TD N°5

Fonctions réelles : Dérivabilité-Développement limité

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, on note $\widetilde{f}$ la fonction prolongée. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que $(\widetilde{f})'$ n'est pas continue en 0.

Exercice 2 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{si} \quad x \geq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^3 + bx + 2 \ \text{ sinon,}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$

   a. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

   b. Etudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.

   c. Déduire que
$$\forall \alpha \in [0, 1], \ f(\alpha) \geq 0 \quad (1).$$

L'inégalité (1) s'exprime en disant que la fonction logarithme est une fonction concave.

Exercice 4 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Justifier pourquoi f est dérivable sur D_f et calculer la dérivée f' de f.

3. Montrer que f' est décroissante sur D_f.

4. Prouver que pour tout $x \in D_f$, on a
$$f'(x + 1) \leq \ln(\ln(x + 1)) - \ln(\ln x) \leq f'(x).$$

   On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels dont le terme général u_n est défini par :
$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n}.$$

5. Vérifier que $u_n = \sum_{k=2}^{n} f'(k)$ et montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$\ln(\ln(n + 1)) - \ln(\ln 2) \leq u_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

6. Déduire la $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5

1. Montrer que
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln n$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 6 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ telle que $f'(1) = -f(0)$ et $f(1) = 0$. On définit une fonction g sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-1} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ -f(0) & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un nombre $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-1}$.

Exercice 7

1. Montrer que
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})$.

2. Montrer que, pour tous réels x et y de l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$|\sin x - \sin y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|.$$

3. Montrer que, pour tous réels x et y inférieurs à 1 on a
$$|e^x - e^y| \leq e|x-y|.$$

Exercice 8

1. Calculer le développement limité à l'orde 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$.

2. Soit f définie sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x + \dfrac{x^3}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

   a. Montrer, en appliquant la définition, que f possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

   b. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. f' est-elle continue en 0?

   c. f est-elle deux fois dérivable en 0? si oui calculer $f''(0)$.

Exercice 9 Montrer que f définie par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ n'est pas deux fois dérivable bien qu'elle admette un développement limité d'ordre 2.

Exercice 10

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{\arctan x + 2\ln(1+x)}{\sin x}.$$
En déduire que f se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que son prolongement est dérivable en 0, et faire l'étude locale de la fonction au voisinage de zéro. (Equation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente.)

Exercice 11

1. Effectuer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de
$$f(x) = ln\left(\frac{e^{x+cosx} - e}{x + x^2}\right).$$
En déduire que f se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que son prolongement est dérivable en zéro, et faire l'étude locale de la fonction au voisinage de zéro. (Equation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente.)

Exercice 12 Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction f définie par
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Exercice 13 Calculer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction f définie par
$$\frac{e^{e^x} - e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)}.$$