x) = e^{-x}$, on a $v'(x) = 1$ et $u(x) = -e^{-x}$, d'où

$$\int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x e^{-x} - e^{-x} \ .$$

Finalement

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} \ .$$

b) En prenant $v(x) = e^{3x}$ et $u'(x) = \cos 2x$, on a $v'(x) = 3e^{3x}$ et $u(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, d'où

$$\int e^{3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\, e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x} \sin 2x\, dx \ .$$

Puis on recommence en prenant $v(x) = e^{3x}$ et $u'(x) = \sin 2x$, on trouve $v'(x) = 3e^{3x}$ et $u(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$, d'où

$$\int e^{3x} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\, e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x} \cos 2x\, dx \ .$$

On obtient alors

$$\int e^{3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\, e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4}\, e^{3x} \cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x} \cos 2x\, dx \ ,$$

d'où

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right)\int e^{3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\, e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4}\, e^{3x} \cos 2x \ .$$

On en déduit finalement en multipliant par $4/13$,

$$\int e^{3x} \cos 2x\, dx = \frac{2}{13}\, e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13}\, e^{3x} \cos 2x \ .$$

c) En prenant $v(x) = \arctan x$ et $u'(x) = 1$, on a $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $u(x) = x$, d'où

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \ .$$

Mais

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\, \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \ ,$$

admet comme primitive $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$, d'où

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ .$$

d) En prenant, si $x\in\,]-1,1[\,$, $v(x)=\arcsin x$ et $u'(x)=1$, on a $v'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $u(x)=x$, d'où

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ .$$

Mais

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

admet comme primitive $-\sqrt{1-x^2}$, d'où

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\ .$$

e) En prenant, si $x\in\,]-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi\,[\ \ (k\in\mathbf{Z})$, $v(x)=\ln\cos x$ et $u'(x)=\sin x$, on a $v'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $u(x)=-\cos x$, d'où

$$\int \sin x\ln\cos x\,dx = -\cos x\ln\cos x - \int \sin x\,dx\ .$$

d'où

$$\int \sin x\ln\cos x\,dx = -\cos x\ln\cos x + \cos x\ .$$

f) En prenant $v(x)=x^2$ et $u'(x)=xe^{-x^2}$, on a $v'(x)=2x$ et $u(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$, d'où

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}x^2 + \int xe^{-x^2}\,dx\ ,$$

d'où

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}x^2 - \frac{1}{2}e^{-x^2}\ .$$

g) En prenant $v(x)=x^3$ et $u'(x)=\operatorname{sh}x$, on a $v'(x)=3x^2$ et $u(x)=\operatorname{ch}x$, d'où

$$\int x^3\operatorname{sh}x\,dx = x^3\operatorname{ch}x - 3\int x^2\operatorname{ch}x\,dx\ .$$

Puis on recommence en prenant $v(x)=x^2$ et $u'(x)=\operatorname{ch}x$, on a $v'(x)=2x$ et $u(x)=\operatorname{sh}x$. On a donc

$$\int x^2\operatorname{ch}x\,dx = x^2\operatorname{sh}x - 2\int x\operatorname{sh}x\,dx\ .$$

On recommence encore en prenant $v(x)=x$ et $u'(x)=\operatorname{sh}x$, on a $v'(x)=1$ et $u(x)=\operatorname{ch}x$. On a donc

$$\int x\operatorname{sh}x\,dx = x\operatorname{ch}x - \int \operatorname{ch}x\,dx = x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x\ .$$

En remplaçant, on obtient

$$\int x^3 \operatorname{sh} x\, dx = x^3 \operatorname{ch} x - 3x^2 \operatorname{sh} x + 6x \operatorname{ch} x - 6 \operatorname{sh} x \ .$$

h) En prenant $v(x) = x^2$ et $u'(x) = x \cos x^2$, on a $v'(x) = 2x$ et $u(x) = \dfrac{1}{2} \sin x^2$, d'où

$$\int x^3 \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 - \int x \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 + \frac{1}{2} \cos x^2 \ .$$

3. a) La fraction rationnelle a comme pôles $7/2$ et $-7/2$. On a donc

$$\frac{1}{49 - 4x^2} = \frac{a}{x - \dfrac{7}{2}} + \frac{b}{x + \dfrac{7}{2}} = \frac{2a}{2x - 7} + \frac{2b}{2x + 7} \ .$$

On obtient en réduisant au même dénominateur

$$\frac{1}{49 - 4x^2} = \frac{4(a + b)x + 14(a - b)}{4x^2 - 49} \ ,$$

et en identifiant $a + b = 0$ et $14(a - b) = -1$, d'où $b = -a = 1/28$, et donc

$$\frac{1}{49 - 4x^2} = \frac{1}{28} \left(\frac{1}{x + \dfrac{7}{2}} - \frac{1}{x - \dfrac{7}{2}} \right) \ .$$

On en déduit, si $x \neq \pm 7/2$,

$$\int \frac{dx}{49 - 4x^2} = \frac{1}{28} \ln \left| \frac{x + \dfrac{7}{2}}{x - \dfrac{7}{2}} \right| = \frac{1}{28} \ln \left| \frac{2x + 7}{2x - 7} \right| .$$

b) La fraction rationnelle a comme pôles -1 2 et 3, et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. On a donc

$$\frac{5x - 12}{x(x - 4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 4} \ .$$

On obtient en réduisant au même dénominateur

$$\frac{5x - 12}{x(x - 4)} = \frac{(a + b)x - 4a}{x(x - 4)} \ ,$$

et en identifiant $a + b = 5$ et $-4a = -12$, d'où,

$$\frac{5x - 12}{x(x - 4)} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x - 4} \ .$$

On en déduit, si $x \neq 0$ et $x \neq 4$,

$$\int \frac{5x - 12}{x(x - 4)}\, dx = 3 \ln |x| + 2 \ln |x - 4| \ .$$

c) La fraction rationnelle a comme pôles 0 et 4, et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. On a donc

$$\frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}\ .$$

En multipliant par $x+1$, on obtient

$$\frac{37-11x}{(x-2)(x-3)} = a + (x+1)\left(\frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}\right)\ .$$

Donc en donnant à x la valeur -1, on trouve $a = 4$.
En multipliant par $x-2$, on obtient

$$\frac{37-11x}{(x+1)(x-3)} = b + (x-2)\left(\frac{a}{x+1} + \frac{c}{x-3}\right)\ .$$

Donc en donnant à x la valeur 2, on trouve $b = -5$.
En multipliant par $x-3$, on obtient

$$\frac{37-11x}{(x+1)(x-2)} = c + (x-3)\left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}\right)\ .$$

Donc en donnant à x la valeur 3, on trouve $c = 1$. Finalement

$$\frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x+1} - \frac{5}{x-2} + \frac{1}{x-3}\ .$$

On en déduit, si $x \neq -1,\ 2,\ 3$

$$\int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx = 4\ln|x+1| - 5\ln|x-2| + \ln|x-3|\ .$$

d) La fraction a un unique pôle double 1 et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. On a donc

$$\frac{6x-11}{(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1}\ .$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{6x-11}{(x-1)^2} = \frac{bx+a-b}{(x-1)^2}\ ,$$

et en identifiant $b = 6$ et $a - b = -11$, d'où,

$$\frac{6x-11}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1}\ .$$

On en déduit, si $x \neq 1$,

$$\int \frac{6x-11}{(x-1)^2}\,dx = \frac{5}{x-1} + 6\ln|x-1|\ .$$

e) La fraction a un pôle double 0, et un pôle simple 5/3 et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. On a donc

$$\frac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)} = \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x-5/3}\ .$$

En multipliant par x^2, on obtient

$$\frac{-19x^2+50x-25}{3x-5} = b + cx + \frac{dx^2}{x-5/3} \ .$$

Donc en donnant à x la valeur 0, on trouve $b=5$.
En multipliant par $3x-5$, on obtient

$$\frac{-19x^2+50x-25}{x^2} = 3d + (3x-5)\left(\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}\right) \ .$$

Donc en donnant à x la valeur $5/3$, on trouve $b=2/3$. On a donc

$$\frac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)} = \frac{5}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-5/3} \ .$$

Il reste à calculer le coefficient c. En donnant à x la valeur 1, on obtient $-3 = 5 + c - 1$, d'où $c = -7$. Finalement

$$\frac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)} = \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-5/3} \ .$$

On en déduit, si $x \neq 0$ et $x \neq 5/3$

$$\int \frac{-19x^2+50x-25}{x^2}\,dx = -\frac{5}{x} - 7\ln|x| + \frac{2}{3}\ln\left|x-\frac{5}{3}\right| \ ,$$

ou encore (à une constante près)

$$\int \frac{-19x^2+50x-25}{x^2}\,dx = -\frac{5}{x} - 7\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|3x-5| \ .$$

f) La fraction a deux pôles simples -1 et 5. De plus le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur. Donc

$$\frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-5} \ .$$

Le nombre a est le rapport des termes de plus haut degré. Donc $a=2$.
En multipliant par $x+1$, on obtient

$$\frac{2x^2-15x+33}{x-5} = b + (x+1)\left(a + \frac{c}{x-5}\right) \ .$$

Donc en donnant à x la valeur -1, on trouve $b = -25/3$.
En multipliant par $x-5$, on obtient

$$\frac{2x^2-15x+33}{x+1} = c + (x-5)\left(a + \frac{b}{x+1}\right) \ .$$

Donc en donnant à x la valeur 5, on trouve $c = 4/3$. Finalement

$$\frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)} = 2 - \frac{25}{3}\,\frac{1}{x+1} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{x-5} \ .$$

On en déduit, si $x \neq -1$ et $x \neq 5$

$$\int \frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)}\,dx = 2x - \frac{25}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-5| \ .$$

g) La fraction n'a pas de pôle réel, car le trinôme x^2+x+1 a pour discriminant $\Delta=-3$. On fait apparaître la dérivée du dénominateur

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\ .$$

En utilisant le fait qu'une primitive de $1/(ax^2+bx+c)$ est

$$\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\ ,$$

on obtient

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\ .$$

h) La fraction n'a pas de pôle réel, car le trinôme $9x^2+6x+17$ a pour discriminant $\Delta=-24^2$. On fait apparaître la dérivée du dénominateur

$$\frac{x+5}{9x^2+6x+17}=\frac{1}{18}\,\frac{18x+6}{9x^2+6x+17}+\frac{14}{3}\,\frac{1}{9x^2+6x+17}\ .$$

En utilisant le fait qu'une primitive de $1/(ax^2+bx+c)$ est

$$\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\ ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{x+5}{9x^2+6x+17}\,dx &= \frac{1}{18}\ln(9x^2+6x+17)+\frac{14}{3}\,\frac{2}{24}\arctan\frac{18x+6}{24}\\ &= \frac{1}{18}\ln(9x^2+6x+17)+\frac{7}{18}\arctan\frac{3x+1}{4}\ .\end{aligned}$$

i) La fraction a deux pôles simples 1 et -3. De plus le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur, le degré de la fraction vaut 1. Donc

$$\frac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3}=ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+3}\ .$$

En effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, on trouve :

$$\begin{array}{rrrr|lll} x^3 & +3x^2 & & +1 & x^2 & +2x & -3\\ \cline{5-7} -x^3 & -2x^2 & +3x & & x & +1 & \\ \cline{1-3} & x^2 & +3x & +1 & & & \\ & -x^2 & -2x & +3 & & & \\ \cline{2-4} & & x & +4 & & & \end{array}$$

On a donc

$$\frac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3}=x+1+\frac{x+4}{x^2+2x-3}\ ,$$

et

$$\frac{x+4}{x^2+2x-3}=\frac{x+4}{(x-1)(x+3)}=\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+3}\ .$$

En multipliant par $x-1$, on obtient

$$\frac{x+4}{x+3} = c + \frac{d(x-1)}{x+3} \ .$$

Donc en donnant à x la valeur 1, on trouve $c = 5/4$.
En multipliant par $x+3$, on obtient

$$\frac{x+4}{x-1} = d + \frac{c(x+3)}{x-1} \ .$$

Donc en donnant à x la valeur -3, on trouve $d = -1/4$.
Finalement

$$\frac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3} = x+1+\frac{5}{4}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+3} \ .$$

On en déduit, si $x \neq 1$ et $x \neq -3$

$$\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| \ .$$

j) La fraction a un pôle unique -1. Posons $X = x+1$. On a alors

$$\frac{x^3+x-1}{(x+1)^5} = \frac{(X-1)^3+X-2}{X^5} = \frac{X^3-3X^2+4X-3}{X^5} \ .$$

On en déduit donc

$$\frac{x^3+x-1}{(x+1)^5} = -\frac{3}{X^5} + \frac{4}{X^4} - \frac{3}{X^3} + \frac{1}{X^2} = -\frac{3}{(x+1)^5} + \frac{4}{(x+1)^4} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2} \ .$$

On obtient alors

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x+1)^5}\,dx = \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x+1)^4} - \frac{4}{3}\,\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \ .$$

k) La fraction n'a pas de pôle réel, car le discriminant du trinôme vaut $\Delta = -4$. On intègre par parties $\dfrac{1}{x^2+4x+5}$. En prenant $v(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ et $u'(x) = 1$, on a $v'(x) = -\dfrac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}$ et $u(x) = x$, d'où

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{x}{x^2+4x+5} + \int \frac{2x^2+4x}{(x^2+4x+5)^2}\,,dx \ .$$

Mais

$$2x^2+4x = 2(x^2+2x) = 2(x^2+4x+5) - 4x - 10 \ ,$$

donc

$$\frac{2x^2+4x}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{2}{x^2+4x+5} - \frac{4x+10}{(x^2+4x+5)^2} \ .$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{x}{x^2+4x+5} + 2\int \frac{dx}{x^2+4x+5} - \int \frac{4x+10}{(x^2+4x+5)^2}\,dx \ .$$

Mais en faisant apparaître la dérivée du polynôme x^2+4x+5, on écrit

$$\frac{4x+10}{(x^2+4x+5)^2} = 2\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2} + \frac{2}{(x^2+4x+5)^2} \ .$$

Donc

$$\int \frac{4x+10}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+4x+5} + 2\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} \ .$$

On obtient donc

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{x}{x^2+4x+5} + 2\int \frac{dx}{x^2+4x+5} + \frac{2}{x^2+4x+5} - 2\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} \ ,$$

d'où

$$2\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \int \frac{dx}{x^2+4x+5} \ .$$

Il reste à calculer la dernière primitive qui vaut $\arctan(x+2)$, et l'on obtient

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2}\arctan(x+2) \ .$$

l) Cherchons une primitive de $1/(x^2+1)^n$ en intégrant par partie. En prenant $v(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$ et $u'(x) = 1$, on a $v'(x) = -\dfrac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}}$ et $u(x) = x$, d'où

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \ .$$

Mais

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \ .$$

On en déduit

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\right) \ ,$$

d'où

$$(1-2n)\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} - 2n\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \ ,$$

et finalement

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \ .$$

Pour $n=2$, on trouve

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \ .$$

Pour $n=1$, on trouve

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x \ .$$

Finalement

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\arctan x \ .$$

4. a) On écrit
$$\frac{1}{x\sqrt{9-x^4}} = \frac{x^3}{x^4\sqrt{9-x^4}}\ .$$
Si l'on pose, pour $-3 < x < 3$, $u(x) = \sqrt{9-x^4}$, on a $u'(x) = \dfrac{-2x^3}{\sqrt{9-x^4}}$, et $x^4 = 9 - u^2(x)$, d'où
$$\frac{1}{x\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)^2-9}\ .$$
En décomposant en éléments simples, on obtient facilement
$$\frac{1}{X^2-9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{X-3} - \frac{1}{X+3}\right)\ ,$$
d'où
$$\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^4}}\,dx = \frac{1}{12}(\ln|3-u(x)| - \ln|3+u(x)| = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3-u(x)}{3+u(x)}\right|\ .$$
On peut transformer cette expression en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur
$$\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^4}}\,dx = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(3-u(x))^2}{9-u(x)^2}\right|\ ,$$
et en remplaçant $u(x)$ par sa valeur :
$$\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^4}}\,dx = \frac{1}{12}\ln\frac{(3-\sqrt{9-x^4})^2}{x^4} = \frac{1}{6}\ln(3-\sqrt{9-x^4}) - \frac{1}{3}\ln|x|\ .$$
b) On écrit, si $x < (\ln 5)/2$,
$$\frac{1}{\sqrt{5-e^{2x}}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{5e^{-2x}-1}}\ .$$
Si l'on pose $u(x) = \sqrt{5}e^{-x}$, on a $u'(x) = -\sqrt{5}e^{-x}$, d'où
$$\frac{1}{\sqrt{5-e^{2x}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)^2-1}}\ ,$$
donc
$$\int \frac{1}{\sqrt{5-e^{2x}}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\ln|u(x)+\sqrt{u(x)^2-1}| = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\ln|\sqrt{5}e^{-x}+\sqrt{5e^{-2x}-1}|\ .$$
en mettant e^{-x} en facteur, on peut aussi écrire
$$\int \frac{1}{\sqrt{5-e^{2x}}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\ln e^{-x}|\sqrt{5}+\sqrt{5-e^{2x}}| = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(x - \ln|\sqrt{5}+\sqrt{5-e^{2x}}|)\ .$$
c) On met x^2+x+1 sous la forme canonique
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\ ,$$
on peut alors écrire
$$x^2+x+1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]\ .$$

En posant
$$u(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \ ,$$
on a $u'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, d'où
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u(x)^2}} \ .$$
On a donc
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \ln(u(x) + \sqrt{u(x)^2+1}) \ .$$
En remplaçant $u(x)$ par sa valeur, on trouve
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right) \ ,$$
en simplifiant, il vient (à une constante près)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) \ .$$
d) On met $-x^2+2x+3$ sous la forme canonique
$$-x^2+2x+3 = 4-(x-1)^2 \ .$$
on peut alors écrire
$$-x^2+2x+3 = 4\left(1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right) \ .$$
En posant
$$u(x) = \frac{x-1}{2},$$
on a $u'(x) = \dfrac{1}{2}$, et $x = 2u(x)+1$, d'où, si $x \in]-1,3[$,
$$\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{2u(x)+1}{\sqrt{1-u(x)^2}}\,u'(x) = \frac{2u(x)u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} + \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} \ .$$
Alors
$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = -2\sqrt{1-u(x)^2} + \arcsin u(x) \ ,$$
En remplaçant $u(x)$ par sa valeur, on trouve
$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = -2\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + \arcsin\frac{x-1}{2} = -\sqrt{-x^2+2x+3} + \arcsin\frac{x-1}{2} \ .$$

5. a) On linéarise l'expression
$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3) \ .
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatemment

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 4x}{4} - 2\sin 2x + 3x\right)\ .$$

b) On se place sur un intervalle ne contenant pas $\pi/2 + k\pi$ (k entier). En effectuant la division euclidienne de $X^3 + 2X^2$ par $X^2 + 1$. On obtient

$$X^3 + 2X^2 = (X^2+1)(X+2) - X - 2\ .$$

En remplaçant X par $\tan x$, on obtient

$$\tan^3 x + 2\tan^2 x = (\tan^2 x + 1)(\tan x + 2) - \frac{\sin x}{\cos x} - 2\ .$$

Or en posant $u(x) = \tan x$, on a $u'(x) = 1 + \tan^2 x$, donc

$$\int (\tan^2 x + 1)(\tan x + 2)\,dx = \int (u(x) + 2)u'(x)\,dx = \frac{u(x)^2}{2} + 2u(x)\ ,$$

donc

$$\int (\tan^3 x + 2\tan^2 x)\,dx = \frac{\tan^2 x}{2} + 2\tan x + \ln|\cos| - 2x\ .$$

c) On se place sur un intervalle ne contenant ni $\pi/2 + k\pi$ ni $2k'\pi$ (k et k' entiers). Si l'on pose $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$, et

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(\cos x - 1)}\,dx = -\int \frac{u'(x)}{u(x)(u(x)-1)}\,dx\ .$$

En décomposant en éléments simples, on obtient facilement

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\ ,$$

donc

$$\frac{\sin x}{\cos x(\cos x - 1)} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{u'(x)}{u(x)-1}\ .$$

Finalement

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(\cos x - 1)}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx - \int \frac{u'(x)}{u(x)-1}\,dx = \ln|\cos x| - \ln(1 - \cos x)\ .$$

d) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2 + \cos x}$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Cependant pour calculer sa primitive, on va l'exprimer en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$, et introduire des discontinuités en $k\pi$ pour k entier. On a

$$\frac{1}{2 + \cos x} = \frac{1}{2 + \dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}}\ .$$

Donc en simplifiant

$$\frac{1}{2 + \cos x} = \frac{1 + \tan^2\frac{x}{2}}{3 + \tan^2\frac{x}{2}}\ .$$

Si l'on pose $u(x) = \tan\dfrac{x}{2}$, on a

$$u'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\ ,$$

et
$$\frac{1}{2+\cos x} = 2\frac{u'(x)}{u(x)^2+3} \ .$$
Alors
$$\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u(x)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \ .$$
Cette primitive est obtenue sur des intervalles de la forme $\left]\,(2k-1)\pi, (2k+1)\pi\,\right[$, ($k$ entier), et non pas sur $\mathbf{R}$.

e) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4\sin x - 3\cos x}$ est définie si $x \neq \arctan(3/4) + k\pi$ (k entier). Pour calculer sa primitive, on va l'exprimer en fonction de $\tan \dfrac{x}{2}$, et introduire d'autres discontinuités en $k'\pi$ pour k' entier. On a
$$\frac{1}{4\sin x - 3\cos x} = \frac{1}{\dfrac{8\tan\frac{x}{2}}{1+\ \tan^2\frac{x}{2}} - 3\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3\tan^2\frac{x}{2} + 8\tan\frac{x}{2} - 3} \ .$$
Si l'on pose $u(x) = \tan \dfrac{x}{2}$, on a
$$u'(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \ ,$$
et
$$\frac{1}{4\sin x - 3\cos x} = \frac{2u'(x)}{3u(x)^2 + 8u(x) - 3} \ .$$
On décompose facilement en éléments simples la fraction $\dfrac{2}{3X^2+8X-3}$ qui a comme pôles réels -3 et $1/3$. On a
$$\frac{2}{3X^2+8X-3} = \frac{\dfrac{2}{3}}{X^2 + \dfrac{8}{3}X - 1} = \frac{a}{X+3} + \frac{b}{X-1/3} \ .$$
Par exemple, en réduisant au même dénominateur et en identifiant, on obtient
$$a+b=0 \quad \text{et} \quad 3b - a/3 = 2/3 \ ,$$
d'où $a = -b = -1/5$. Donc
$$\frac{1}{4\sin x - 3\cos x} = -\frac{1}{5}\,\frac{u'(x)}{u(x)+3} + \frac{1}{5}\,\frac{u'(x)}{u(x)-1/3} \ .$$
Finalement
$$\int \frac{1}{4\sin x - 3\cos x}\, dx = \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x}{2} + 3\right| \ .$$
f) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$ est définie si $x \neq \pi/2 + k\pi$ (k entier). On peut l'exprimer en fonction de $\tan x$:
$$\frac{1}{\cos^4 x} = (1+\tan^2 x)^2 \ ,$$
donc si l'on pose $u(x) = \tan x$, on a $u'(x) = 1 + \tan^2 x$, et
$$\frac{1}{\cos^4 x} = u'(x)(1+u(x)^2) \ .$$

Alors

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = u(x) + \frac{u(x)^3}{3} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\ .$$

g) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}$ est définie si $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$ (k entier).
Si l'on pose $u(x) = 1 + \sin x$, on a $u'(x) = \cos x$, et $\sin x = u(x) - 1$, d'où

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} = 2\frac{(u(x)-1)u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\ ,$$

donc

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}} = 2\sqrt{u(x)}u'(x) - 2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\ .$$

Alors

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \frac{4}{3}u(x)^{3/2} - 4\sqrt{u(x)} = \frac{4}{3}\sqrt{u(x)}(u(x)-3)\ ,$$

et finalement

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{1+\sin x}(\sin x - 2)\ .$$

h) Même méthode que dans l'exercice précédent

$$\frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{(1-(u(x)-1)^2)u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\ .$$

En développant et en simplifiant

$$\frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{(2u(x)-u(x)^2)u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = 2\sqrt{u(x)}u'(x) - u(x)^{3/2}u'(x)\ .$$

Alors

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \frac{4}{3}u(x)^{3/2} - \frac{2}{5}u(x)^{5/2} = \frac{4}{3}(1+\sin x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1+\sin x)^{5/2}\ .$$